Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 10

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Sia $r: X \to A$ una retrazione continua e X di Hausdorff. Dimostrare che A è chiuso in X.

2) Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x_0, x_1 \in X$ e $\alpha, \beta: I \to X$ due cammini t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$. Dimostrare che $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$ in X.

3) Sia $U \subset R^n$ un aperto non vuoto. Dimostrare che ogni cammino continuo in U è omotopo rel $\{0, 1\}$ ad un cammino poligonale (cioè un cammino che è unione finita di segmenti consecutivi). Concludere che U connesso $\Leftrightarrow$ due punti qualsiasi di U possono essere congiunti con una poligonale.

4) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto. Dimostrare che $R^n - K$ ammette una retrazione su una ipersfera $S^{n-1}(a, r)$ di centro a e raggio r opportuni.

5) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto, con $n \geq 2$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n - K$ ammette un'unica componente connessa illimitata.

6) Dimostrare che la composizione di due rivestimenti finiti è un rivestimento. Qual è il grado?

7) Dimostrar che $(S^n \times I)/(S^n \times \{0\}) \cong B^{n+1}$.

8) Sia $f : S^n \to X$ continua. Dimostrare che $f \simeq$ costante se e solo se f si puo estendere ad un'applicazione continua $\tilde{f}: B^{n+1} \to X$.

9) Dimostrare che l'inclusione $i: S^1 \hookrightarrow S^2$ è omotopa a costante.

10) Dimostrare che $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow n = 1$.

Foglio 10:

(1) Sia $r: X \longrightarrow A$ retraz. continua e X di Hausdorff. Dimostrare che A è chiuso in X.

risposta:

Recall: $r: X \longrightarrow A$ retrazione continua se $A \subset X$ e $r|_A = id_A$.

X è di Hausdorff $\Rightarrow$ la diagonale $\Delta \subset X \times X$ risulta essere chiusa in X.

Considero quindi $Z = \{ x \in X : r(x) = x \}$ (ossia i punti tali che r si comporta come l'identità) $\Rightarrow A \subseteq Z$ poiché su A r si comporta come l'identità.

Z è chiuso poiché:

definendo $$h: X \longrightarrow X \times X$$
$$x \longmapsto (x, r(x))$$

continua poiché entrambe le proiezioni sono continue

$\Rightarrow$ $h^{-1}(\Delta) = Z$ $\Rightarrow$ è preimmagine tramite una funzione continua di un chiuso.

Voglio mostrare che $A = Z$.

p.a. $\exists z \in Z$ ma $z \notin A$ $\Rightarrow$ $r(z) = z$ $\Rightarrow$ $z \in r(X) = A$ (l'immagine di r è contenuta in A) $\lightning$

$\Rightarrow$ $Z = A$ $\Rightarrow$ A chiuso.

$\square$

(2) Sia $X \subset \mathbb{R}^n$ convesso, $x_0, x_1 \in X$ e $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ due cammini

t.c. $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ e $\alpha(1) = \beta(1) = x_1$.

Dimostrare che $\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$ in X.

risposta:

$\alpha \simeq_{\{0,1\}} \beta$ in X $\Leftrightarrow$ $\exists\, H : I \times I \longrightarrow X$ tale che

$H(t,0) = \alpha(t)$, $H(t,1) = \beta(t)$, $\forall t \in I$ e

$H(0,s) = \alpha(0) = \beta(0)$, $H(1,s) = \beta(1) = \alpha(1)$.

Definisco quindi $H(t,s) = (1-s)\,\alpha(t) + s\,\beta(t)$.

È ben definita poiché $\alpha(t) \in X$ $\forall t$, $\beta(t) \in X$ $\forall t$ e X è

convesso $\Rightarrow$ $(1-s)\,\alpha(t) + s\,\beta(t) \in X$, $\forall t$.

È continua per la continuità dei cammini.

$H(t,0) = \alpha(t)$

$H(t,1) = \beta(t)$

$H(0,s) = \alpha(0) = \beta(0) = x_0$

$H(1,s) = \alpha(1) = \beta(1) = x_1$

$\square$

(3) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Dimostrare che ogni cammino continuo in U è omotopo rel $\{0,1\}$ a un cammino poligonale.

Concludere che U convesso $\Leftrightarrow$ due punti qualsiasi di U possano essere congiunti con una poligonale.

risposta:

Sia $\alpha : [0,1] \longrightarrow U$ cammino.

