

## Geometria 3 – Topologia

### Foglio di esercizi 9

Giustificare adeguatamente le risposte.

- ~~1)~~ Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  biiettiva e aperta. Dimostrare che  $f$  è un omeomorfismo.
- ~~2)~~ Siano  $U, V \subset \mathbb{R}$  con  $U$  aperto e sia  $f: U \rightarrow V$  continua e biiettiva. Dimostrare che  $V$  è aperto e  $f$  è un omeomorfismo.
- ~~3)~~ Siano  $A, B \subset \mathbb{R}$  chiusi e  $f: A \rightarrow B$  continua, biiettiva e monotona. Dimostrare che  $\exists \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  omeomorfismo che estende  $f$ .
- ~~4)~~ Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  finito e  $n \geq 2$ . Dimostrare che  $\mathbb{R}^n - A$  è connesso per archi.
- ~~5)~~ Dimostrare che  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  è totalmente sconnesso (le componenti connesse sono i punti).
- ~~6)~~ Dimostrare che la retta con due origini è connessa per archi.
- ~~7)~~ Dimostrare che  $X_{\text{cof}}$  connesso  $\Leftrightarrow X_{\text{cof}}$  ha un punto oppure infiniti.
- ~~8)~~ Dimostrare che  $X, Y$  connessi per archi  $\Rightarrow X \times Y$  connesso per archi.
- ~~9)~~ Dimostrare che  $T^n$  è connesso per archi.
- ~~10)~~ Dimostrare che  $\text{SO}(n)$  è connesso per archi per ogni  $n \geq 1$ .
- ~~11)~~ Dimostrare che  $\text{O}(n)$  ha due componenti connesse per archi, di cui una è  $\text{SO}(n)$ , e che queste sono tra loro omeomorfe.
- ~~12)~~ Quali sono le componenti connesse per archi di  $\mathbb{R}^n - S^{n-1}$ ? E quelle di  $\mathbb{R}^n - B^n$ ?
- ~~13)~~ Dimostrare che la composizione di due equivalenze omotopiche è un'equivalenza omotopica.
- ~~14)~~ Dimostrare che uno spazio  $X$  è contraibile se e solo se ogni applicazione continua  $f: X \rightarrow Y$  verso uno spazio arbitrario  $Y$  è omotopa a costante.
- ~~15)~~ Dimostrare che uno spazio  $X$  è contraibile se e solo se ogni applicazione continua  $f: Y \rightarrow X$  da uno spazio arbitrario  $Y$  è omotopa a costante.

### Esercizio 9:

1)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  biettiva e aperta  $\Rightarrow f$  omeomorfismo.

#### Risposta:

$f$  biettiva quindi rimane da mostrare che  $f$  continua e  $f^{-1}$  è continua.

Considero quindi  $A$  aperto in  $\mathbb{R}$ . Allora ho che  $f(A) \subset \mathbb{R}$  è aperto in  $\mathbb{R}$ . Applicando allora l'inversa  $f^{-1}$  di  $f$  (che esiste perché  $f$  biettiva) ho che:

$f^{-1}(f(A)) = A$  aperto in  $\mathbb{R} \Rightarrow f$  continua sugli aperti del tipo  $f(A)$ . Siccome  $f$  biettiva, ho che tutti gli aperti del codominio risultano essere del tipo  $f(\dots)$ . (\*)

Considerando ora  $A'$  aperto qualunque in  $\mathbb{R}$   $f^{-1}(A')$  è aperto perché  $f$  continua. Allora

$f(f^{-1}(A')) = A'$  aperto  $\Rightarrow f^{-1}$  continua sugli aperti del tipo  $f^{-1}(A')$ . Ma siccome  $f$  biettiva e  $f$  continua allora ogni aperto del dominio può essere espresso come  $f^{-1}(\dots)$ .

(\*) considero  $V \subset \mathbb{R}$  codominio aperto. Siccome  $f$  biettiva ho che  $\forall V \subset \mathbb{R}, \exists! U \subset \mathbb{R} \text{ t.c. } V = f(U) \Rightarrow$  ogni aperto del codominio è del tipo  $f(U)$ .

lo stesso vale per  $f^{-1}$ .

□

2) Siano  $U, V \subset \mathbb{R}^n$ , con  $U$  aperto,  $f: U \rightarrow V$  continua e biettiva.  
Dimostrare che  $V$  è aperto e che  $f$  è un omeomorfismo.

