

Daniele Zaccaria

MECCANICA DEI SOLIDI

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Industriale, Ingegneria Navale



Dipartimento di Ingegneria e Architettura • Università degli Studi di Trieste • 23 agosto 2016

Copyright © 2016 Daniele ZACCARIA. All rights reserved.

Questo documento può essere riprodotto e distribuito in tutto o in parte, con ogni mezzo fisico o elettronico, purché questo avviso di copyright sia mantenuto su tutte le copie. La redistribuzione commerciale non è permessa. Ogni traduzione, lavoro derivato o comprendente questo documento deve contenere questo stesso avviso di copyright : per esempio, non si possono produrre lavori derivati da questo documento ed imporre restrizioni aggiuntive sulla sua distribuzione. Per ulteriori informazioni si prega di contattare l'autore all'indirizzo zaccaria@units.it.

This document may be reproduced and distributed in whole or in part, in any medium physical or electronic, as long as this copyright notice is retained on all copies. Commercial redistribution is not allowed. All translations, derivative works, or aggregate works incorporating this document in whole or in part must be covered under this copyright notice. That is, you may not produce a derivative work from this document and impose additional restrictions on its distribution. For further information please contact the author at zaccaria@units.it.

Trieste, 23 agosto 2016

INDICE

Premessa	11
1 Grandezze, vettori e tensori	13
1.1 Grandezze fisiche e unità di misura	13
1.1.1 Grandezze fisiche	13
1.1.2 Algebra delle grandezze fisiche	15
1.1.3 Leggi fisiche, grandezze derivate e dimensioni	16
1.1.4 Il Sistema Internazionale di Unità	17
1.2 Vettori	19
1.2.1 Algebra vettoriale	20
1.2.2 Spazi vettoriali	21
1.2.3 Trasformazioni lineari	22
1.2.4 Sistema di coordinate	22
1.2.5 Rappresentazione matriciale di un vettore	23
1.2.6 Forme lineari	24
Teorema di rappresentazione delle forme lineari	24
Gradiente di un campo scalare	25
1.3 Tensori doppi	26
1.3.1 Algebra tensoriale	26
Tensore trasposto	26
Prodotto tensoriale di due vettori	27
Tensore inverso	27
Gradiente di un campo vettoriale	27
1.3.2 Rappresentazione matriciale di un tensore doppio	28
1.3.3 Tensori doppi definiti dal prodotto e dal doppio prodotto vettoriale	29

1.3.4 Rappresentazione dei gradienti di campi scalari e vettoriali	30
1.4 Direzioni principali di un tensore doppio (simmetrico)	31
1.4.1 Autovalori e autovettori	31
1.4.2 Diagonalizzazione della matrice delle componenti	31
1.4.3 Alcune proprietà delle direzioni principali	32
1.4.4 Caso piano	33
Equazione caratteristica	33
Calcolo delle direzioni principali	34
1.4.5 Caso spaziale	34
Equazione caratteristica	34
Invarianti	35
Traccia e determinante di un tensore doppio	35
Tensori sferici e deviatorici	35
Prodotto scalare di due tensori doppi	36
Soluzioni dell'equazione caratteristica	36
Tre autovalori distinti	36
Un autovalore semplice e un autovalore doppio	36
Un autovalore triplo	37
Esistenza di un sistema di riferimento principale	37
Autovalori di una matrice reale simmetrica di dimensione generica	37
1.4.6 Tensori simmetrici definiti positivi	38
Caratterizzazione dei tensori simmetrici definiti positivi	38
Radice quadrata di un tensore doppio simmetrico definito positivo	38
1.5 Tensori ortogonali e tensori rotazione	39
1.5.1 Tensori ortogonali	39
1.5.2 Tensori rotazione	39
1.5.3 Vettori rotazione	40
Sommabilità al primo ordine dei vettori rotazione	42
1.5.4 Componenti di un tensore rotazione	43
Angoli di Eulero	44
1.5.5 Trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio	44
Formule di rotazione	45

Componenti di un tensore rotazione in funzione degli angoli di Eulero	46	2.4.3 Travi di sezione sottile	68
1.6 Rappresentazione di Mohr	46	3 Fondamenti di meccanica dei solidi	69
1.6.1 Circonferenza di Mohr	46	3.1 Cinematica	69
1.6.2 Alcune proprietà della circonferenza di Mohr	48	3.1.1 Deformazione e spostamento	69
Proprietà degli angoli	48	Corpi microcontinui	70
Punti rappresentativi degli assi di riferimento	49	3.1.2 Gradienti della deformazione e degli spostamenti	70
Punti rappresentativi degli assi principali	49	Trasformazione di elementi di area e di volume	72
Costruzione della circonferenza	49	3.1.3 Misure di deformazione	73
Valori e direzioni principali	49	Dilatazione lineare	73
1.6.3 Arbelo di Mohr	49	Dilatazione quadratica e dilatazione cubica	74
Proprietà di estremo dei valori principali	51	Scorrimento tra due linee orientate	75
1.7 Tensori simmetrici non invertibili	52	Scorrimento tra una linea ed una superficie	76
1.7.1 Tensori monoassiali simmetrici	52	3.1.4 Proprietà della funzione di deformazione	76
Caratterizzazione dei tensori monoassiali sim- metrici.	52	Continuità	77
1.7.2 Tensori piani simmetrici	53	Iniettività	77
Caratterizzazione dei tensori piani simmetrici.	53	Derivabilità e invertibilità locale	77
1.7.3 Tensori piani simmetrici e deviatorici	54	Preservazione dell'orientazione	78
2 Modelli meccanici delle strutture	55	3.1.5 Trasformazioni rigide	78
2.1 Componenti elementari delle strutture	55	Proprietà fondamentali delle trasformazioni rigide	78
2.2 Corpo continuo	56	Restrizioni delle trasformazioni rigide	79
2.2.1 Geometria del corpo continuo	57	Tensore rotazione associato ad una trasformazione rigida	79
Corpo microcontinuo	57	Traslazioni e rotazioni	81
2.2.2 Solidi	58	3.1.6 Moto e velocità	82
2.2.3 Fluidi	58	3.1.7 Moto rigido	84
2.2.4 Terreno	58	3.2 Dinamica	84
2.3 Modelli monodimensionali	59	3.2.1 Dinamica dei sistemi di particelle	85
2.3.1 Geometria delle curve spaziali	60	3.2.2 Estensione al caso continuo	87
2.3.2 Fili	62	Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo	87
2.3.3 Travi	62	3.2.3 Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto	88
2.3.4 Travi di sezione sottile	63	Quantità di moto specifica	89
2.3.5 Problema di Saint-Venant	64	Dimostrazione del teorema del trasporto di Reynolds	90
2.4 Modelli bidimensionali	64	Cenni alla meccanica dei fluidi	90
Geometria delle superfici	65	3.2.4 Forze e momenti delle forze	90
2.4.1 Membrane	67	3.2.5 Forze e momenti specifici	92
2.4.2 Lastre	67		

Forza esterna per unità di volume	92	4.6 Duttività, fragilità e modelli di danneggiamento	116
Forza esterna per unità di superficie	92	4.7 Verifiche di sicurezza	117
Tensione	92	Tensioni ammissibili	118
Momenti specifici	93	5 Analisi della tensione	121
3.2.6 Equazioni di bilancio in forma integrale	93	5.1 Tensore degli sforzi	121
3.2.7 Tensioni interne	94	5.1.1 Esistenza del tensore degli sforzi	121
Principio di azione e reazione	94	Equazione di Cauchy	123
Ipotesi di Cauchy	95	Condizione al contorno sulle forze	123
Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy	95	5.1.2 Semplificazioni dovute alla teoria del primo ordine	123
Componenti normale e tangenziale di tensione	96	Tensori materiali di sforzo	124
3.3 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni	96	5.1.3 Componenti del tensore degli sforzi	125
3.3.1 Corpo rigido	97	Significato fisico delle componenti dell'equazione di	
3.3.2 Teoria del primo ordine	97	Cauchy	125
3.3.3 Teoria del secondo ordine	98	5.2 Equazioni di bilancio locali	126
3.3.4 Grandi spostamenti e piccole deformazioni	98	5.2.1 Divergenza del tensore degli sforzi	127
3.3.5 Cinematica linearizzata	98	Esistenza e componenti della divergenza di un	
3.3.6 Linearizzazione di una rotazione	99	campo tensoriale	127
3.4 Vincoli e reazioni dei vincoli	100	Divergenza del prodotto di un campo tensoriale	
Modellizzazione dei vincoli	100	trasposto per un campo vettoriale	127
Reazioni dei vincoli	101	5.2.2 Equazione del moto	128
Condizioni al contorno sugli spostamenti	101	Equazione materiale del moto	128
4 Comportamento dei materiali	103	Semplificazioni dovute alla teoria del primo ordine	129
4.1 Modelli di comportamento dei materiali	103	5.2.3 Simmetria del tensore degli sforzi	129
Materiali omogenei	103	Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali	130
Materiali isotropi	104	Equazioni materiali di simmetria	131
4.2 Prova di trazione monoassiale	104	5.2.4 Componenti scalari delle equazioni locali di bilancio	131
Dilatazione vera	106	Significato fisico delle componenti dell'equazione	
4.3 Prova di torsione (o di taglio semplice)	107	del moto	131
4.4 Modelli ideali di comportamento	108	Significato fisico delle componenti della condizione	
4.4.1 Elasticità lineare	109	di simmetria	132
4.4.2 Elasticità non lineare	110	5.3 Direzioni principali di tensione	132
4.4.3 Dominio di elasticità.	110	5.4 Rappresentazione di Mohr della tensione	133
4.4.4 Elastoplasticità	111	5.5 Stati elementari di tensione	134
4.4.5 Viscoelasticità	112	5.5.1 Stato di trazione (o compressione) uniforme	134
4.5 Prove sui materiali	113	5.5.2 Stato di trazione (o compressione) semplice	135
4.5.1 Materiali metallici	113	5.5.3 Stato di taglio semplice	136
4.5.2 Calcestruzzo	115	5.5.4 Stato piano di tensione	137

