

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 19.01.26

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

Si consideri una particella di massa m che si muove nel piano sotto l'azione di un potenziale centrale $V(r)$, con

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema in coordinate cartesiane (x, y) e in coordinate polari (r, θ) [1,5pt].
2. Enunciare e dimostrare il teorema di Nöther in meccanica Lagrangiana [4pt].
3. Cosa si intende per coordinata ciclica? Dimostrare che la presenza di una coordinata ciclica implica una costante del moto [1pt].
4. Applicando il teorema di Nöther, dimostrare che il momento angolare $M_z = xp_y - yp_x$ è una costante del moto [2pt].
5. Ricavare esplicitamente l'Hamiltoniana del problema centrale bidimensionale in coordinate polari a partire dalla Lagrangiana trovata al punto 1. Ci sono coordinate cicliche? Si dimostri che anche in meccanica Hamiltoniana, la presenza di una coordinata ciclica implica l'esistenza di una costante del moto; lo si applichi all'Hamiltoniana del problema centrale 2-dimensionale per trovare la costante del moto [4pt].
6. Definire le Parentesi di Poisson e dire qual è il loro legame con le costanti del moto [1,5pt].
7. Verificare che l'Hamiltoniana trovata al punto 5 è invariante per rotazioni nel piano usando le parentesi di Poisson [2pt].

Esercizio 2

Si consideri un sistema Lagrangiano a due gradi di libertà, con coordinate libere (x, y) , descritto dalla Lagrangiana

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2 \cos\left(\frac{x}{\ell}\right) \dot{x} \dot{y} \right) - \alpha (x^2 - a^2)^2 - 4\alpha a^2 (1 - \mu) y^2 - 4\mu\alpha x^2 y^2,$$

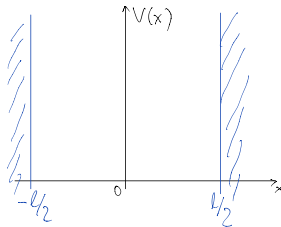
dove i parametri m, α, a, μ, ℓ sono tutti positivi.

1. Scrivere la matrice cinetica, dicendo in quali punti è mal definita e perché [1pt].
2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata x [2pt].
3. Che simmetrie ha il sistema? Ci sono costanti del moto associate ad esse? [1pt]

4. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità al variare del parametro μ [4pt].
5. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile [2pt].
6. Si linearizzi la Lagrangiana attorno al punto di equilibrio stabile [1pt].
7. Si scriva la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate [2pt].
8. Spiegare perché il sistema è integrabile se $\mu = 0$ e se si toglie da L il termine $m\dot{x}\dot{y} \cos\left(\frac{x}{\ell}\right)$ [1pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, *trovando lo spettro risultante*: [1,5pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

(Fuori dal dominio $[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$ assumono il valore nullo.)

2. Si calcoli il valor medio della posizione nello stato fondamentale [1pt].
3. Dato, al tempo $t = 0$, lo stato normalizzato definito da

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{8}{5\ell}} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \left(1 + \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)$$

nel dominio $[-\frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2}]$ e zero fuori, trovare il suo evoluto al tempo $t \neq 0$ [1,5pt].