Risposta:

$f$  biettiva ed  $f$  è continua  $\Rightarrow$  esiste un' inversa  $f^{-1}$  e  
posso scrivere  $U = f^{-1}(\underbrace{f(U)}_V)$  e

$$V = f(U) \quad U = f^{-1}(V)$$

suppongo p.a.  $V$  non ap.  $\Rightarrow \exists W \subset V$  aperto tale che  $U = f^{-1}(W)$

$$\Rightarrow f(U) = W \Rightarrow V \neq f(U) \quad \Rightarrow V \text{ aperto}$$

$f$  omeomorfismo  $\rightarrow$  voglio usare (\*)  $\Rightarrow$  basta dimostrare che  
 $f$  è aperta. Considero quindi un aperto qualsiasi del dominio

$W = W' \cap U$ . Allora:

$$f(U \cap W') = f(f^{-1}(V \cap Z)) = f(f^{-1}(V)) = V \text{ aperto}$$

$\uparrow$   
 $f$  biettiva e continua

$$= V \cap Z$$

$$f(f^{-1}(W' \cap V)) =$$

$$= f(f^{-1}(W') \cap f^{-1}(V)) =$$

$$= f(f^{-1}(W') \cap f^{-1}(V))$$

$$= W' \cap V$$

□

(3) Siano  $A, B \subset \mathbb{R}$  chiusi e  $f: A \rightarrow B$  continua, biettiva e monotona, allora  $\exists \tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  che estende  $f$ .

risposta:

devo quindi dimostrare che  $\tilde{f}|_A = f$ ,  $\tilde{f}$  omeomorfo.

$f$  monotona e biettiva  $\Rightarrow f$  strettamente crescente o strettamente decrescente. Considero quindi il caso crescente ossia

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

$A$  chiuso  $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ , con  $(a_i, b_i)$  componente connessa di  $\mathbb{R} \setminus A$  e  $a_i, b_i \in A \cup \{\pm \infty\}$ .

Siccome  $f$  continua e strett. crescente su  $A \Rightarrow$  posso estenderla per continuità ai punti  $a_i, b_i \quad \forall i \in I$ :

$$f(a_i) = \lim_{x \rightarrow a_i^+} f(x) \quad \text{e} \quad f(b_i) = \lim_{x \rightarrow b_i^-} f(x) \quad (\text{sono ben definiti}).$$

$$f \text{ crescente} \Rightarrow f(a_i) < f(b_i).$$

nel caso in cui  $a_i$  o  $b_i$  siano  $\pm \infty$ :

$$\text{definisco} \quad f(-\infty) := \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty \\ x \in A}} f(x), \quad f(+\infty) := \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x \in A}} f(x)$$

i limiti esistono perché  $A$  chiuso (contiene i suoi limiti),

$f$  monotona e  $B$  è chiuso (stanno in  $B$ ).

Siccome  $B$  risulta essere chiuso, allora anche per

$$\mathbb{R} \setminus B = \bigcup_i (c_i, d_i), \text{ con } c_i, d_i \in B \cup \{\pm \infty\}.$$

$$f(A) = B \Rightarrow \mathbb{R} \setminus B = \mathbb{R} \setminus f(A) \Rightarrow c_i, d_i \in f(A), \quad \forall i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists a_i, b_i \in A$  t.c.  $f(a_i) = c_i, f(b_i) = d_i$ .

Costruisco quindi l'estensione  $\tilde{f}$ :

su  $A$ :  $\tilde{f}(x) = f(x)$

su  $(a_i, b_i)$ :  $\tilde{f}(x) = c_i + (d_i - c_i) \frac{x - a_i}{b_i - a_i}$  (retta)

Allora  $\tilde{f}$  è continua.

$\tilde{f}$  monotona poiché  $f$  monotona su  $A$  e su  $(a_i, b_i)$  ho riempito con una monotona.

