Linguaggi predicativi del 1° ordine

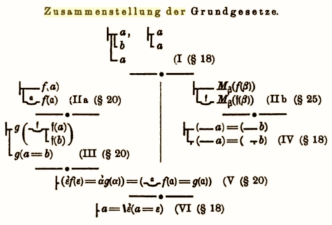
(Celere introduzione)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

costanti

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI



Trieste, 05–06/04/2016

Linguaggi predicativi del 1° ordine
(Celere introduzione)

Eugenio G. Omodeo

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

costanti

Dip. Matematica e Geoscienze — DMI


BEGRIFFSSCHRIFT,

EINE DER ARITHMETISCHEN NACHGEBILDETE

FORMELSPRACHE

DES REINEN DENKENS.

VON

Dr. GOTTLOB FREGE.

PRIVATDOCENTEN DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT JENA.

HALLE a/S.

VERLAG VON LOUIS NEBERT.

1879.

Scaletta

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
-
-
-
-
-
-
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
- Lessico di *un* linguaggio predicativo del 1° ordine
-
-
-
-
-
-

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
- Lessico di *un* linguaggio predicativo del 1° ordine
- Sintassi: Termini e formule
-
-
-
-
-

Scaletta

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
- Lessico di *un* linguaggio predicativo del 1° ordine
- Sintassi: Termini e formule
- Semantica: Strutture interpretative
-
-
-
-

Scaletta

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
- Lessico di *un* linguaggio predicativo del 1° ordine
- Sintassi: Termini e formule
- Semantica: Strutture interpretative
- Valutazione, relativa ad un assegnamento di valori
-
-
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- *Un* esempietto motivante (mi auguro)
- Lessico di *un* linguaggio predicativo del 1° ordine
- Sintassi: Termini e formule
- Semantica: Strutture interpretative
- Valutazione, relativa ad un assegnamento di valori
- ~~Riduzione a forma negativa normale~~
- ~~Riduzione a forma normale prenessa~~
- ~~Riduzione a forma normale Skolemizzata~~

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Ho sognato la geometria.
Ho sognato il punto, la linea, il piano ed il volume.

Ho sognato la geometria.

Ho sognato il punto, la linea, il piano ed il volume.

(Jorge Luis Borges, 1981)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

WHAT IS ELEMENTARY GEOMETRY?

A1 [IDENTITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xy[\beta(xyx) \to (x = y)]$

A2 [TRANSITIVITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xyzu[\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \to \beta(xyz)]$

A3 [CONNECTIVITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xyzu[\beta(xyz) \wedge \beta(xyu) \wedge (x \neq y) \to \beta(xzu) \vee \beta(xuz)]$

A4 [REFLEXIVITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xy[\delta(xyyx)]$

A5 [IDENTITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xyz[\delta(xyzz) \to (x = y)]$

A6 [TRANSITIVITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xyzuvw[\delta(xyzu) \wedge \delta(xyvw) \to \delta(zuvw)]$

A7 [PASCH'S AXIOM].

$\bigwedge txyzu \bigvee v[\beta(xtu) \wedge \beta(yuz) \to \beta(xvy) \wedge \beta(ztv)]$

A8 [EUCLID'S AXIOM].

$\bigwedge txyzu \bigvee vw[\beta(xut) \wedge \beta(yuz) \wedge (x \neq u) \to \beta(xzv) \wedge \beta(xyw) \wedge \beta(vtw)]$

A9 (FIVE-SEGMENT AXIOM).

$$\bigwedge xx'yy'zz'uu'[\delta(xyx'y') \wedge \delta(yzy'z') \wedge \delta(xux'u') \wedge \delta(yuy'u') \wedge \beta(xyz) \wedge \beta(x'y'z') \wedge (x \neq y) \to \delta(zuz'u')]$$

A10 (AXIOM OF SEGMENT CONSTRUCTION).

$\bigwedge xyuv \bigvee z[\beta(xyz) \wedge \delta(yzuv)]$

A11 (LOWER DIMENSION AXIOM).

$\bigvee xyz[\neg\beta(xyz) \wedge \neg\beta(yzx) \wedge \neg\beta(zxy)]$

A12 (UPPER DIMENSION AXIOM).

$$\bigwedge xyzuv[\delta(xuxv) \wedge \delta(yuyv) \wedge \delta(zuzv) \wedge (u \neq v) \to \beta(xyz) \vee \beta(yzx) \vee \beta(zxy)]$$

A13 [ELEMENTARY CONTINUITY AXIOMS]. *All sentences of the form*

$$\bigwedge vw\ldots\{\bigvee z \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \to \beta(zxy)] \to \bigvee u \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \to \beta(xuy)]\}$$

where φ stands for any formula in which the variables $x, v, w, \ldots$, but neither y nor z nor u, occur free, and similarly for ψ, with x and y interchanged.

