

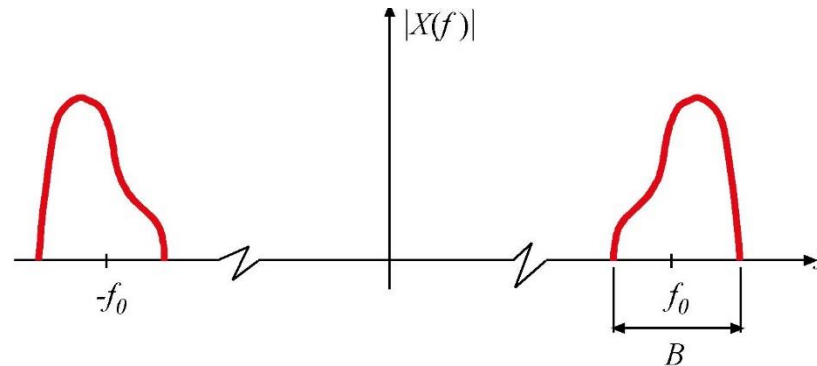
- Segnali passa-banda
- Inviluppo complesso
- Trasformata di Hilbert
- Segnale analitico
- Analisi dei sistemi LTI passa-banda
- Ritardo di fase, ritardo di gruppo



Segnale passa banda:

segnale il cui spettro $X(f)$ è nullo ovunque, tranne su un intervallo (usualmente piccolo) di frequenze attorno a una frequenza f_0 .

$$X(f) = 0 \quad \text{sicuramente per} \quad |f - f_0| > B \quad B < f_0$$



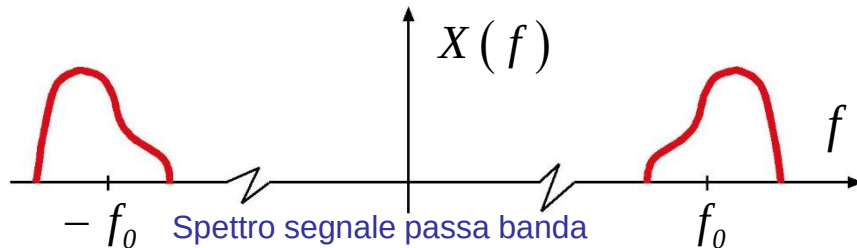
Attenzione:

f_0 **potrebbe non essere** la frequenza al centro dell'intervallo B .

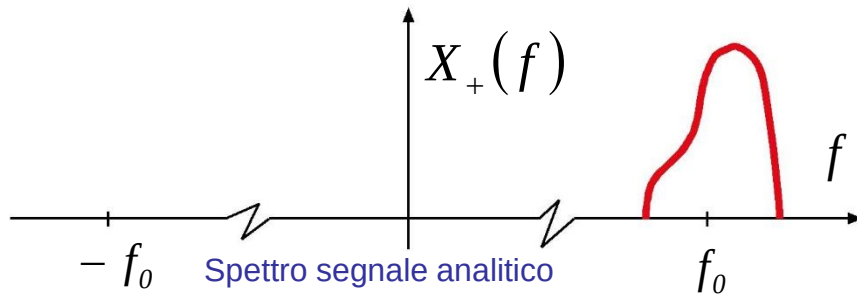


Segnale analitico – Involuppo complesso

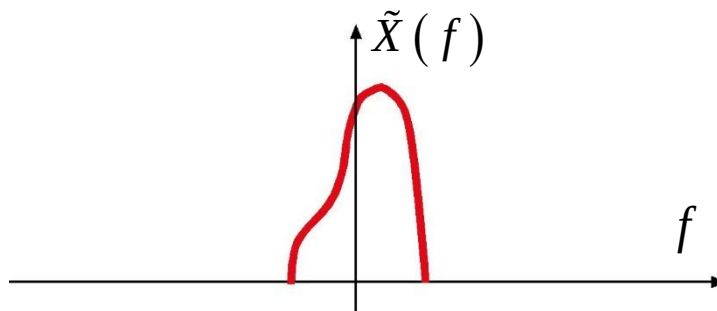
Associamo al segnale in banda traslata, un segnale (generalmente complesso) in banda base:



$$X_+(f) = 2X(f)U(f)$$



$$x_+(t) = F^{-1}\{X_+(f)\}$$



Spettro involuppo complesso

$$\begin{aligned}\tilde{X}(f) &= X_+(f + f_0) \\ \tilde{x}(t) &= x_+(t)e^{-j2\pi f_0 t}\end{aligned}$$