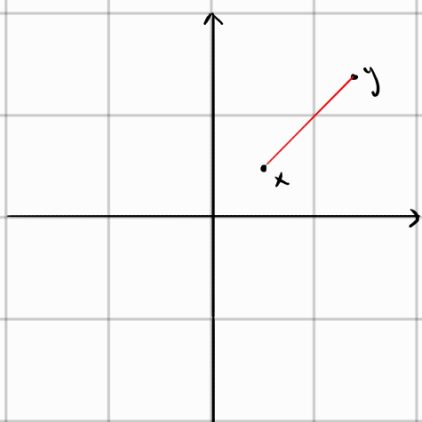
$\tilde{f}$  biettiva: • monotonia stretta mi dà la iniettività

•  $\tilde{f}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

4) Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  finito e  $n \geq 2$ . Dimostrare che  $\mathbb{R}^n \setminus A$  è connesso per archi.

Risposta:

Sia  $A \subset \mathbb{R}^n$  finito. Considero  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus A$ .



$\forall a \in A$ , sia  $N_a :=$  retta che passa per  $x$  e  $a$ .

$L_a :=$  retta che passa per  $y$  e  $a$ .

Si come la cardinalità di  $A$  è finita

allora ho un numero finito di rette,

quindi  $\mathbb{R}^n \neq \bigcup_{a \in A} L_a \cup N_a$  perché  $\mathbb{R}^n$

non è unione finita di rette.

o p.a.  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{a \in A} L_a \cup N_a$ , se interseco  $S'$  a  $a$  e  $a$  su

$$S' = \left( \bigcup_{a \in A} L_a \cup N_a \right) \cap S' \Rightarrow S' \text{ finito}$$

è finito perché ogni retta interseca la sfera in al massimo

2 punti

Sia ora  $p \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{a \in A} (N_a \cup L_a)$ .

Siano  $N$  la retta che passa per  $p$  ed  $x$  e  $L$  retta che passa per

$p$  ed  $y$ . Allora  $N \cup L \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ .

Infatti, se p.a.  $\exists a \in A$  t.c.  $a \in N \rightarrow N$  passa per  $x$  e  $a \rightarrow$

$\rightarrow N = N_a$  ma  $p \notin N_a$  e  $p \in N$  (analogamente per

$a \in L$ ).

Ho trovato quindi il cammino che voglio seguire:

considero:

$$\alpha(t) = (1-t)x + tp, \quad \forall t \in [0,1]$$

$$\beta(t) = (1-t)p + ty, \quad \forall t \in [0,1]$$



$\alpha$  continuo fra  $p$  ed  $x$  tutto contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus A$

$\beta$  continuo fra  $p$  ed  $y$  tutto contenuto in  $\mathbb{R}^n \setminus A$

$\Downarrow$

definisco

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & , \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & , \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

congiunge  $x$  e  $y$  passando per  $p$ .

(es. controllo continuità).

□

(5) Dimostrare che  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  è totalmente connesso.

risposta:

La topologia che  $\mathbb{Q}$  eredita da  $\mathbb{R}$  (ossia come sottoinsieme di  $\mathbb{R}$ ) è la seguente:

$$U \subseteq \mathbb{Q} \text{ aperto in } \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists V \text{ aperto in } \mathbb{R} \text{ t.c. } U = V \cap \mathbb{Q}.$$

Sia  $A \subset \mathbb{Q}$ ,  $A$  connesso in  $\mathbb{Q}$ .  $A$  connesso in  $\mathbb{Q} \Rightarrow$

$A$  connesso in  $\mathbb{R}$  ( $A \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \Rightarrow$  topologia indotta da

$\mathbb{Q}$  su  $A$  è uguale alla topologia indotta da  $\mathbb{R}$  su  $\mathbb{Q}$ )

$$\Rightarrow A = \emptyset \quad \text{o} \quad A = \gamma \times \{ \} \quad \text{o} \quad A = I \quad \text{con } I \text{ intervallo ma}$$

siccome  $\forall$  coppia di razionali posso trovare un irrazionale,

$A$  non può essere un intervallo  $\Rightarrow \mathbb{Q}$  totalmente connesso.

□

(6) Dimostrare che la retta con due origini è connessa per archi.

risposta:

$$\text{retta con due origini è lo spazio } X = \frac{\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}}{\sim} = \frac{\mathbb{R} \times \{0,1\}}{\sim}$$

dove  $\sim$  è la relazione di equivalenza tale che  $(x,0) \sim (x,1)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \neq 0\}$$

:

allora ho che i problemi possono essermi dati dai seguenti

porti:

fino  $z_1 = [(x, 0)]$ ,  $x > 0$ .

