Assiomi della geometria tarskiana, semplificati

Eugenio G. Omodeo

9 maggio 2016

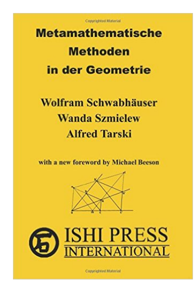
Wanda Szmielew
(1918–1976)

1 Assiomi, versione 1965 (pubblicata nel 1983)

	CE$_2$			
1.	ab	$\equiv$	ba	(RE)
2.	$ab \equiv pq \,\&\, ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
4.	$\exists\, x \big(B \bullet ax$	$\&$	$ax \equiv \bullet\bullet\ \big)$	(SC)
5.	$a \neq b \,\&\, B\,abc \,\&\, B\,a'b'c' \,\&\, ab \equiv a'b' \,\&$			(FS)
	$bc \equiv b'c' \,\&\, ad \equiv a'd' \,\&\, bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$cd \equiv c'd'$	
6.	$B\,aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
7.	$B\,apc \,\&\, B\,bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x \,\big(B\,pxb \,\&\, B\,qxa \,\big)$	(IP)
8.	$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c \big(\neg B\,abc$	$\&$	$\neg B\,bca \quad \& \quad \neg B\,cab \big)$	(Lo$_2$)
9.	$p \neq q \,\&\, ap \equiv aq \,\&\, bp \equiv bq \,\&\, cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\,abc \vee B\,bca \vee B\,cab$	(Up$_2$)
10.	$B\,adt \,\&\, B\,bdc \,\&\, a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \exists\, y \,\big(B\,abx \,\&\, B\,acy \,\&\, B\,xty \big)$	(Eu)
11.	$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \,\&\, y \in Y \ \rightarrow\ B\,axy \big)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y \,\big(x \in X \,\&\, y \in Y \ \rightarrow\ B\,xby \big)$	(Co)

Legenda:

(RE) Assioma di riflessività per l'$\boxed{\textit{equidistanza}}$
(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS) Assioma dei 5 segmenti
(IB) Assioma d'identità per l'$\boxed{\textit{intermedietà}}$
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo$_2$) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up$_2$) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) [Schema(?) d']assioma di continuità



2 Skolemizzazione di due degli assiomi

Per '*skolemizzare*' (SC) ed (IP), possiamo introdurre due simboli di funzione,

$$\mathsf{ext}(\_,\_,\_,\_)\,,\qquad \mathsf{ip}(\_,\_,\_,\_,\_)\,,$$

per poi riscrivere gli assiomi in questione cosí:

$$\begin{array}{rcll} B\,q\,a\,\mathsf{ext}(q,a,b,c) & \& & a\,\mathsf{ext}(q,a,b,c)\equiv b\,c & (\mathrm{SC}^{\mathsf{sk}}) \\ B\,apc\,\&\,B\,bqc & \to & B\,p\,\mathsf{ip}(a,p,c,b,q)\,b\,\&\,B\,q\,\mathsf{ip}(a,p,c,b,q)\,a & (\mathrm{IP}^{\mathsf{sk}}) \end{array}$$

3 Cosa cambia rispetto agli assiomi del 1959?

La versione degli assiomi del 1965 non comprende piú gli assiomi di *transitività* (esterna) e di *connettività* (esterna),

$$\begin{array}{rcl} B\,abd\,\&\,B\,bcd & \to & B\,abc \\ a\neq b\,\&\,B\,abc\,\&\,B\,abd & \to & B\,acd\vee B\,adc\,, \end{array}$$

che frattanto Haragauri Narayan Gupta, nel corso della tesi di dottorato (svolta sotto la supervisione di Alfred Tarski e di Leon A. Henkin), è riuscito a dedurre dagli altri assiomi. Semplificazioni notevoli agli assiomi formulati da Gupta sono state apportate dalla Szmielew.

