Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 11

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Descrivere la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$.

2) Dimostrare che l'applicazione $\nu\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^1 \to \mathbb{C}\mathrm{P}^2$, $\nu([z_0, z_1]) = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2]$ è un'immersione con immagine una conica non degenere (ν è detta *mappa di Veronese*). Dedurre che le coniche proiettive complesse non degeneri sono omeomorfe a S^2.

3) Descrivere la topologia delle coniche proiettive complesse degeneri.

4) Siano X e Y spazi topologici. Dimostrare che Y contraibile $\Rightarrow X \times Y \simeq X$.

Foglio 11

(1) Descrivere la compattificazione di Aleksandrov di $\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}$.

risposta:

$X = \mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2$

$\hat{X} = (\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2) \cup \{\infty\}$ e gli intorni di ∞ sono del tipo

$U = \{\infty\} \cup ((\mathbb{R}_1 \sqcup \mathbb{R}_2) \setminus (K_1 \sqcup K_2))$ con $K_i \subset \mathbb{R}_i$ compatti

idea: ∞ è l'unico punto in comune che rappresenta tutte le estremità delle rette

- ogni $\mathbb{R}$ si compatta in S^1

$$\varphi : \hat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \longrightarrow S^1 \quad \text{con}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \left(\dfrac{2t}{1+t^2}, \dfrac{t^2-1}{1+t^2} \right), & t \neq \infty \\ (0,1), & t = \infty \end{cases}$$

questo risulta essere un omeomorfismo $\Rightarrow \hat{\mathbb{R}} \cong S^1$

- applicazione alla coppia di rette:

$$\varphi_1 : \mathbb{R}_1 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^1_1, \quad \varphi_2 : \mathbb{R}_2 \cup \{\infty\} \longrightarrow S^1_2$$

ma in $\hat{X}$ il punto $\{\infty\}$ è lo stesso per entrambe le rette

$\Rightarrow$ ∞ verrà mandato dall'omeomorfismo globale in un punto base $p_1 \in S^1_1$ e lo stesso punto $\{\infty\}$ verrà mandato nel punto base $p_2 \in S^1_2$ quindi sto andando a identificare p_1 e p_2 nell'immagine ottengo quindi $\hat{X} \cong (\mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2) / (p_1 \sim p_2)$

con $p_1 = \varphi_1(\infty)$ e $p_2 = \varphi_2(\infty)$ ma questa è

esattamente la definizione di un bouquet di 2 cerchi

$\Rightarrow \hat{X} \cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

l' omeomorfismo esplicito dunque diventa:

$$\phi : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (\varphi_1(x), 1) & , x \in \mathbb{R}_1 \\ (\varphi_2(x), 2) & , x \in \mathbb{R}_2 \\ \text{punto base} & , x = \infty \end{cases}$$

con la topologia quoziente che identifica i punti base.

$$(\mathbb{R} \hat{\sqcup} \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) / (\infty_1 \sim \infty_2) \cong (\mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2) / (p_1 \sim p_2) \cong \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$$

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 = (\mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2) / \{p_1 \sim p_2\}$$

Sia $\tilde{\pi} : \mathbb{S}^1_1 \sqcup \mathbb{S}^1_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ è la proiezione che mi utilizza

$x \longmapsto [x]$ la topologia quoziente

$\Rightarrow$ la mappa globale $\phi : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ è composta esplicitam.

$$\phi = \tilde{\pi} \circ (\varphi_1 \sqcup \varphi_2)$$

- la composizione è ben definita : $\phi(\infty) = \tilde{\pi}(p_1) = \tilde{\pi}(p_2)$ e in $\hat{X}$ ho un solo punto $\{\infty\}$
- <u>continuità</u>:

$\varphi_1 \sqcup \varphi_2$ è continua, $\tilde{\pi}$ è una mappa quoziente e per def. di topologia di Aleksandrov gli intorni di ∞ corrispondono agli intorni di base del bouquet

<u>continuità fuori da ∞:</u>

su ciascuna copia di $\mathbb{R}_i$, $\phi|_{\mathbb{R}_i} = \tilde{\pi} \circ \varphi_i$

composizione di mappe continue

<u>continuità vicino a ∞:</u>

Sia U aperto in $S^1 \vee S^1$ con $\phi(\infty) \in U$ $\Rightarrow$ sfruttando il fatto che il bouquet è dotato della topologia quoziente ho che per definizione $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ è aperto in $S^1_1 \sqcup S^1_2$ e contiene sia p_1 che p_2