Segnale analitico – Involuppo complesso

- Ricordando che: $F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$
- per dualità si ha: $F^{-1}\{U(f)\} = \frac{1}{2}\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right)$ essendo $U(f) = \begin{cases} 1 & f > 0 \\ 0 & f < 0 \end{cases}$
- Pertanto: $x_+(t) = F^{-1}\{2X(f)U(f)\} = x(t) \otimes \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) = x(t) + j\hat{x}(t)$
dove $\hat{x}(t)$ è detta trasformata di Hilbert di $x(t)$.
- Si ha: $x(t) = \Re\{x_+(t)\}$
- Inoltre:

$$\tilde{X}(f) = X_+(f + f_0)$$
$$\tilde{x}(t) = x_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} = (x(t) + j\hat{x}(t))e^{-j2\pi f_0 t} = x_c(t) + jx_s(t)$$
$$x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} = (x_c(t) + jx_s(t))e^{j2\pi f_0 t}$$

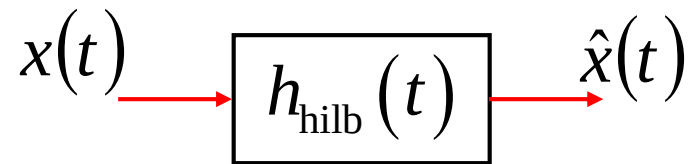
dove $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono detti parte in fase e parte in quadratura del segnale (con riferimento alla frequenza f_0)



Trasformata di Hilbert

Da funzione di $t \rightarrow$ a funzione di t

Può essere considerata come un'operazione eseguita da un **opportuno** sistema **LTI**

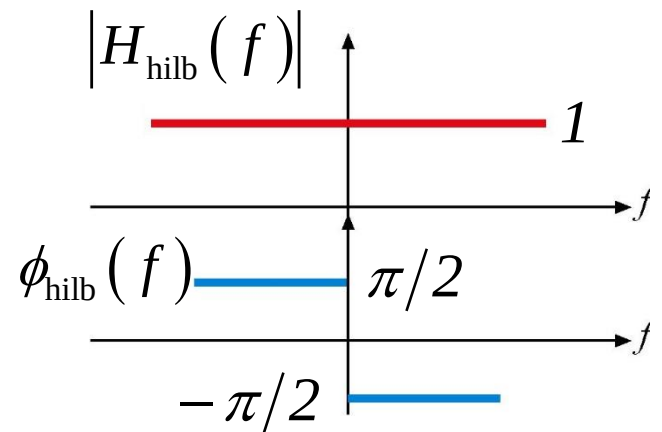


$$h_{\text{hilb}}(t) = \frac{1}{\pi t}$$

Rem.: $\text{sgn}(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\pi f}$

Per dualità:

$$H_{\text{hilb}}(f) = \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{\pi t} \right\} = -j \text{sgn}(f)$$

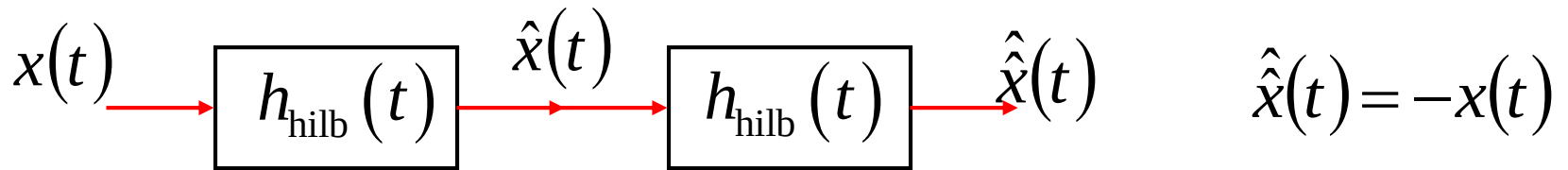


Esempi e proprietà

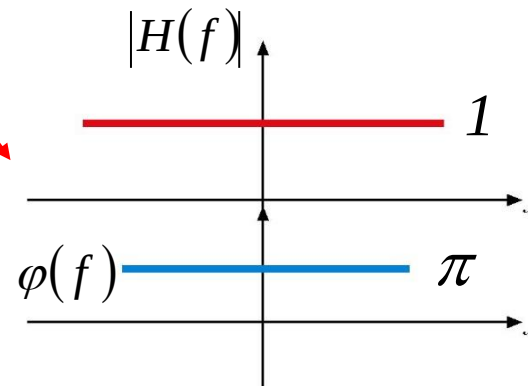
$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(t) = \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad \longrightarrow \quad \hat{x}(t) = -\cos(2\pi f_0 t)$$