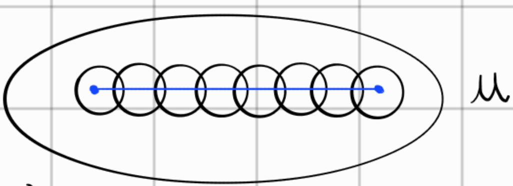
Utilizzo la compattezza di $[0,1]$.

$[0,1]$ è compatto $\Rightarrow$ immagine di un compatto tramite una continua è compatta $\Rightarrow$ $\alpha([0,1]) \subset U$ è compatto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists$ un ricoprimento finito di palle contenute nell'aperto U. Le palle sono convesse $\Rightarrow$ riesco a considerare un segmento tutto contenuto in U (in $\alpha([0,1])$)

U aperto $\Rightarrow$ $U = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$

$\Rightarrow$ $\alpha([0,1]) \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i)$



$\Rightarrow$ compatto $\Rightarrow \exists\, B(x_1, r_1), \_\_\_, B(x_d, r_d)$

t.c. $\alpha([0,1]) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \underbrace{B(x_i, r_i)}_{= B_i} \subseteq U$

non sono ordinate ma posso supporre che siano ordinate.

s.p.g. assumo che $\alpha(0) \in B_1$.

Sia ora $\tilde{t}_1 = \sup \{ t \in [0,1] : \alpha(t) \in B_1 \} > 0$

(tempo più grande per cui rimango in B_1)

- se $\tilde{t}_1 = 1$: ho trovato tutto il primo segmento che rimane in B_1 (ossia il segmento da $\alpha(0)$ in $\alpha(\tilde{t}_1)$)
- se $\tilde{t}_1 < 1$: $\alpha(\tilde{t}_1) \notin B_1$ poiché B_1 è aperta e α è continua: se $\alpha(\tilde{t}_1) \in B_1$ la preimmagine tramite α di B_1 è un aperto $\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $\alpha(\tilde{t}_1 + \delta) \in B_1$ $\lightning$ ($\tilde{t}_1$ è il sup)

allora assumo s.p.g. che $\alpha(\tilde{t}_1) \in B_2$ (sicuramente esiste una palla a cui appartiene $\alpha(\tilde{t}_1)$ perché ricoprono U).

Chiamiamo $t_1 = \inf \{ t \in [0,1] : \alpha(t) \in B_2 \}$

$\alpha(t_1) \in B_1$ poiché $t_1 \leq \tilde{t}_1$ ma $\alpha(\tilde{t}_1) \in B_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \delta > 0$ t.c. $\alpha(\tilde{t}_1 - \delta) \in B_2 \Rightarrow t_1 < \tilde{t}_1 \Rightarrow \alpha(t_1) \in B_1$.

$\Rightarrow \alpha(0), \alpha(t_1) \in B_1 \Rightarrow$ segmento che li congiunge in B_1 è tutto in B_1: $\exists\, \beta_1 : [0, t_1] \longrightarrow B_1$, $\beta_1(s) = (1-s)\,\alpha(0) + s\,\alpha(t_1)$ $\in B_1$.

Proseguo ricorsivamente

$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \tilde{t}_n = t_{n+1} = 1$ t.c.

$\alpha(t_i), \alpha(t_{i+1}) \in B_i$, $\forall i = 0, \dots, n$

$\Rightarrow$ posso considerare $\beta_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow B_i$ segmento t.c.

$\beta_i(t_i) = \alpha(t_i)$

$\beta_i(t_{i+1}) = \alpha(t_{i+1})$

Definisco quindi il cammino poligonale nel seguente modo:

$\beta(t) := \beta_i(t)$, se $t_i \leq t < t_{i+1}$, $\forall i \in \{0, \_, n\}$.

Devo ora def. l' omotopia:

fisso $s \in [0,1] \Rightarrow \exists i \in \{0, \_, n\}$: $s \in [t_i, t_{i+1}] \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(s), \beta(s) \in B_i$.

