Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2025-2026, Primo esame invernale

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

• (3 punti) Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\log\left(1+x^2+e^x\right) - \frac{1}{(\sin(x^{-1})}-\frac{1}{3x^2}\left(1-e^{-x}\right)}{\arctan\left(x^{-3}\right)}$ $= L$?

$\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan x^{-3}}{x^{-3}} = \lim_{y\to 0} \dfrac{\arctan y}{y} = 1$ per $y = x^{-3}$

num $= \lg\left(e^x\left(1+e^{-x}+e^{-x}x^2\right)\right) - \dfrac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right)} - \dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{e^{-x}}{3x^2}$

$= x - \dfrac{x}{1-\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)} - \dfrac{1}{3x^2} + o(x^{-100}) = \cancel{x} - x\left(\cancel{1}+\frac{1}{6x^2}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) - \frac{1}{3x^2} + o\left(x^{-100}\right)$

$= -\dfrac{1}{6x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right) \Rightarrow$ $L = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{6}x^{-1}}{x^{-3}} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{6}x^2 = -\infty$

• (3 punti) si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\arcsin(t)}{1-\cosh(t)}dt$;

$\arcsin t = t + o(t^2)$ $\quad ch(t) = \dfrac{e^t+e^{-t}}{2} = 1 + \dfrac{t^2}{2} + o(t^3)$)

$\lim_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t\,(1+o(t))}{-\frac{t^2}{2}(1+o(t))} = \lim_{x\to 0^+} (-2)\int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}+o(1)\right)dt$

$= -2 \lg 2$

• (2 punti) si verifichi dove e' definita $f'(x)$ per $f(x) := \displaystyle\int_0^{\log|x-1|} [t]dt$ con $[t]$ la parte intera di t.

E' derivabile in corrispondenza ad $[\lg|x-1|] \notin \mathbb{Z}$ per il Teor fond del calcolo con

$f'(x) = \dfrac{1}{x-1}\left[\lg|x-1|\right]$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione
$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

- si trovi il dominio di f e se ne analizzi il comportamento sulle estremita del dominio;

$\text{Dom} = \{x : x \neq 1\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$$

- si calcoli $f'(x)$, si trovino punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \text{ per } x_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$$

$f'(x) < 0$ per $x_- < x < x_+$ e $f'(x) > 0$ per $x \notin [x_-, x_+]$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}\left[(x-1)^2 - (x^2-2x-1)\right]$$

- si calcoli la derivata seconda e si studi concavita e convessita;

$$= \frac{2}{(x-1)^3}\left[\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 1 - (\cancel{x^2} - \cancel{2x} - 1)\right] = \frac{4}{(x-1)^3}$$. Quindi

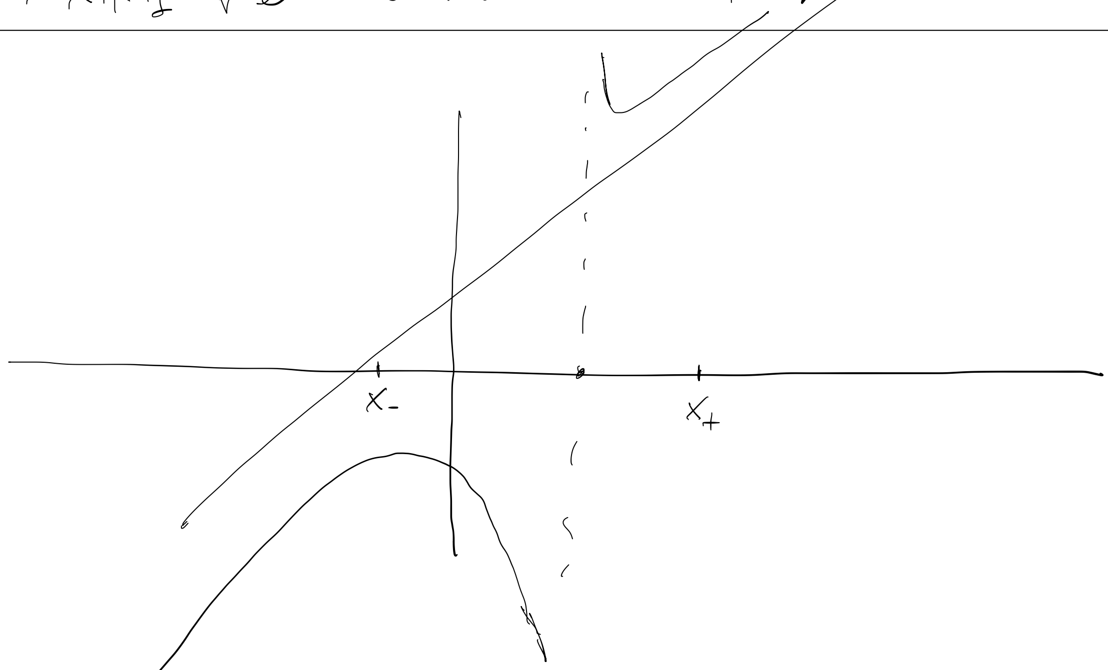
f è concava per $x<1$ e convessa per $x>1$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x-1}}{x} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} (f(x)-x) =$$

- si trovino le eventuali rette asintotiche e si tracci il grafico .

