Tutorato Analisi Matematica 1 - 2025/2026

Tutor: Roberto Marchello - roberto.marchello@sissa.it

Tutorato 13 - Esercizi misti - 12/01/2026

ESERCIZI

Es.1 (31/01/2020) (numeri complessi)

i) $\bar{z} z^2 + |z|^2 = -2z$ ii) $\bar{z} = i z^3$

Es. 2

i) Si trovi il polinomio di Taylor di grado 2 di

$$f(x) = \log(\operatorname{sen}(x)) \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

Si scriva la relativa formula di Taylor con resto di Lagrange.

ii) Usando il punto i) si calcoli $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}$

Es.3 (14/06/2022)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile. Si provi che se l'equazione $f(x) = 0$ ha come soluzione $x = 0, 1, 2$, allora l'equazione $f'(x) = 0$ ha almeno 2 soluzioni nell'intervallo $(0, 2)$.

Es. 4 (6/07/2022)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $f'(x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Si provi che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Es. 5 (1/09/2022)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $f(2n) = n$ e $f(2n+1) = -n$.

Si provi che f e f' sono suriettive.

Es. 6 (15/09/2023)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pari, derivabile 3 volte, tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = -1$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Dimostrare che:

i) esistono almeno 2 punti, oltre a 0, in cui la derivata si annulla

ii) esistono almeno 2 punti di minimo

iii) esistono almeno 2 punti in cui la derivata seconda si annulla

iv) esiste almeno un punto in cui la derivata terza si annulla

Es. 7 (16/09/2024)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile tale che $\lim_{x \to 1} \frac{f(x+1)}{x-1} = -1$

i) calcolare $f(2)$

ii) calcolare $f'(2)$

iii) dim. che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, allora $\exists\, \xi > 2$ tale che $f(\xi) = 0$

SOLUZIONI

Es. 1

i) In forma algebrica: $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\bar{z} = a - ib$$
$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,2ab$$
$$|z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\bar{z}\, z^2 + |z|^2 + 2z = 0 \implies (a-ib)(a^2 - b^2 + i\,2ab) + a^2 + b^2 + 2(a+ib) = 0$$

$$\implies a^3 - ab^2 + i\,2a^2b - iba^2 + ib^3 - i^2 2ab^2 + a^2 + b^2 + 2a + i\,2b = 0$$

$$\implies a^3 - ab^2 + 2ab^2 + a^2 + b^2 + 2a + i\left(2a^2b - a^2b + b^3 + 2b\right) = 0$$

Sia parte reale che immaginaria si devono annullare:

$$\begin{cases} a^3 + ab^2 + a^2 + b^2 + 2a = 0 \\ a^2b + b^3 + 2b = 0 \longrightarrow b\,(a^2 + b^2 + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ \underline{a^2 + b^2 = -2} \rightarrow \text{no soluzioni!} \end{cases} \end{cases}$$

Quindi necessariamente $\underline{b = 0}$. Sostituiamo nella prima equazione per trovare a:

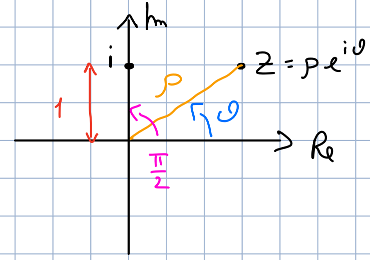
$$a^3 + a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 + a + 2) = 0 \implies a = 0 \quad \text{oppure} \quad a^2 + a + 2 = 0$$
$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} \implies \nexists\, a \in \mathbb{R}$$

$$\implies \underline{a = 0}$$

L'unica soluzione dell'equazione è dunque $\underline{z = 0}$ ($z = a + ib$ con $a = b = 0$).

ii) Metodo 1 (forma esponenziale)



In forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$ $\quad (\text{con } e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$

$\rho \geq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ ma per periodicità consideriamo $\vartheta \in [0, 2\pi)$

$$\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta}$$

$$i = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z^3 = (\rho e^{i\vartheta})^3 = \rho^3 e^{i3\vartheta}$$

$$\Rightarrow \rho e^{-i\vartheta} = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot \rho^3 e^{i3\vartheta}$$

$$\rho e^{-i\vartheta} = \rho^3 e^{i(3\vartheta + \frac{\pi}{2})}$$

$\Rightarrow$ due numeri complessi sono uguali se hanno stesso modulo e angolo (con periodicità)

