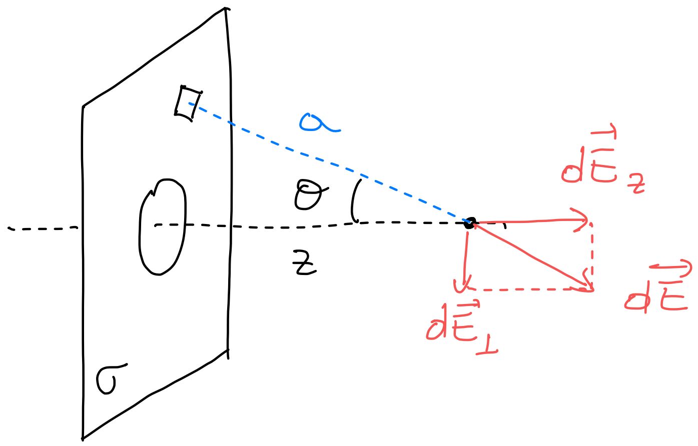
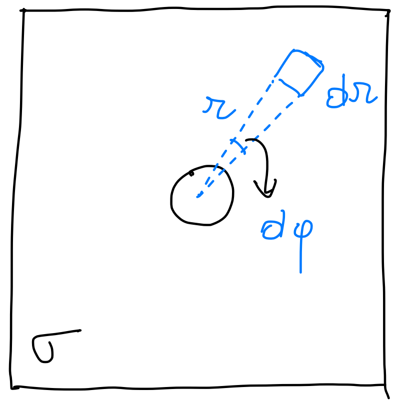
ESERCIZIO 1

1) Prima soluzione





Un elemento di superficie di area $dS = r\,dr\,d\varphi$ e carica $dQ = \sigma\, dS$ genera un campo elettrico $d\vec{E}$.

La componente ortogonale all'asse z si annulla sommando su tutti i punti del piano. Resta quella lungo l'asse z dE_z

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{a^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, r\,dr\,d\varphi}{z^2+r^2}\frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}}$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r z\,dr\,d\varphi}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

$$E_z = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty dr \cancelto{2\pi}{\int_0^{2\pi} d\varphi}\, \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{r\,dr}{(z^2+r^2)^{3/2}}$$

Chiamo $y = z^2 + r^2 \longrightarrow dy = 2r\,dr$

$$= \frac{z\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{R^2+z^2}^\infty y^{-3/2}\,dy = \frac{z\sigma}{4\varepsilon_0}\left[-2\,y^{-1/2}\right]_{R^2+z^2}^\infty$$

$$\boxed{= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \simeq 198\ \frac{kV}{m}}$$

1) Seconda soluzione

Per quanto riguarda il campo elettrico, il foro è equivalente ad un disco con carica $-\sigma$ appoggiato sul piano di carica $+\sigma$

$$\vec{E} = \vec{E}_{piano} + \vec{E}_{disco} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{z} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\hat{z}$$

$$|\vec{E}| \approx 1{,}98 \times 10^5 \frac{V}{m}$$

2) $$V(z) - V(0) = -\int_0^z E_z\, dz = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^z \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\, dz$$

$y = R^2 + z^2 \rightarrow dy = 2z\, dz$

$$= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\int_{R^2}^{z^2+R^2} y^{-1/2}\, dy = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left[+2y^{1/2}\right]_{R^2}^{z^2+R^2}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[R - \sqrt{z^2+R^2}\right] \approx -3192\ V$$

ESERCIZIO 2

1) La carica raggiunge la fenditura con velocità v data da

$$\frac{1}{2} m v^2 = q \Delta V \Rightarrow v = \left(\frac{2 q \Delta V}{m}\right)^{1/2}$$

Il raggio della traiettoria circolare è dato da

$$\frac{m v^2}{r} = q v B \Rightarrow r = \frac{m v}{q B} = \frac{m}{q B}\left(\frac{2 q \Delta V}{m}\right)^{1/2} = \frac{1}{B}\left(\frac{2 m \Delta V}{q}\right)^{1/2}$$

La distanza x è $\quad x = 2r = \frac{1}{B}\left(\frac{8 m \Delta V}{q}\right)^{1/2}$

da cui ricavo $\quad \boxed{m = \frac{B^2 x^2 q}{8 \Delta V}} \quad (1)$

2) $$\Delta m = \frac{q B^2}{8 \Delta V}\underbrace{(x_+^2 - x_-^2)}_{(x_+ - x_-)(x_+ + x_-)} \approx \frac{q B^2}{8 \Delta V} 2 x_- \Delta x$$

chiamo m_+ e m_- le masse delle due particelle

$$= \frac{q B^2}{4 \Delta V} \frac{1}{B}\left(\frac{8 m_- \Delta V}{q}\right)^{1/2} \Delta x$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta m = B \Delta x \left(\frac{q m_-}{2 \Delta V}\right)^{1/2} = \frac{2 m_-}{x_-} \Delta x} \quad (2)$$