Allora posso prendere il seguente che collega $\alpha(s)$ e $\beta(s)$

poiché B_i convesso

$H: I \times I \longrightarrow B_i$, $H(s,t) = \alpha(s)(1-t) + \beta(s)t$,

$\forall s,t \in [0,1]$

$H(s,0) = \alpha(s)$ $\qquad$ $H(0,t) = \alpha(0) = \beta(0)$

$H(s,1) = \beta(s)$ $\qquad$ $H(1,t) = \alpha(1) = \beta(1)$

$\square$

$(\Rightarrow)$ M connesso $\Rightarrow$ M connesso per archi $\Rightarrow \forall x,y \in M \ \exists \gamma$ cammino continuo t.c. $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$ $\Rightarrow \gamma \simeq_{\{0,1\}} \gamma_p$ con γ_p cammino poligonale t.c. $\gamma_p(0) = x$, $\gamma_p(1) = y$, γ_p polig. contenuta in M.

$(\Leftarrow)$ Ogni coppia di punti di M può essere connessa da una poligonale contenuta in M $\Rightarrow$ in particolare, essa è un cammino continuo $\Rightarrow$ $\Rightarrow M$ è connesso per archi $\Rightarrow M$ connesso.

$\square$

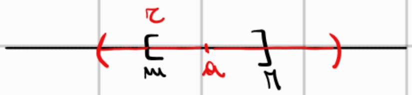
(4) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ compatto non vuoto. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus K$ ammette una retrazione su una ipersfera $S^{n-1}(a,r)$ di centro a e raggio r.

Risposta:

$n = 1$:

K compatto non vuoto in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists\ m = \min K,\ M = \max K$ (chiuso e limitato) con $m \leq M$.

Fisso quindi $a := \dfrac{m+M}{2}$



$r := \dfrac{M-m}{2} + 1$

$\Rightarrow$ $K \subset (a-r, a+r)$ $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \setminus K \supset (-\infty, a-r] \cup [a+r, +\infty)$

$\Rightarrow$ $S^0(a,r) = \{a-r, a+r\}$

Definisco quindi la retrazione nel seguente modo:

$$r: \mathbb{R} \setminus K \longrightarrow S^0(a,r)$$

$$x \longmapsto r(x) = \begin{cases} a-r, & \text{se } x < a \\ a+r, & \text{se } x > a \end{cases}$$

ben posta su $\mathbb{R} \setminus K$.

$r(a-r) = a-r$, $\quad r(a+r) = a+r$ $\Rightarrow$ $r\big|_{S^0(a,r)} = id_{S^0(a,r)}$

continuità: r è continua poiché ricordiamo che $S^0(a,r)$ è dotato della topologia discreta (insieme finito di punti)

$\underline{n \geq 2}$:

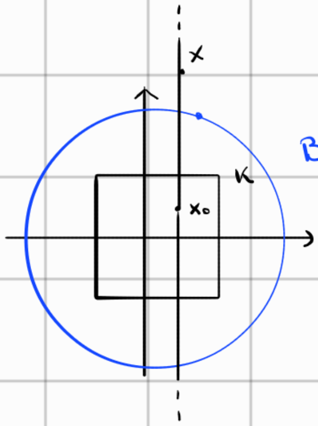
K compatto $\Rightarrow \exists \bar{r} > 0$ tale che $K \subseteq B(0, \bar{r})$.

Passando al complementare quindi $\mathbb{R}^n \setminus B(0,\bar{r}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$

allora fissando $a = 0$, $r = \bar{r}$ $\Rightarrow S^{n-1}(0,\bar{r}) = \partial B(0,\bar{r}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$

Costruisco quindi la retrazione. Fisso $x_0 \in K$ punto qualsiasi di K

($\exists x_0$ poiché $K \neq \emptyset$).



definisco:

$$r : \mathbb{R}^n \setminus K \longrightarrow S^{n-1}(0,\bar{r})$$

$$r(x) = \{ x_0 + t_x (x - x_0) \mid t_x \geq 0 \} \cap S^{n-1}(0,\bar{r})$$

con $r(x)$ è l' unico punto di intersezione fra la semiretta

$\{ x_0 + t(x - x_0) : t \geq 0 \}$ e $S^{n-1}(0,\bar{r})$

controllo le proprietà della retrazione:

$$r \Big|_{S^{n-1}(0,\bar{r})} = id_{S^{n-1}(0,\bar{r})} \quad \text{okay}$$

<u>continuità</u>: trovo t_x imponendo la condizione di intersezione

$$\| x_0 + t_x (x - x_0) \|^2 = \bar{r}^2$$

$$\| x_0 \|^2 + 2 t_x (x - x_0) x_0 + t_x^2 \| x - x_0 \|^2$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = 4 x_0^2 (x - x_0)^2 - 4 \| x - x_0 \|^2 (\| x_0 \|^2 - \bar{r}^2)$$

