a.a. 2015-2016 **Nome:**

A

1. In una certa facoltà universitaria, è obbligatorio sostenere un esame di Lingua Straniera. Ogni studente può scegliere fra Inglese, Francese, Spagnolo, Tedesco. Le statistiche dicono che le probabilità di scelta sono rispettivamente 0.34, 0.31, 0.21, 0.14. D'altra parte, per la diversa difficoltà dei corsi e severità degli insegnanti, le probabilità di riportare la massima votazione (30 trentesimi) variano da lingua a lingua e sono rispettivamente del 0.21, 0.28, 0.35, 0.63. Supponiamo di sapere che un certo studente ha riportato 30 trentesimi nell'esame di Lingua. Che probabilità c'è che la materia d'esame sia stata Inglese?

Soluzione:

$$p(\text{Ing}|30) = \frac{p(\text{Ing})\cdot p(30|\text{Ing})}{p(\text{Ing})\cdot p(30|\text{Ing})+p(\text{Fra})\cdot p(30|\text{Fra})+p(\text{Spa})\cdot p(30|\text{Spa})+p(\text{Ted})\cdot p(30|\text{Ted})} =$$
$$\frac{0.34\cdot 0.21}{0.34\cdot 0.21+0.31\cdot 0.28+0.21\cdot 0.35+0.14\cdot 0.63} = \frac{0.071}{0.32} = 0.22$$

2. Riportare correttamente le cifre significative e calcolare le incertezze relative delle seguenti misure di grandezze fisiche:

Soluzione:

$\ell = 3.4575 \pm 0.01260\, m \quad \rightarrow \quad \ell = 3.458 \pm 0.013\, m \qquad \Delta\ell/\ell = 0.0038$

$S = 12534 \pm 593\, cm^2 \qquad S = 1.25 \pm 0.06\ m^2 \qquad \Delta S/S = 0.05$

$T = 1.4299 \pm 0.01021\, s \qquad T = 1.430 \pm 0.010\, s \qquad \Delta T/T = 0.0070$

3. Trovare il valore della costante k per cui $\varphi(x,y) = kxye^{-(x+y)}$ con $(x > 0, y > 0)$ rappresenta la funzione di densità di una variabile casuale bidimensionale (X, Y). Si determino:

a) le funzioni di densità delle variabili casuali marginali.
b) se X e Y sono indipendenti
c) il valore di aspettazione di X e Y

Soluzione:

$$1 = k\int_0^{+\infty} dx\, xe^{-x} \int_0^{+\infty} dy\, ye^{-y} = k \qquad \text{si usa} \quad d(xe^{-x}) = e^{-x}dx + xde^{-x} = e^{-x}dx - xe^{-x}dx$$

a) funzioni di densità delle variabili casuali marginali: devo integrare sulla seconda variabile casuale

$$f_x(x) = xe^{-x}\int_0^{+\infty} dy\, ye^{-y} = xe^{-x} \quad \text{e} \quad f_y(y) = ye^{-y}\int_0^{+\infty} dx\, xe^{-x} = ye^{-y}$$

b) se X e Y sono indipendenti: calcolo la correlazione (se posso separare gli integrali sono indipendenti)

$$E[(x-2)(y-2)] = \iint_0^{+\infty} dxdy(x-2)(y-2)xye^{-(x+y)} = \int_0^{+\infty} dx\,(x-2)xe^{-x}\int_0^{+\infty} dy\,(y-2)ye^{-y} = 0$$

c) il valore di aspettazione di X e Y: per definizione

$$\mu_x = \int_0^{+\infty} dx\, x^2e^{-x} = 2 \qquad \text{e} \qquad \mu_y = \int_0^{+\infty} dy\, y^2e^{-y} = 2$$

A

4. La grandezza fisica $I = \frac{mr^2(g-a)}{a+br}$ con unità di misura in $kg \cdot m^2$ è misurata in modo indiretto a partire dalle misure:

$m = 125.0 \pm 0.1\ g$ $\quad g = 9.81 \pm 0.01\ m\,s^{-2}$ $\quad r = 1.4 \pm 0.1\ cm$ $\quad a = 1.51 \pm 0.01\ m\,s^{-2}$ $\quad b = 1.00 \pm 0.01\ s^{-2}$

A. Scrivere le formule da utilizzare e calcolare l'incertezza di misura su X assumendo che le incertezze su m, g, r, a e b siano dovute alla risoluzione di lettura

B. Scrivere le formule da utilizzare nel caso in cui
   a. le incertezze siano tutte statistiche
   b. l'incertezza su m e r sia dovuta alla risoluzione di lettura e le incertezze su g, a e b siano statistiche

C. Quale misura andrebbe migliorata per diminuire l'incertezza su I?

A. $\Delta I = \Delta m \left|\frac{r^2(g-a)}{a+br}\right| + \Delta r \left|\frac{2mr(g-a)}{a+br} - b\frac{mr^2(g-a)}{(a+br)^2}\right| + \Delta g \left|\frac{mr^2}{a+br}\right| + \Delta a \left|-\frac{mr^2}{a+br} - \frac{mr^2(g-a)}{(a+br)^2}\right| + \Delta b \left|-\frac{mr^3(g-a)}{(a+br)^2}\right|$

B. Nel caso in cui:
   a. incertezze statistiche

$$\sigma_I^2 = \sigma_m^2\left(\frac{r^2(g-a)}{a+br}\right)^2 + \sigma_r^2\left(\frac{2mr(g-a)}{a+br} - b\frac{mr^2(g-a)}{(a+br)^2}\right)^2 + \sigma_g^2\left(\frac{mr^2}{a+br}\right)^2 + \sigma_a^2\left(\frac{mr^2}{a+br} + \frac{mr^2(g-a)}{(a+br)^2}\right)^2 + \sigma_b^2\left(\frac{mr^3(g-a)}{(a+br)^2}\right)^2$$

   b. Poiché l'incertezza su r è dominante, trasformo g, a e b in errori massimi ed uso A.

C. Andrebbe migliorata l'incertezza su r che contribuisce con un errore relativo dell'11%,

I=699	Derivata	Delta	Delta/I
m	5.590	0.559	0.0008
r	758.145	75.815	0.1085
g	84.192	0.842	0.0012
a	324.329	3.243	0.0046
b	336.191	3.362	0.0048

5. Tra le grandezze fisiche X e Y si ipotizza esista la relazione: $Y = ae^{-bX}$. Si hanno a disposizione ila seguenti misure di X e Y: (2.1,5.7), (5.2,2.7), (9.4,1.90), (29.8,0.78), (48.3,0.50), con incertezze massime ΔX=0.01 e ΔY=0.1·Y.

a) Determinare i valori di a e di b, ed i corrispondenti errori (formule)

b) Riportare i valori misurati in grafici con scala lineare e semilog, commentare l'accordo con l'andamento previsto e con eventuali altri andamenti

Soluzione: ERRORE - Valori presi per una dipendenza $Y = aX^b$