

Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 8

Giustificare adeguatamente le risposte.

- 1) Siano $r, s \subset \mathbb{R}^3$ due rette sghembe. Dimostrare che esiste un omeomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che manda r e s in due rette parallele.
- 2) Sia X uno spazio topologico e supponiamo $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, con $X_i \subset X$ sottospazio topologico e $X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j \in I$. Dimostrare che X è unione topologica degli X_i se e solo se X_i è aperto in $X \forall i \in I$.
- 3) Determinare le componenti connesse di $X = [1, 2] \cup [3, 5] \cup [4, 6] \subset \mathbb{R}$.
- 4) Dimostrare che $\mathbb{R}$ è connesso.
- 5) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R} - \{0\}$.
- 6) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$.
- 7) Determinare le componenti connesse di $J = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$. C'è una componente connessa non aperta?
- 8) Consideriamo i seguenti sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$

$$A = \{0\} \times [-1, 1], \quad B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) \mid x > 0 \right\}, \quad X = A \cup B.$$

A, B e X sono connessi?

- 9) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R}_\ell$.
- 10) Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto non compatto e connesso. Dimostrare che la compattificazione di Alexandrov di X è connessa.
- 11) Sia $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Definiamo $\mathcal{C}_f: \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(Y)$ ponendo $\mathcal{C}_f(\mathcal{C}_x(X)) := \mathcal{C}_{f(x)}(Y)$. Dimostrare che la definizione è ben posta e che se f è un'omeomorfismo allora $\mathcal{C}_f$ è biettiva e si ha $(\mathcal{C}_f)^{-1} = \mathcal{C}_{f^{-1}}$.
- 12) Siano X e Y spazi topologici connessi. Dimostrare che $X \times Y$ è connesso.
Suggerimento: esprimere $X \times Y$ come unione di connessi con intersezione non vuota.
- 13) Descrivere $\overline{\mathbb{R} \vee \mathbb{R}}$ identificandolo con sottospazio di $\mathbb{R}^2$ di semplice descrizione.

Foglio 8:

- 1) Siano $\pi, s \subset \mathbb{R}^3$ rette sghembe in $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che $\exists$ un omeomorfismo di $\mathbb{R}^3$ che manda π ed s in due rette parallele.

risposta:

v. file con soluzione es. 1 foglio 8

(2) Dato X spazio topologico, $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, con $X_i \subset X$ sottospazio topologico, $X_i \cap X_j = \emptyset$, $\forall i, j \in I$. Dimostrare che X è unione topologica degli X_i se e solo se X_i è aperto in X $\forall i \in I$.

risposta:

$$(\Rightarrow) \quad X \cong \bigsqcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \cong \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

posso identificare $X_i \times \{i\}$ con X_i tramite l'omeomorfismo

$$g_i: X_i \times \{i\} \longrightarrow X_i \quad \text{omeomorfismo}$$

$$(x, i) \longmapsto x$$

$$\text{ho un omeomorfismo } g: \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\}) \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ omeomorfismo è una mappa aperta quindi manda aperti in aperti.

Siccome $\underline{X_i \times \{i\}}$ è aperto ^(*) in $\bigcup_{i \in I} X_i$ e $g(X_i \times \{i\}) = X_i \Rightarrow$

$\Rightarrow X_i$ aperto in X $\forall i \in I$.

(*) dim:

la topologia di cui ho dotato il prodotto topologico è t.c.

$$W \subset \bigcup_{i \in I} X_i \text{ è aperto} \Leftrightarrow W \cap X_i \text{ aperto in } X_i \quad \forall i \in I$$

$$\Rightarrow (X_i \times \{i\}) \cap X_i = X_i \text{ aperto in } X_i \Rightarrow X_i \times \{i\} \text{ aperto}$$

$$\text{in } \bigcup_{i \in I} X_i.$$

$$(\Leftarrow) \quad \text{considero la mappa } f: X = \bigcup_{i \in I} X_i \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i \times \{i\}$$

definita da $f(x) = (x, i)$ con $x \in X_i$.