$\| x_0 \| < \bar{r} \Rightarrow \Delta$ è sempre positivo $\Rightarrow$ ho due soluzioni

$$t_x = \frac{- x_0 (x - x_0) \pm \sqrt{\Delta}}{2 \| x - x_0 \|^2} \quad \text{considero solo la radice} > 0$$

$\Rightarrow$ è continuo in x $\Rightarrow$ r continua. $\square$

(5) Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ un compatto non vuoto, $n \geq 2$. Dimostrare che $\mathbb{R}^n \setminus K$ ammette un'unica componente connessa illimitata.

risposta:

Si ha che $\mathbb{R}^n \setminus K$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ quindi le componenti connesse per archi coincidono con le componenti connesse.

Dato che K compatto $\Rightarrow \exists R > 0$ tale che $K \subset B(0,R)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n \setminus B(0,R) \subset \mathbb{R}^n \setminus K$

Nel foglio 9 abbiamo dimostrato che:

$\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ connesso per archi, illimitato $\Rightarrow$ è contenuto in una componente connessa C di $\mathbb{R}^n \setminus K$ che deve essere illimitata

$\Rightarrow \exists$ una componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Devo dimostrare l'unicità di questa componente.

Suppongo che $\exists$ C_1 altra componente connessa illimitata di $\mathbb{R}^n \setminus K$.

Siccome sono entrambe illimitate, $\exists x_1 \in C \setminus B(0,R)$, $\exists x_2 \in C_1 \setminus B(0,R)$

e $C \setminus B(0,R) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$, $C_1 \setminus B(0,R) \subset \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$.

$\mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ connesso per archi per $n \geq 2$ $\Rightarrow$ $\exists$ cammino continuo

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \setminus B(0,R)$ t.c. $\gamma(0) = x_1$, $\gamma(1) = x_2$.

$\mathbb{R}^n \setminus B(0,R) \subset \mathbb{R}^n \setminus K \Rightarrow \gamma$ contenuto in $\mathbb{R}^n \setminus K \Rightarrow x_1$ e x_2 appartengono alla stessa componente connessa.

$\square$

(6) Siano $p: X \longrightarrow Y$, $q: Y \longrightarrow Z$ rivestimenti di grado finito.

Dimostrare che $q \circ p$ è un rivestimento. Grado?

risposta:

Recall: Una mappa $p: X \to Y$ è un rivestimento sse p è continua e $\forall y \in Y$ $\exists V \subseteq Y$ intorno aperto di y t.c. $\exists (U_J)_{J \in J}$ aperti di X disgiunti t.c. la mappa p ristretta $p|_{U_J}: U_J \longrightarrow V$ è un omeomorfismo, $\forall J \in J$.

grado di un rivestimento p è per def. la cardinalità delle fibre $\# p^{-1}(\{y\})$, $\forall y \in Y$.

Fissiamo $z \in Z$ e chiamiamo $n = gr(q)$, $m = gr(p)$, allora

$q^{-1}(z) = \{y_1, \dots, y_n\}$ (insieme finito di punti)

$\Rightarrow$ $p^{-1}(q^{-1}(z)) = \bigcup_{i=1}^{n} p^{-1}(\{y_i\})$

$\Rightarrow$ cardinalità di $(q \circ p)^{-1}(z) = n \cdot m$ (sono a 2 a 2 distinti, le immagini che trovo per ogni y_i sono distinti).

Dobbiamo dimostrare che è un rivestimento.

Sia $z \in Z$. Dal fatto che q è un rivestimento, dalla def. $\exists V$ intorno aperto di z, $\exists U_1, \dots, U_n \subseteq Y$ aperti disgiunti tali che

$U_i \xrightarrow{q} V$ è omeomorfismo.