(verifica per mezzo dei rispettivi spettri)



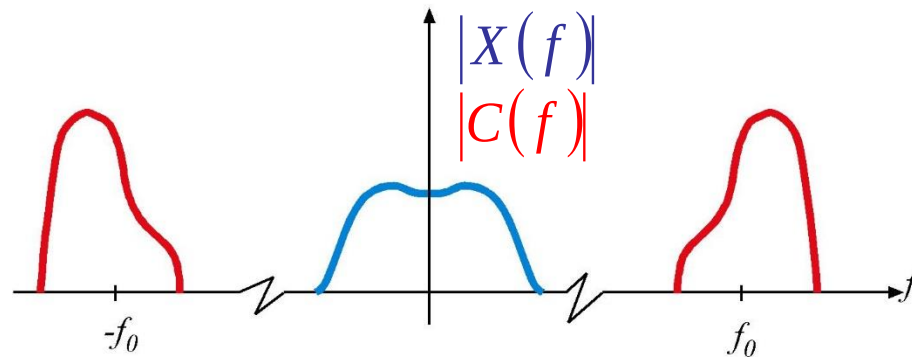
$$\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$$



Sia

$$y(t) = x(t)c(t)$$

$$\text{con: } X(f) \times C(f) = 0$$



Allora:

$$\hat{y}(t) = x(t)\hat{c}(t)$$

Esempio tipico:

$$y(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) \quad \longrightarrow \quad \hat{y}(t) = m(t)\sin(2\pi f_0 t)$$



Relazioni importanti

Il segnale passa banda può essere posto quindi nella forma:

$$x(t) = \Re \left\{ \tilde{x}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

Inoltre:

$$x(t) = \tilde{x}_{\text{Re}}(t) \cos(2\pi f_0 t) - \tilde{x}_{\text{Im}}(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

(forma **canonica** di un segnale passa banda)

$$\tilde{x}_{\text{Re}}(t) = \text{parte in fase } (x_c(t))$$

$$\tilde{x}_{\text{Im}}(t) = \text{parte in quadratura } (x_s(t))$$

$$a(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{\tilde{x}_{\text{Re}}^2(t) + \tilde{x}_{\text{Im}}^2(t)} \quad \text{Inviluppo naturale di } x(t)$$



$$x(t) = \Re\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\}$$

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t) = \Re\{\tilde{x}(t)\} = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \Im\{\tilde{x}(t)\} = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}(t)$, $x_c(t)$, $x_s(t)$ dipendono dalla scelta di f_0

$a(t) = |\tilde{x}(t)|$ = inviluppo naturale, non dipende dalla scelta di f_0



sistema passa banda

rappresentazione equivalente in banda base, seguendo le medesime regole viste per i segnali:

$$h(t) \rightarrow h_+(t) = \frac{1}{2} \{ h(t) + j\hat{h}(t) \} \quad \text{Segnale analitico associato a } h(t)$$