5.6	Esempio numerico di analisi della tensione	137		
5.7	Indeterminazione del moto e della tensione	141		
5.7.1	Indeterminazione statica della tensione, autotensioni e configurazione naturale	141		
5.7.2	Indeterminazione dinamica del moto e della tensione	142		
6	Analisi della deformazione	145		
6.1	Tensore di deformazione	145		
6.1.1	Decomposizione additiva del gradiente degli spostamenti	145		
6.1.2	Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime	146		
	Tensori di Cauchy-Green	147		
	Decomposizione polare del gradiente della deforma- zione	148		
	Tensori di Green-Lagrange e di Almansi	149		
6.2	Calcolo delle misure di deformazione	150		
6.2.1	Calcolo della dilatazione lineare	150		
	Calcolo della dilatazione lineare in cinematica finita	151		
6.2.2	Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali	151		
	Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali in cinematica finita	152		
6.2.3	Calcolo dello scorrimento tra una linea e una superficie inizialmente ortogonali	152		
6.2.4	Componenti del tensore di deformazione	153		
6.2.5	Coefficiente di dilatazione cubica	153		
	Dilatazione quadratica e dilatazione cubica in cinematica finita	154		
6.3	Direzioni principali di deformazione	155		
6.4	Rappresentazione di Mohr della deformazione	156		
6.5	Stati elementari di deformazione	157		
6.5.1	Stato di dilatazione uniforme	157		
6.5.2	Stato di dilatazione semplice	158		
6.5.3	Stato di scorrimento semplice	158		
6.5.4	Stato piano di deformazione	160		
6.6	Esempio numerico di analisi della deformazione	160		
6.7	Compatibilità della deformazione	163		
6.7.1	Gradiente della rotazione locale	163		
6.7.2	Potenziale di campi vettoriali e tensoriali	164		
6.7.3	Rotore di campi vettoriali e tensoriali	165		
	Esistenza e componenti del rotore di campi vettoriali e tensoriali	166		
	Vettore simbolico nabla	167		
6.7.4	Condizioni di integrabilità di campi vettoriali e tensoriali	167		
	Domini monoconnessi	167		
	Domini multiconnessi	168		
6.7.5	Equazioni esplicite di congruenza	171		
	Tensore di incompatibilità	171		
	Equazioni di congruenza di Saint-Venant	172		
	Deduzione delle equazioni di congruenza dal teorema di Schwartz	172		
	Equazioni di congruenza in domini multiconnessi	173		
6.8	Principio dei lavori virtuali	174		
	Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio globale delle forze	175		
	Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio di forze e tensioni	176		
7	Elasticità lineare	179		
7.1	Legami costitutivi	179		
7.2	Tensore di elasticità	180		
7.3	Matrice di elasticità	180		
7.4	Problema elastico lineare	181		
	7.4.1 Metodo degli spostamenti	181		
	7.4.2 Metodo delle forze	182		
7.5	Autotensioni	183		
7.6	Sovrapposizione degli effetti	184		
7.7	Lavoro di deformazione	185		
7.8	Energia elastica di deformazione	186		
	7.8.1 Teorema di Clapeyron	187		
	Teorema di Clapeyron	187		
	7.8.2 Teorema di Betti	188		
	Teorema di Betti (o del lavoro mutuo)	188		
	7.8.3 Energia complementare	189		
	7.8.4 Unicità della soluzione	189		
7.9	Energia potenziale totale	190		
	7.9.1 Variazione del funzionale energia potenziale totale	191		

7.9.2	Principi di stazionarietà e di minimo dell'energia potenziale totale	193
7.9.3	Esistenza della soluzione	194
8	Elasticità lineare isotropa	195
8.1	Legge di Hooke	195
8.1.1	Stato di tensione monoassiale	195
8.1.2	Stato di tensione generico	196
8.1.3	Stato di deformazione generico	196
8.1.4	Stati sferici e deviatorici	197
8.1.5	Stati di scorrimento e di taglio semplice	197
8.2	Matrici di elasticità isotropa	198
8.3	Energia di deformazione elastica isotropa	199
8.4	Limitazioni delle costanti elastiche	201
8.5	Esercizio su un campo di spostamenti	201
8.6	Equazioni di Beltrami	203
9	Criteri di snervamento	207
9.1	Superficie di snervamento	207
9.1.1	Snervamento isotropo	208
9.1.2	Asse idrostatico e piano deviatorico	209
9.1.3	Coordinate sul piano deviatorico	211
9.2	Criterio di Rankine o della massima tensione normale	212
9.3	Criterio di Grashof o della massima dilatazione	213
9.4	Criteri di snervamento per i materiali metallici	214
9.4.1	Criterio di snervamento di Huber-von Mises	216
	Criterio dell'energia di deformazione distortore (Hencky)	216
9.4.2	Criterio di snervamento di Tresca	218
	Criterio della massima tensione tangenziale	219
9.4.3	Criterio di snervamento di Hill	220
9.5	Criteri di snervamento per i materiali non metallici	220
9.5.1	Criterio di snervamento di Drucker-Prager	220
9.5.2	Criterio di snervamento di Mohr-Coulomb	222
9.6	Tensione ideale di snervamento	223
	Riferimenti bibliografici	225
	Indice analitico	227

PREMESSA

In questa prima dispensa di *Scienza delle Costruzioni* sono innanzitutto descritti in modo organico i principali concetti posti alla sua base insieme ad alcuni di quegli strumenti matematici indispensabili sia per la descrizione stessa che per la successiva elaborazione della materia.

Lo scopo di un intero capitolo dedicato ad illustrare alcuni degli strumenti matematici utilizzati è quello di averne una descrizione in sintonia con l'uso che ne viene fatto nel seguito ma, non secondario, anche quello di colmare eventuali lacune nelle conoscenze di tali strumenti. Nel caso delle grandezze fisiche, argomento di primaria importanza per tutte le scienze applicate, la necessità di questi richiami risiede nell'aleatorietà delle conoscenze acquisite normalmente in tale campo, spesso demandate non a corsi specifici, ma agli stessi corsi che ne fanno uso, prassi che tra l'altro spinge a sottovalutarne l'importanza. Per quel che riguarda il concetto di tensore, questi non sempre è acquisito in modo coerente in corsi precedenti ed inoltre è in un tale contesto concettuale che meglio si trovano descritte quelle proprietà tensoriali che sono comuni a tutti i particolari tensori simmetrici utilizzati nell'ambito della Scienza delle costruzioni (come il tensore degli sforzi di Cauchy, il tensore di deformazione infinitesima e il tensore piano di inerzia). Il problema della determinazione dei valori e delle direzioni principali, così come la descrizione di Mohr (introdotta originariamente da Mohr per il solo tensore degli sforzi) sono quindi collocate in tale contesto.

Si passerà poi ad introdurre il modello di corpo continuo, utilizzato nell'ambito della Scienza delle Costruzioni per lo studio della meccanica dei solidi deformabili, ma in grado di dare un fondamento anche allo studio della meccanica dei fluidi e della meccanica dei cristalli liquidi. In tale ambito si porrà anche l'accento sulla forma geometrica dei corpi stessi e sulle semplificazioni che possono derivare nello studio di solidi reali che pre-

sentano particolari forme geometriche, introducendo così i primi concetti dei modelli di trave e di lastra.

Successivamente si affronterà lo studio delle principali grandezze fisiche utilizzate nell'ambito della cinematica e della dinamica dei solidi deformabili, a partire da quelle che ne descrivono il moto e la deformazione e proseguendo con quelle che ne descrivono invece le cause del moto, per poi affrontare i concetti alla base del comportamento dei materiali. È in tale contesto che saranno elencate e commentate le ipotesi poste normalmente alla base della meccanica dei solidi deformabili, compresa quella di piccoli spostamenti e piccole deformazioni.

Esaurita in tal modo la descrizione dei concetti di base si passerà poi allo studio sistematico della tensione e della deformazione nei solidi, compreso il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, per approdare infine allo studio dettagliato sia del legame costitutivo elastico lineare isotropo che dei criteri di snervamento, questi ultimi alla base dei legami costitutivi elastoplastici.

Poiché esistono vari ambiti particolari in cui i modelli di uso più comune non forniscono risposte soddisfacenti, si faranno anche alcuni accenni volti a chiarire i limiti delle ipotesi utilizzate e su come costruire modelli più generali.

Per non interrompere il flusso principale del discorso, molte osservazioni e complementi sono demandati alle note a piè di pagina salvo che non siano di notevole ampiezza. In tal caso sono inseriti nel testo principale sia a corpo più piccolo che nettamente separati dal resto da un opportuno simbolo grafico.

Stante il ruolo della lingua inglese quale lingua scientifica internazionale, si è inoltre pensato di fare cosa utile indicando in note a piè di pagina alcuni termini utilizzati in tale lingua a significare i vari concetti che via via vengono presentati.