Essa è ben definita e la sua inversa risulta essere

$$g: \bigsqcup_{i \in I} X_i \longrightarrow \bigcup_{i \in I} X_i$$

$$(x, i) \longmapsto x$$

Se verifico che sono entrambe continue $\Rightarrow$ sono omeomorfismi.

• Sia $W \subset \bigsqcup_{i \in I} X_i$ aperto $\Rightarrow W = \bigcup_{i \in I} M_i \times \{i\}$ con $M_i \subset X_i$ aperti in X_i $\forall i \in I$.

X_i aperto in $X \Rightarrow M_i$ aperti in X ($M_i = V_i \cap X_i$ con V_i aperto in X)

$$\Rightarrow f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} M_i \times \{i\}\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(M_i \times \{i\}) \stackrel{\text{def. di } f}{=} \bigcup_{i \in I} M_i$$

aperto in X .

• Sia U aperto in X .

$$g^{-1}(U) = g^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} (U \cap X_i)\right) = \bigcup_{i \in I} g^{-1}(U \cap X_i) = \bigcup_{i \in I} (U \cap X_i) \times \{i\}$$

aperto in $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ poiché $U \cap X_i$ aperto in X_i (top. sottospazio).

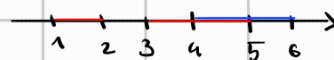
□

3) Determinare le componenti connesse di $X = [1, 2] \cup [3, 5] \cup [4, 6]$ in $\mathbb{R}$.

Risposta:

$$\cdot \text{ se } x \in [1, 2] \Rightarrow C_x(X) = \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ connesso}}} C = [1, 2]$$

$$\cdot \text{ se } x \in [3, 6]$$



$$\Rightarrow C_x(X) = \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ connesso}}} C = [3, 6]$$

$$\cdot \text{ se } x \in [4, 6] \Rightarrow x \in [3, 6] \Rightarrow C_x(X) = [3, 6]$$

$$\Rightarrow \ell(X) = \{ [1, 2], [3, 6] \}$$

(4) Dimostrare che $\mathbb{R}$ è connesso.

Risposta:

Prop: La connessione è una proprietà topologica.

dim:

Sia X spazio connesso, sia Y uno spazio topologico e sia $f: X \rightarrow Y$ un omeomorfismo.

f è quindi biettiva e continua. So che se $f: X \rightarrow Y$ continua e X connesso $\Rightarrow f(X)$ connesso.

Se f omo $\Rightarrow f(X) = Y$ connesso $\Rightarrow Y$ connesso $\square$

Teorema: Gli intervalli di $\mathbb{R}$ sono convessi.

Dim:

p.a. suppongo J intervallo non convesso $\Rightarrow \exists A, B$ chiusi non vuoti
disgiunti di $\mathbb{R}$ t.c. $J \subset A \cup B$, $J = (A \cap J) \cup (B \cap J)$ e
 $A \cap J$ e $B \cap J$ non vuoti e disgiunti.



Sia $a \in A \cap J$, $b \in B \cap J$ e suppongo $a < b$.

J intervallo $\Rightarrow [a, b] \subset J$.

$A \cap [a, b]$ chiuso in $\mathbb{R} \Rightarrow$ contiene il suo estremo superiore

ovv. $z = \sup \{x : x \in A \cap [a, b]\} \in A \cap [a, b]$

$z \in A \cap [a, b]$, $b \in B \Rightarrow z < b$ e $(z, b) \subset B$.

B chiuso $\Rightarrow$ contiene tutti i suoi punti limite $\Rightarrow z \in B$ $\downarrow$

□

Considero quindi $(0, 1) \subset \mathbb{R}$. $(0, 1)$ è convesso.