WHAT IS ELEMENTARY GEOMETRY?

A1 [IDENTITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xy[\beta(xyx) \rightarrow (x = y)]$

A2 [TRANSITIVITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xyzu[\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \rightarrow \beta(xyz)]$

A3 [CONNECTIVITY AXIOM FOR BETWEENNESS].

$\bigwedge xyzu[\beta(xyz) \wedge \beta(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow \beta(xzu) \vee \beta(xuz)]$

A4 [REFLEXIVITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xy[\delta(xyyx)]$

A5 [IDENTITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xyz[\delta(xyzz) \rightarrow (x = y)]$

A6 [TRANSITIVITY AXIOM FOR EQUIDISTANCE].

$\bigwedge xyzuvw[\delta(xyzu) \wedge \delta(xyvw) \rightarrow \delta(zuvw)]$

A7 [PASCH'S AXIOM].

$\bigwedge txyzu \bigvee v[\beta(xtu) \wedge \beta(yuz) \rightarrow \beta(xvy) \wedge \beta(ztv)]$

A8 [EUCLID'S AXIOM].

$\bigwedge txyzu \bigvee vw[\beta(xut) \wedge \beta(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow \beta(xzv) \wedge \beta(xyw) \wedge \beta(vtw)]$

A9 (FIVE-SEGMENT AXIOM).

$$\bigwedge xx'yy'zz'uu'[\delta(xyx'y') \wedge \delta(yzy'z') \wedge \delta(xux'u') \wedge \delta(yuy'u') \wedge \beta(xyz) \wedge \beta(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow \delta(zuz'u')]$$

A10 (AXIOM OF SEGMENT CONSTRUCTION).

$\bigwedge xyuv \bigvee z[\beta(xyz) \wedge \delta(yzuv)]$

A11 (LOWER DIMENSION AXIOM).

$\bigvee xyz[\neg\beta(xyz) \wedge \neg\beta(yzx) \wedge \neg\beta(zxy)]$

A12 (UPPER DIMENSION AXIOM).

$$\bigwedge xyzuv[\delta(xuxv) \wedge \delta(yuyv) \wedge \delta(zuzv) \wedge (u \neq v) \rightarrow \beta(xyz) \vee \beta(yzx) \vee \beta(zxy)]$$

A13 [ELEMENTARY CONTINUITY AXIOMS]. *All sentences of the form*

$$\bigwedge vw\ldots\{\bigvee z \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \rightarrow \beta(zxy)] \rightarrow \bigvee u \bigwedge xy[\varphi \wedge \psi \rightarrow \beta(xuy)]\}$$

where φ stands for any formula in which the variables $x, v, w, \ldots$, but neither y nor z nor u, occur free, and similarly for ψ, with x and y interchanged.

(A. Tarski, 1902–1983)

In colloquial language the term *elementary geometry* is used loosely to refer to the body of notions and theorems which, following the tradition of Euclid's *Elements*, form the subject matter of geometry courses in secondary schools. Thus the term has no well determined meaning and can be subjected to various interpretations.

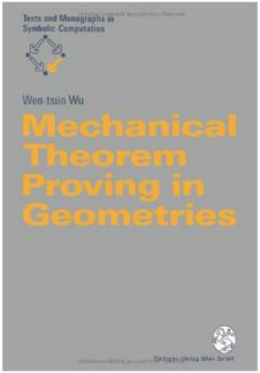
(A. Tarski, 1902–1983)

In colloquial language the term *elementary geometry* is used loosely to refer to the body of notions and theorems which, following the tradition of Euclid's *Elements*, form the subject matter of geometry courses in secondary schools. Thus the term has no well determined meaning and can be subjected to various interpretations.

If we wish to make elementary geometry a topic of metamathematical investigation and to obtain exact results (not within but) about this discipline, then a choice of a definite interpretation becomes necessary.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

(Wu Wen-tsün, 1919–)



"The great merit of Hilbert's classic "Grundlagen der Geometrie" of 1899 is universally recognized as being representative for axiomatization of mathematics, laying in particular a rigorous foundation of the Euclidean geometry. However, another great merit (perhaps greater in the opinion of the present author) of this classic seems hardly to be noticed up to the present. In fact, this classic is also representative for the mechanization of geometry, showing clearly at the same time the way to achieve it."