GRANDEZZE, VETTORI E TENSORI

1.1 Grandezze fisiche e unità di misura

1.1.1 Grandezze fisiche

Nel corso della presente trattazione si farà uso di diverse grandezze fisiche per cui non risulta fuori luogo richiamare brevemente i concetti correlati.¹

Si ricorda anzitutto che con il termine di *grandezza fisica*² si indica ogni

¹L'*International Organization for Standardization (ISO)* di Ginevra ha promulgato, con il supporto dell'*International Electrotechnical Commission (IEC)*, le ISO 80000, o IEC 80000, un insieme di 14 standard sull'uso delle grandezze, della loro simbologia e delle loro unità di misura. Le ISO 80000, che sono state completate nel 2009 e che sostituiscono le precedenti ISO 31 di cui non sono che una evoluzione, sono state recepite nel 2010 dall'*Ente Nazionale Italiano di Unificazione (UNI)* quali UNI CEI EN ISO 80000. Due di questi standard hanno carattere generale: la ISO 80000-1 che fornisce informazioni generali riguardanti le grandezze, i sistemi di grandezze e i sistemi coerenti di unità di misura, con particolare riguardo al sistema internazionale di grandezze (ISQ) e al sistema internazionale di unità (SI), e la ISO 80000-2 che fornisce informazioni generali riguardanti i segni e i simboli matematici da usare nelle scienze naturali e nella tecnologia. I restanti standard riportano le denominazioni, i simboli e le definizioni delle grandezze e delle relative unità di misura dei vari settori della fisica. Di rilievo per la presente trattazione sono la ISO 80000-3 per le grandezze relative allo spazio e al tempo, la ISO 80000-4 per le grandezze della meccanica e la ISO 80000-5 per le grandezze della termodinamica.

²Altre grandezze, oltre quelle fisiche, sono per esempio quelle economiche che esprimono proprietà correlate alla sovrastruttura creata dall'attività economica dell'uomo. Nella letteratura inglese si usano i termini *quantity* per grandezza e *physical quantity* per grandezza fisica.

proprietà fisica (di un corpo, di una sostanza, di un fenomeno, di un processo o altro) che può essere quantificata. Quantificare una proprietà significa fondamentalmente istituire delle *regole di misura* che permettano di definire il *rapporto numerico* tra due particolari manifestazioni della proprietà stessa.³ Per semplicità si utilizzerà nel seguito il termine *grandezza particolare*⁴ per riferirsi ad una particolare manifestazione di una grandezza fisica. È inoltre usuale riferirsi al rapporto numerico tra gran-

³Alcuni autori, tra cui Sartori (1979, p. 50 e p. 56), considerano tra le grandezze fisiche delle proprietà che possono essere espresse da un numero ma per le quali non ha senso il rapporto numerico, come per esempio *l'istante di tempo* e *il livello di temperatura*, in quanto il numero ad esse associato dipende dalla scelta di una origine. È però conveniente riservare sia all'istante di tempo che al livello di temperatura il ruolo di enti analoghi ad un punto dello spazio e catalogare invece tra le grandezze esclusivamente *l'intervallo di tempo* e *l'intervallo di temperatura*, per le quali ha perfettamente senso il rapporto numerico. Come la scelta di un punto dello spazio preso quale origine permette di associare ad un punto generico le sue coordinate, misure di opportune distanze dall'origine, così per esempio la scelta di un dato istante di tempo quale origine temporale permette di associare ad un istante di tempo generico la sua *coordinata temporale*, misura dell'intervallo di tempo che separa l'istante di tempo generico dalla prescelta origine temporale.

Per evitare equivoci, a tale punto è bene dire come sia possibile, e come sia previsto dalle ISO 80000, quantificare proprietà anche istituendo particolari procedure per associare un particolare numero ad una particolare manifestazione di una proprietà, come per esempio la quantificazione dell'intensità di un terremoto per il tramite della scala Mercalli, senza che sia però possibile dare in un qualche senso un significato al rapporto tra due manifestazioni della stessa proprietà. Si ottengono così delle grandezze che non sono grandezze fisiche, almeno nel senso precisato, e che quindi non possono essere manipolate come tali.

⁴*Quantity in the particular sense* nella letteratura inglese.

dezze particolari, esito di un procedimento di misura, quale *misura* della prima grandezza particolare rispetto alla seconda.

Si ricorda poi che più grandezze si possono spesso ricondurre ad un'unica grandezza o, in altri termini, possono essere della *stessa specie*. Due grandezze sono della stessa specie innanzitutto nel caso in cui ad entrambe le grandezze si applichino le stesse regole di misura, come per esempio nel caso della lunghezza di un pezzo di stoffa e dell'altezza di una persona, entrambe grandezze di tipo lunghezza.⁵ Ma due grandezze sono più in generale della stessa specie se almeno qualche grandezza particolare della prima può essere misurata, con lo stesso esito, utilizzando le regole di misura della seconda e viceversa. Per esempio si riesce in tal modo a rapportare le lunghezze citate precedentemente (lunghezza di un pezzo di stoffa, altezza di una persona) alla distanza tra la terra e la luna, così come questa alla distanza tra due galassie, che diventano quindi entrambe grandezze di tipo lunghezza.

Le regole di misura stabiliscono fondamentalmente dei criteri che consentano sperimentalmente, nell'ambito di una certa approssimazione:⁶

1. di definire l'*uguaglianza* $g_1 = g_2$ di due grandezze particolari g_1 e g_2 , e in ogni caso di verificare se due grandezze particolari siano uguali, maggiori o minori una dell'altra;
2. di definire la *somma* $g_1 + g_2$ di due grandezze particolari g_1 e g_2 ;
3. di definire il *rapporto* g/n di una grandezza particolare g per un numero naturale n , ovvero di suddividere la data grandezza particolare in un numero opportuno di parti uguali delle quali la data grandezza particolare sia la somma.

All'uguaglianza e alla somma si richiede di soddisfare le usuali proprietà formali, tra cui la riflessività e la transitività per l'uguaglianza, l'associatività e la commutatività per la somma.

Il rapporto numerico tra due grandezze particolari si ottiene, nell'ambito di una data approssimazione, suddividendo l'una in un numero opportuno di n parti uguali e valutando il numero m di volte che occorre sommare

⁵Si noti che il termine lunghezza è utilizzato in senso generale per indicare tutte le grandezze della stessa specie delle "lunghezze" vere e proprie.

⁶Due testi italiani che trattano estesamente dei problemi legati alla misura sono Sartori (1979) e Arri e Sartori (1984).

tale parte a se stessa per ottenere una grandezza particolare uguale o immediatamente inferiore all'altra, nel senso che sommando la stessa parte $m + 1$ volte si ottenga una grandezza particolare superiore. Si individua in tal modo l'intervallo $[m/n, (m + 1)/n]$ di numeri razionali, più o meno ristretto a seconda che il procedimento di misura sia più o meno accurato: più la suddivisione della prima grandezza è fine più il procedimento di misura è accurato. La successione degli intervalli di numeri razionali individuati da misure via via più accurate definiscono idealmente⁷ un numero reale, inteso quale limite della successione stessa. È conveniente riferirsi a questo ideale numero reale quale rapporto tra due grandezze particolari poiché in tal modo l'algebra delle grandezze fisiche si riconduce all'algebra dei numeri reali, con tutti i vantaggi teorici che questa riduzione comporta.

Data una grandezza fisica, si può adottare convenzionalmente una grandezza particolare quale sua *unità di misura*⁸ per esprimere una qualunque grandezza particolare tramite il rapporto che questa ha con l'unità di misura. Il rapporto tra la grandezza particolare e l'unità di misura viene detto *valore numerico* o *misura* della data grandezza particolare, restando implicito che la grandezza particolare a cui viene rapportata è l'unità di misura. È comunque evidente che la misura di una grandezza particolare dipende dalla unità di misura in cui è espressa.

Si consideri allora una data grandezza fisica G quale insieme delle sue grandezze particolari g . Se con $[g]$ si indica l'unità di misura della stessa grandezza fisica e con $\{g\}$ la misura della grandezza particolare $g \in G$ si può allora scrivere simbolicamente:

$$\{g\} = \frac{g}{[g]}. \quad (1.1)$$

Per esempio, se la massa di un pezzo di roccia ha valore numerico 10 rispetto all'unità di misura kg della massa, allora:

$$\{\text{massa del pezzo di roccia}\} = \frac{\text{massa del pezzo di roccia}}{\text{kg}} = 10.$$

Il rapporto, l'uguaglianza e la somma di grandezze si conservano passando alle loro misure, ovvero il rapporto tra due grandezze particolari

⁷Solo idealmente in quanto la successione è limitata dalle inevitabili approssimazioni delle operazioni di misura

⁸*Unit of measurement* nella letteratura inglese.

uguaglia il rapporto tra le corrispondenti misure:⁹

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\{g_1\}}{\{g_2\}}, \quad \text{per ogni } g_1, g_2 \in G, \quad (1.2)$$

grandezze uguali hanno la stessa misura, dato che il loro rapporto è il numero 1:

$$g_1 = g_2 \Leftrightarrow \{g_1\} = \{g_2\}, \quad \text{per ogni } g_1, g_2 \in G, \quad (1.3)$$

e infine la misura della somma di due grandezze particolari coincide con la somma delle loro misure:

$$g_3 = g_1 + g_2 \Leftrightarrow \{g_3\} = \{g_1\} + \{g_2\}, \quad (1.4)$$

per ogni $g_1, g_2, g_3 \in G$.

1.1.2 Algebra delle grandezze fisiche

Come detto, le regole di misura stabiliscono l'uguaglianza, la somma e la suddivisione in parti uguali di grandezze particolari della stessa specie e quindi il rapporto tra due grandezze particolari.

