

Istituzione di Matematica - DIA UNITS

Prova di Esame 2. 2025-26

1. Dimostrate o con l'induzione matematica o con qualche altro argomento logico che

$$\sum_{i=1}^n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Calcola la derivata delle seguenti funzioni;

(a) $f(x) = \log \sqrt{x^3 + 2x}$

(b) $f(x) = \frac{x}{\sin(x)}$

3. Studia la funzione:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$$

In particolare trova il dominio, gli asintoti (se ci sono), l'intersezione con gli assi del piano cartesiano, i punti critici (dove $f'(x) = 0$), la concavità (data dal segno di $f''(x)$) e alla fine fai il disegno della funzione.

4. Calcola i seguenti integrali;

(a) $\int x e^{x^2 - 1} dx$

(b) $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$

5. Trova l'area delimitata dalle tre rette $y = x + 1$, $y = -x/2 + 2$ e $y = x/4 - 1$. Per aiutarti fai un disegno delle tre rette indicando l'area calcolata.

6. Data la superficie quadrica:

$$x^2 + y^2 - z = 4,$$

descrivi le forme geometriche ottenute mettendo:

(a) $x = 0$

(b) $y = 0$

(c) $z = 0$

Disegna la forma geometrica della superficie in tre dimensioni tenendo conto dei risultati ottenuti sopra.

7. Dato i due vettori $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{w} = (1, 1, 0)$ trovate:

- (a) un vettore che è ortogonale a tutti e due,
- (b) il piano parallelo a $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e che contiene il punto $(-1, 1, 0)$,
- (c) la distanza da questo piano all'origine $(0, 0, 0)$.