1° caso:  $z_2 = (0, 1)$ .

Voglio costruire un cammino che

mi porti in maniera continua da  $z_1$  a  $z_2$ .

Considero  $\alpha(t) = [(tx, 1)]$ ,  $t \in [0, 1]$ .

Ho che  $\alpha(0) = (0, 1)$ ,  $\alpha(1) = [(x, 1)] = [(x, 0)]$

$\alpha$  è continuo perché  $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ , dove

$$\begin{array}{ccc} \pi: \mathbb{R} \times \{0, 1\} & \longrightarrow & X \\ z & \longmapsto & [z] \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}: [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \times \{0, 1\} \\ t & \longmapsto & (tx, 1) \end{array}$$

continuo

2° caso:  $z_2 = [(y, 0)]$ ,  $y < 0$ .

Considero quindi  $\alpha(t) = [((1-t)y + tx, 1)]$ .

Ho che  $\alpha(0) = [(y, 1)] = [(y, 0)]$

$\alpha(1) = [(x, 1)] = [(x, 0)]$

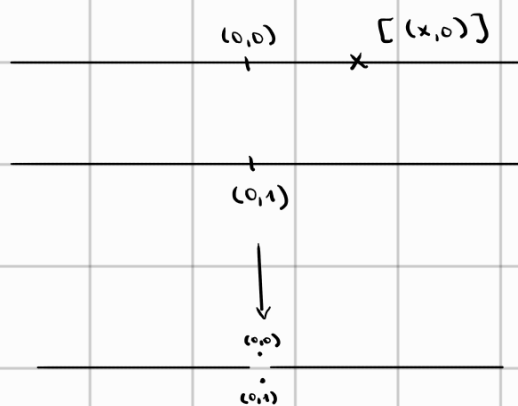
continuo per lo stesso motivo di prima.

3° caso:  $z_2 = (0, 0)$  (sia che  $x > 0$  che  $y < 0$ )

prendo quindi  $\alpha(t) = [(tx, 0)]$ .

$\alpha(0) = (0, 0)$

$\alpha(1) = [(x, 0)]$



Posso fare lo stesso ragionamento fissando un punto sulla seconda retta.

Rimane da vedere che le due origini sono collegate fra loro.

$$z_1 = (0,0), \quad z_2 = (0,1)$$

Considero quindi il seguente cammino:

$$\alpha(t) = \begin{cases} [(t, 0)] & , 0 \leq t \leq 1/2 \\ [(1-t, 1)] & , 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

allora:

$$\alpha(0) = (0,0), \quad \alpha(1) = (0,1) \quad \text{e} \quad \alpha(1/2) = [(1/2, 0)] = [(1/2, 1)] \quad \checkmark$$

□

(7) Dimostrare che  $X_{\text{cf}}$  connesso  $\Leftrightarrow X_{\text{cf}}$  ha un punto oppure infiniti.

Risposta:

$(X, \tau_{\text{cf}})$  è dotato della topologia in cui i chiusi sono  $X, \emptyset$  e gli insiemi finiti.

( $\Leftarrow$ ) se  $\#X = 1 \Rightarrow X = \{x\} \Rightarrow$  gli unici insiemi aperti e chiusi sono  $X$  e  $\emptyset \Rightarrow$  è connesso.

se  $\#X = +\infty$ , sia  $A \neq X, A \neq \emptyset$  aperto e chiuso.

$A$  chiuso  $\Rightarrow A$  ha cardinalità finita.

$A$  aperto  $\Rightarrow \exists F \subset X$  insieme finito tale che  $A = X \setminus F \Rightarrow$   
 $\Rightarrow X = A \cup F$  unione di due insiemi finiti  $\Rightarrow X$  finito  $\downarrow$

( $\Rightarrow$ ) Suppongo che  $\#X \geq 2$ ,  $X$  connesso. Voglio concludere che quindi  $\#X = +\infty$ .

p.a.  $\#X < +\infty$ .  $X$  topologia cofinita ed è finito  $\Rightarrow X$  è dotato della topologia discreta  $\Rightarrow$  i punti sono aperti e chiusi e non sono banali  $\downarrow$

□

(8) Dimostrare che  $X, Y$  c.p.a.  $\Rightarrow X \times Y$  c.p.a.

risposta:

prendo una coppia di punti nel prodotto  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ ,

$x_1, x_2 \in X$  e  $y_1, y_2 \in Y$ .