(Wu Wen-tsün, 1982)

La geometria elementare di Tarski viene formalizzata tramite i *simboli di predicato*

$$\mathsf{fra}_{/3}\,, \quad \mathsf{eqd}_{/4}\,, \quad =_{/2}$$

che designano:

La geometria elementare di Tarski viene formalizzata tramite i *simboli di predicato*

$$\mathsf{fra}_{/3}\,,\quad \mathsf{eqd}_{/4}\,,\quad =_{/2}$$

che designano:

$\mathsf{fra}(x, y, z)$ la relaz. che lega 3 punti giacenti su una stessa retta, con y intermedio fra x e z (ug'nze ammesse)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La geometria elementare di Tarski viene formalizzata tramite i *simboli di predicato*

$$\mathsf{fra}_{/3}\,, \quad \mathsf{eqd}_{/4}\,, \quad =_{/2}$$

che designano:

$\mathsf{fra}(x, y, z)$ la relaz. che lega 3 punti giacenti su una stessa retta, con y intermedio fra x e z

$\mathsf{eqd}(x, y, u, v)$ la relaz. che lega 4 punti quando x *dista da* y *tanto quanto* u *da* v

La geometria elementare di Tarski viene formalizzata tramite i *simboli di predicato*

$$\mathsf{fra}_{/3}\,,\quad \mathsf{eqd}_{/4}\,,\quad =_{/2}$$

che designano:

$\mathsf{fra}(x, y, z)$ la relaz. che lega 3 punti giacenti su una stessa retta, con y intermedio fra x e z

$\mathsf{eqd}(x, y, u, v)$ la relaz. che lega 4 punti quando x *dista da* y *tanto quanto* u *da* v

Nell'**interpretazione privilegiata**, il dominio del discorso consta dei *punti* di uno spazio euclideo.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La geometria elementare di Tarski viene formalizzata tramite i *simboli di predicato*

$$\mathsf{fra}_{/3}\,,\quad \mathsf{eqd}_{/4}\,,\quad =_{/2}$$

che designano:

$\mathsf{fra}(x, y, z)$ la relaz. che lega 3 punti giacenti su una stessa retta, con y intermedio fra x e z

$\mathsf{eqd}(x, y, u, v)$ la relaz. che lega 4 punti quando x *dista da* y *tanto quanto* u *da* v

Nell'**interpretazione privilegiata**, il dominio del discorso consta dei *punti* di uno spazio euclideo. (Non di 'luoghi geometrici'!)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un primo gruppo di assiomi comprende **antisimmetria**, **transitività** e **connettività**, riguardanti il predicato fra :

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \mathsf{fra}(x,y,x) & \rightarrow & y = x \\ \mathsf{fra}(x,y,u)\,\&\,\mathsf{fra}(y,z,u) & \rightarrow & \mathsf{fra}(x,y,z) \\ x \neq y\,\&\,\mathsf{fra}(x,y,z)\,\&\,\mathsf{fra}(x,y,u) & \rightarrow & \mathsf{fra}(x,z,u) \vee \mathsf{fra}(x,u,z) \end{array}}$$

1

Un primo gruppo di assiomi comprende **antisimmetria**, **transitività** e **connettività**, riguardanti il predicato fra :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{fra}(x,y,x) & \rightarrow & y = x \\
\mathrm{fra}(x,y,u)\,\&\,\mathrm{fra}(y,z,u) & \rightarrow & \mathrm{fra}(x,y,z) \\
x \neq y\,\&\,\mathrm{fra}(x,y,z)\,\&\,\mathrm{fra}(x,y,u) & \rightarrow & \mathrm{fra}(x,z,u) \vee \mathrm{fra}(x,u,z)
\end{array}
$$

nonché **riflessività**, **antisimmetria**, **transitività**, circa l'eqd :[1]

$$
\begin{array}{rcl}
 & \mathrm{eqd}(x,y,y,x) & \\
\mathrm{eqd}(x,y,z,z) & \rightarrow & y = x \\
\mathrm{eqd}(x,y,z,u)\,\&\,\mathrm{eqd}(x,y,v,w) & \rightarrow & \mathrm{eqd}(z,u,v,w)
\end{array}
$$

[1] Enunciati, questi? (No, ma lo sarebbero se le variabili x, y, z ecc. fossero state esplicitam. quantificate).