3) Parto dalla (1)

$$x_i = \frac{1}{B}\left(\frac{8 m_i \Delta V}{q}\right)^{1/2} \Rightarrow x_- \approx 28.0 \text{ cm} \qquad x_+ \approx 28.8 \text{ cm}$$

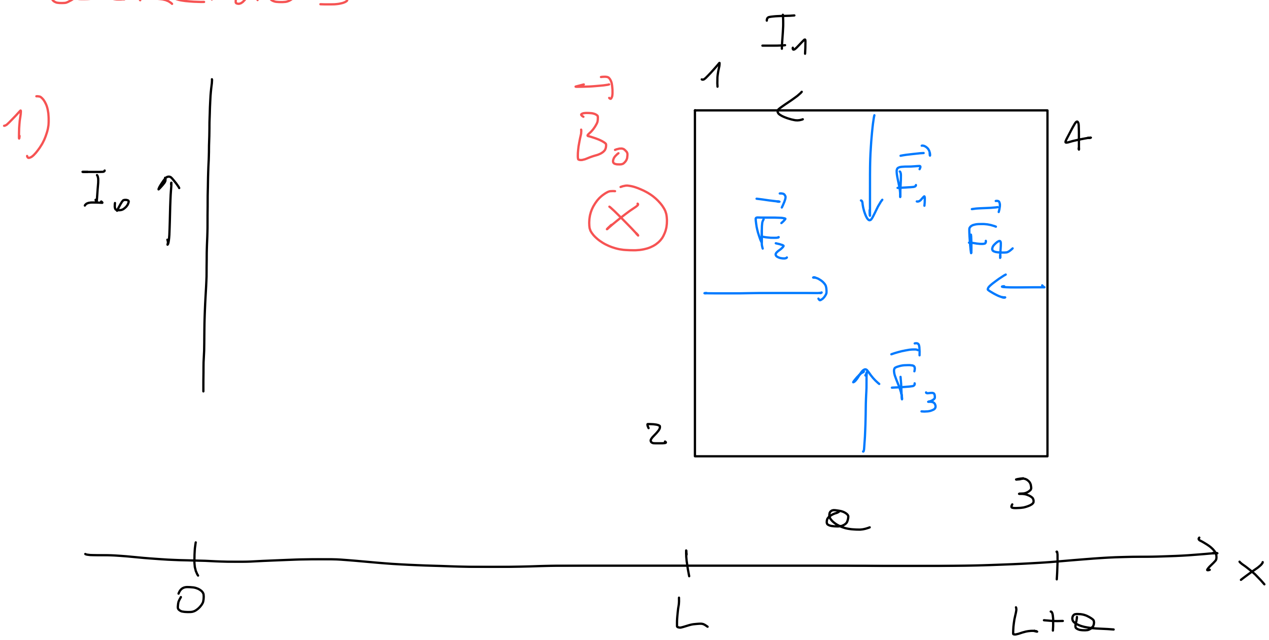
$$x_+ - x_- \approx 8 \text{ mm}$$

oppure dalla (2)

$$\boxed{\Delta x = \frac{\Delta m}{B}\left(\frac{2 \Delta V}{q m_-}\right)^{1/2} \approx 8.0 \text{ mm}}$$

ESERCIZIO 3

1)



$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

$\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$ quindi la componente verticale si annulla

$$\vec{F}_2 = I_1 a \, B_0(L) \, \hat{x}$$

$$\vec{F}_3 = - I_1 a \, B_0(L+a) \, \hat{x}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I_0 I_1 a}{2\pi} \left(\frac{1}{L} - \frac{1}{L+a} \right) \hat{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 I_1 a}{2\pi} \, \frac{a}{L(L+a)} \, \hat{x}$$

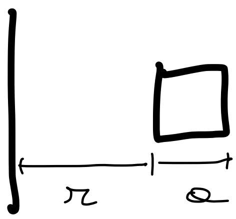
$$\boxed{|\vec{F}| = \frac{\mu_0 I_0 I_1 a^2}{2\pi \, L(L+a)} \approx 1.4 \times 10^{-11} \, N \quad \text{repulsiva}}$$