$X$  c.p.a.  $\Rightarrow \exists \alpha: [0, 1] \longrightarrow X$  tale che  $\alpha(0) = x_1, \alpha(1) = x_2$

continuo ( $\alpha(t) = tx_2 + (1-t)x_1$ )

$Y$  c.p.a.  $\Rightarrow \exists \beta: [0, 1] \longrightarrow Y$  tale che  $\beta(0) = y_1, \beta(1) = y_2$

continuo ( $\beta(s) = sy_2 + (1-s)y_1$ )

Definisco quindi  $\gamma: [0, 1] \longrightarrow X \times Y$

$\gamma \longmapsto (\alpha(t), \beta(t))$

$\gamma$  continuo perché le componenti sono continue e  $\gamma(0) = (x_1, y_1)$ ,

$$\gamma(1) = (x_2, y_2)$$

□

(9) Dimostrare che il toro  $n$ -dimensionale è c.p.a.

risposta:

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-volte}}$$

posso generalizzare l'esercizio 8 al caso in cui sto considerando  $n$  spazi.

Nel mio caso quindi basta vedere che  $\mathbb{S}^1$  è c.p.a.

Considero la funzione  $g: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$

$$t \longmapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$$

continua e suriettiva e  $[0, 1]$  è c.p.a.  $\Rightarrow \mathbb{S}^1$  è c.p.a.

□

(10) Dimostrare che  $SO(n)$  è connesso per archi per ogni  $n \geq 1$ .

risposta:

lo faccio per induzione su  $n \geq 1$ .

caso base:  $n=1$

$SO(1) = \{1\}$  connesso per archi

$n=2$   $SO(2) \cong S^1$  connesso per archi (rotazioni di  $\det=1$ )

passo induttivo: Sia  $n \geq 2$ . Suppongo che  $SO(n-1)$  è

connesso per archi (voglio quindi collegare qualsiasi due matrici con cammini continui).

Siano  $A, B \in SO(n)$  tali che  $A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$  e

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ & 1 \end{pmatrix}$$

claim 1:  $A$  e  $B$  sono connesse da un cammino continuo.

dimi claim 1:

nell'ultima riga di  $A$  e  $B$  devo avere tutti 0 e l'ultima entrata = 1 poiché le colonne di  $A$  e  $B$  sono vettori ortormali fra di loro  $\Rightarrow$  il prodotto scalare fra le colonne deve essere 0  $\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B' & 0 \\ & \vdots \\ & 0 \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A', B' \in SO(n-1)$$

Uso ora l'ipotesi induttiva,  $\exists \alpha: [0,1] \rightarrow SO(n-1)$

continuo t.c.  $\alpha(0) = A'$  e  $\alpha(1) = B'$ .

Considero quindi il cammino continuo  $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow SO(n)$

definito come 
$$\tilde{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}(0) = A, \tilde{\alpha}(1) = B$  ed è continuo (es.)

$\Rightarrow$  tutte le matrici del tipo  $\begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0 \dots 0}} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$  sono connesse

da un cammino.

claim 2: qualsiasi matrice  $A \in SO(n)$  è collegata tramite un cammino continuo a una matrice del tipo  $\begin{pmatrix} \boxed{\phantom{0 \dots 0}} & \begin{smallmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{smallmatrix} \\ 0 \dots 0 & 1 \end{pmatrix}$

dim claim 2:

Considero  $A \in SO(n)$  tale che l'ultima colonna non è

$e_n = (0, \dots, 0, 1)$  e non  $-e_n$ .

Allora  $Ae_n \neq \pm e_n$  e questi sono linearmente indipendenti.

(se  $Ae_n$  e  $e_n$  fossero l.d. allora  $Ae_n = \lambda e_n$  ma

$|\lambda| = 1 \Rightarrow Ae_n = \pm e_n$  ma  $Ae_n \neq \pm e_n$ )

Se considero quindi il piano generato da  $Ae_n$  e  $e_n$

allora su di esso posso scrivere una rotazione che manda

$Ae_n$  in  $e_n$ .

Sia  $\{u_{n-1}, u_n\}$  base ON di  $\text{span}\{Ae_n, e_n\}$  e

sia  $\{u_1, \dots, u_{n-1}, u_n\}$  base di  $\mathbb{R}^n$ .