Inoltre l'assioma di Pasch è formulato in maniera diversa da prima; dalla versione *esterna* ('*outer*' in inglese) siamo passati a quella *interna* ('*inner*', vedi Fig. 1):

$$\begin{array}{r|lcl|l} 7. & B\,apc\,\&\,B\,bqc & \to & \exists x\,\big(B\,pxb\,\&\,B\,qxa\big) & (\mathrm{IP}) \\ 12. & B\,apc\,\&\,B\,qcb & \to & \exists x\,\big(B\,axq\,\&\,B\,bpx\big) & (\mathrm{OP}) \\ 12'. & B\,apc\,\&\,B\,qcb & \to & \exists x\,\big(B\,axq\,\&\,B\,xpb\big) & (\mathrm{OP}') \end{array}$$

(Una riformulazione della versione esterna, da (OP′) ad (OP), era già intervenuta fra il 1951 e il 1959 — ritocco simile aveva subíto anche (Eu)).

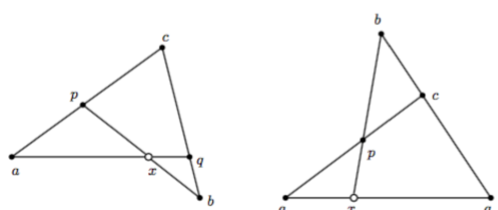


Figura 1: Diagrammi raffiguranti le due versioni—(IP) ed (OP)—dell'assioma di Pasch.

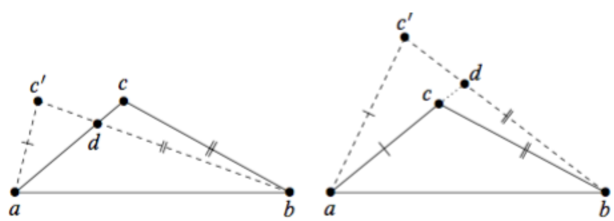
4 Degli assiomi del 1951, quali erano già spariti nel 1959?

La versione degli assiomi del 1951[1] comprende sei enunciati riguardanti la relazione d'intermedietà (non stretta), quattro dei quali spariranno nella versione del 1959, in quanto Tarski e due suoi allievi[2] saranno riusciti (nel 1956–57) a dedurli dagli altri assiomi; gli altri due spariranno—anni dopo—come riferito nella sezione precedente. I sei assiomi in questione sono:

		$B\,abb$		riflessività
$B\,abc$	$\rightarrow$	$B\,cba$	(SB)	simmetria
$b \neq c \,\&\, B\,abc \,\&\, B\,bcd$	$\rightarrow$	$B\,abd$		transitività esterna
$B\,abd \,\&\, B\,acd$	$\rightarrow$	$B\,abc \vee B\,acb$		connettività interna
$B\,abd \,\&\, B\,bcd$	$\rightarrow$	$B\,abc$		transitività interna
$a \neq b \,\&\, B\,abc \,\&\, B\,abd$	$\rightarrow$	$B\,acd \vee B\,adc$		connettività esterna

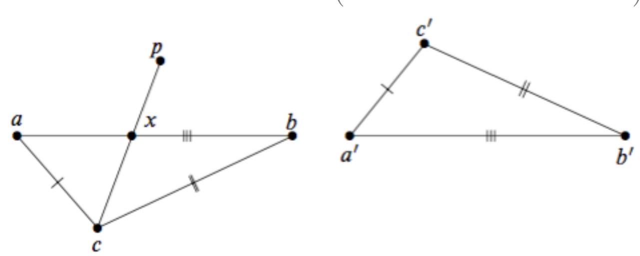
Intervengono fra il 1951 e il 1959 anche la sparizione dell'*assioma di unicità per la costruzione di triangoli*:

$$a \neq b \;\&\; ac \equiv ac' \;\&\; bc \equiv bc' \;\&\; B\,bdc' \;\&\; \big(B\,adc \vee B\,acd\big) \quad\rightarrow\quad c = c'$$



e quella dell'*assioma di esistenza per la costruzione di triangoli*:

$$ab \equiv a'b' \quad\rightarrow\quad \exists\, c\, \exists\, x \Big(ac \equiv a'c' \;\&\; bc \equiv b'c' \;\&\; B\,cx\bullet \;\& \\ \big(B\,abx \vee B\,bxa \vee B\,xab\big)\Big)$$



[1]Non disponendo della versione del rapporto RAND antecedente le revisioni del 1951, non possiamo stabilire se modifiche degli assiomi siano intervenute fra il 1948 e il 1951.

[2]Eva Callin e Scott Taylor.