Altri assiomi, di connotazione fortemente geometrica, sono quelli:

di Pasch A7

$$\mathrm{fra}(x,\ell,u)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\ \big(\mathrm{fra}(x,v,y)\ \&\ \mathrm{fra}(z,\ell,v)\big)$$

$$x \neq u\ \&\ \mathrm{fra}(x,u,\ell)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\, \exists\, w\ \big(\mathrm{fra}(x,z,v)\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,w)\ \&\ \mathrm{fra}(v,\ell,w)\big)$$

$$\big(x \neq y\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{fra}(x_1,y_1,z_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(x,y,x_1,y_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1)\ \&$$
$$\mathrm{eqd}(x,u,x_1,u_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,u,y_1,u_1)\big) \rightarrow \mathrm{eqd}(z,u,z_1,u_1)$$

$$\exists\, z\ (\mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1))$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Altri assiomi, di connotazione fortemente geometrica, sono quelli:

di Euclide A8

$$\mathrm{fra}(x,\ell,u)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists v\,\big(\mathrm{fra}(x,v,y)\ \&\ \mathrm{fra}(z,\ell,v)\big)$$

$$x \neq u\ \&\ \mathrm{fra}(x,u,\ell)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists v\,\exists w\,\big(\mathrm{fra}(x,z,v)\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,w)\ \&\ \mathrm{fra}(v,\ell,w)\big)$$

$$\big(x \neq y\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{fra}(x_1,y_1,z_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(x,y,x_1,y_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(x,u,x_1,u_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,u,y_1,u_1)\big) \rightarrow \mathrm{eqd}(z,u,z_1,u_1)$$

$$\exists z\,(\mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1))$$

Altri assiomi, di connotazione fortemente geometrica, sono quelli:

dei cinque segmenti A9

$$\mathsf{fra}(x,\ell,u)\,\&\,\mathsf{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\,\big(\mathsf{fra}(x,v,y)\,\&\,\mathsf{fra}(z,\ell,v)\big)$$

$$x \neq u\,\&\,\mathsf{fra}(x,u,\ell)\,\&\,\mathsf{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\,\exists\, w\,\big(\mathsf{fra}(x,z,v)\,\&\,\mathsf{fra}(x,y,w)\,\&\,\mathsf{fra}(v,\ell,w)\big)$$

$$\big(x \neq y\,\&\,\mathsf{fra}(x,y,z)\,\&\,\mathsf{fra}(x_1,y_1,z_1)\,\&\,\mathsf{eqd}(x,y,x_1,y_1)\,\&\,\mathsf{eqd}(y,z,y_1,z_1)\,\&$$
$$\mathsf{eqd}(x,u,x_1,u_1)\,\&\,\mathsf{eqd}(y,u,y_1,u_1)\big) \;\rightarrow\; \mathsf{eqd}(z,u,z_1,u_1)$$

$$\exists\, z\,(\,\mathsf{fra}(x,y,z)\,\&\,\mathsf{eqd}(y,z,y_1,z_1)\,)$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Altri assiomi, di connotazione fortemente geometrica, sono quelli:

di costruzione di segmenti A10

$$\mathrm{fra}(x,\ell,u)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\ \big(\mathrm{fra}(x,v,y)\ \&\ \mathrm{fra}(z,\ell,v)\big)$$

$$x \neq u\ \&\ \mathrm{fra}(x,u,\ell)\ \&\ \mathrm{fra}(y,u,z) \rightarrow \exists\, v\, \exists\, w\ \big(\mathrm{fra}(x,z,v)\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,w)\ \&\ \mathrm{fra}(v,\ell,w)\big)$$

$$\big(x \neq y\ \&\ \mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{fra}(x_1,y_1,z_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(x,y,x_1,y_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1)\ \&$$
$$\mathrm{eqd}(x,u,x_1,u_1)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,u,y_1,u_1)\big) \ \rightarrow\ \mathrm{eqd}(z,u,z_1,u_1)$$

$$\exists\, z\ (\mathrm{fra}(x,y,z)\ \&\ \mathrm{eqd}(y,z,y_1,z_1))$$

Due ulteriori assiomi servono a caratterizzare la *dimensione* dello spazio geometrico.

Due ulteriori assiomi servono a caratterizzare la *dimensione* dello spazio geometrico. Volendo ad es. caratterizzare lo spazio a 2 dim., posto per brevità

$$\mathrm{allineati}(x, y, z) \leftrightarrow_{\mathrm{Def}} \mathrm{fra}(x, y, z) \vee \mathrm{fra}(y, z, x) \vee \mathrm{fra}(z, x, y),$$

si stabiliranno assiomi di:

Due ulteriori assiomi servono a caratterizzare la *dimensione* dello spazio geometrico.

limitazione inferiore A11

$$\exists x \, \exists y \, \exists z \, \neg \mathrm{allineati}(x, y, z)$$

$$u \neq v \,\&\, \mathrm{eqd}(x, u, x, v) \,\&\, \mathrm{eqd}(y, u, y, v) \,\&\, \mathrm{eqd}(z, u, z, v) \rightarrow \mathrm{allineati}(x, y, z)$$

Due ulteriori assiomi servono a caratterizzare la *dimensione* dello spazio geometrico.