per convenienza

$$\tilde{h}(t) = h_+(t) e^{-j2\pi f_0 t} = h_c(t) + jh_s(t)$$

$$\tilde{H}(f) = H(f + f_0) u(f + f_0)$$

$$h(t) = 2\Re \{ \tilde{h}(t) e^{j2\pi f_0 t} \}$$

a causa del fattore $1/2$



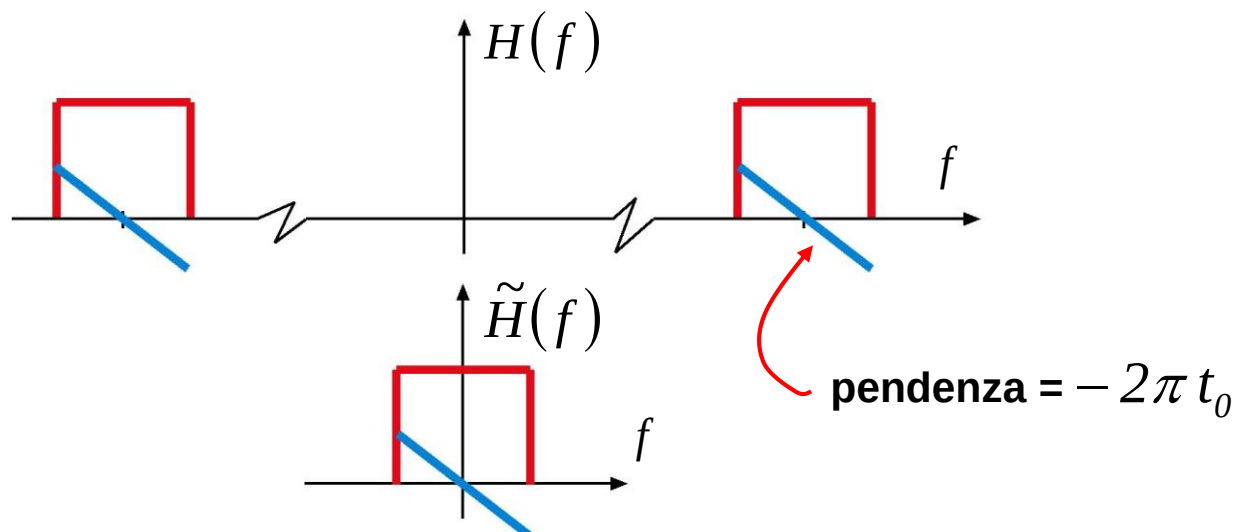
Con questa definizione risulta:

$$Y_+(f) = 2X(f)H(f)U(f) = 2Y(f)U(f)$$

$$\tilde{Y}(f) = Y_+(f + f_0) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$$

Esempio:



$$y(t) = \Re\left\{ \tilde{y}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \Re\left\{ (y_c(t) + jy_s(t)) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$
$$\Re\left\{ (x_c(t) + jx_s(t)) \otimes (h_c(t) + jh_s(t)) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes h_c(t) - x_s(t) \otimes h_s(t)$$

$$y_s(t) = x_c(t) \otimes h_s(t) + x_s(t) \otimes h_c(t)$$



Involuppo complesso $\tilde{x}(t) = \tilde{x}_{\text{Re}}(t) + j\tilde{x}_{\text{Im}}(t)$

$$x(t) = \Re\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

forma **canonica** di un segnale passa banda:

$$x(t) = \tilde{x}_{\text{Re}}(t)\cos(2\pi f_0 t) - \tilde{x}_{\text{Im}}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{x}_{\text{Re}}(t) = \text{parte in fase } (x_c(t))$$

$$\tilde{x}_{\text{Im}}(t) = \text{parte in quadratura } (x_s(t))$$

$$a(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{\tilde{x}_{\text{Re}}^2(t) + \tilde{x}_{\text{Im}}^2(t)} \quad \text{Involuppo naturale di } x(t)$$

Per un sistema passa basso

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$$

$$\tilde{Y}(f) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$



Trasformata di Hilbert: $\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$

$$H_{\text{hilb}}(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j \operatorname{sgn}(f) \quad \hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$$

Relazioni importanti:

$$x(t) = x_c(t) \cos(2\pi f_0 t) - x_s(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(t) = x_c(t) \sin(2\pi f_0 t) + x_s(t) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t) = \Re\{\tilde{x}(t)\} = x(t) \cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \Im\{\tilde{x}(t)\} = \hat{x}(t) \cos(2\pi f_0 t) - x(t) \sin(2\pi f_0 t)$$

segnale analitico associato a $x(t)$: $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$