Ho il seguente omeomorfismo:

$$f: (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$$

f continua, biettiva e inversa continua

$$f^{-1}(y) = \frac{\arctan(y)}{\pi} + \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \mathbb{R}$ è convesso.

□

(5) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Risposta:

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(X) = \{(-\infty, 0), (0, +\infty)\}$$

$(-\infty, 0)$ è chiuso in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \setminus (-\infty, 0) = (0, +\infty) \text{ aperto.}$$

(6) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Risposta:

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$$

$$\mathcal{C}(X) = \{(n, n+1) : n \in \mathbb{Z}\}$$

sono chiusi in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ perché:

$$(n, n+1) = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) \cap \underbrace{[n, n+1]}_{\text{chiuso in } \mathbb{R}}$$

(7) Determinare le componenti connesse di $J = \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

C'è una componente connessa non aperta?

Risposta:

nota: J è dotato della topologia di sottospazio di $\mathbb{R}$.

$$\mathcal{C}(X) = \left\{ \{0\}, \left\{ \frac{1}{n} \right\} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Le componenti connesse sono i punti perché se considero

$$\left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right\} = \left\{ \frac{1}{n_1} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{n_2} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{1}{n_1} \right\} = \mathbb{J} \cap \left(\frac{1}{n_1} - \varepsilon_1, \frac{1}{n_1} + \varepsilon_1 \right)$$

$$\left\{ \frac{1}{n_2} \right\} = \mathbb{J} \cap \left(\frac{1}{n_2} - \varepsilon_2, \frac{1}{n_2} + \varepsilon_2 \right), \quad \text{sperti in } \mathbb{J} \text{ non vuoti e disgiunti}$$

$$\text{con} \quad \varepsilon_1 < \min \{ \text{dist}(1/n_1 - 1, 1/n_1), \text{dist}(1/n_1, 1/n_1 + 1) \}$$

$$\varepsilon_2 < \min \{ \text{dist}(1/n_2 - 1, 1/n_2), \text{dist}(1/n_2, 1/n_2 + 1) \}$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2} \right\} \text{ non } \acute{\text{e}} \text{ connesso.}$$

Abbiamo detto che $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ sono sperti in $\mathbb{J}$.

Componente connessa non aperta: $\ell_0(\mathbb{J}) = \{0\}$

$\{0\}$ è chiuso ma non aperto.

$$\text{chiuso:} \quad \{0\} = \mathbb{J} \cap \{0\}$$

non aperto: considerando un qualsiasi $\mathcal{U}$ intorno aperto di 0

$$\mathcal{U} = (-\varepsilon, \varepsilon) \quad \text{ha} \quad \text{che} \quad \mathcal{U} \cap \mathbb{J} \neq \{0\}.$$

$$\text{Infatti fissato } \varepsilon \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad \frac{1}{\bar{n}} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{\bar{n}} \in \mathcal{U} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{U} \cap \mathbb{J} \neq \{0\} \quad (\text{in realtà } \mathcal{U} \text{ contiene infiniti pti del}$$

tipo $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, qui sto dicendo che ne esiste almeno uno).

$$\Rightarrow \{0\} \text{ non } \acute{\text{e}} \text{ aperto in } \mathbb{J}.$$

(8) Consideriamo i sottospazi topologici di $\mathbb{R}^2$

$$A = \{0\} \times [-1, 1], \quad B = \left\{ \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0 \right\}, \quad X = A \cup B.$$

A, B e X sono connessi?

risposta:

A connesso: So che la connessione è una proprietà topologica.

Ho il seguente omeomorfismo:

$$f: \{0\} \times [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$

$$(0, x) \longmapsto x$$

continua, biettiva

inversa: $f^{-1}: [-1, 1] \longrightarrow \{0\} \times [-1, 1]$

$$x \longmapsto (0, x)$$

continua

$[-1, 1]$ è connesso poiché è un intervallo di $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow A$ è connesso.