5 Assiomi semplificati da Makarios, ca. 2013

	CE_2'			
~~1.~~	$\cancel{ab}$	$\cancel{\equiv}$	$\cancel{ba}$	~~(RE)~~
2.	$ab \equiv pq \,\&\, ab \equiv rs$	$\rightarrow$	$pq \equiv rs$	(TE)
3.	$ab \equiv cc$	$\rightarrow$	$a = b$	(IE)
4.	$\exists\, x \big(\, B\, qax$	$\&$	$ax \equiv bc \,\big)$	(SC)
$5'$.	$a \neq b \,\&\, B\, abc \,\&\, B\, a'b'c' \,\&\, ab \equiv a'b' \,\&$			(FS')
	$bc \equiv b'c' \,\&\, ad \equiv a'd' \,\&\, bd \equiv b'd'$	$\rightarrow$	$dc \equiv c'd'$	
6.	$B\, aba$	$\rightarrow$	$a = b$	(IB)
7.	$B\, apc \,\&\, B\, bqc$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \big(\, B\, pxb \,\&\, B\, qxa \,\big)$	(IP)
8.	$\exists\, a\, \exists\, b\, \exists\, c \big(\, \neg B\, abc$	$\&$	$\neg B\, bca \quad \& \quad \neg B\, cab \,\big)$	(Lo_2)
9.	$p \neq q \,\&\, ap \equiv aq \,\&\, bp \equiv bq \,\&\, cp \equiv cq$	$\rightarrow$	$B\, abc \vee B\, bca \vee B\, cab$	(Up_2)
10.	$B\, adt \,\&\, B\, bdc \,\&\, a \neq d$	$\rightarrow$	$\exists\, x\, \exists\, y\, \big(\, B\, abx \,\&\, B\, acy \,\&\, B\, xty \,\big)$	(Eu)
11.	$\exists\, a\, \forall\, x\, \forall\, y\, \big(\, x \in X \,\&\, y \in Y \;\rightarrow\; B\, axy \,\big)$	$\rightarrow$	$\exists\, b\, \forall\, x\, \forall\, y\, \big(\, x \in X \,\&\, y \in Y \;\rightarrow\; B\, xby \,\big)$	(Co)

Legenda:

(RE) Assioma di riflessività per l'equidistanza
(TE) Assioma di transitività per l'equidistanza
(IE) Assioma d'identità per l'equidistanza
(SC) Assioma di costruzione di segmenti
(FS') Assioma dei 5 segmenti (variante di Makarios)
(IB) Assioma d'identità per l'intermedietà
(IP) Assioma interno di Pasch
(Lo_2) Assioma 2-dimensionale inferiore
(Up_2) Assioma 2-dimensionale superiore
(Eu) Assioma euclideo
(Co) Assioma di continuità

6 Lemmi basilari dimostrati da Makarios

Le dimostrazioni che seguono impiegano solo i primi sei assiomi di CE_2', vale a dire (TE), (IE), (SC), (FS'), (IB) e (IP), che individuano quella che Makarios chiama la *geometria (tarskiana) assoluta priva di dimensione, senza assioma di continuità.*

Lemma 1 (Riflessività debole dell'equidistanza) $ab \equiv ab$

Dim. (Sottinteso: le variabili a, b dell'asserto sono da considerarsi universalmente quantificate; nel corso della dimostrazione utilizzeremo questi stessi due nomi per generici punti). I passi-chiave di una dimostrazione formale sono questi:

1. $\quad a\ \mathsf{ext}(a, a, a, b) \equiv a\ b$ (SC)

2. $\therefore\ ab \equiv ab$ (TE)

Il primo passo ci dà un esempio di come si '*istanzino*' variabili universalmente quantificate (qui le variabili q, a, b, c dell'assioma citato), sostituendole con dei termini. Traspare l'aspetto booleano della logica almeno due volte—ma in modo sotterraneo, dato che qui vediamo la traccia di una dimostrazione formale e non una derivazione particolareggiata—: dapprima, quando tralasciamo uno dei due congiunti dell'assioma (SC); poi quando, dopo aver istanziato le variabili p, q, r, s dell'assioma (TE), utilizziamo due volte quanto ricavato al passo precedente e utilizziamo la regola *Modus Ponens*. Il contrassegno $\therefore$ (leggi 'pertanto') segnala che il passo non risulta direttamente da un assioma, né è un'ipotesi di partenza, né la citazione di un lemma già noto, né un'assunzione o definizione provvisoria: risulta, invece, dall'impiego di passi precedenti della dimostrazione. $\dashv$

Lemma 2 (Simmetria dell'equidistanza) $ab \equiv cd \ \rightarrow\ cd \equiv ab$

Dim. I passi-chiave di una dimostrazione formale sono riportati sotto. Va da sé che a fine-dimostrazione vada adoperato il principio di deduzione, onde 'scaricare' l'ipotesi di partenza.