φ_i sono omeomorfismi $\Rightarrow$ $\varphi_i^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(U))$ è un aperto di $\mathbb{R}_i \cup \{\infty\}$ che contiene ∞ $\Rightarrow$ sfruttando la topologia di Aleksandrov ho che $\varphi_i^{-1}(\tilde{\pi}^{-1}(U)) = \{\infty\} \cup (\mathbb{R}_i \setminus K_i)$, K_i compatto

$\Rightarrow$ $\phi^{-1}(U) = \{\infty\} \cup ((\mathbb{R}_1 \setminus K_1) \sqcup (\mathbb{R}_2 \setminus K_2))$

intorno di ∞ .

- <u>biiettività:</u>

<u>iniettività:</u> $x, y \in \hat{X}$ t.c. $\phi(x) = \phi(y)$

<u>caso 1:</u> $x, y \neq \infty$

- se stanno nella stessa copia $\mathbb{R}_i$ $\Rightarrow$ $\tilde{\pi}(\varphi_i(x)) = \tilde{\pi}(\varphi_i(y))$ poiché $\tilde{\pi}$ iniettiva fuori dai punti base e φ_i è omeo $\Rightarrow$ $x = y$
- se stanno in copie diverse, l'unico modo è avere i pti base ma $x \neq \infty \neq y$

caso 2: o $x = \infty$ o $y = \infty$ ($y = \infty$ ad esempio)

se $\phi(x) = \phi(\infty) \Rightarrow \tilde{\pi}(\varphi_i(x)) = \tilde{\pi}(p_2)$ accade sse

$\varphi_i(x) = p_i \iff x = \infty$

suriettività:

$z \in S^1 \vee S^1 \Rightarrow$ (i) se z non è il punto base $\Rightarrow$ appartiene a

solo una delle $S_i^1 \Rightarrow$ dalla suriettività di ϕ_i

$\exists\, x \in \hat{X}$ t.c. $\phi(x) = z$

(ii) se z è il punto base $\Rightarrow z = \tilde{\pi}(p_1) = \tilde{\pi}(p_2) =$

$= \phi(\infty)$

$\Rightarrow$ è suriettiva

ϕ è continua e biiettiva, $S^1 \vee S^1$ è di Hausdorff e $\hat{X}$ è compatto

$\Rightarrow \phi$ è omeomorfismo.

(2) Dimostrare che l' applicazione $\nu : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$,

$\nu([z_0, z_1]) = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2]$ è immersione con immagine

una conica non degenere.

Coniche proiettive complesse non degeneri sono omeomorfe a

S^2.

risposta:

$\nu : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^2$, $\nu([z_0, z_1]) = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2]$

controllo che la mappa sia ben definita:

se considero $[\lambda z_0, \lambda z_1] = [z_0, z_1]$ altro rappr. della classe , $\lambda \neq 0$,

$\nu([\lambda z_0, \lambda z_1]) = [\lambda^2 z_0^2, \lambda^2 z_0 z_1, \lambda^2 z_1^2] = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2] =$

$= \nu([z_0, z_1])$.

Vado a controllare che l' immagine è una conica non degenere:

$[X_0, X_1, X_2] = [z_0^2, z_0 z_1, z_1^2]$

Allora vale che $X_1^2 - X_0 X_2 = 0$

$\Rightarrow \nu(\mathbb{C}P^1) \subseteq \{ [X_0, X_1, X_2] \in \mathbb{C}P^2 : X_1^2 - X_0 X_2 = 0 \} = C$

Sia ora $y \in C \Rightarrow y = [y_0, y_1, y_2]$

posso supporre $y_0 \neq 0$ poiché sono in uno spazio proiettivo $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ posso normalizzare per y_0

$$[y_0, y_1, y_2] = \left[1, \frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}\right]$$

$\Rightarrow$ l' equazione di C diventa $\left(\frac{y_1}{y_0}\right)^2 - \frac{y_2}{y_0} = 0$

chiamo $s = \frac{y_1}{y_0}$ $\Rightarrow$ $[y_0, y_1, y_2] = [1, s, s^2]$

e $[1, s, s^2] = [1^2, s \cdot 1, s^2]$ $\Rightarrow$ è della forma cercata

se consideriamo invece $y_2 \neq 0$ $\Rightarrow$ il procedimento è analogo

$\Rightarrow$ $\nu(\mathbb{C}P^1) = C$

C conica non degenere : $X_1^2 - X_0 X_2 = 0$

$\Rightarrow$ la matrice associata a questa conica risulta essere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ rango 3