Il prodotto di un numero reale a per una grandezza particolare $g \in G$ resta poi definito dalla condizione:

$$g_1 = ag \Leftrightarrow \frac{g_1}{g} = a, \quad (1.5)$$

che assicura la validità delle seguenti proprietà:

$$\{ag\} = a\{g\}, \quad a(bg) = (ab)g. \quad (1.6)$$

Se $\{g\}$ è la misura di una grandezza particolare rispetto all'unità di misura $[g]$, prendendo $\{g\}$ volte l'unità di misura $[g]$ si costruisce una grandezza

⁹Infatti si suddivide l'unità di misura in n parti e siano m_1/n e m_2/n le misure immediatamente inferiori delle due grandezze particolari g_1 e g_2 , nel senso che $(m_1 + 1)/n$ e $(m_2 + 1)/n$ ne sono delle misure superiori. Ne risulta che $(m_2 + 1)([g]/n)$ è maggiore di g_2 , che quindi la $(m_2 + 1)$ -esima parte di g_2 è inferiore a $[g]/n$ e che quindi $m_1(g_2/(m_2 + 1))$ è inferiore a $m_1([g]/n)$ che a sua volta è inferiore di g_1 . Ne risulta che $m_1/(m_2 + 1) = \frac{m_1/n}{(m_2+1)/n}$ è una misura inferiore di g_1 rispetto a g_2 . Ragionando in modo analogo risulta che $(m_1 + 1)/m_2 = \frac{(m_1+1)/n}{m_2/n}$ ne è invece una misura superiore. L'ideale limite per $n \rightarrow \infty$, che definisce la misura come numero reale, dimostra quindi l'assunto, poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_1/n}{(m_2+1)/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(m_1+1)/n}{m_2/n} = \frac{\{g_1\}}{\{g_2\}}$.

particolare avente la stessa misura di g e quindi coincidente con g . Dal punto di vista sperimentale, se m/n è una misura più o meno accurata della grandezza particolare g , allora prendendo m volte la n -esima parte dell'unità di misura $[g]$ si ottiene una grandezza più o meno accuratamente coincidente con g . Se, come nell'esempio dato più sopra, la massa di un pezzo di roccia ha valore numerico 10 rispetto all'unità di misura kg della massa ne consegue:

$$\text{massa del pezzo di roccia} = 10 \text{ kg}.$$

Data una grandezza fisica G , si definisce inoltre la grandezza fisica inversa $1/G$ definendo in modo opportuno i rapporti tra le inverse $1/g \in 1/G$ delle grandezze particolari $g \in G$:

$$\frac{1/g_1}{1/g_2} = \frac{g_2}{g_1}, \quad (1.7)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$. Analogamente, date due grandezze fisiche G e Q , si definisce la grandezza fisica prodotto GQ delle date grandezze definendo in modo opportuno i rapporti tra i prodotti $gq \in GQ$ delle grandezze particolari $g \in G$ e $q \in Q$:

$$\frac{g_1 q_1}{g_2 q_2} = \left(\frac{g_1}{g_2}\right) \left(\frac{q_1}{q_2}\right), \quad (1.8)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$ e $q_1, q_2 \in Q$. Una scrittura del tipo "N m" indicherà quindi non solo l'unità di misura del momento di una forza ma anche il fatto che tale unità di misura sia ottenuta dal prodotto dell'unità di misura "N" della forza con l'unità di misura "m" della lunghezza.¹⁰

Moltiplicando una grandezza fisica G per l'inversa di un'altra grandezza Q si ottiene infine la definizione del rapporto G/Q delle due grandezze fisiche:

$$\frac{g_1/q_1}{g_2/q_2} = \left(\frac{g_1}{g_2}\right) \left(\frac{1/q_1}{1/q_2}\right) = \frac{g_1/g_2}{q_1/q_2}, \quad (1.9)$$

per ogni $g_1, g_2 \in G$ e $q_1, q_2 \in Q$. Per esempio nel caso di un moto uniforme di un punto materiale si definisce la grandezza velocità v del punto quale rapporto tra lo spazio s percorso dal punto (grandezza di tipo lunghezza) e l'intervallo di tempo t occorso a percorrerlo:

$$v = \frac{s}{t}. \quad (1.10)$$

¹⁰Lo standard ISO 80000-1 è in accordo con tale uso. Vi sono però alcuni autori, tra cui Barenblatt (1987, p. 21), che ritengono privi di significato operazioni del genere.

Il significato di tale definizione è che date le velocità v_1 e v_2 di due punti materiali che si muovono di moto uniforme, il primo percorrendo lo spazio s_1 nell'intervallo di tempo t_1 e il secondo lo spazio s_2 nell'intervallo di tempo t_2 , allora il rapporto delle due velocità è definito, in accordo con la (1.9), in funzione del rapporto tra gli spazi percorsi e quello tra gli intervalli di tempo:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{s_1/s_2}{t_1/t_2}. \quad (1.11)$$

1.1.3 Leggi fisiche, grandezze derivate e dimensioni

Una *legge fisica* esprime in generale un legame tra più variabili fisiche, espressa tramite una uguaglianza tra grandezze diverse. Per esempio, se f è la forza applicata ad un punto materiale di massa m la cui accelerazione vale a sussiste la relazione:

$$f = ma. \quad (1.12)$$

Il significato di tale legge fisica è che se alla massa m_1 e alla accelerazione a_1 corrisponde la forza f_1 e alla massa m_2 e alla accelerazione a_2 corrisponde la forza f_2 :

$$f_1 = m_1 a_1, \quad f_2 = m_2 a_2, \quad (1.13)$$

allora risulta:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 a_1}{m_2 a_2}. \quad (1.14)$$

Tale relazione, utilizzando la (1.8), può poi porsi nella forma:

$$\frac{f_1}{f_2} = \left(\frac{m_1}{m_2} \right) \left(\frac{a_1}{a_2} \right). \quad (1.15)$$

L'esempio (1.12) ha reso evidente che per *uguaglianza tra due grandezze fisiche* deve intendersi una corrispondenza che a grandezze particolari dell'una faccia corrispondere grandezze particolari dell'altra in modo tale da lasciare invariati i rapporti tra le grandezze particolari che si corrispondono. Nel caso dell'esempio, al prodotto tra massa e accelerazione di un punto corrisponde la forza applicata al punto e le uguaglianze particolari (1.13) definiscono il primo membro dell'uguaglianza quale corrispondente, in tal senso, del secondo membro. La condizione (1.14) assicura poi l'uguaglianza dei rapporti tra grandezze corrispondenti, che è quello che ci si aspetta da un'uguaglianza tra grandezze diverse.

Si noti che una legge fisica si può esprimere quale relazione tra le misure delle grandezze in gioco, ma in tal caso occorre aggiungere in generale un coefficiente numerico di proporzionalità dipendente dalle unità di misura prescelte. Nel caso dell'esempio, se f^c è la forza applicata ad un punto materiale di massa $[m]$ la cui accelerazione vale $[a]$:

$$f^c = [m][a], \quad (1.16)$$

risulta, per via della (1.14):

$$\frac{f}{f^c} = \left(\frac{m}{[m]} \right) \left(\frac{a}{[a]} \right). \quad (1.17)$$

Utilizzando le (1.1) e (1.2) si ottiene infine:

$$\{f\} = \{f^c\} \{m\} \{a\}, \quad (1.18)$$

dove $\{f^c\}$, la misura della forza f^c rispetto all'unità di misura $[f]$ della forza, è il citato coefficiente di proporzionalità.

Le leggi fisiche rendono possibile derivare le unità di misura di alcune grandezze fisiche da quelle di altre grandezze, dette unità di *base* o *fondamentali*,¹¹ assumendo dei valori arbitrari per i coefficienti di proporzionalità che intervengono nelle relazioni tra le misure delle grandezze. Se nelle relazioni che definiscono le unità derivate i coefficienti numerici sono posti uguali all'unità si dice che il sistema di unità è *coerente*.¹² In un sistema di unità coerente le relazioni tra le misure delle grandezze non coinvolgono alcun fattore numerico addizionale. Per esempio, l'unità di misura di forza può essere derivata da quelle di massa e di accelerazione utilizzando la legge (1.12). Affinché il sistema di unità che ne deriva sia coerente, deve necessariamente essere $\{f^c\} = 1$, ovverossia l'unità di misura della forza non può che essere quella forza che applicata ad una particella di massa unitaria ne provoca una accelerazione unitaria, ovverossia f^c stessa. Analoghe considerazioni valgono per una grandezza che sia stata definita in funzione di altre grandezze, come per esempio la velocità di un punto in moto uniforme. La definizione (1.10) impone che l'unità di misura v^c della velocità che rende coerente il sistema di misura sia necessariamente la velocità di un punto in moto uniforme che percorra l'unità di spazio nell'unità di tempo:

$$v^c = \frac{[s]}{[t]}. \quad (1.19)$$

¹¹ *Fundamental units* oppure *base units* nella letteratura inglese.

¹² *Coherent system* nella letteratura inglese.

Quale ultimo esempio di grandezza derivata, si consideri l'area A di un rettangolo, legata alla base b e all'altezza h dello stesso rettangolo dalla relazione:

$$A = bh. \tag{1.20}$$

Poiché sia b che h sono grandezze di tipo lunghezza, detta $[L]$ l'unità di misura di lunghezza, ne consegue che, in un sistema coerente di unità, l'unità di misura A^c di area è quella di un quadrato di lato unitario:

$$A^c = [L]^2. \tag{1.21}$$

Se l'unità di misura $[g]$ di una grandezza fisica G viene fatta variare dividendola per un fattore numerico a , allora la misura $\{g\}$ di una grandezza particolare g risulta amplificata dallo stesso fattore:

$$g = \{g\}[g] = (a\{g\})\left(\frac{[g]}{a}\right), \tag{1.22}$$

ovverossia la misura è *controvariante* con l'unità di misura.