1. $\quad a\, b \equiv c\, d$ (*Ipotesi*)

2. $\quad a\, b \equiv a\, b$ (*Lemma* 1)

3. $\therefore\ cd \equiv ab$ (TE)

$\dashv$

Lemma 3 (Non-strettezza dell'intermedietà) $B\, a\, b\, b$

Dim.

1. $B\ a\ b\ \mathsf{ext}(a,b,a,a)\ \&\ b\ \mathsf{ext}(a,b,a,a) \equiv a\ a$ (SC)

2. $\therefore$ $b = \mathsf{ext}(a,b,a,a)$ (IE)

3. $\therefore$ $B\ a\ b\ b$ (=)

L'ultimo passaggio di questa dimostrazione sfrutta la proprietà di congruenza dell'=, che conferisce a questa relazione logica qualcosa in piú di una comune relazione di equivalenza. $\dashv$

Lemma 4 (Simmetria dell'intermedietà) $B\,a\,b\,c\ \rightarrow\ B\,c\,b\,a$

Dim.

1. $B\ a\ b\ c$ (*Ipotesi*)

2. $B\ b\ c\ c$ (*Lemma* 3)

3. $\therefore$ $B\ b\ \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)\ b\ \&\ B\ c\ \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)\ a$ (IP)

4. $\therefore$ $b = \mathsf{ip}(a,b,c,b,c)$ (IB)

5. $\therefore$ $B\ c\ b\ a$ (=)

$\dashv$

Lemma 5 (Riflessività dell'equidistanza) $a\,b\ \equiv\ b\,a$

Dim.

1. $B\ b\ a\ \mathsf{ext}(b,a,b,a)\ \&\ a\ \mathsf{ext}(b,a,b,a) \equiv b\ a$ (SC)

2. $x = \mathsf{ext}(b,a,b,a)$ (*Definizione* locale)

3. $\therefore$ $B\ b\ a\ x\ \&\ a\ x \equiv b\ a$ (=)

4. $x = a$ (*Assunzione*)

   4.1. $\therefore$ $a\ a \equiv b\ a$ (=)

   4.2. $\therefore$ $b\ a \equiv a\ a$ (*Lemma* 2)

   4.3. $\therefore$ $b = a$ (IE)

4.4. $\therefore \quad a\,b \equiv b\,a$ $\hfill (=)$

5. $\quad x \neq a$ $\hfill$ (*Assunzione* opposta)

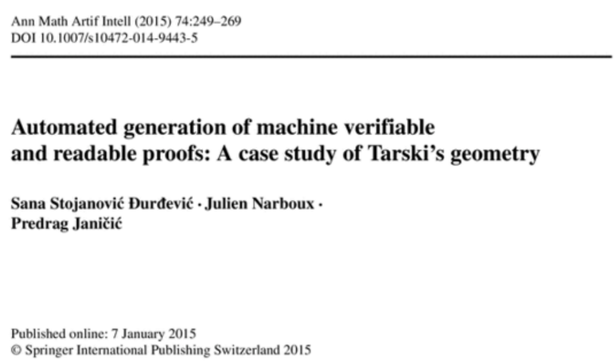
6. $\therefore \quad B\,x\,a\,b$ $\hfill$ (*Lemma* 4)

7. $\quad x\,a \equiv x\,a \;\&\; a\,b \equiv a\,b \;\&\; a\,a \equiv a\,a$ $\hfill$ (*Lemma* 1)

8. $\therefore \quad a\,b \equiv b\,a$ $\hfill$ (FS′)

$\dashv$

A questo punto, per stabilire che le teorie assiomatiche CE_2' e CE_2 sono di pari forza (i.e., hanno gli stessi teoremi), basta osservare che gli enunciati (FS) ed (FS′) risultano logicamente equivalenti tra loro: ciò grazie alla riflessività dell'equidistanza (che in CE_2' abbiamo laboriosamente finito di dimostrare, ma che in CE_2 è un assioma) e grazie anche a (TE). I dettagli vengono lasciati come esercizio.