B connesso:

$$\left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x}\right) : x > 0 \right\} \simeq (0, +\infty)$$

quindi risulta essere connesso.

Infatti ho il seguente omeomorfismo:

$$\varphi: (0, +\infty) \longrightarrow \textcircled{B}$$

$$x \longmapsto \left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

—→ grafico di $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

φ continua, biettiva

inversa: $\varphi^{-1}: B \longrightarrow (0, +\infty)$

$$(x, t) \longmapsto x$$

proiezione sulla prima coordinata che è quindi una funzione continua.

$X = A \cup B$:

$X = A \cup B = \mathcal{C}_X(B)$ e B connesso $\Rightarrow X$ connesso.

(9) Determinare le componenti connesse di $\mathbb{R}$.

Risposta:

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora ho che $x \in \mathcal{C}_X(X)$ per cui ogni componente connessa non può essere vuota e contiene almeno un punto.

Considero ora S sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che $x, y \in S$, $x \neq y$, $x < y$.

Considero quindi: $A = (-\infty, y) = \bigcup_{a < y} [a, y)$ (aperto in $\mathbb{R}$) e

$B = [y, +\infty)$ aperto in $\mathbb{R}$.

Allora ho che $S \cap A \neq \emptyset$ poiché $x \in S \cap A$, $S \cap A \neq S$ perché

$y \notin S \cap A$ e $S = (S \cap A) \cup (S \cap B)$ poiché $A \cup B = \mathbb{R}$.

$S \cap A$ è aperto in S poiché A aperto in $\mathbb{R}$ e

$S \cap A$ chiuso in S poiché $S \setminus (S \cap A) = S \cap B$ aperto in S

$\Rightarrow S$ non è connesso in $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ insiemi che contengono 2 punti non sono connessi $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ le componenti connesse di $\mathbb{R}^n$ sono i singoletti $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}^n$
($\mathbb{R}^n$ totalmente disconnesso)

(10) Sia X uno spazio topologico di Hausdorff localmente compatto non compatto e connesso. Dimostrare che la compattificazione di Aleksandrov di X è connessa.

risposta:

devo dimostrare che la compattificazione di Aleksandrov

$\hat{X} = X \cup \{\infty\}$ è connessa dato che X è connesso.

Suppongo p.a. che $\hat{X}$ non sia connesso. Allora $\exists \hat{U}, \hat{V}$ aperti

di $\hat{X}$ tali che $\hat{U} \cup \hat{V} = \hat{X}$, $\hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset$ e $\hat{U} \neq \emptyset$, $\hat{V} \neq \emptyset$.

Ho 3 casi possibili:

a) $\hat{U}, \hat{V}$ sono aperti di tipo (a):

$$\Rightarrow \hat{U}, \hat{V} \subset X \Rightarrow \infty \notin \hat{U} \cup \hat{V} \Rightarrow \hat{X} \neq \hat{U} \cup \hat{V}$$

b) $\hat{U}, \hat{V}$ sono aperti di tipo (b):

$$\infty \in \hat{U}, \infty \in \hat{V} \Rightarrow \infty \in \hat{U} \cap \hat{V} \Rightarrow \hat{U} \cap \hat{V} \neq \emptyset \quad \nearrow$$

c) $\hat{U}, \hat{V}$ sono uno di tipo (a) e uno di tipo (b):

$\hat{U}$ di tipo (a) e $\hat{V}$ di tipo (b)

$$\hat{X} = \hat{U} \cup \hat{V}, \quad \hat{U} \cap \hat{V} = \emptyset, \quad \hat{U} \neq \emptyset, \quad \hat{V} \neq \emptyset \Rightarrow \text{siccome } X \text{ è}$$

compatto e X è aperto stesso in $\hat{X} \Rightarrow X \subset \hat{U} \quad (*)$