L'unità di misura delle grandezze derivate dipende dalle unità di misura delle grandezze di base. Variando le unità di base variano le unità derivate e di conseguenza anche le misure delle grandezze derivate. Allo scopo di illustrare come variano le misure delle grandezze derivate in funzione della variazione delle unità di base, si consideri una generica grandezza Q derivata dalle grandezze G_1, G_2, \dots, G_n . Le unità di misura $[g_1], [g_2], \dots, [g_n]$ delle grandezze di base, alle quali corrisponde la misura $\{q\}$ della grandezza particolare q , siano fatte variare dividendole rispettivamente per i fattori numerici a_1, a_2, \dots, a_n . Si ottengono le unità di misura di base variate $[g_1]/a_1, [g_2]/a_2, \dots, [g_n]/a_n$ alle quali corrisponde l'unità di misura variata $[q]^*$, e la conseguente misura $\{q\}^*$ variata della grandezza particolare q . Il coefficiente che modifica sia le misure delle grandezze particolari di Q che la sua unità di misura sarà in generale una funzione ϕ dei coefficienti a_1, a_2, \dots, a_n , detta *dimensione* della data grandezza:¹³

$$\{q\}^* = \phi(a_1, a_2, \dots, a_n)\{q\}, \quad [q]^* = \frac{[q]}{\phi(a_1, a_2, \dots, a_n)}. \tag{1.23}$$

Si può dimostrare (Barenblatt, 1987, pp. 23-27) che la dimensione, nel caso più generale possibile, è un prodotto di potenze:

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n}, \tag{1.24}$$

¹³Dimension nella letteratura inglese.

dove gli esponenti sono delle costanti numeriche. La dimensione G_i della generica grandezza di base vale:

$$G_i = a_i, \tag{1.25}$$

e quindi la dimensione Q della grandezza Q si può scrivere nella forma:

$$Q = G_1^{b_1} G_2^{b_2} \dots G_n^{b_n}. \tag{1.26}$$

1.1.4 Il Sistema Internazionale di Unità

Il Sistema Internazionale di Unità, brevemente indicato dalla sigla internazionale SI (dal francese "Le Système International d'Unités"),¹⁴ è attualmente il più diffuso sistema di unità di misura. Attraverso una serie coerente di definizioni e di regole permette di ottenere tutte le unità di misura attualmente necessarie nella fisica e nella tecnica a partire da sette *unità fondamentali*, considerate indipendenti tra loro. Di queste, nel seguito saranno utilizzate le unità di misura fondamentali dello spazio, del tempo, della meccanica e della termologia, tutte riportate nella tab. 1.1.

Tabella 1.1: Unità SI di base utilizzate nella presente trattazione

Grandezza di base	Unità SI		Dimensione
	Nome	Simbolo	
lunghezza	metro	m	L
tempo	secondo	s	T
massa	kilogrammo	kg	M
temperatura termodinamica	kelvin	K	Θ

Le grandezze lunghezza e tempo, considerate indipendenti dal SI per ragioni di opportunità, non sono realmente indipendenti tra loro. Infatti

¹⁴Il testo ufficiale sul SI, dal titolo *The International System of Units (SI)* e noto come *SI Brochure*, è pubblicato dal Bureau International des Poids et Mesures (BIPM). Questa pubblicazione, giunta nel 2006 alla 8a edizione, è liberamente disponibile in formato pdf all'indirizzo http://www.bipm.fr/en/si/si_brochure/. In Sartori (1979) e Arri e Sartori (1984) è affrontato ampiamente lo studio del SI, anche se da questo punto di vista i due testi sono un po' datati.

risultano correlate nella espressione $\lambda = cT$, dove λ e T sono, rispettivamente, la lunghezza d'onda di una radiazione elettromagnetica e il suo periodo, mentre c è la velocità di propagazione della luce nel vuoto. Allo stato attuale delle conoscenze la velocità della luce nel vuoto è una costante universale. La relazione precedente rende quindi possibile derivare, in linea di principio, l'unità di misura di lunghezza da quella di tempo, assegnando alla velocità della luce nel vuoto un valore arbitrario (pari all'unità per avere un sistema coerente). Con tale scelta le velocità diventerebbero adimensionali mentre le lunghezze acquisirebbero la dimensione di un tempo. Questo fatto aiuta a capire che la scelta delle unità di misura fondamentali è in parte arbitrario e guidato da ragioni di opportunità, ragioni che possono essere sia di origine storica che di origine pratica.¹⁵

Le unità di misura delle grandezze di base, come ben noto, non sono in realtà rigidamente fissate ma possono essere liberamente variate a seconda delle diverse esigenze utilizzando dei multipli e dei sottomultipli decimali. Nella tab. 1.2 sono riportati sia i simboli che i nomi di alcuni prefissi da

Tabella 1.2: Alcuni prefissi SI per la formazione di multipli e sottomultipli decimali delle unità

Fattore	Prefisso		Fattore	Prefisso	
	Nome	Simbolo		Nome	Simbolo
10^9	giga	G	10^1	deca	da
10^6	mega	M	10^{-1}	deci	d
10^3	kilo	k	10^{-2}	centi	c
10^2	etto (hecto)	h	10^{-3}	milli	m

utilizzare per la formazione dei multipli e dei sottomultipli decimali delle unità SI.

Nella tab. 1.3 sono invece riportate sia le principali unità di misura derivate che l'unica unità non SI impiegate nel seguito. Tutte queste unità

¹⁵Le altre unità fondamentali sono: 1) l'intensità di corrente elettrica (*electric current* in inglese), unità *ampere* (simbolo A), dimensione I; 2) la quantità di sostanza (*amount of substance* in inglese), unità *mole* (simbolo mol), dimensione N; 3) l'intensità luminosa (*luminous intensity* in inglese), unità *candela* (simbolo cd), dimensione J. In inglese lunghezza, tempo, massa e temperatura termodinamica si rendono con *length*, *time*, *mass* e *thermodynamic temperature*, mentre metro, secondo e chilogrammo con *metre* (*meter* nell'inglese americano), *second* e *kilogram*.

hanno nomi e simboli speciali, riportati nella tabella assieme alle loro dimensioni. Data l'importanza della grandezza forza nella presente tratta-

Tabella 1.3: Alcune unità derivate utilizzate nella presente trattazione

Grandezza derivata	Unità			Dimensione
	Nome speciale	Simbolo	Definizione	
forza	newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$	$F \equiv \text{MLT}^{-2}$
pressione, sforzo	pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$	FL^{-2}
	megapascal	MPa	$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N mm}^{-2}$	
energia, lavoro	joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$	FL
angolo piano	radiante	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m m}^{-1}$	$\text{LL}^{-1} \equiv 1$
	grado*	°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$	
temperatura Celsius	grado Celsius [†]	°C	Intervallo di $1^\circ\text{C} \equiv \equiv$ Intervallo di 1 K	Θ

*Unità non SI ma permessa dal SI, da suddividere preferibilmente in decimi (grado sessadecimale) invece che in minuti e secondi (grado sessagesimale).

[†]Da usarsi quando si dichiarano valori di temperatura Celsius.

zione, viene anche introdotto un simbolo speciale per la sua dimensione allo scopo di semplificare l'analisi dimensionale quando questa sarà utilizzata.¹⁶ Inoltre l'unità di misura SI della grandezza pressione (pascal) è estremamente piccola rispetto alle pressioni e agli sforzi con cui si ha solitamente a che fare. Per tale motivo l'unità di misura comunemente impiegata è il megapascal che, come indicato nella tab. 1.3, risulta uguale al rapporto N/mm^2 . Nel seguito tale unità di misura di pressione sarà indicata di preferenza con tale rapporto in luogo del simbolo MPa allo scopo sia di sottolineare l'origine della grandezza (una forza per unità di superficie) che di facilitare i calcoli legati alla modifica delle unità di misura. Tutte le volte che nel seguito compariranno nuove grandezze, saranno sempre indicate le loro unità di misura derivate.

¹⁶Gli standard internazionali prima citati non contemplano questo uso.

Una grandezza di dimensione 1, la cui misura è quindi indipendente dalle unità di misura fondamentali, è anche detta *adimensionale* oppure *numero puro*. L'unità di misura di una grandezza adimensionale può avere un nome speciale, che però può essere utilizzato solo per le grandezze per le quali tale nome è stato introdotto, come per esempio il nome *radian-te*,¹⁷ simbolo rad, nel caso dell'angolo piano come indicato nella tab. 1.3. I multipli e i sottomultipli delle grandezze di dimensione uno sono espressi tramite le potenze del numero 10. È inoltre permesso l'uso del simbolo speciale % (per cento) per esprimere la potenza 10^{-2} :

$$\% = 10^{-2} = 0.01.$$

Un cenno particolare merita la grandezza *angolo piano*. La relazione $\vartheta = \ell/R$ che lega l'angolo ϑ al centro di una circonferenza al corrispondente arco ℓ di circonferenza e al raggio R della circonferenza stessa, permette di classificare l'angolo piano tra le grandezze derivate, come attualmente fatto dal SI e in accordo con quanto indicato nella tab. 1.3.¹⁸ Ma il SI permette anche l'uso della unità grado (preferibilmente sessadecimale) e in tal caso l'angolo piano diviene inevitabilmente una grandezza indipendente dalle altre unità di base. Si noti che tale indipendenza della grandezza è notevolmente differente dalla indipendenza della misura dalle unità di base in quanto grandezza adimensionale. Infatti se la grandezza è dipendente e adimensionale la sua misura non varia mai, mentre se è indipendente allora la sua misura dipende dalla scelta arbitraria della sua unità di misura.

Si conclude ricordando che varie unità di misura non SI sono ancora utilizzate oppure sono state ampiamente utilizzate in passato nell'ambito dell'ingegneria e di altri campi della tecnica come, nel caso dell'Italia, il chilogrammo forza e le unità derivate. Esiste quindi un'ampia letteratura tecnica, soprattutto del passato, che riporta i dati in tali unità di misura. Da qui l'esigenza di trasformare tali unità non SI in unità SI. A tale scopo sono disponibili tabelle di conversione riportate in praticamente tutti i manuali

¹⁷Radian nella letteratura inglese.