limitazione superiore A12

$$\exists x \, \exists y \, \exists z \, \neg \mathrm{allineati}(x, y, z)$$
$$u \neq v \mathbin{\&} \mathrm{eqd}(x, u, x, v) \mathbin{\&} \mathrm{eqd}(y, u, y, v) \mathbin{\&} \mathrm{eqd}(z, u, z, v) \rightarrow \mathrm{allineati}(x, y, z)$$

Buon ultimo viene lo **schema d'assioma di *continuità***:[1]

$$\boxed{\exists\, z\,\forall\, x\,\forall\, y\,\Big(\,\varphi\,\&\,\psi\rightarrow \mathsf{fra}(\,z, x, y\,)\Big)\;\rightarrow\;\exists\, u\,\forall\, x\,\forall\, y\,\Big(\,\varphi\,\&\,\psi\rightarrow \mathsf{fra}(\,x, u, y\,)\Big)}$$

[1] Comprende infinite istanze!

[2]

Buon ultimo viene lo **schema d'assioma di *continuità***:[1]

$$\boxed{\exists z \forall x \forall y \Big(\varphi \,\&\, \psi \rightarrow \mathsf{fra}(z, x, y) \Big) \rightarrow \exists u \forall x \forall y \Big(\varphi \,\&\, \psi \rightarrow \mathsf{fra}(x, u, y) \Big)}$$

Qui φ sta per una formula tale che[2]

- x appartiene a $\mathit{varr}(\varphi)$, mentre né y né z né u appartengono a $\mathit{varr}(\varphi)$;
- y appartiene a $\mathit{varr}(\psi)$, mentre né x né z né u appartengono a $\mathit{varr}(\psi)$.

[1] Comprende infinite istanze!

[2] '$\mathit{varr}(\varphi)$' indica l'insieme delle variabili che compaiono *libere* in φ.

Buon ultimo viene lo **schema d'assioma di *continuità***:[1]

$$\boxed{\exists z\,\forall x\,\forall y\,\big(\varphi\,\&\,\psi \rightarrow \mathsf{fra}(z,x,y)\big) \rightarrow \exists u\,\forall x\,\forall y\,\big(\varphi\,\&\,\psi \rightarrow \mathsf{fra}(x,u,y)\big)}$$

Qui φ sta per una formula tale che[2]

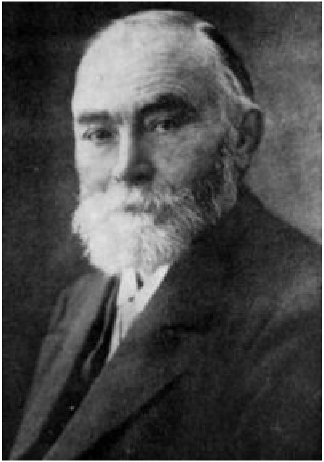
- x appartiene a $\mathit{varr}(\varphi)$, mentre né y né z né u appartengono a $\mathit{varr}(\varphi)$;
- y appartiene a $\mathit{varr}(\psi)$, mentre né x né z né u appartengono a $\mathit{varr}(\psi)$.

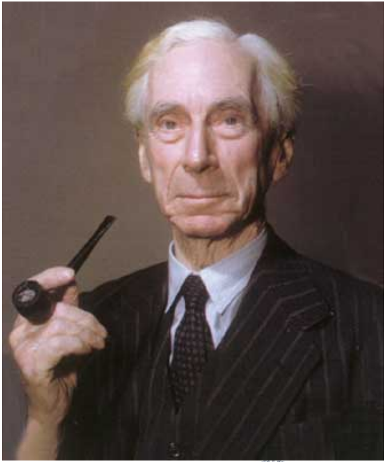
Intuitivamente: Questo schema dice che se due insiemi F, G di punti giacciono su una stessa retta e tutti i punti di F stanno dalla stessa parte rispetto a ciascun punto di G, allora c'è un punto u intermedio fra tutti i punti di F e tutti i punti di G.

[1] Comprende infinite istanze!

[2] '$\mathit{varr}(\varphi)$' indica l'insieme delle variabili che compaiono *libere* in φ.

Gottlob Frege 1848–1925, Bertrand Russell 1872–1970





UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$X_1\,,\ X_2\,,\ X_3\,,\ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$X_1\,,\ X_2\,,\ X_3\,,\ \ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\rightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$\mathsf{X}_1 \,,\, \mathsf{X}_2 \,,\, \mathsf{X}_3 \,, \ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\longrightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

Un linguaggio predicativo del prim'ordine viene caratterizzato tramite ulteriori:

COSTANTI. Es.: **0**, **1** ;

SIMBOLI DI FUNZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').
Es.: succ(_) (monadico), max(_ , _) (diadico);

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$X_1\,,\ X_2\,,\ X_3\,,\ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\longrightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

Un linguaggio predicativo del prim'ordine viene caratterizzato tramite ulteriori:

COSTANTI. Es.: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$;

SIMBOLI DI FUNZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').
Es.: succ(_) (monadico), max(_ , _) (diadico);

SIMBOLI DI RELAZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').
Es.: _ = _ (diadico),

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$X_1\,,\ X_2\,,\ X_3\,,\ \ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\longrightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

Un linguaggio predicativo del prim'ordine viene caratterizzato tramite ulteriori:

COSTANTI. Es.: 0, 1 ; $\emptyset$, ε

SIMBOLI DI FUNZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').