2) Orientando la spira nel verso della corrente I_1, il vettore superficie è uscente

$$\phi_B = \int \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = -a \int_L^{L+a} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} dr =$$

$$= \boxed{-\frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi} \log \frac{L+a}{L} \approx -5.9 \times 10^{-12}\ Wb}$$

3) Il flusso dipende dalla distanza r della spira dal filo



(inizialmente $r = L$)

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B(r)}{dt} = -\frac{d\phi_B(r)}{dr}\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v}$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 a}{2\pi}\left(\frac{d}{dr}\log\frac{r+a}{r}\right) v$$

$$\frac{d}{dr}\log\frac{r+a}{r} = \frac{r}{r+a}\frac{d}{dr}\frac{r+a}{r} = \frac{r}{r+a}\frac{r-(r+a)}{r^2} = -\frac{a}{r(r+a)}$$

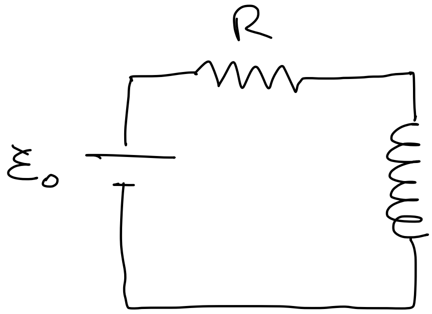
$$\Rightarrow \quad \mathcal{E} = \left(-\frac{\mu_0 I_0 a^2}{2\pi r(r+a)} v\right)_{r=L} \approx -7.4 \times 10^{-11}\ V$$

Il segno indica che la corrente indotta scorre in verso opposto a I_1 (orario nel disegno)

4) $I = \mathcal{E}/R = -2.4 \times 10^{-7}\ A$ in senso orario

ESERCIZIO 4

1)



$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 \approx 2.2 \times 10^{-5}\, H \qquad \tau = \frac{L}{R} \approx 1.4 \times 10^{-7}\, s}$$

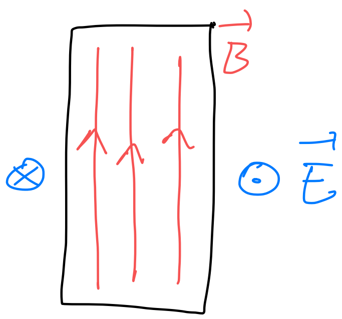
Dopo un tempo lungo $I \to I_0$ e $\frac{dI}{dt} \to 0$. L'eq. della maglia a $t \gg \tau$ è quindi semplicemente

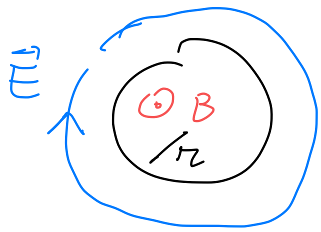
$$\mathcal{E}_0 - R I_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \approx 31\, mA}$$

2) $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I = \mu_0 \frac{N}{\ell} I_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = B_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$

$$B_0 = \mu_0 \frac{N}{\ell} I_0 \approx 1.96 \times 10^{-4}\, T$$

3)





Le linee di campo $\vec{E}$ sono circonferenze concentriche all'asse orientate in senso orario se $\vec{B}$ è uscente e aumenta

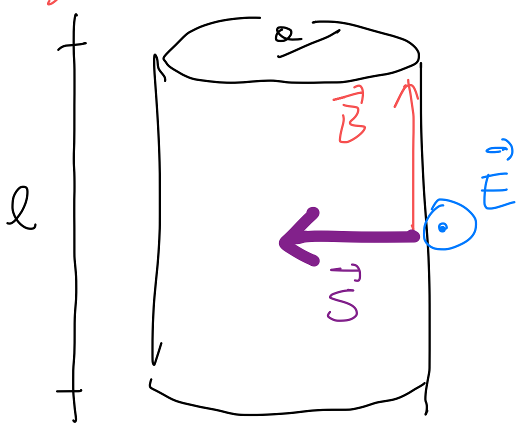
$|\vec{E}|$ si calcola da $\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ (legge di Faraday)

$\underline{r \leq a}$ $\quad E\, 2\pi r = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau}$

$$\Longrightarrow \boxed{E = \frac{B_0 r}{2\tau} e^{-t/\tau}}$$

$\underline{r > a}$ $\quad E\, 2\pi r = \pi a^2 \frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E = \frac{B_0 a^2}{2\tau r} e^{-t/\tau}}$

4)



$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{B_0 a}{2\tau}\,B_0\, e^{-t/\tau}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

entrante

Il segno è coerente con il teorema di Poynting in quanto il campo B (e quindi l'energia) nel solenoide sta aumentando