¹⁸Questa prassi è stata istituita tramite la Risoluzione 8 della XX Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure (Conférence Générale des Poids et Mesures, CGPM) tenuta nel 1995, che ha eliminato la classe delle unità di misura supplementari (radiante e steradiante) e ha incluso tali unità di misura nella classe delle unità derivate. Secondo diversi autori, come indicato dal Sartori (1979, p. 28), l'angolo piano (e analogamente l'*angolo solido*) andrebbe invece collocato tra le grandezze di base. Questi contrasti spinsero gli estensori del SI a creare la classe delle unità supplementari ora abrogata.

tecnici. Una completa tabella di conversione è per esempio riportata in Taylor (1995, pp. 41-68).¹⁹

1.2 Vettori

Vi sono grandezze fisiche, come lo spostamento di un punto materiale nello spazio, che sono caratterizzate, oltre che dal numero reale positivo che ne fornisce la misura rispetto alla unità di misura, anche da una *direzione orientata dello spazio*. Per descrivere queste grandezze, dette *grandezze vettoriali*,²⁰ si introduce il concetto di *vettore* o, per meglio dire, di *vettore ordinario*, per distinguerlo dalla sua generalizzazione, a cui spesso ci si riferisce con il semplice termine di vettore. Dal punto di vista del concetto generale, i vettori ordinari considerati nel seguito non sono altro che un esempio del concetto generale.

Un *vettore ordinario*²¹ \mathbf{v} , associato allo *spazio euclideo*²² \mathcal{E} tridimensionale, sarà quindi caratterizzato da un numero reale positivo $|\mathbf{v}|$, detto *modulo*²³ e, se il modulo è diverso dallo zero, da una *direzione orientata* dello spazio. Il modulo rappresenta la misura della grandezza vettoriale, per cui quando nei casi concreti se ne dà il valore numerico, questo sarà moltiplicato per l'unità di misura. Si ricordi che l'esito finale di calcoli e/o misure non sono né numeri reali né vettori, ma grandezze, eventualmente vettoriali.²⁴

Si ricordi inoltre che ad una coppia (P, Q) di punti dello spazio restano associate sia la direzione orientata dello spazio individuata dai due punti nel dato ordine che la distanza tra i due punti, grandezza scalare di tipo lunghezza. Ne risulta una grandezza vettoriale \mathbf{v} , a volte citata sotto il nome di *vettore geometrico*, e comunemente indicata dalla (o definente la)

¹⁹Questa pubblicazione è liberamente disponibile in formato pdf nel sito del NIST (*National Institute of Standards and Technology*), all'indirizzo <http://www.physics.nist.gov/Pubs/pdf.html>.

²⁰Le grandezze caratterizzate dalla sola misura saranno allora dette *grandezze scalari*.

²¹Seguendo le raccomandazioni UNI CEI EN ISO 80000-2, i vettori saranno rappresentati nel seguito da caratteri in grassetto corsivo romano (in inglese *italic bold roman type*). Nella letteratura inglese vettore è reso da *vector*.

²²*Euclidean space* nella letteratura inglese.

²³*Magnitude* oppure *modulus* nella letteratura inglese.

²⁴Ciò non toglie che i vettori possano essere considerati alla stregua di coefficienti adimensionali. Se questi compaiono in espressioni definenti delle grandezze fisiche vettoriali dovranno essere allora moltiplicati per delle grandezze fisiche scalari che ne diano la corretta dimensione. In tal caso la misura della grandezza vettoriale che ne risulta si ottiene dal prodotto della misura della grandezza fisica scalare per il modulo del vettore coefficiente.

differenza dei due punti:

$$\mathbf{v} = Q - P. \quad (1.27)$$

È poi possibile definire il punto somma Q di un punto P e di un vettore geometrico \mathbf{v} :

$$Q = P + \mathbf{v}, \quad (1.28)$$

poiché il punto P e la direzione del vettore \mathbf{v} individuano in modo univoco una retta passante per P , mentre il modulo di \mathbf{v} e il suo verso individuano in modo univoco il punto Q su tale retta. Si sottolinea il fatto che le operazioni indicate nelle (1.27) e (1.28) sono in generale prive di senso per altre grandezze vettoriali, quali per esempio i *vettori forza*, per cui esse non riguardano in generale i vettori ordinari, ma quelle particolari grandezze fisiche vettoriali che sono i vettori geometrici. Grandezze vettoriali di tale tipo sono per esempio il *vettore posizione*²⁵ di un punto relativamente ad un altro preso quale riferimento, oppure il *vettore spostamento* di un punto individuato dai due punti che ne danno la posizione nello spazio prima e dopo lo spostamento.

1.2.1 Algebra vettoriale

Il vettore di modulo nullo, indicato nel seguito con $\mathbf{0}$, è detto *vettore nullo*.²⁶ Se $|\mathbf{v}| = 1$ il vettore \mathbf{v} è detto *versore* o *vettore unitario*.²⁷ L'*opposto*²⁸ $-\mathbf{v}$ di un vettore $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ha lo stesso modulo e la stessa direzione, ma verso opposto. Il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, *somma* dei due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} è definito dalla regola del parallelogramma (fig. 1.1). Si noti che in generale la costruzione del parallelogramma richiede una opportuna scelta della scala della rappresentazione, ovvero della relazione tra l'unità di misura della grandezza

²⁵Position vector nella letteratura inglese.

²⁶Zero vector nella letteratura inglese.

²⁷La grandezza vettoriale descritta da un versore (*unit vector* nella letteratura inglese) è dunque, a meno della direzione orientata, l'unità di misura. Ma, come già detto nella nota 24, anche un versore può essere considerato alla stregua di un coefficiente numerico adimensionale. Questa è la prassi, per esempio, quando si danno le componenti di una grandezza vettoriale rispetto ad una base ortonormale di versori. In tal caso il valore assoluto della componente scalare uguaglia il modulo della componente vettoriale e ha quindi il significato di misura della grandezza vettoriale componente. È questo il motivo per il quale la componente rispetto ad un versore viene detta *componente fisica* (*physical components* nella letteratura inglese).

²⁸Inverse oppure *negative* nella letteratura inglese.

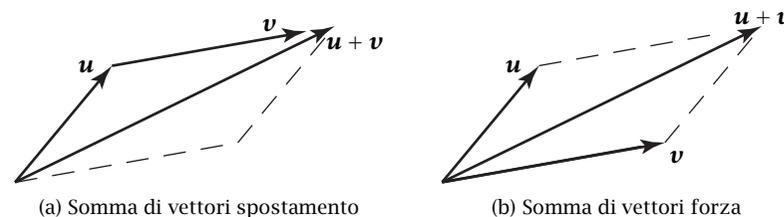


Figura 1.1: Somma di due vettori

vettoriale oggetto di somma e l'unità di misura della sua rappresentazione geometrica. Si noti inoltre che nel caso della somma di due vettori spostamento, il primo è applicato alla posizione iniziale del punto mentre il secondo alla posizione determinata dal primo spostamento, in accordo con lo schema di fig. 1.1a. Ne consegue che il parallelogramma definente la somma può essere generato nello spazio in modo naturale (senza bisogno di scala) e la proprietà della somma è una conseguenza della definizione e quindi delle sole proprietà geometriche dello spazio insite nel concetto di vettore. Invece nel caso della somma di due vettori forza, questi sono applicati entrambi allo stesso punto, in accordo con lo schema di fig. 1.1b, e la proprietà della somma è una legge fisica fattibile di verifica sperimentale, che non dipende quindi dalle sole proprietà geometriche dello spazio.

Il prodotto $a\mathbf{v}$, di un numero reale a per il vettore \mathbf{v} , definisce un vettore di modulo pari al prodotto dei moduli di a e di \mathbf{v} :

$$|a\mathbf{v}| = |a| |\mathbf{v}|, \quad (1.29)$$

e, se $|a\mathbf{v}| \neq 0$, di direzione orientata pari a quella di \mathbf{v} oppure opposta a seconda che a sia positivo oppure negativo. Il *prodotto scalare*²⁹ $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ di due vettori diversi dal vettore nullo³⁰ definisce poi il numero reale:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \alpha, \quad (1.30)$$

dove α indica l'angolo tra le direzioni orientate di \mathbf{u} e di \mathbf{v} . Infine, con riferimento alla fig. 1.2, il *prodotto vettoriale*³¹ $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ di due vettori diversi

²⁹Scalar product, inner product oppure dot product nella letteratura inglese.

³⁰È evidente che se uno o entrambi i due vettori sono nulli il loro prodotto scalare è nullo per definizione.

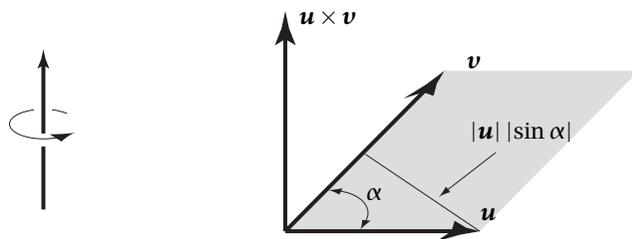


Figura 1.2: Prodotto vettoriale

dal vettore nullo definisce un vettore il cui modulo vale:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| |\sin \alpha|, \tag{1.31}$$

con α angolo tra le direzioni (non orientate) di \mathbf{u} e di \mathbf{v} , la cui direzione è ortogonale al piano di \mathbf{u} e di \mathbf{v} , e il cui verso è definito in modo tale che i vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ costituiscano, in quest'ordine, una terna destra di vettori.³² Si noti che il modulo del prodotto vettoriale di due vettori geometrici uguaglia la misura dell'area del parallelogramma individuato dai due vettori.³³ Nel caso di due vettori generici l'affermazione richiede invece una opportuna scelta della scala della rappresentazione geometrica.

1.2.2 Spazi vettoriali

Come già noto al lettore, le operazioni di somma e di inverso e il vettore nullo godono delle seguenti proprietà:

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}), \tag{1.32a}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}, \tag{1.32b}$$

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}, \tag{1.32c}$$

³¹Vector product oppure cross product nella letteratura inglese.