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho^3 \\ -\vartheta = 3\vartheta + \frac{\pi}{2} + 2K\pi \end{cases}, \quad K \in \mathbb{Z}$$

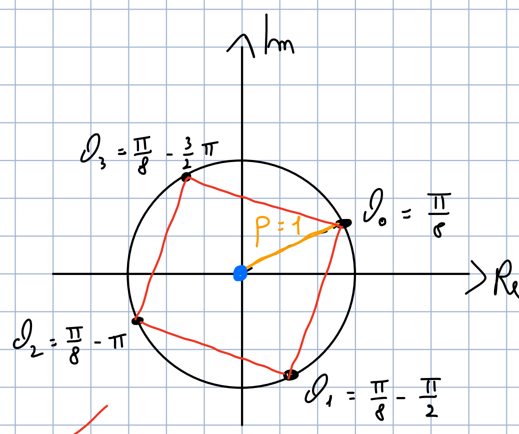
$$\begin{cases} \rho(1 - \rho^2) = 0 \Rightarrow \rho = 0 \text{ o } \rho = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{8} - \frac{K\pi}{2} \qquad K \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ma per periodicità consideriamo $K \in \{0, 1, 2, 3\}$, per $K \geq 4$ gli angoli si ripetono!

Dunque le soluzioni sono:

$\rho = 0 \Rightarrow z = 0$ (per qualsiasi angolo...)

$\rho = 1 \Rightarrow z = e^{i(-\frac{\pi}{8} - K\frac{\pi}{2})}$, $K \in \{0, 1, 2, 3\}$



sul piano di Gauss, le 4 soluzioni per $\rho = 1$ stanno ai vertici di un quadrato!

Metodo 2 (forma algebrica) (NON CONSIGLIATO)

In forma algebrica: $z = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$$\bar{z} = a - ib$$

$$z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + i\,2ab$$

$$z^3 = (a^2 - b^2 + i\,2ab)(a+ib) = a^3 - ab^2 + i\,2a^2b + iba^2 - ib^3 + i^2 2ab^2$$

$$= a^3 - 3ab^2 + i(-b^3 + 3a^2b)$$

$$\bar{z} = iz^3 \Rightarrow a - ib = b^3 - 3a^2b + i(a^3 - 3ab^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3a^2b + b^3 = 0 \\ a^3 - 3ab^2 + b = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ sistema di equazioni di 3° grado, in generale non risolvibile o solo con formule complesse...

Torniamo all'equazione iniziale e notiamo che prendendo i moduli:

$$\underbrace{|\bar{z}|}_{=|z|} = \underbrace{|iz^3|}_{=|i||z^3| = |z^3| = |z|^3} \Rightarrow |z| = |z|^3 \Rightarrow z = 0 \text{ è soluzione}$$

Se $z \neq 0$, soddisfa $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$

$\hookrightarrow$ sul piano di Gauss, le soluzioni stanno sulla circonferenza unitaria

Torniamo all'equazione e notiamo che $z\bar{z} = |z|^2 = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

$$\bar{z} = iz^3 \Rightarrow 1 = iz^4 \Rightarrow z^4 = \frac{1}{i} = -i \Rightarrow z^4 = -i$$

$\hookrightarrow$ le soluzioni sono le radici quarte di $-i$

A questo punto o passiamo in coordinate polari/esponenziale o scriviamo:

$$\begin{cases} z^2 = w \\ w^2 = -i \end{cases}$$

fattibile seguendo i ragionamenti dell'Es. 4 del Tutorato 3, ma molto lungo

e risolviamo iterativamente prima per w (2 soluzioni) e poi per z (4 soluzioni)

Es. 2

Il polinomio è

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

Calcoliamo tutto il necessario (noti f e $x_0 = \frac{\pi}{2}$)

$$f(x) = \log(\operatorname{sen} x) \longrightarrow f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{Tan} x} \longrightarrow f'\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