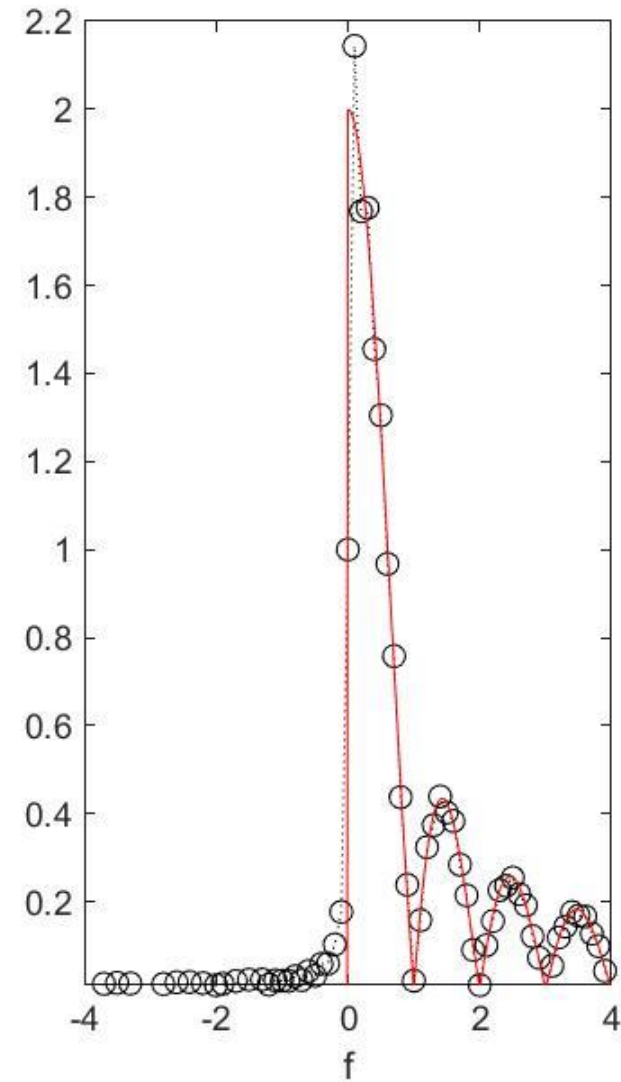
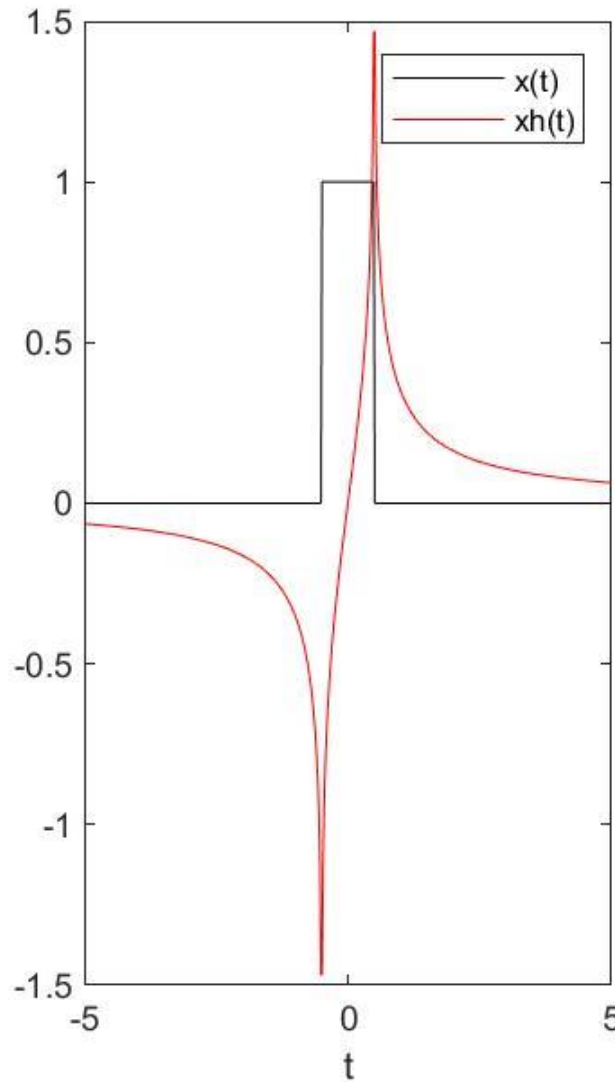
Esempio (S1)

```
clear;
T=1;%durata rettangolo
T0=5;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/50;%intervallo di campionamento
t=(-T0+Ts/2:Ts:T0);%istanti campionamento
fm=4;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
xr=zeros(1,length(t)); xr(abs(t)<=T/2)=1;
xh=log(abs((t+T/2)./(t-T/2)))/pi; x=xr+j*xh;
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(ft>=0)=2*T*sinc(ft(ft>=0)*T);
subplot(1,2,1);plot(t,xr,'k');xlabel('t');hold on;
plot(t,xh,'r'); legend('x(t)','xh(t)');hold off;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1; om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f'); hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,2.2*T]); hold off;
```

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{j}{\pi} \log \left| \frac{t+T/2}{t-T/2} \right|$$