Ann Math Artif Intell (2015) 74:249–269
DOI 10.1007/s10472-014-9443-5

Automated generation of machine verifiable and readable proofs: A case study of Tarski's geometry

Sana Stojanović Đurđević · Julien Narboux · Predrag Janičić

Published online: 7 January 2015
© Springer International Publishing Switzerland 2015

Figura 2: Ma la tecnologia della dimostrazione sta evolvendo…

7 Esercizi

Esercizio 1 *Skolemizzare la versione* (OP) *dell'enunciato di Pasch.*

Esercizio 2 *Ricavare la simmetria* (SB) *dell'intermedietà dalla versione esterna,* (OP)*, dell'enunciato di Pasch—usando anche gli assiomi* (SC)*,* (IB) *e* (IE)*.*

Riferimenti bibliografici

[Beeson and Wos(2014)] Michael Beeson and Larry Wos. OTTER proofs in Tarskian geometry. In Stéphane Demri, Deepak Kapur, and Christoph Weidenbach, editors, *7th International Joint Conference, IJCAR 2014, Held as Part of the Vienna Summer of Logic, Vienna, Austria, July 19-22, 2014, Proceedings*, volume 8562 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 495–510. Springer, 2014.

[Hintikka(1969)] Jaakko Hintikka, editor. *The philosophy of mathematics.* Oxford readings in Philosophy. Oxford University Press, 1969.

[Makarios(2013)] Timothy J. M. Makarios. A further simplification of Tarksi's axioms of geometry. *Note di Matematica*, 33(2):123–132, 2013.

[Schwabhäuser et al.(1983)Schwabhäuser, Szmielew, and Tarski] W. Schwabhäuser, W. Szmielew, and A. Tarski. *Metamathematische Methoden in der Geometrie.* Hochschultext. Springer Berlin Heidelberg, 1983. ISBN 9783540129585. URL `https://books.google.it/books?id=Qwx2QgAACAAJ`. A new forward in 2011 by Michael Beeson, Professor in the Math Department of San Jose State University, explains in lay terms the origins and differences between Euclidean and non-Euclidean geometries.

[Tarski(1948)] Alfred Tarski. A decision method for elementary algebra and geometry. Technical Report R-109, RAND Corporation, Santa Monica, CA, 1948. Prepared for publication with the assistance of J.C.C. McKinsey. Revised 1951, 2$^{\text{nd}}$ edition 1957.

[Tarski(1959)] Alfred Tarski. What is elementary geometry? In Leon Henkin, Patrick Suppes, and Alfred Tarski, editors, *The axiomatic method, with special reference to geometry and physics*, pages 16–29. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1959.
(Ristampato in [Hintikka(1969), pp. 164–176]).

[Tarski(1967)] Alfred Tarski. *The completeness of elementary algebra and geometry.* Institut Blaise Pascal, Paris, 1967. iv+50 pp.

[Tarski and Givant(1999)] Alfred Tarski and Steven Givant. Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic*, 5(2):175–214, 1999. URL `http://www.math.ucla.edu/~asl/bsl/0502/0502-002.ps`.

8 Svolgimento degli esercizi

Soluzione Es. 1.

$$B\,apc \,\&\, B\,qcb \quad\rightarrow\quad B\;a\,\mathsf{op}(\,a\,,\,p\,,\,c\,,\,q\,,\,b\,)\,q \,\&\, B\;p\,\mathsf{op}(\,a\,,\,p\,,\,c\,,\,q\,,\,b\,)\,b \qquad (\mathrm{OP}^{\mathsf{sk}})$$

$\dashv$

Soluzione Es. 2. **(Lucrezia Bottegoni)** Dimostro che: $B\,a\,b\,c \;\rightarrow\; B\,c\,b\,a$.

1.		$B\ a\ b\ b$	(*Lemma* 3)
2.		$B\ a\ b\ c$	(*Ipotesi*)
3.	$\therefore$	$\exists\, x\big(B\ a\ x\ a \,\&\, B\ c\ b\ x\big)$	(OP)
4.	$\therefore$	$B\ a\ x_0\ a \,\&\, B\ c\ b\ x_0$	(eliminaz. $\exists$)
5.	$\therefore$	$a = x_0$	(IB)
6.	$\therefore$	$B\ c\ b\ a$	(=)

$\dashv$