(ossia X deve essere tutto contenuto in uno dei due aperti)

$$\Rightarrow \hat{X} = X \cup \{\infty\} \subset \hat{U} \cup \{\infty\}$$

$$\hat{U} \cup \hat{V} \Rightarrow \hat{V} \subset \{\infty\} \Rightarrow \hat{V} = \{\infty\}$$

ma $\{\infty\}$ non risulta essere aperto in $\hat{X}$:

$$\infty \in \{\infty\} \Rightarrow \text{dovrebbe essere di tipo (b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X \cup \{\infty\} \text{ è compatto in } X \text{ ma } X \cup \{\infty\} = X \text{ non}$$

compatto $\nearrow$

(*) dim:

p.a. suppongo che $X \not\subset \hat{U} \Rightarrow X$ interseca sia $\hat{U}$ che $\hat{V} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists x_{\hat{U}} \in X \cap \hat{U}, \quad \exists x_{\hat{V}} \in X \cap \hat{V}.$$

Considero quindi $U = X \cap \hat{U} \neq \emptyset$ e $V = X \cap \hat{V} \neq \emptyset$.

Questi sono aperti in X , non vuoti, disgiunti tali che

$$(X \cap \hat{U}) \cup (X \cap \hat{V}) = (\hat{U} \cup \hat{V}) \cap X = \hat{X} \cap X = X \quad \nearrow$$

□

(11) $f: X \rightarrow Y$ applicazione continua. Definiamo

$$C_f: C(X) \rightarrow C(Y) \text{ ponendo } C_f(C_X(X)) := C_{f(x)}(Y).$$

Dimostrare che la definizione è ben posta e che se f è omeomorfismo allora C_f è biettiva e $(C_f)^{-1} = C_{f^{-1}}$.

risposta:

ben definita: considero $C_X(X) = C_{X'}(X)$. Devo verificare che

$$C_f(C_X(X)) = C_f(C_{X'}(X)).$$

$$C_f(C_X(X)) = C_{f(x)}(Y)$$

$$C_f(C_{X'}(X)) = C_{f(x')}(Y)$$

so che $x \in C_X(X)$, $x' \in C_{X'}(X)$ e $C_X(X) = C_{X'}(X) \Rightarrow$

$\Rightarrow x, x' \in C_X(X)$ e $C_X(X)$ convessa

f continua $\Rightarrow f(C_X(X))$ è convessa e contiene sia

$f(x)$ che $f(x') \Rightarrow$ siccome $C_{f(x)}(Y)$ è per definizione

l'insieme massimale convesso che contiene $f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(C_X(X)) \subseteq C_{f(x)}(Y)$$

$$\Rightarrow f(x') \in f(C_X(X)) \subseteq C_{f(x)}(Y)$$

$$\Rightarrow C_{f(x')}(Y) \subseteq C_{f(x)}(Y) \text{ per massimalità di } C_{f(x)}(Y)$$

Posso fare lo stesso ragionamento considerando invece x'

$$\text{ottenendo l'inclusione inversa } \Rightarrow C_{f(x)}(Y) = C_{f(x')}(Y).$$

f oves $\Rightarrow l_f$ biiettiva:

l_f iniettiva:

Suppongo che $l_f(l_x(X)) = l_f(l_{x'}(X))$

$$\Rightarrow l_{f(x)}(y) = l_{f(x')}(y)$$

$$f \text{ oves} \Rightarrow x = f^{-1}f(x), \quad x' = f^{-1}f(x')$$

$$\Rightarrow l_x(X) = l_{f^{-1}f(x)}(X) = l_{f^{-1}f(x')}(X) = l_{x'}(X)$$

(poiché l'immagine tramite f^{-1} di una componente connessa è una componente connessa)

l_f suriettiva:

Sia $l_y(y) \in l(y)$.

f è suriettiva $\Rightarrow \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$

$$\Rightarrow l_y(y) = l_{f(x)}(y) = l_f(l_x(X)) \quad \exists l_x(X) \in l(X).$$

$$\underline{(l_f)^{-1} = l_{f^{-1}}:}$$

devo dimostrare che $l_{f^{-1}} \circ l_f = \text{id}_{l(X)}$ e $l_f \circ l_{f^{-1}} = \text{id}_{l(y)}$

considero quindi $l_x(X) \in l(X)$.