<u>immersione topologica:</u>

continua, iniettiva, omeomorfismo tra $\mathbb{C}P^1$ e C (con topologia indotta)

<u>continuità</u>: okay (definita da polinomi omogenei)

<u>iniettività</u>:

suppongo $\nu([z_0, z_1]) = \nu([w_0, w_1])$

$\Rightarrow \exists \lambda \neq 0$ t.c. $[z_0^2, z_0 z_1, z_1^2] = \lambda [w_0^2, w_0 w_1, w_1^2]$

$\Rightarrow$ $z_0^2 = \lambda w_0^2$ e $z_1^2 = \lambda w_1^2$ $\Rightarrow$ $z_0 = \mu w_0$ e $z_1 = \mu w_1$

con $\mu^2 = \lambda$ $\Rightarrow$ $[z_0, z_1] = [w_0, w_1]$

<u>omeomorfismo sull'immagine:</u>

$\mathbb{C}P^1$ è compatto, $\mathbb{C}P^2$ è di Hausdorff, ν continua e iniettiva

$\Rightarrow$ ν è immersione (perché omeo).

$\mathbb{C}P^1 \cong S^2$ e ν è omeomorfismo su C $\Rightarrow$ $\mathbb{C}P^1 \cong S^2 \cong C$

qualsiasi conica non degenere puo' essere scritta nella forma

$X_1^2 - X_0 X_2 = 0$

- conica in $\mathbb{C}P^2$ è definita come un polinomio quadratico omogeneo $F(X_0, X_1, X_2) = \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij} X_i X_j$

ho quindi una matrice associata ad F: $A = (a_{ij})_{i,j}$

conica non è degenere $\iff \det(A) \neq 0$

- ogni matrice simmetrica puo' essere diagonalizzata con un cambio di coordinate: $A = P^t D P$, con $D = \mathrm{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$

se la conica è non degenere

$\lambda_i \neq 0, \forall i \Rightarrow$ posso trasformare la conica in

$\lambda_0 X_0^2 + \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 X_2^2 = 0$

- normalizzando i coefficienti

$$X_1^2 + \frac{\lambda_0}{\lambda_1} X_0^2 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} X_2^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1^2 + a X_0^2 + b X_2^2 = 0$$

- cambio di variabile che porta la forma $X_1^2 + a X_0^2 + b X_2^2 = 0$ nella forma di Veronese (so che esiste perchè ho solo una classe proiettiva su $\mathbb{C}$)

$$\begin{cases} X_0 = \alpha y_0 + \beta y_2 \\ X_1 = \gamma z_1 \\ X_2 = \delta y_0 + \varepsilon y_2 \end{cases}, \text{ con } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \in \mathbb{C}^*$$

e trovo $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ in funzione di a e b.

$\square$

(3) Descrivere la topologia delle coniche proiettive complesse degeneri.

risposta:

conica degenere è un polinomio quadratico omogeneo con matrice associata di rango minore di 3 $(\det(A) = 0)$

classificazione coniche degeneri:

1) la matrice ha rango 2 $\Rightarrow$ la conica è data da due rette proiettive distinte (la conica viene fattorizzata in due fattori distinti) ossia $F(X) = L_1(X)\, L_2(X)$, L_i fattori lineari

2) rango 1 $\Rightarrow$ la conica si fattorizza con un fattore lineare ripetuto (molteplicità 2) ossia $F(X) = L(X)^2$

Andiamo a descriverne la topologia ossia a chi risultano essere omeomorfe:

1) rette distinte: $C = L_1 \cup L_2$

tramite un cambio di coordinate in ambiente proiettivo posso supporre che $L_1 = \{X_0 = 0\}$ e $L_2 = \{X_1 = 0\}$

(un cambio di coordinate in proiettivo è un omeomorfismo in $\mathbb{C}P^n$)

$\Rightarrow C = \{ X_0 X_1 = 0 \} = L_1 \cup L_2$ e $L_1 \cap L_2 = [0,0,1]$

ho un punto base in cui si intersecano

ogni retta in $\mathbb{C}P^2$ è omeomorfa a $\mathbb{C}P^1$:

$L_1 = \{ X_0 = 0 \} = \{ [0, X_1, X_2] \}, (X_1, X_2) \neq \underline{0} \Rightarrow [0, X_1, X_2] \longmapsto [X_1, X_2]$