Considero quindi l'insieme  $X = \{B \in SO(n) : Bu_i = u_i, \forall i=1, \dots, n-2\}$

(fisso tutti gli altri vettori)

$$\forall B \in X \quad \exists B' \in SO(2) : \quad B = U \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix} U^t$$

con  $U = (u_1, \dots, u_n)$  matrice di cambio di base.

$$\Rightarrow X \cong SO(2) \quad \text{tramite} \quad \begin{array}{ccc} g: SO(2) & \longrightarrow & X \\ B' & \longmapsto & B \end{array}$$

omeomorfismo (es.)

$$\Rightarrow X \text{ è c.p.a. perché } SO(2) \text{ è c.p.a.}$$

Considerando quindi la matrice che  $R \in X$  di rotazione tale

che  $R(Ae_n) = e_n$  allora ho  $\exists$  un cammino  $\gamma: [0,1] \rightarrow X$

$$\text{t.c. } \gamma(0) = I_n \in X, \quad \gamma(1) = R \quad \text{continuo.}$$

Posso quindi considerare:

$$\alpha(t) = \gamma(t)A \quad \text{cammino continuo con } \alpha(0) = A \text{ e } \alpha(1) = RA$$

dove  $RA(e_n) = e_n$ .

caso in cui  $Ae_n = -e_n$ :

considero una rotazione di  $\pi$  in un piano che contiene

$e_n$  e ad esempio  $e_{n-1}$  (es.)

□

(11) Dimostrare che  $O(n)$  ha due componenti connesse per archi di cui una è  $SO(n)$  omeomorfe fra loro.

Risposta:

$$O(n) = \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t = 1_n(\mathbb{R}) \}$$

- $O(n) = SO(n) \cup O_-(n)$ , con  $O_-(n) = \{ A \in O(n) : \det(A) = -1 \}$  è unione disgiunta.

Sia  $\ell$  componente connessa per archi di  $O(n)$ . Allora

$$\ell \subseteq SO(n) \quad \text{o} \quad \ell \subseteq O_-(n) \quad \text{poich\u00e9} \quad \det: O(n) \longrightarrow \{+1, -1\}$$

continua  $\Rightarrow$  manda insiemi connessi per archi in insiemi

connessi per archi  $\Rightarrow \ell$  deve stare o in  $\det^{-1}(\{+1\})$  o in

$\det^{-1}(\{-1\})$ .

- Voglio vedere se  $O_-(n)$  \u00e8 connesso per archi:

considero  $f: O(n) \longrightarrow O(n)$

$$(\sqrt{v_1}, \dots, \sqrt{v_n}) \longmapsto (\sqrt{v_1}, \dots, -\sqrt{v_n})$$

$\uparrow$   
colonne  
matrice

$f$  omeomorfismo che manda  $SO(n)$  in  $O_-(n)$  e viceversa

$$\Rightarrow O_-(n) \cong SO(n) \Rightarrow O_-(n) \text{ \u00e8 c.p.a.}$$

- faccio vedere che sono massimali (e quindi sono le comp. connesse)

Se  $\ell \subseteq O(n)$  \u00e8 componente connessa t.c.  $SO(n) \subseteq \ell \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ell = SO(n) \quad (\text{non pu\u00f2 contenere elementi di } O_-(n) \text{ perch\u00e9})$$

$\det(l)$  deve essere c.p.a.). Analogamente  $0-(u)$ .

□

(12) Quali sono le componenti convesse per archi di  $\mathbb{R}^n, S^{n-1}$ ?

$\mathbb{R}^n, B^n$ ?

risposta:

$\mathbb{R}^n, S^{n-1}$ :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n, S^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| > 1\} = \\ &= \text{int}(B^n) \cup (\mathbb{R}^n \setminus B^n)\end{aligned}$$

devo mostrare che sono entrambi connessi per archi e sono massimali.

$\text{int}(B^n)$ : è un aperto connesso di  $\mathbb{R}^n \Rightarrow$  è contrattile  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  è connesso per archi

dim connesso:  $x, y \in \text{int}(B^n)$ , allora  $\|x\| < 1, \|y\| < 1$ .