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1} = 1$$

$y = x+1$ retta asintotica a $\pm\infty$



$x^3+x+2 : x+1 = x^2-x+2$

x^3+x^2

$-x^2+x+2$

$-x^2-x$

$2x+2$

COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3.

$\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$

- si calcoli $\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{x^3+x+2}}_{R(x)} dx$ per $p(x)=x^3+x+2$ ho $p(-1)=0$

$R(x)=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+2}$ $A=\frac{1}{x^2-x+2}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{4}$, $B=-\frac{1}{4}$ $\frac{1}{(x+1)(x^2-x+2)}=\frac{A(x^2-x+2)+Bx(x+1)+C(x+1)}{(x+1)(x^2-x+2)}$

$2A+C=1$

$C=\frac{1}{2}$

$\int_0^x R(t)\,dt=\frac{1}{4}\lg(x+1)+\int_0^x\frac{-\frac{1}{4}t+\frac{1}{2}}{t^2-t+2}=\frac{1}{4}\lg(x+1)-\frac{1}{8}\int_0^x\frac{2t-1}{t^2-t+2}+\frac{3}{8}\int_0^x\frac{dt}{t^2-2\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}$

$=\lg\frac{(x+1)^{\frac{1}{4}}}{(x^2-x+2)^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{8}\lg 2+\frac{3}{8}\int_0^x\frac{dt}{(t-\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}}\xrightarrow{x\to+\infty}\frac{1}{8}\lg 2+\frac{3}{8}\int_{-\frac{1}{\sqrt{7}}}^{\infty}\frac{\frac{\sqrt{7}}{2}\,du}{\frac{7}{4}(u^2+1)}$

$t-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{7}}{2}u$

$=\frac{\lg 2}{8}+\frac{3}{\sqrt{7}\,4}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{7}}\right)$

- si calcoli le primitive $\int \cos^2(2x)dx$;

$\cos^2(2x)=\frac{1+\cos(4x)}{2}$

$=\frac{x}{2}+\frac{\sin(4x)}{8}+c$

- si stabilisca se $\underbrace{x^2e^{\frac{1}{x}}}_{f(x)}$ e' integrabile in $[-1,0)$; Ponendo $f(0)=0$, risulta $f\in C^0([-1,0])$ quindi integrabile per Riemann e quindi anche in senso generalizzato in $[-1,0)$

- si stabilisca se $\underbrace{x^2e^{\frac{1}{x}}}_{f(x)}$ e' integrabile in $(0,1]$.

$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}\frac{e^y}{y^3}=+\infty\Rightarrow$ siccome $\frac{1}{x}\notin\mathcal{L}(0,1]$

$y=\frac{1}{x}$

segue $f\notin\mathcal{L}(0,1]$

$\lg(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 8 di $\underbrace{f(x)}_{P_8(x)} = \int_0^{x^2} \underbrace{\log(1+t+t^2)}_{g(t)}$.

sia $q_3(t)$ il polinomio di McLaurin di ordine 3 di $g(t)$

$$g(t) = \lg(1+t+t^2) = (t+t^2) - \frac{(t+t^2)^2}{2} + \frac{(t+t^2)^3}{3} + o((t+t^2)^3)$$

$$= t + t^2 - \frac{t^2 + 2t^3 +}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$= t + \left(1 - \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right)t^3 + o(t^3)$$

$$= t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{2}{3}t^3 + o(t^3)$$

$$f(x) = \int_0^{x^2} g(t)\,dt = \left.\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3} - \frac{1}{6}t^4\right]_0^{x^2} + \int_0^{x^2} o(t^3)\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{x^4}{2} + \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{6}x^8}_{P_8(x)} + o(x^8)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale di $\underbrace{y'' + y'}_{L[y]} = x$

$y_g = y_h + y_p$ $\qquad p(r) = r^2 + r = r(r+1) = 0$ per $r = 0, -1$

$\Rightarrow y_h = A + B e^{-x}$

Cerchiamo $y_p = x(Cx + D)$

$$L(Cx^2 + Dx) = C\,L[x^2] + D\,L[x] = 2C + 2Cx + D = x$$

$$2Cx + (2C + D) = x$$

$$\begin{cases} 2C = 1 \\ 2C + D = 0 \end{cases} \qquad C = \frac{1}{2} \qquad D = -1$$