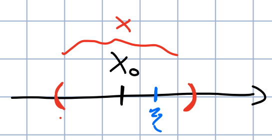
$$f''(x) = \frac{-\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \longrightarrow f''\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$\Rightarrow P_2(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

La formula con resto di Lagrange è

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

con ξ in un intorno di x_0 e $\xi \to \frac{\pi}{2}$ se $x \to \frac{\pi}{2}$



Per noi $f^{(3)}(x) = \dfrac{2 \operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^4 x} = \dfrac{2\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\cos \xi}{3 \operatorname{sen}^3 \xi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$$

(ξ numero non noto!)

ii) $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log(\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{-\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2} + \frac{\cos\xi}{3\operatorname{sen}^3 \xi}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \cancel{\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}}{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3}$$

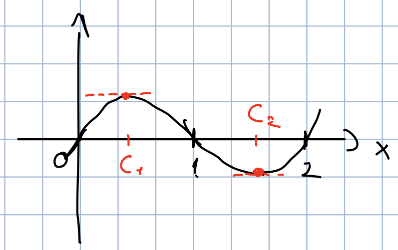
$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos \xi}{3 \operatorname{sen}^3 \xi} \underset{\substack{\uparrow \\ \xi \to \frac{\pi}{2} \\ \text{se} \\ x \to \frac{\pi}{2}}}{=} \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{3 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{2}} = 0$$

(si veda def. resto di Lagrange)

Es. 3

i) f continua su $[0,1]$, derivabile su $(0,1)$, $f(0)=f(1)=0$

$\Rightarrow$ per il Teorema di Rolle $\exists\, c_1 \in (0,1)$ tale che $f'(c_1)=0$



ii) f continua su $[1,2]$, derivabile su $(1,2)$, $f(1)=f(2)=0$

$\Rightarrow$ per il Teorema di Rolle $\exists\, c_2 \in (1,2)$ tale che $f'(c_2)=0$

Notiamo che $c_1 \neq c_2$ perché stanno su intervalli disgiunti.

Es. 4

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}$ e applichiamo il Teorema di Lagrange distinguendo 2 casi:

i) $x > x_0$ $\rightarrow$ applichiamo Lagrange su $[x_0, x]$, dunque $\exists\, c_1 \in (x_0, x)$ tale che

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{f'(c_1)}_{\geq 1}(x - x_0) \geq x - x_0 \quad \Rightarrow f(x) \geq x + f(x_0) - x_0$$

Dato che $\lim_{x \to +\infty} (x + f(x_0) - x_0) = +\infty$, dal Teorema del confronto $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

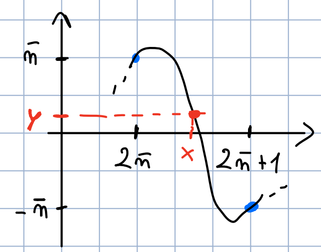
ii) $x < x_0$ $\rightarrow$ applichiamo Lagrange su $[x, x_0]$, dunque $\exists\, c_2 \in (x, x_0)$ tale che

$$f(x_0) - f(x) = \underbrace{f'(c_2)}_{\geq 1}(x_0 - x) \geq x_0 - x \quad \Rightarrow f(x) \leq x + f(x_0) - x_0$$

Dato che $\lim_{x \to -\infty} (x + f(x_0) - x_0) = -\infty$, dal Teorema del confronto $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Es. 5

i) Vogliamo mostrare che f è suriettiva, dunque $\forall y \in \mathbb{R} \ \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$.



Sia $y \in \mathbb{R}$ arbitrario, scelgo $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} \geq |y|$. Si ha

$$f(2\bar{n}) = \bar{n} \geq y \quad e \quad f(2\bar{n}+1) = -\bar{n} \leq y$$

Poiché f è continua, per il Teorema dei valori intermedi $\exists x \in [2\bar{n}, 2\bar{n}+1]$ tale che $f(x) = y$.

ii) Sia y arbitrario e $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\bar{n} > |y|$. Applichiamo Lagrange su $[2\bar{n}, 2\bar{n}+1]$

$$\Rightarrow \exists x_1 \in (2\bar{n}, 2\bar{n}+1) : f(2\bar{n}+1) - f(2\bar{n}) = f'(x_1)(2\bar{n}+1-2\bar{n}) \Rightarrow f'(x_1) = -2\bar{n} \leq y$$