Parametrizzo il segmento che li unisce  $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ ,  
 $t \in [0, 1]$ . Allora

$$\|\gamma(t)\| = \|(1-t)x + ty\| \leq (1-t)\|x\| + t\|y\| < (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1, \forall t$$

$\Rightarrow$  tutto il segmento è contenuto in  $\text{int}(B^n)$

$\mathbb{R}^n \setminus B^n$ : siano  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$  ossia  $\|x\| > 1, \|y\| > 1$ .

Voglio costruire un cammino che rimanga in  $\mathbb{R}^n \setminus B^n$ .

Definisco quindi  $P = 2 \cdot \frac{x}{\|x\|}$  e  $Q = 2 \cdot \frac{y}{\|y\|}$  (punti sfera raggio 2)

1)  $x$  collegato a  $P$

$$z(t) = (1-t)x + t \frac{x}{\|x\|} \cdot 2 \quad \text{continuo}$$

$$\Rightarrow z(0) = x, \quad z(1) = P$$

e  $\|z(t)\| = \|(1-t)x + t \frac{x}{\|x\|} \cdot 2\| > 1$  perché è multiplo positivo di  $x$

2)  $P$  collegato a  $Q$  (seguendo la sfera di raggio 2)

$S_2^{n-1}$  è connesso per archi  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists \beta: [0,1] \longrightarrow S_2^{n-1} \quad \text{continuo} \quad \text{t.c.} \quad \beta(0) = P \quad \text{e} \quad \beta(1) = Q$$

3)  $Q$  collegato a  $q$

$$\text{definisco} \quad \gamma(t) = (1-t)Q + tq \quad \text{continuo}$$

$$\gamma(0) = Q, \quad \gamma(1) = q$$

il segmento rimane in  $\mathbb{R}^n \setminus B^n$  (es.)

$\Rightarrow$  assembla tutti i pezzi fra loro:

$$S(t) = \begin{cases} z(t), & t \in [0,1] \\ \beta(t-1), & t \in [1,2] \\ \gamma(t-2), & t \in [2,3] \end{cases}$$

continuo  $\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus B^n$  è connesso per archi.

Maestro ora che sono due insiemi massimali connessi per archi.

Suppongo che  $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}$  componente connessa per archi.

Considero la norma in  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \|\cdot\|$  è una funzione continua.

Sia ora  $\gamma: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}$  (cammino contenuto in  $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}$ )

$$\Rightarrow \|\cdot\| \circ \gamma: [0,1] \longrightarrow [0,1] \cup (1,\infty)$$

$$\text{e } \|\cdot\| \circ \gamma \text{ è continua } \Rightarrow \|\cdot\| \circ \gamma([0,1]) = [a,b]$$

intervallo (è connesso p.a. perché  $[0,1]$  lo è) per  $a \leq b$ .

$$\text{se } \|x\| < 1 \Rightarrow \|x\| \in [0,1)$$

$$\text{se } \|x\| > 1 \Rightarrow \|x\| \in (1,\infty)$$

Allora suppongo p.a. che  $\mathcal{C}$  componente connessa di  $\mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}$  t.c.

$$\text{int}(B^n) \subset \mathcal{C} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{C} \text{ t.c. } y \in \mathbb{R}^n, B^n \text{ raggiungibile tramite}$$

$$\text{un arco da un punto } x \in \text{int}(B^n) \text{ restando in } \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{fissato } x \in \text{int}(B^n) \exists \gamma \text{ cammino continuo t.c.}$$

$$\gamma(0) = x \quad \text{e} \quad \gamma(1) = y \Rightarrow \|\cdot\| \circ \gamma([0,1]) \ni 1 \text{ poiché}$$

è un intervallo per quello che abbiamo osservato prima  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists t_0 \text{ t.c. } \|\gamma(t_0)\| = 1$$

Similmente si mostra per  $\mathbb{R}^n, B^n$ . □

$$\Rightarrow \text{int}(B^n) \text{ e } \mathbb{R}^n, B^n \text{ sono le componenti connesse per archi di } \mathbb{R}^n, \mathbb{S}^{n-1}.$$

$\mathbb{R}^n, B^n$  ha una sola componente connessa per archi ed è se stesso.

(13) Dimostrare che la composizione di due equivalenze omotopiche è equivalenza omotopica.