Esempio 1



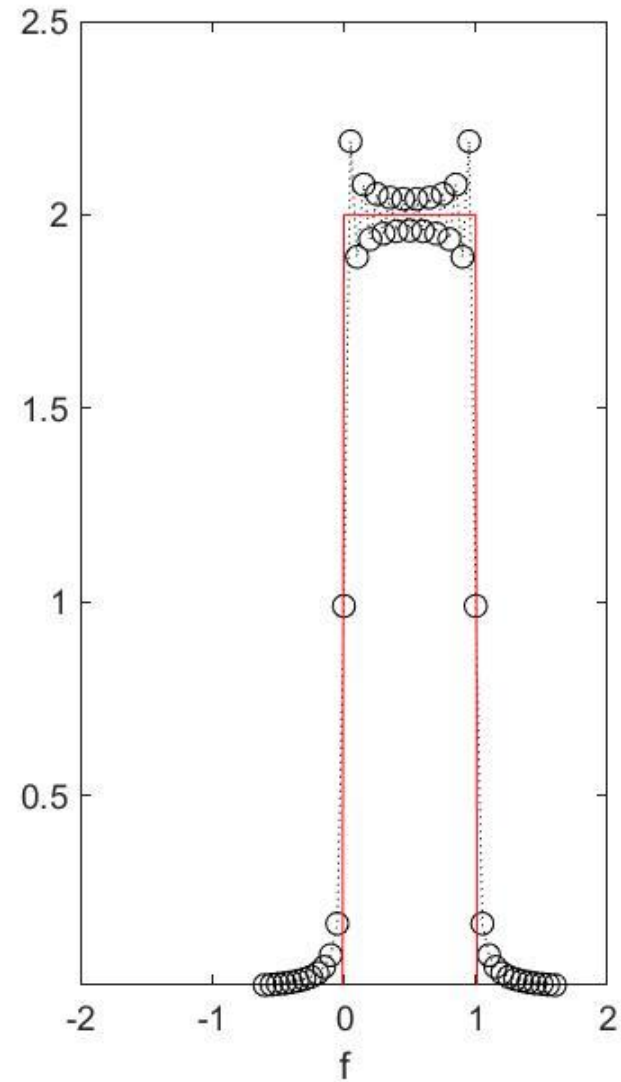
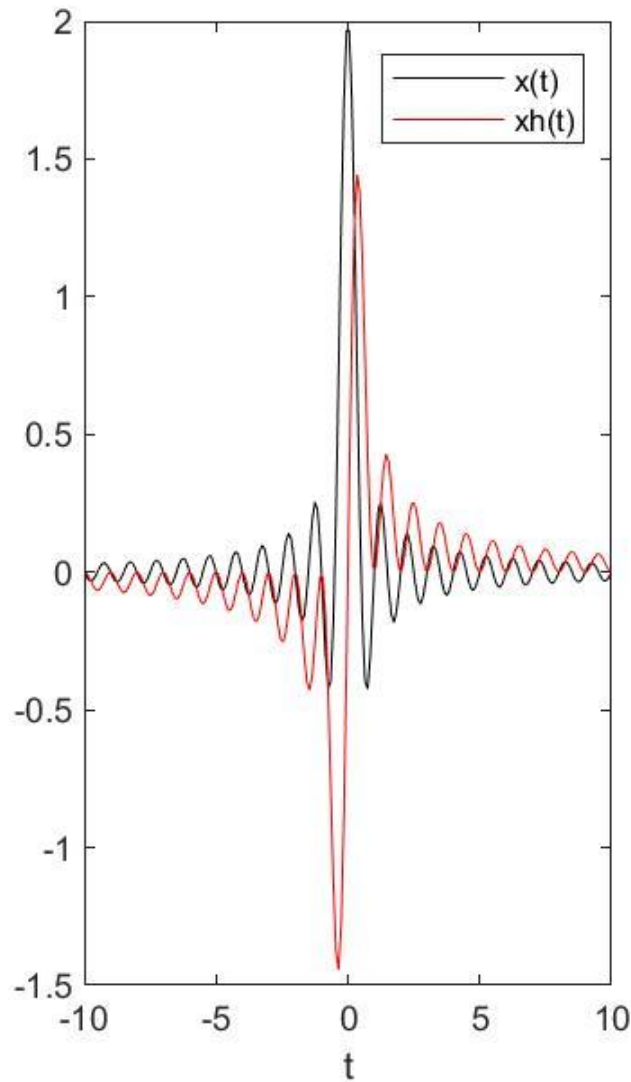
Esempio 2

```
clear;
B=2;%Banda doppia
T0=10;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/10;%intervallo di campionamento
t=(-T0+Ts/2:Ts:T0);%istanti campionamento
fm=2;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
xr=B*sinc(t*B);
xh=(1-cos(pi*t*B))./(pi*t); xh(t==0)=0; x=xr+j*xh;
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(ft>=0&ft<=B/2)=2;
subplot(1,2,1);plot(t,xr,'k');xlabel('t');hold on;
plot(t,xh,'r'); legend('x(t)','xh(t)');hold off;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1; om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f'); hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,2.5]); hold off;
```