³²La definizione rende evidente la dipendenza del prodotto vettoriale dall'orientazione dello spazio, che nel nostro caso è una orientazione destra. Se invece l'orientazione dello spazio è sinistra, ai tre vettori si richiede di costituire, nello stesso ordine, una terna sinistra. Un vettore il cui verso dipende dalla orientazione dello spazio viene comunemente detto *vettore assiale*.

³³Si noti che questo è vero solo se il sistema di unità di misura utilizzato è coerente, o almeno se è coerente per quel che riguarda le unità di misura delle lunghezze e delle aree.

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{1.32d}$$

(opposto)

per ogni vettore \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Un insieme di elementi qualunque munito di una operazione di addizione soddisfacente le proprietà (1.32) è detto *gruppo commutativo*.³⁴

Il *prodotto* di un numero reale $a \in \mathbb{R}$ per un vettore \mathbf{v} gode invece delle seguenti proprietà:

$$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}, \tag{1.33a}$$

(associatività)

$$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}, \tag{1.33b}$$

(distributività)

$$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}, \tag{1.33c}$$

(distributività)

$$1\mathbf{v} = \mathbf{v}, \tag{1.33d}$$

(identità scalare)

per ogni numero reale a e b e per ogni vettore \mathbf{u} e \mathbf{v} . Un gruppo commutativo munito di un prodotto per gli elementi di un campo (il campo dei numeri reali, nel nostro caso) soddisfacente le proprietà (1.33), è detto *spazio vettoriale*.³⁵ Gli elementi del campo sono detti genericamente *scalari*³⁶ e il campo è detto *campo degli scalari*. Se il campo degli scalari è quello reale, oppure quello complesso, si parla di *spazio vettoriale reale* oppure, rispettivamente, di *spazio vettoriale complesso*. In questo senso, l'insieme dei vettori ordinari è un caso particolare di spazio vettoriale reale.

Il *prodotto scalare* di due vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} gode infine delle seguenti proprietà:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \tag{1.34a}$$

(simmetria)

$$(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}), \tag{1.34b}$$

(linearità)

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{1.34c}$$

(definitezza positiva)

per ogni numero reale a e b e per ogni vettore \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} . Uno spazio vettoriale reale munito di un prodotto scalare soddisfacente le proprietà (1.34), è detto *spazio con prodotto interno*.³⁷ Quindi l'insieme dei vettori ordinari è un caso particolare di spazio con prodotto interno.

³⁴Commutative group nella letteratura inglese.

³⁵Vector space nella letteratura inglese.

³⁶Scalar nella letteratura inglese.

³⁷A volte detto *spazio vettoriale euclideo*. Spazio con prodotto interno e spazio vettoriale euclideo si rendono in inglese con *inner product space* e *euclidean vector space* rispettivamente.

1.2.3 Trasformazioni lineari

Una legge fisica istituisce un legame tra due o più grandezze fisiche. Questi legami sono rappresentati, attraverso le misure delle grandezze, da funzioni reali oppure vettoriali di una variabile scalare oppure vettoriale. Per esempio la velocità di un punto materiale che si muove nello spazio è funzione del tempo (per meglio dire degli istanti di tempo) e genera una funzione vettoriale (il vettore di modulo la misura della velocità ad un dato istante) di una variabile scalare (la misura dell'intervallo di tempo che separa il dato istante di tempo da quello preso come origine). Dato che l'insieme dei numeri reali \mathbb{R} può essere considerato uno spazio vettoriale reale, le funzioni di cui si parla hanno la caratteristica di essere funzioni tra spazi vettoriali, spazi che sono essenzialmente caratterizzati dalle operazioni di addizione di due vettori e di prodotto per un numero reale. Tra queste funzioni hanno un ruolo particolare le *trasformazioni lineari*, funzioni che “portano” le operazioni di uno spazio in quelle dell'altro, nel senso che le operazioni tra elementi dello spazio di partenza si trasformano nelle corrispondenti operazioni tra le loro immagini nello spazio di arrivo.³⁸

Nel seguito interesseranno in modo particolare le trasformazioni lineari definite nello spazio vettoriale ordinario, a valori sia reali che vettoriali. Le prime sono dette *forme lineari o covettori*.³⁹ Poiché sono rappresentabili, come si mostrerà nel seguito, dai vettori stessi per il tramite del prodotto scalare non introducono nulla di sostanzialmente nuovo. Più interessanti e studiate approfonditamente nel seguito sono invece le trasformazioni lineari a valori vettoriali, dette *tensori doppi*, *tensori del secondo ordine* od anche, più semplicemente, *tensori*.⁴⁰

³⁸Una funzione che “porta” una o più operazioni da un dominio a un codominio è nota con il nome di *morfismo* oppure di *omomorfismo*. Quindi una trasformazione lineare non è altro che un morfismo tra spazi vettoriali. Nei casi in cui un morfismo abbia delle proprietà aggiuntive sono utilizzati termini più specifici. In particolare, un morfismo che abbia stesso dominio e codominio è detto *endomorfismo*, mentre se il morfismo è biiettivo si usa il termine *isomorfismo*. Un isomorfismo che abbia stesso dominio e codominio è poi detto *automorfismo*.

Nella letteratura inglese il termine trasformazione lineare è reso da *linear transformation* oppure *linear map*. Morfismo, endomorfismo, isomorfismo, automorfismo sono invece resi da *omomorphism*, *isomorphism*, *endomorphism* e *automorphism* rispettivamente.

³⁹Forma lineare e covettore sono resi nella letteratura inglese da *linear form* e *covector* rispettivamente.

⁴⁰I tensori doppi sono dunque identificati, nell'ambito della presente trattazione, con gli endomorfismi dello spazio vettoriale ordinario, e questo è più che sufficiente per gli scopi

1.2.4 Sistema di coordinate

Sia data una *terna destra di assi cartesiani ortogonali*⁴¹ $Oxyz$ e siano \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z i versori degli assi, ovvero i vettori di modulo unitario e di direzione orientata individuata dagli assi coordinati (fig. 1.3). I versori \mathbf{e}_i (è sottinteso

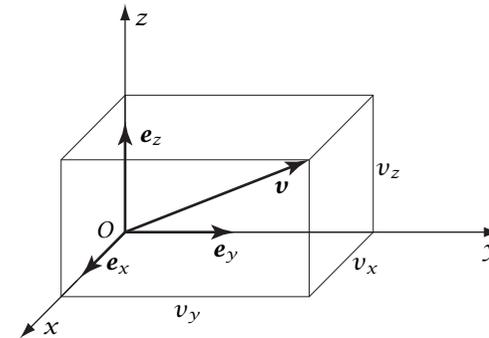


Figura 1.3: Decomposizione di un vettore

che $i = x, y, z$) costituiscono una *base ortonormale destra*⁴² dello spazio vettoriale \mathcal{V} . Se il simbolo δ_{ij} indica il *delta di Kronecker*⁴³ definito dalla condizione:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (1.35)$$

una qualunque base ortonormale, sia destra che sinistra, è caratterizzata dalla seguente condizione:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.36)$$

che ci si propone nel seguito. Per una definizione più generale di tensore si veda, per esempio, Bowen e Wang (1976, Chapter 7: Tensor Algebra). Nella letteratura inglese tensore doppio viene reso con *second-order tensor* oppure più brevemente *tensor*.

⁴¹*Right-handed rectangular cartesian axes* nella letteratura inglese.

⁴²*Right-handed orthonormal base* nella letteratura inglese.

⁴³*Kronecker delta* nella letteratura inglese.

Introdotta poi il simbolo ε_{ijk} , detto *simbolo di permutazione o alternatore*.⁴⁴

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione pari di } (x, y, z) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ è una permutazione dispari di } (x, y, z) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.37)$$

vale la proprietà:⁴⁵

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_k. \quad (1.38)$$

Nella (1.38) la sommatoria \sum_k è implicitamente estesa ai valori $k = x, y, z$. Si noti che il simbolo di permutazione è invariante per circolazione degli indici, non variando in tal modo il tipo di permutazione:

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki}. \quad (1.39)$$

Si noti inoltre che il determinante $\det \mathbf{A}$ di una generica matrice quadrata \mathbf{A} di dimensione 3×3 vale:⁴⁶

$$\det \mathbf{A} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{ix} A_{jy} A_{kz} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} A_{xi} A_{yj} A_{zk}, \quad (1.40)$$

relazione che può essere generalizzata nella forma seguente:

$$\varepsilon_{klm} \det \mathbf{A} = \sum_{ijh} \varepsilon_{ijh} A_{ik} A_{jl} A_{km} = \sum_{ijh} \varepsilon_{ijh} A_{ki} A_{lj} A_{mh}. \quad (1.41)$$

1.2.5 Rappresentazione matriciale di un vettore

Data una qualunque base \mathbf{e}_i , un vettore \mathbf{v} può essere posto nella forma (fig. 1.3):

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \sum_i v_i \mathbf{e}_i, \quad (1.42)$$

⁴⁴ *Permutation symbol* e, rispettivamente, *alternating symbol* nella letteratura inglese.

⁴⁵ La (1.38) è equivalente a scrivere:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0} & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z & \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z = -\mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y = \mathbf{0} & \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \\ \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0}. \end{array}$$

Si noti che la (1.36) qualifica la data base quale base ortonormale, mentre la (1.38) non ne è che una conseguenza. Si noti inoltre che la (1.38) vale sia per una base ortonormale destra in uno spazio con orientazione destra che per una base ortonormale sinistra in uno spazio con orientazione sinistra. Infatti, se si modifica l'orientazione dello spazio, nel nostro caso scegliendo una orientazione sinistra, si modifica anche il verso del prodotto vettoriale di due vettori.