Risposta:

Def: Una mappa continua  $f: X \rightarrow Y$  è un'equivalenza omotopica se esiste una mappa continua  $g: Y \rightarrow X$  t.c.

$$g \circ f \simeq \text{id}_X \quad (\text{omotopico}) \quad \text{e} \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y.$$

Siano quindi  $f: X \rightarrow Y$  equiv. omotopica,  $h: Y \rightarrow Z$  equiv. omotopica.

Voglio dimostrare che  $h \circ f$  è un'equivalenza omotopica.   
  $(h \circ f: X \rightarrow Z)$

$$f \text{ eq. aut.} \Rightarrow \exists g: Y \rightarrow X \text{ t.c. } g \circ f \simeq \text{id}_X, \quad f \circ g \simeq \text{id}_Y$$

$$h \text{ eq. aut.} \Rightarrow \exists k: Z \rightarrow Y \text{ t.c. } k \circ h \simeq \text{id}_Y, \quad h \circ k \simeq \text{id}_Z$$

Considero quindi la mappa  $g \circ k: Z \rightarrow X$ .

Mostriamo che  $g \circ k$  è l'inversa omotopica di  $h \circ f$

$$(g \circ k) \circ (h \circ f) = g \circ \underbrace{(k \circ h)}_{\substack{\text{id}_Y \\ \text{id}_Y}} \circ f$$

$$\Rightarrow g \circ (k \circ h) \circ f \simeq g \circ \text{id}_Y \circ f = g \circ f \simeq \text{id}_X$$

$$(h \circ f) \circ (g \circ k) = h \circ \underbrace{(f \circ g)}_{\substack{\text{id}_Y \\ \text{id}_Y}} \circ k$$

$$\Rightarrow h \circ (f \circ g) \circ k \simeq h \circ \text{id}_Y \circ k = h \circ k \simeq \text{id}_Z$$

□

(14) Dimostrare che uno spazio  $X$  è contrattile se e solo se ogni applicazione continua  $f: X \rightarrow Y$  verso uno spazio arbitrario  $Y$  è omotopa a costante.

Risposta:

Def:  $X$  è contrattile se ha il tipo di omotopia di un punto.

Prop:  $X$  contrattile  $\Leftrightarrow \text{id}_X \simeq \text{cost}$ .

( $\Leftarrow$ )  $f: X \rightarrow Y$  è  $\simeq \text{cost}$ .  $\Rightarrow$  in particolare considerando  $Y = X$  ho che  $\text{id}_X: X \rightarrow X \simeq \text{cost} \Rightarrow X$  contrattile.

( $\Rightarrow$ ) Assumo  $X$  contrattile. Allora per la prop.  $\exists$

$$H: X \times I \longrightarrow X \quad \text{t.c.} \quad H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0$$

(omotopia fra  $\text{id}_X$  e mappa costante  $c_{x_0}$ )

Sia ora  $f: X \rightarrow Y$  mappa continua.

Considero dunque  $f \circ H: X \times I \longrightarrow Y$ ,

$$f \circ H(x, t) = f(H(x, t))$$

$$f \circ H(x, 0) = f(x)$$

$$f \circ H(x, 1) = f(x_0) \text{ costante}$$

$\Rightarrow f \circ H$  è un'omotopia fra  $f$  e la mappa costante  $f(x_0)$   $\Rightarrow$  ogni mappa  $f$  è omotopa a una costante.

□

(15) Dimostrare che uno spazio  $X$  è contrattile se e solo se ogni applicazione continua  $f: Y \rightarrow X$  da uno spazio arbitrario  $Y$  èomotopa a costante.

Risposta:

( $\Rightarrow$ )  $X$  contrattile  $\Rightarrow \exists$  omotopia  $H: X \times I \rightarrow X$  t.c.

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = x_0.$$

Fissata una mappa  $f: Y \rightarrow X$  continua e considero

quindi:  $S: Y \times I \rightarrow X$

$$(y, t) \longmapsto S(y, t) := H(f(y), t)$$

allora  $S$  continua e  $S(y, 0) = H(f(y), 0) = f(y)$

$$S(y, 1) = H(f(y), 1) = x_0$$

$\Rightarrow S$  omotopia fra  $f$  e costante.

( $\Leftarrow$ ) ogni mappa  $f: Y \rightarrow X$  è omotopa a costante  $\Rightarrow$  in particolare scegliendo  $Y = X$ , id  $\simeq$  cost.  $\Rightarrow X$  contrattile.

□