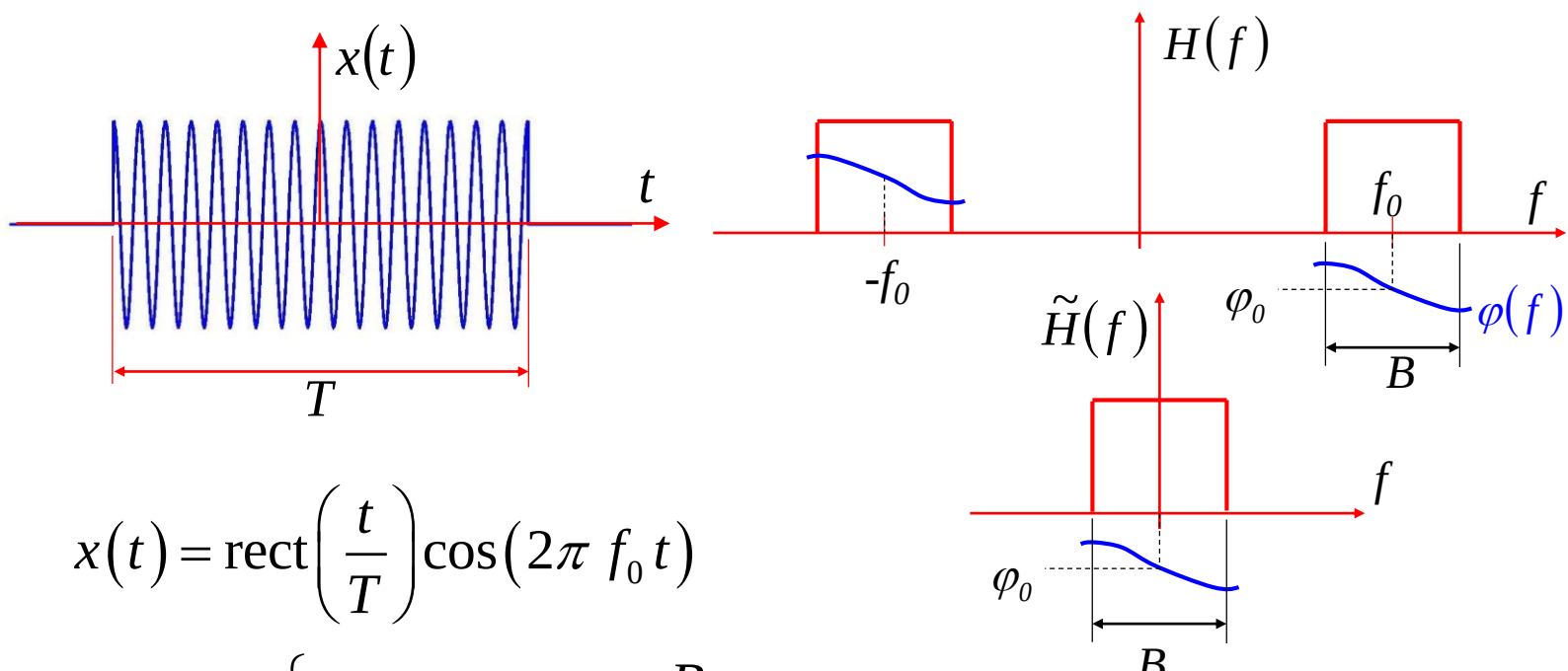
$$x(t) = B \operatorname{sinc}(Bt) + j \frac{1 - \cos(\pi Bt)}{\pi t}$$