$L_2 = \{ X_1 = 0 \} = \{ [X_0, 0, X_2] \}, (X_0, X_2) \neq \underline{0} \Rightarrow [X_0, 0, X_2] \longmapsto [X_0, X_2]$

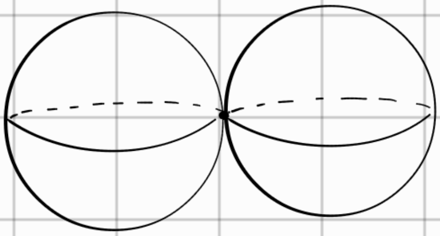
$\Rightarrow L_1 \cong \mathbb{C}P^1$, $L_2 \cong \mathbb{C}P^1$ e $[0,0,1] \longmapsto [0,1]$ pto all'∞

$\Rightarrow$ come spazio topologico ho che $C = \mathbb{C}P^1 \cup \mathbb{C}P^1$ che si toccano in un punto.

So che $\mathbb{C}P^1 \cong \mathbb{S}^2$ quindi intuitivamente la situazione è quella di due sfere con un punto in comune

$\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2 = (\mathbb{S}^2_1 \sqcup \mathbb{S}^2_2) / (N_1 \sim N_2)$

identifico i poli nord delle sfere due dimensionali



bouquet di sfere

mappa di Riemann: omeomorfismo tra $\mathbb{C}P^1$ e $\mathbb{S}^2$

$\rho : \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$$z \longmapsto \begin{cases} \left(\dfrac{2\,\mathrm{Re}(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{2\,\mathrm{Im}(z)}{1+|z|^2}, \dfrac{|z|^2-1}{1+|z|^2} \right), & z \neq \infty \\ (0,0,1), & z = \infty \end{cases}$$

ρ continua per la topologia quoziente, biiettiva, inversa continua

Vado quindi a definire l'omeomorfismo:

$f : C \longrightarrow S^2 \vee S^2$

- se $p \in L_1 \Rightarrow p = [0, x_1, x_2]$

$\Rightarrow f(p) = [\rho(x_1/x_2), N_2]$

(ii) se $x_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} \in \mathbb{C}$

(iii) se $x_2 = 0 \Rightarrow f(P) = [(0,0,1), N_2]$, $P = [0,0,1]$

- se $p \in L_2 \Rightarrow p = [x_0, 0, x_2]$

$f(p) = [N_1, \rho(x_0/x_2)]$

e $f(P) = [N_1, (0,0,1)]$

(quindi le due def. coincidono in $P = [0,0,1]$)

f <u>omeomorfismo</u>:

- continua su tutto C perché ho che le def. coincidono sul punto P
- biiettività okay
- inversa continua (sfruttando la topologia quoziente del bouquet)

2) <u>retta doppia</u>: $C = \{L^2 = 0\}$

come insieme di punti $C \equiv \{L = 0\}$ retta proiettiva complessa

$\Rightarrow C \cong \mathbb{C}P^1 \cong S^2$ tramite la mappa di Riemann.

$\square$

(4) Siano X, Y spazi topologici. Dimostrare che Y contraibile $\Rightarrow$

$\Rightarrow X \times Y \simeq X$.

risposta:

Y contraibile $\Rightarrow$ $\exists$ un punto $y_0 \in Y$ e un' omotopia

$H: Y \times I \longrightarrow Y$ t.c. $H(y,0) = y$, $H(y,1) = y_0$, $\forall y \in Y$.

Considero le due mappe:

$$\pi_1: X \times Y \longrightarrow X \qquad\qquad i: X \hookrightarrow X \times Y$$
$$(x,y) \longmapsto x \qquad\qquad x \longmapsto (x, y_0)$$

Devo trovare un' equivalenza omotopica tra $X \times Y$ e X

claim: p è equivalenza omotopica con inversa omotopica i

$\underline{p \circ i}$: $\forall x \in X$, $(p \circ i)(x) = p(x, y_0) = x$

$\Rightarrow p \circ i = id_X$

$\underline{i \circ p}$: $\forall (x,y) \in X \times Y$, $(i \circ p)(x,y) = i(x) = (x, y_0)$

Vado ora a definire una omotopia fra $i \circ p$ e $id_{X \times Y}$:

$H': (X \times Y) \times I \longrightarrow X \times Y$,

$H'((x,y), t) = (x, H(y,t))$ continua

$\Rightarrow$ $H'((x,y), 0) = (x, y)$

$H'((x,y), 1) = (x, y_0) = i \circ p(x,y)$

$\square$