Applichiamo Lagrange su $[2\bar{n}+1, 2\bar{n}+2]$

$$\Rightarrow \exists x_2 \in (2\bar{n}+1, 2\bar{n}+2) : f(\underbrace{2\bar{n}+2}_{2(\bar{n}+1)}) - f(2\bar{n}+1) = f'(x_2)(2\bar{n}+2-2\bar{n}-1)$$

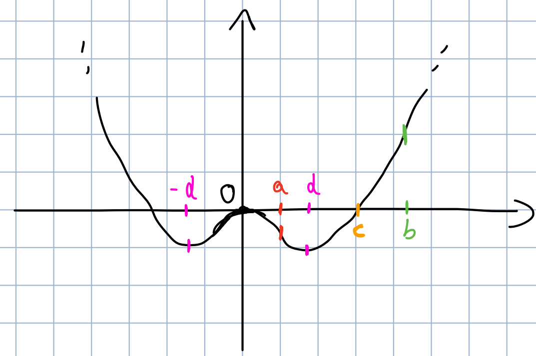
$$\Rightarrow f'(x_2) = \bar{n}+1+\bar{n} = 2\bar{n}+1 \geq y$$

$\Rightarrow$ per il Teorema dei valori intermedi $\exists x \in [x_1, x_2] : f(x) = y$

Es. 6

Notiamo che per parità anche $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Poiché $f''(0) < 0$, per continuità $\exists\, \delta > 0 : f''(x) < 0$ per $x \in (-\delta, \delta)$, dunque 0 è max. locale e $f(x) < 0$ per $-\delta < x < \delta$.



Fissato $0 < a < \delta$, si ha $f(a) < 0$.

Dato che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\exists\, b > a : f(b) > 0$

$\Rightarrow \exists\, c \in (a, b) : f(c) = 0$ per Teo. esistenza zeri.

Dato che f è decrescente in a, necessariamente esiste un minimo $d \in (a, c) : f'(d) = 0$.

Per parità anche $-d$ è minimo e soddisfa $f'(-d) = 0$. $\Rightarrow$ punti i) e ii) OK.

iii) Applichiamo Rolle a f' in $(0, d)$ $\Rightarrow \exists\, e \in (0, d) : f''(e) = 0$

Per parità $f''(-e) = 0$ (f pari $\Rightarrow f'$ dispari $\Rightarrow f''$ pari ...)

$f(x) = f(-x)$

$f'(x) = -f'(x)$

iv) Applichiamo Rolle a f'' in $(-e, e)$ $\Rightarrow \exists\, z \in (-e, e) : f^{(3)}(z) = 0$

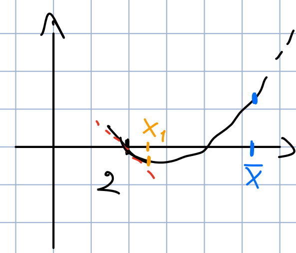
Es. 7

Poniamo $x+1=t$ e scriviamo il limite come $\lim\limits_{t\to 2}\frac{f(t)}{t-2}=-1$

i) Notiamo che se $\lim\limits_{t\to 2} f(t)$ non fosse nullo, necessariamente $\lim\limits_{t\to 2}\frac{f(t)}{t-2}$ sarebbe infinito o $\nexists$

dato che $\lim\limits_{t\to 2}(t-2)=0$. Dunque $\lim\limits_{t\to 2} f(t)=0$, da cui per continuità segue che $f(2)=0$.

ii) Dalla definizione di derivata



$$f'(2)=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-\overbrace{f(2)}^{=0}}{t-2}=\lim_{t\to 2}\frac{f(t)}{t-2}=-1$$

iii) Se $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$, allora $\forall M>0 \quad \exists\, \bar{x}>0$: se $x\geq\bar{x}$ allora $f(x)\geq M$

Dato che $f'(2)=-1$, $\exists\, x_1>2$ tale che $f(x_1)<0$. (f decrescente in quell'intorno)

$\Rightarrow$ dal Teorema di esistenza zeri $\exists\, \xi\in(x_1,\bar{x}) : f(\xi)=0$ (con $\xi>x_1>2$)