Allora:

$$l_{f^{-1}} \circ l_f(l_x(X)) = l_{f^{-1}}(l_{f(x)}(y)) = l_{f^{-1}(f(x))}(X) = l_x(X)$$

considerando invece $l_y(y) \in l(y)$:

$$l_f \circ l_{f^{-1}}(l_y(y)) = l_f(l_{f^{-1}(y)}(X)) = l_{ff^{-1}(y)}(y) = l_y(y)$$

(12) Siano X, Y spazi topologici connessi. Dimostrare che $X \times Y$ è connesso.

risposta:

Fisso $y \in Y$ e considero $\forall x \in X$ l'insieme

$$U_x = (\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\}).$$

U_x è connesso $\forall x \in X$ poiché unione di due insiemi connessi

$\{x\} \times Y \cong Y$ connesso e $X \times \{y\} \cong X$ connesso con intersezione

non vuota poiché $\{x\} \times Y \cap X \times \{y\} = (x, y)$.

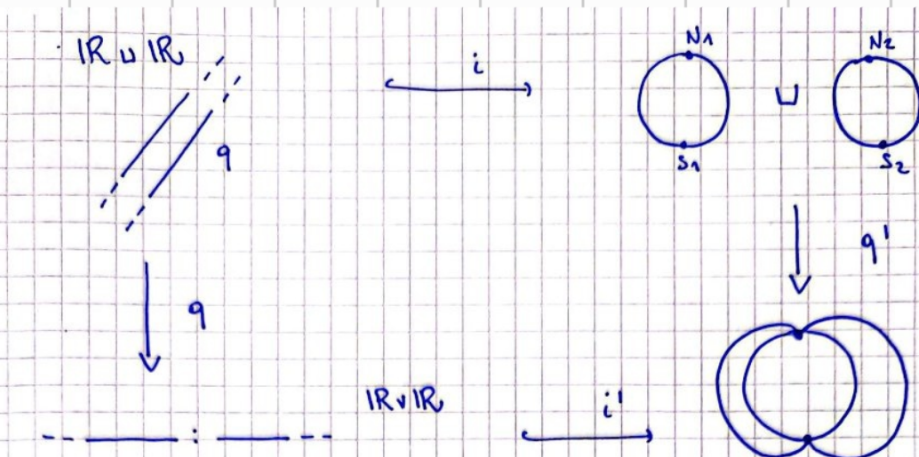
Allora ho che $\bigcup_{x \in X} U_x = X \times Y$ e $\bigcap_{x \in X} U_x = X \times \{y\} \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow X \times Y$ connesso.

□

(13) Descrivere $\widehat{\mathbb{R} \vee \mathbb{R}}$

risposta:



$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, t) &\longrightarrow S^1 \\ t &\longmapsto \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}, s) &\longrightarrow S^1 \\ s &\longmapsto \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1} \right) \end{aligned}$$

la compattificazione di Aleksandrov di $\mathbb{R} \times S^1$ (e' omeomorfa a S^1)

Ora passo al quoziente $(\mathbb{R}, t) \sqcup (\mathbb{R}, s) / \sim = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} & \xrightarrow{i} & S^1 \sqcup S^1 \\ q \downarrow \cong & & \downarrow q' = j \circ \tilde{\pi} \\ \mathbb{R} \vee \mathbb{R} & \xrightarrow{i'} & S^1 \vee S^1 \end{array}$$

con $\tilde{\pi}$ che identifica i poli ~~su~~ sud e j i poli nord
per esercizio provare le proprieta' delle mappe.