Es.: succ(_) (monadico), max(_ , _) (diadico);

$\_ + \_$ e $\_ \cdot \_$ (diadici), $\_^{*}$ (monadico)

SIMBOLI DI RELAZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').

Es.: $\_ = \_$ (diadico),

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$\mathsf{X}_1\,,\ \mathsf{X}_2\,,\ \mathsf{X}_3\,,\ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\rightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

Un linguaggio predicativo del prim'ordine viene caratterizzato tramite ulteriori:

COSTANTI. Es.: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$; $\emptyset$, ε

SIMBOLI DI FUNZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').
Es.: succ(_) (monadico), max(_ , _) (diadico); _ + _ e _ · _ (diadici), _* (monadico)

SIMBOLI DI RELAZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').
Es.: _ = _ (diadico), fra(_ , _ , _) (ternario), eqd(_ , _ , _ , _) (quaternario);

La grande novità sono le *variabili individuali*:

$$\mathsf{X}_1\,,\ \mathsf{X}_2\,,\ \mathsf{X}_3\,,\ \ldots \qquad (\ \textit{ad infinitum}\ )$$

Manteniamo i *connettivi* della logica proposizionale, fra cui $\longrightarrow$; aggiungiamo i simboli $\forall$ ed $\exists$.

Un linguaggio predicativo del prim'ordine viene caratterizzato tramite ulteriori:

COSTANTI. Es.: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$; $\emptyset$, ε

SIMBOLI DI FUNZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').

Es.: succ(_) (monadico), max(_ , _) (diadico); _ + _ e _ · _ (diadici), _* (monadico)

SIMBOLI DI RELAZIONE, ciascuno dotato di un grado (o 'arità').

Es.: _ = _ (diadico), fra(_, _, _) (ternario), eqd(_, _, _, _) (quaternario); oppure _ ∈ _ ed _ = _ (diadici)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

La grande novità sono i quantificatori

$\forall\, \boldsymbol{x}$ $\qquad$ $\exists\, \boldsymbol{x}$ $\qquad$ ($\boldsymbol{x}$ variabile individuale)

che *si aggiungono*, fra i costruttori di formule,
ai connettivi proposizionali.

La grande novità sono i quantificatori

$\forall\, x \qquad\qquad \exists\, x \qquad\qquad$ (x variabile individuale)

che *si aggiungono*, fra i costruttori di formule, ai connettivi proposizionali.

TERMINI: Si costruiscono a partire da costanti e variabili tramite i simboli di funzione, rispettando i gradi

La grande novità sono i quantificatori

$$\forall\, x \qquad \exists\, x \qquad (\ x \text{ variabile individuale })$$

che *si aggiungono*, fra i costruttori di formule,
ai connettivi proposizionali.

Termini: Si costruiscono a partire da costanti e variabili tramite i simboli di funzione, rispettando i gradi

Esempi: $\mathsf{max}\big(\mathsf{succ}(\mathbf{1}), \mathsf{max}(\mathbf{0}, \mathbf{1})\big)$, $\mathsf{max}\big(\mathsf{succ}(X_1), \mathbf{0}\big)$

La grande novità sono i quantificatori

$\forall\, x$ $\qquad\qquad$ $\exists\, x$ $\qquad\qquad$ (x variabile individuale)

che *si aggiungono*, fra i costruttori di formule,
ai connettivi proposizionali.

TERMINI: Si costruiscono a partire da costanti e variabili tramite i simboli di funzione, rispettando i gradi

Esempi: $\mathsf{max}\big(\mathsf{succ}(\mathbf{1}), \mathsf{max}(\mathbf{0}, \mathbf{1})\big)$, $\quad \mathsf{max}\big(\mathsf{succ}(\mathsf{X}_1), \mathbf{0}\big)$

FORMULE: Quelle 'atomiche' si costruiscono a partire dai termini tramite i simboli di predicato, le altre a partire da quelle *atomiche* tramite i connettivi proposizionali e i quantificatori, rispettando i gradi

La grande novità sono i quantificatori

$\forall\, x \qquad \exists\, x \qquad (\ x$ variabile individuale $)$

che *si aggiungono*, fra i costruttori di formule,
ai connettivi proposizionali.