$q^{-1}(\{z\}) = \{y_1, \dots, y_n\}$, $q(y_i) = z$, $y_i \in U_i$, applico la def. di rivestimento a $y_i \in Y$:

posso prenderlo dentro U_i, l'importante è che contenga y_i (interseco)

$\forall i = 1, \dots, n$ $\exists A^{(i)} \subseteq U_i \subseteq Y$ aperti tali che $\exists B_1^{(i)}, \dots, B_m^{(i)}$

aperti di X disgiunti tali che $B_j^{(i)} \longrightarrow A^{(i)}$ omeo $\forall j = 1, \dots, m$.

Possiamo considerare le immagini di $A^{(i)}$ tramite q in V $\Rightarrow$ saranno degli aperti ($q|_{U_i}$ è omeo) $\Rightarrow$ vado a considerare l'intersezione delle immagini e questo mi darà l'aperto su cui riapplicare la definizione.

considero $W = \bigcap_{i=1}^{n} q(A_i) \subseteq V$. Per costruzione so che $z \in W$.

So che un aperto più piccolo di V è ancora banalizzante per q $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ W è banalizzante per q. Vogliamo dim. che è banalizzante per $q \circ p$.

$(q \circ p)^{-1}(W) \cap B_j^{(i)}$ contiene gli elementi che hanno come immagine z e tramite p va in $q^{-1}(W) \cap A_i \xrightarrow{q} W$ che è la restrizione dell'omeo p e inoltre ho ristretto i due codomini alle immagini $\Rightarrow$ aperti disgiunti del dominio sono i $(q \circ p)^{-1}(W) \cap B_j^{(i)}$ al variare di i e j.

$\square$

(7) $(S^n \times I) / (S^n \times \{0\}) \cong B^{n+1}$

risposta:

devo far collassare $S^n \times \{0\}$ ad un punto $\Rightarrow$ ottengo il cono su S^n

$B^{n+1} = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| \leq 1 \}$

definisco $f : S^n \times I \longrightarrow B^{n+1}$

$$f(x,t) = tx$$

- $t = 0$, allora $f(x,0) = 0$, $\forall x \in S^n \Rightarrow$ tutto $S^n \times \{0\}$ viene mappato in un solo punto
- $t = 1$, allora $f(x,1) = x$ il bordo è S^n
- l'immagine è B^{n+1} quindi è suriettiva
- la mappa è continua e induce un omeomorfismo sul quoziente

$$\tilde{f} : (S^n \times I) / (S^n \times \{0\}) \longrightarrow B^{n+1} , \quad \tilde{f}([x,t]) = tx.$$

- $\tilde{f}$ ben definita:

se $[x,t] = [y,s]$ allora

(i) $t = s = 0 \Rightarrow tx = sy = 0$

(ii) $(x,t) = (y,s) \Rightarrow tx = sy$

$\tilde{f}$ continua: segue da f continua e $\tilde{f} \circ \pi = f$

dove π è la proiezione al quoziente

$\Rightarrow$ per la propr. fondamentale, $\tilde{f}$ è continua.

$\tilde{f}$ è biiettiva:

iniettiva: suppongo $\tilde{f}([x,t]) = \tilde{f}([y,s])$

(i) $t = s = 0$

$\Rightarrow [x,0] = [y,0]$

(ii) $t, s > 0$

$tx = sy \Rightarrow \|tx\| = t = \|sy\| = s \Rightarrow t = s \Rightarrow$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow [x,t] = [y,s]$

suriettività:

$z \in B^{n+1}$

(i) $z = 0 \Rightarrow z = \tilde{f}([x,0])$, $\forall x \in S^n$

(ii) $z \neq 0 \Rightarrow$ pongo $t = \|z\|$, $x = \dfrac{z}{\|z\|} \in S^n$

$\Rightarrow \tilde{f}([x,t]) = tx = z$

$\tilde{f}$ omeomorfismo:

$\tilde{f}$ continua, biiettiva, codominio Hausdorff, dominio è compatto

$\Rightarrow \tilde{f}$ omeomorfismo.

$\square$

(8) Sia $f: S^n \longrightarrow X$ continua. Allora $f \simeq$ costante $\Leftrightarrow$

$\exists\, \tilde{f}: B^{n+1} \longrightarrow X$ continua tale che è un prolungamento: $\tilde{f}|_{S^n} = f$.

risposta:

($\Leftarrow$) so che $\exists\, \tilde{f}: B^{n+1} \longrightarrow X$

Vado a def. $H: S^n \times I \longrightarrow X$ come $H(x,t) = \tilde{f}(tx)$

continua (prodotto per scalare composto con $\tilde{f}$), ben definita perchè

B^n è convessa.