Esempio 2



Esempio



$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} e^{j\phi(f+f_0)} & |f| < \frac{B}{2} \\ 0 & |f| > \frac{B}{2} \end{cases}$$

$$-2\pi t_g$$

$$\tilde{H}(f) \cong e^{j\phi_0} e^{-j2\pi t_g f}$$



Esempio

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \cos(2\pi f_0 t) \longrightarrow \tilde{x}(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\tilde{H}(f) \cong e^{j\varphi_0} e^{-j2\pi t_g f} \longrightarrow \tilde{h}(t) = B \text{sinc}(B(t - t_g)) e^{j\varphi_0}$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t) = B e^{j\varphi_0} \int_{-T/2}^{+T/2} \frac{\sin[\pi B(t - t_g - \tau)]}{\pi B(t - t_g - \tau)} d\tau$$

posto $\lambda = \pi B(t - t_g - \tau)$

$$\tilde{y}(t) = \frac{e^{j\varphi_0}}{\pi} \int_{\pi B(t - t_g - T/2)}^{\pi B(t - t_g + T/2)} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$$

$$\text{Si}(u) = \int_0^u \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda$$

(seno integrale)

$$= \frac{e^{j\varphi_0}}{\pi} \left\{ \text{Si}[\pi B(t - t_g + T/2)] - \text{Si}[\pi B(t - t_g - T/2)] \right\}$$



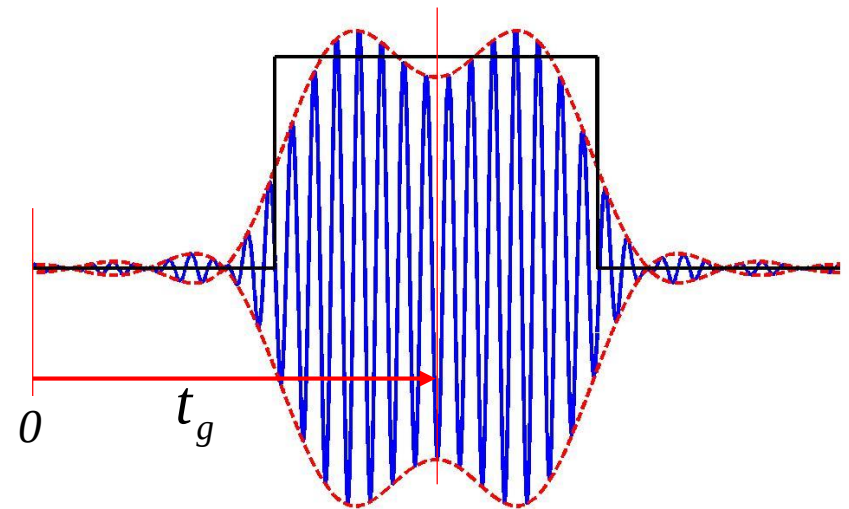
$$y(t) = \Re \left\{ \tilde{y}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \text{Si} \left[\pi B(t - t_g + T/2) \right] - \text{Si} \left[\pi B(t - t_g - T/2) \right] \right\} \cos[2\pi f_0 (t - t_0)]$$

$$t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega_0} = \text{ritardo di fase}$$

$$t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{df} \Big|_{f=f_0} = -\frac{d\varphi}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

ritardo di gruppo

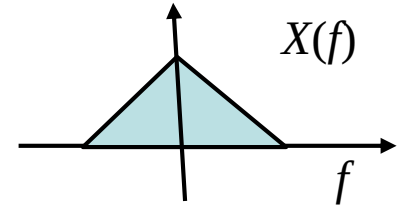


— $y(t)$
 - - - $\pm \tilde{y}(t)$
 — $\tilde{x}(t - t_g)$



Un'applicazione (*Single Side Band*)

Consideriamo ora un segnale in banda base:



Sia $X_1(f) = X(f)U(f)$ da cui $x_1(t) = \frac{1}{2}(x(t) + j\hat{x}(t))$

e $X_2(f) = X(f)U(-f)$ da cui $x_2(t) = \frac{1}{2}(x(t) - j\hat{x}(t))$

Il segnale $X_{USB}(f) = X_1(f - f_0) + X_2(f + f_0)$

$$x_{USB}(t) = \text{Re}\left\{(x(t) + j\hat{x}(t))e^{j2\pi f_0 t}\right\} = x(t)\cos(2\pi f_0 t) - \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

è un segnale in banda traslata che occupa la stessa banda del segnale in banda base (USB: *Upper Side Band*)