Termini: Si costruiscono a partire da costanti e variabili tramite i simboli di funzione, rispettando i gradi

Esempi: $\mathsf{max}(\mathsf{succ}(\mathbf{1}), \mathsf{max}(\mathbf{0}, \mathbf{1}))$, $\mathsf{max}(\mathsf{succ}(\mathrm{X}_1), \mathbf{0})$

Formule: Quelle 'atomiche' si costruiscono a partire dai termini tramite i simboli di predicato, le altre a partire da quelle *atomiche* tramite i connettivi proposizionali e i quantificatori, rispettando i gradi

Esempio:

$$\forall\, x(\ \neg x = \emptyset \rightarrow \exists\, y(\ y \in x \,\&\, \forall\, z(\ z \in x \rightarrow \neg z \in y\ )\ )\ )$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Definizione di *struttura*

Una **struttura** consiste in:

- Un *dominio del discorso* $\forall^{\mathfrak{I}}$, non vuoto

(Occhio all'"=" !)

Definizione di *struttura*

Una **struttura** consiste in:

- Un *dominio del discorso* $\forall^{\mathfrak{I}}$, non vuoto
- Un elemento $\boldsymbol{c}^{\mathfrak{I}}$ di $\forall^{\mathfrak{I}}$, per ogni costante $\boldsymbol{c}$ del linguaggio

(Occhio all'"=" !)

Definizione di *struttura*

Una **struttura** consiste in:

- Un *dominio del discorso* $\forall^{\mathfrak{I}}$, non vuoto
- Un elemento $c^{\mathfrak{I}}$ di $\forall^{\mathfrak{I}}$, per ogni costante c del linguaggio
- Una funzione

$$g^{\mathfrak{I}} : \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \forall^{\mathfrak{I}}$$

per ogni simbolo n-ario g di funzione

(Occhio all'"=" !)

Definizione di *struttura*

Una **struttura** consiste in:

- Un *dominio del discorso* $\forall^{\mathfrak{I}}$, non vuoto
- Un elemento $c^{\mathfrak{I}}$ di $\forall^{\mathfrak{I}}$, per ogni costante c del linguaggio
- Una funzione

$$g^{\mathfrak{I}} : \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \forall^{\mathfrak{I}}$$

  per ogni simbolo n-ario g di funzione

- Una relazione

$$R^{\mathfrak{I}} \subseteq \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{n \text{ volte}}$$

  per ogni simbolo n-ario R di relazione (Occhio all'"=" !)

In base a *regole di designazione* tutto sommato scontate, partendo da una struttura interpretativa, associamo ricorsivamente a ogni

TERMINE s: una funzione

$$\boldsymbol{s}^{\mathfrak{I}} : \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{\boldsymbol{n}\ \text{volte}} \longrightarrow \forall^{\mathfrak{I}} ,$$

dove n è il numero di variabili distinte presenti in s

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

In base a *regole di designazione* tutto sommato scontate, partendo da una struttura interpretativa, associamo ricorsivamente a ogni

TERMINE s: una funzione

$$s^{\mathfrak{I}} : \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{n \text{ volte}} \longrightarrow \forall^{\mathfrak{I}},$$

dove n è il numero di variabili distinte presenti in s

FORMULA φ: una relazione

$$\varphi^{\mathfrak{I}} \subseteq \underbrace{\forall^{\mathfrak{I}} \times \cdots \times \forall^{\mathfrak{I}}}_{n \text{ volte}},$$

ove n è il nr. di variabili *libere* distinte presenti in φ

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

CASO PARTICOLARE $\boxed{n = 0}$

- il termine si dice **chiuso** e deve designare un'entità del dominio del discorso
- la formula si chiama un **enunciato** e designerà uno dei due valori di verità

Caso particolare $\boxed{n = 0}$

- il termine si dice **chiuso** e deve designare un'entità del dominio del discorso
- la formula si chiama un **enunciato** e designerà uno dei due valori di verità

Il concetto di variabile *libera* in una formula andrebbe definito con rigore. È di natura sintattica: una variabile resta libera fintantoché non viene catturata dal corrispondente quantificatore.

CASO PARTICOLARE $n = 0$

- il termine si dice **chiuso** e deve designare un'entità del dominio del discorso
- la formula si chiama un **enunciato** e designerà uno dei due valori di verità

Il concetto di variabile *libera* in una formula andrebbe definito con rigore. È di natura sintattica: una variabile resta libera fintantoché non viene catturata dal corrispondente quantificatore.

NESSUN COSTRUTTO CHE LEGHI LE VARIABILI NEI TERMINI ?

