a.a. 2015-2016 **Nome:** B

1. La probabilità che tre partecipanti (A, B, C) ad una gara di tiro al piattello colpiscano il bersaglio è rispettivamente (0.3, 0.5, 0.45). Determinare la probabilità che uno solo colpisca il bersaglio e successivamente la probabilità che a colpire il bersaglio sia stato A.

Soluzione: La probabilità che uno solo colpisca il bersaglio e data dalla somma delle probabilità che uno la colpisca e gli altri no:

$$P(1\text{ solo}) = P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}) \cup P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C}) \cup P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C) = 0.3\times 0.5\times 0.55 + 0.7\times 0.5\times 0.55 + 0.7\times 0.5\times 0.45 = 0.4325$$

La probabilità che tra questi sia stato A a colpire il bersaglio è:

$$P(A|1\text{ solo}) = \frac{P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})}{P(1\text{ solo})} = \frac{0.825}{0.432} = 0.19$$

2. Calcolare valore e incertezza delle seguenti grandezze fisiche:

Soluzione:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 903.72\,\text{cm}^3,\ \Delta V = 4\pi R^2\Delta R = 0.32\,\text{cm}^3 \qquad R = 6.0043 \pm\ 0.0007\ cm$$

$$X = 4\pi^2\ell/t^2 = 2.71\ m/s^2, \Delta X = X\left(\frac{\Delta\ell}{\ell} + 2\frac{\Delta t}{t}\right) = 0.13 m/s^2 \qquad \ell = 1.23 \pm 0.02\ m \quad t = 4.23 \pm 0.07\ s$$

$$a = x\sin(y) = 2.23\,\text{cm},\ \Delta a = \Delta x\sin(y) + x\cos(y)\Delta y = 0.04\,\text{cm} \quad x = 10.4 \pm 0.1\ cm, \quad y = 12.5^0 \pm 0.1^0$$

3. Trovare il valore della costante k per cui $\varphi(x,y) = e^{kx}$ con $(x > 0, 0 < y < 2)$ rappresenta la funzione di densità di una variabile casuale bidimensionale (X, Y). Si determino:

a) le funzioni di densità delle variabili casuali marginali.

b) se X e Y sono indipendenti

c) il valore di aspettazione di X e Y.

Soluzioni:

$$1 = \int_0^{+\infty} dx\, e^{kx} \int_0^2 dy\ = \frac{2}{k}\int_0^{+\infty} de^{kx}\ = -\frac{2}{k} \Longrightarrow k = -2$$

a) le funzioni di densità delle variabili casuali marginali.

$$f_x(x) = e^{-2x}\int_0^2 dy = 2e^{-2x} \qquad e \qquad f_y(y) = \int_0^{+\infty} dx\, e^{-2x}\ = \frac{1}{2}$$

b) se X e Y sono indipendenti

$$E\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)(y-1)\right] = \int_0^{+\infty} dx \int_0^2 dy \left(x-\frac{1}{2}\right)(y-1)\, e^{-2x} = 0$$

c) il valore di aspettazione di X e Y.

$$\mu_x = \int_0^{+\infty} dx\, 2xe^{-2x} = \frac{1}{2} \qquad e \qquad \mu_y = \frac{1}{2}\int_0^2 ydy = 1$$

B

4. La grandezza fisica $J_z = mR\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - R\right)$ ha le dimensioni di $kg \cdot m^2$ ed è misurata in modo indiretto a partire dalle misure:

$$m = 125 \pm 1\, g \qquad g = 9.81 \pm 0.01\, m\, s^{-2} \qquad R = 10.2 \pm 0.01\, cm \qquad T = 2.51 \pm 0.04\, s$$

A. Scrivere le formule da utilizzare e calcolare l'incertezza di misura su J_z assumendo che le incertezze siano dovute alla risoluzione di lettura.

$$\Delta J_z = \Delta m \left|mR\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - R\right)\right| + \Delta R \left|m\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - R\right) - mR\right| + \Delta g \left|mR\frac{T^2}{4\pi^2}\right| + \Delta T \left|mR\frac{2T}{4\pi^2}\right|$$

B. Scrivere le formule da utilizzare nel caso in cui le incertezze siano tutte statistiche.

$$\sigma_{J_z}^2 = \sigma_m^2\left[mR\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - R\right)\right]^2 + \sigma_R^2\left[m\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - R\right) - mR\right]^2 + \sigma_g^2\left(mR\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^2 + \sigma_T^2\left(mR\frac{2T}{4\pi^2}\right)^2$$

C. Bisogna migliorare l'incertezza sulla misura di T.

0.01866	valore	Delta	Derivata	Derivata*Delta
m	0.125	0.001	0.149278	0.00015
R	0.102	0.001	0.170189	0.00017
g	9.810	0.010	0.002035	0.00002
T	2.510	0.040	0.015905	0.00064

5. La grandezza Riportare in scale lineare e log-log i seguenti valori misurati di X e Y: (2.1,1.74), (5.2,3.1), (9.4,5.7), (29.8,11.8), (48.3,18.7) con i corrispondenti errori ΔX=0.1 e ΔY=0.1·Y. Dai grafici cercare di determinare la relazione che lega X e Y.

Soluzione:

la relazione e' del tipo $Y = aX^b$