Si ha $H(x,0) = \tilde{f}(0)$, $H(x,1) = \tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in S^n$.

($\Rightarrow$) voglio definire una $\tilde{f}$ sapendo che $\exists\, H: S^n \times [0,1] \longrightarrow X$

continua che mi porta da S^n a una costante e voglio che

$\tilde{f}(tx) = H(x,t)$.

So che $H(x,0) = $ cost. , $H(x,1) = f(x)$

Definisco quindi:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} H(x,0) & , \quad x = 0 \\ H\left(\underbrace{\frac{x}{\|x\|}}, \|x\|\right) & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

vettore di norma 1 (omotopia definita su S^n

quindi prendo x e lo normalizzo)

$\tilde{f}|_{S^n} = f$ poichè $H(x,1) = f(x)$

$\tilde{f}$ continua in x $\forall x \in B^{n+1} \setminus \{0\}$.

Unico punto in cui devo verificare la continuità è $x = 0$.

Sia U intorno di c. Voglio trovare un intorno aperto $A \subseteq B^{n+1}$ di $0 \in B^{n+1}$

t.c. $\tilde{f}(A) \subset U$.

Posso supporre U intorno aperto. (quelli aperti sono un sistema fondamentale di intorni)

U aperto $\Rightarrow$ $H^{-1}(U)$ aperto in $S^n \times I$ e dato che

$H(x,0) = c$ $\Rightarrow$ $(x,0) \in H^{-1}(U)$, $\forall x \in S^n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $S^n \setminus \{0\} \subseteq H^{-1}(U)$.

Poiché la topologia prodotto ha come base prodotto degli aperti

$\Rightarrow$ $H^{-1}(U)$ deve contenere un aperto di base di $S^n \times [0,1] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\exists\, \delta > 0$: $S^n \times [0, \delta[\subseteq H^{-1}(U)$.

Considero quindi $A = \{x \in B^{n+1} : \|x\| < \delta\}$.

Allora $\forall x \in A \setminus \{0\}$, $\tilde{f}(x) = H\left(\frac{x}{\|x\|}, \underset{\delta}{\overset{\|x\|}{\wedge}}\right) \in U$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\tilde{f}(A) \subseteq U$.

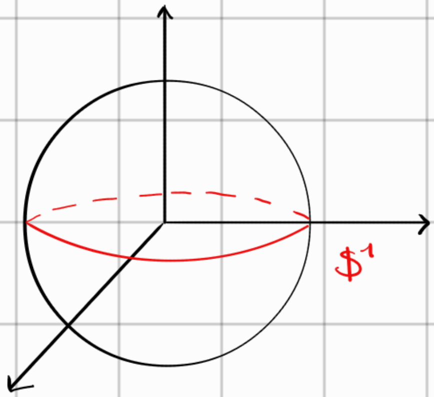
$\square$

(9) Dimostrare che l' inclusione $i: S^1 \hookrightarrow S^2$ è omotopa a costante.

risposta:

$i: S^1 \longrightarrow S^2$

$(x,y) \longmapsto (x,y,0)$



identifico $\mathbb{R}^2$ con il piano.

Voglio trovare omotopia che la mandi in qualcosa di costante

idea: porto S^1 facendola scorrere sulla superficie sferica fino a che non diventa un solo punto (il polo)

$H: S^1 \times [0,1] \longrightarrow S^2$

$H((x,y),t) = \left(x \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), y \cos\left(\frac{\pi}{2} t\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} t\right)\right) \in S^2$

$\| H((x,y),t) \|^2 = x^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) + y^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} t\right) =$

$= 1 \qquad (x^2+y^2 = 1)$

continua, ben definita

$H((x,y),0) = (x,y,0)$

$H((x,y),1) = (0,0,1)$

$\square$

(10) $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^n \Rightarrow n = 1$.

risposta:

$\exists f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ omeo $\Rightarrow$ $\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ è omeomorf.
$\mathbb{R} \setminus \{0\}$ è sconnesso mentre se $n \neq 1$, $\mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$ è connesso e la connessione è un invariante topologico $\Rightarrow$ unico modo per renderlo sconnesso è $n = 1$.

$\square$