CASO PARTICOLARE $\boxed{n = 0}$

- il termine si dice **chiuso** e deve designare un'entità del dominio del discorso
- la formula si chiama un **enunciato** e designerà uno dei due valori di verità

Il concetto di variabile *libera* in una formula andrebbe definito con rigore. È di natura sintattica: una variabile resta libera fintantoché non viene catturata dal corrispondente quantificatore.

NESSUN COSTRUTTO CHE LEGHI LE VARIABILI NEI TERMINI ?

Ebbene sí: I **descrittori** ! ($\iota\, x\, \varphi$ di Peano, $\varepsilon\, x\, \varphi$ di Hilbert)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$$\forall x \quad \mathbf{S}x \neq \mathbf{0} \tag{S1}$$

$$\forall x \forall y \quad (\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y) \tag{S2}$$

$$\forall x \forall y \quad (x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y) \tag{L1}$$

$$\forall x \quad x \not< \mathbf{0} \tag{L2}$$

$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x) \tag{L3}$$

$$\forall x \quad x + \mathbf{0} = x \tag{A1}$$

$$\forall x \forall y \quad x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y) \tag{A2}$$

$$\forall x \quad x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{M1}$$

$$\forall x \forall y \quad x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x \tag{M2}$$

$$\forall x \quad x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0} \tag{E1}$$

$$\forall x \forall y \quad x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x \tag{E2}$$

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$$\forall x \quad \mathbf{S}x \neq \mathbf{0} \tag{S1}$$

$$\forall x \forall y \quad (\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y) \tag{S2}$$

$$\forall x \forall y \quad (x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y) \tag{L1}$$

$$\forall x \quad x \not< \mathbf{0} \tag{L2}$$

$$\forall x \forall y \quad (x < y \vee x = y \vee y < x) \tag{L3}$$

$$\forall x \quad x + \mathbf{0} = x \tag{A1}$$

$$\forall x \forall y \quad x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y) \tag{A2}$$

$$\forall x \quad x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{M1}$$

$$\forall x \forall y \quad x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x \tag{M2}$$

$$\forall x \quad x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0} \tag{E1}$$

$$\forall x \forall y \quad x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x \tag{E2}$$

(Raphael M. Robinson , 1911–1995)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Esempio di linguaggio interpretato / teoria

3: Undecidability 203

where A_E is the set consisting of the eleven sentences listed below. (As in the preceding section, $x \leq y$ abbreviates $x < y \vee x = y$.)

Set A_E of Axioms

$\forall x$	$\mathbf{S}x \neq \mathbf{0}$	(S1)
$\forall x \forall y$	$(\mathbf{S}x = \mathbf{S}y \rightarrow x = y)$	(S2)
$\forall x \forall y$	$(x < \mathbf{S}y \leftrightarrow x \leq y)$	(L1)
$\forall x$	$x \not< \mathbf{0}$	(L2)
$\forall x \forall y$	$(x < y \vee x = y \vee y < x)$	(L3)
$\forall x$	$x + \mathbf{0} = x$	(A1)
$\forall x \forall y$	$x + \mathbf{S}y = \mathbf{S}(x + y)$	(A2)
$\forall x$	$x \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$	(M1)
$\forall x \forall y$	$x \cdot \mathbf{S}y = x \cdot y + x$	(M2)
$\forall x$	$x\mathbf{E}\mathbf{0} = \mathbf{S}\mathbf{0}$	(E1)
$\forall x \forall y$	$x\,\mathbf{E}\,\mathbf{S}y = x\,\mathbf{E}\,y \cdot x$	(E2)

$$\forall^{\mathfrak{I}} = \mathbb{N}$$

$$x \overset{\mathrm{S}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x+1$$

$$\ddots$$

$$(x, y) \overset{\mathrm{E}^{\mathfrak{I}}}{\longmapsto} x^{y}$$

(Raphael M. Robinson , 1911–1995)

Esprimere nello stesso linguaggio utilizzato per formulare gli assiomi A_E la congettura di Christian Goldbach (del 1742):

> *Ogni numero intero pari $n \geqslant 4$ può essere scomposto nella forma*
>
> $$n \quad = \quad p + q$$
>
> *con p , q numeri primi.*

Trovare una struttura interpretativa *significativamente* diversa dall'interpretazione privilegiata (quale?) in cui risultino tutti contemporaneamente veri i segg. enunciati:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{S}\,x & \neq & \mathbf{0} \\
\mathrm{S}\,x = \mathrm{S}\,y & \rightarrow & x = y \\
y \neq \mathbf{0} & \rightarrow & \exists\, x\; y = \mathrm{S}\,x \\
\underbrace{\mathrm{S}\,\mathrm{S}\cdots\mathrm{S}}_{n+1 \text{ volte}}\,x & \neq & x
\end{array}
$$