⁴⁶ La definizione e le proprietà del determinante di una matrice quadrata sono riportate in un qualunque testo di algebra lineare (si veda per esempio Lipschutz, 1975, cap. 8).

dove, come già in precedenza e come sarà fatto nel seguito, la sommatoria \sum_i è implicitamente estesa ai valori $i = x, y, z$. Gli scalari v_i che compaiono nella (1.42) sono detti *componenti*⁴⁷ del dato vettore \mathbf{v} . Se la base \mathbf{e}_i è ortonormale, come sarà sempre nel seguito, dalla condizione di ortonormalità (1.36) si ottiene $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i = \sum_j v_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i = \sum_j v_j \delta_{ji} = v_i$ e ne consegue:

$$v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.43)$$

Si noti che vale anche l'inverso, cioè la (1.43) implica l'ortonormalità (1.36) della base \mathbf{e}_i .

Il *vettore colonna* delle componenti di \mathbf{v} :

$$\{\mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}, \quad (1.44)$$

*matrice*⁴⁸ di dimensione 3×1 , fornisce una possibile *rappresentazione matriciale* di \mathbf{v} nella data base, associata al dato sistema di coordinate. Si noti che la corrispondenza $\mathbf{v} \mapsto \{\mathbf{v}\}$ tra vettori e la loro rappresentazione è invertibile poiché ad un dato vettore colonna (1.44) di scalari corrisponde tramite la (1.42) un vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ rappresentato dallo stesso vettore colonna. Relativamente a tale rappresentazione le operazioni vettoriali di somma e di prodotto per uno scalare diventano:⁴⁹

$$\{\mathbf{u} + \mathbf{v}\} = \{\mathbf{u}\} + \{\mathbf{v}\}, \quad (\mathbf{u} + \mathbf{v})_i = u_i + v_i, \quad (1.45a)$$

$$\{a\mathbf{u}\} = a \{\mathbf{u}\}, \quad (a\mathbf{u})_i = a u_i. \quad (1.45b)$$

Per quel che riguarda i prodotti scalare e vettoriale, se ne possono dedurre le componenti tenendo innanzitutto conto della distributività di tali prodotti rispetto alla somma di vettori:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \left(\sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \cdot \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{ij} u_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j), \quad (1.46a)$$

⁴⁷ *Components of a vector* nella letteratura inglese.

⁴⁸ La definizione di matrice e le conseguenti operazioni e proprietà sono riportate in un qualunque testo di algebra lineare (si veda per esempio Lipschutz, 1975, cap. 3). In inglese il termine matrice si rende con *matrix*.

⁴⁹ Dato che lo spazio dei vettori colonna, cioè l'insieme delle matrici di dimensione 3×1 munito delle operazioni di somma di due matrici e di moltiplicazione di uno scalare per una matrice, è uno spazio vettoriale, la corrispondenza $\mathbf{v} \mapsto \{\mathbf{v}\}$ tra vettori e vettori colonna per via delle (1.45) è una corrispondenza lineare tra spazi vettoriali e più precisamente, essendo invertibile, un isomorfismo di spazi vettoriali (Cfr. la nota 38, p. 22).

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) \times \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_{ij} u_i v_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j), \quad (1.46b)$$

ed utilizzando poi le relazioni (1.36) e (1.38):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_{ij} u_i v_j \delta_{ij}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (1.47)$$

Dalle (1.47) si ottengono infine le rappresentazioni cercate:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \{\mathbf{u}\}^T \{\mathbf{v}\}, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i, \quad (1.48a)$$

$$\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} = \begin{Bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{Bmatrix}, \quad (\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} u_i v_j, \quad (1.48b)$$

dove $\{\mathbf{u}\}^T$, trasposto del vettore colonna $\{\mathbf{u}\}$, non è altro che il vettore riga delle componenti di \mathbf{u} . Confrontando la seconda delle (1.47) con lo sviluppo (1.40) del determinante di una matrice quadrata 3×3 , se ne deduce che il prodotto vettoriale equivale allo sviluppo di un determinante simbolico:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \quad (1.49)$$

Dalle rappresentazioni (1.48) dei prodotti scalare e vettoriale discende infine la rappresentazione del prodotto misto:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} u_i v_j w_k, \quad (1.50)$$

equivalente allo sviluppo di un determinante:

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}. \quad (1.51)$$

Si noti che il modulo del prodotto misto di tre vettori uguaglia la misura del volume del parallelepipedo individuato dai tre vettori stessi, previa eventualmente una opportuna scelta della scala della rappresentazione geometrica. ■

1.2.6 Forme lineari

Si consideri una funzione f che ad un vettore \mathbf{v} associ un numero reale a . Se \mathcal{V} indica lo spazio dei vettori ordinari (dominio della funzione), si può indicare tale circostanza con la scrittura:

$$f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} \mapsto a = f(\mathbf{v}). \quad (1.52)$$

Come già detto, questa funzione è *lineare* se porta l'addizione di vettori e la moltiplicazione di un vettore per uno scalare nell'addizione e nella moltiplicazione tra numeri reali:

$$f(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = af(\mathbf{u}) + bf(\mathbf{v}), \quad (1.53)$$

dove a e b sono generici numeri reali e \mathbf{u} e \mathbf{v} sono generici vettori. In altri termini (equivalenti) f deve essere omogenea di grado uno ed additiva:

$$f(a\mathbf{u}) = af(\mathbf{u}), \quad (\text{omogeneità di grado uno}), \quad (1.54a)$$

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}), \quad (\text{additività}). \quad (1.54b)$$

Ciò predetto ne consegue che una forma lineare non è altro che una funzione di tipo (1.52) che soddisfi la condizione di linearità (1.53) oppure le condizioni di additività e di omogeneità di grado uno (1.54).

Teorema di rappresentazione delle forme lineari. Se f è una forma lineare allora esiste uno e un solo vettore \mathbf{f} tale che:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.55)$$

per ogni vettore \mathbf{v} .

Dimostrazione. Infatti, data una base ortonormale destra \mathbf{e}_i e posto:

$$\mathbf{f} = \sum_i f(\mathbf{e}_i) \mathbf{e}_i, \quad (1.56)$$

risulta:

$$f(\mathbf{v}) = f\left(\sum_i v_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_i v_i f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.57)$$

■

Viceversa ogni vettore \mathbf{f} definisce, tramite la (1.55), una forma lineare, come si deduce immediatamente dalla linearità del prodotto scalare. Questa circostanza ha per conseguenza che i vettori possono essere identificati (formalmente ma non concettualmente) con le trasformazioni lineari $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$.

Dal teorema di rappresentazione delle forme lineari discende banalmente la nota proprietà:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \text{ per ogni } \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}, \tag{1.58}$$

dato che in tal caso \mathbf{a} e \mathbf{b} definiscono la stessa forma lineare.

Gradiente di un campo scalare. Quale esempio si consideri la funzione lineare di tipo (1.52) rappresentata, tramite la (1.55), dal *gradiente*⁵⁰ di una funzione scalare del punto, cioè di una funzione f definita nello spazio euclideo \mathcal{E} a valori in \mathbb{R} :

$$f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto f(P). \tag{1.59}$$

Nella fig. 1.4 è illustrato il caso di una funzione definita nello spazio euclideo a due dimensioni. Per definire il gradiente in un punto generico P_0 occorre considerare l'incremento Δf che la funzione f subisce al passare dal punto P_0 ad un'altro punto P nell'intorno di P_0 :

$$\Delta f = f(P) - f(P_0). \tag{1.60}$$

Tale incremento è una funzione dell'incremento $\Delta \mathbf{P}$ del punto a partire dal punto P_0 , ovvero della parte lineare del vettore geometrico differenza dei due punti P e P_0 :

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P}_0, \tag{1.61}$$

e ne risulta quindi una funzione definita nello spazio dei vettori e a valori scalari: $\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \Delta \mathbf{P} \mapsto \Delta f$. Il gradiente, se esiste, rappresenta la parte lineare di tale funzione incremento:

$$\Delta f = \text{grad } f \cdot \Delta \mathbf{P} + o(|\Delta \mathbf{P}|), \tag{1.62}$$

⁵⁰Gradient of scalar field nella letteratura inglese.

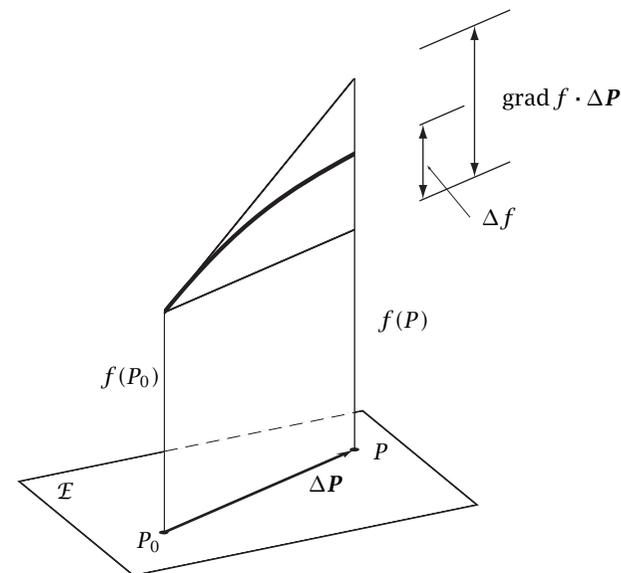


Figura 1.4: Gradiente di una funzione scalare

dove il simbolo “o”, detto *o piccolo*,⁵¹ indica una funzione infinitesima di ordine superiore rispetto a quella posta tra parentesi.⁵² In generale, se $d\mathbf{P}$ indica la parte lineare dell'incremento del punto,⁵³ la parte lineare $d f$ dell'incremento della funzione (il differenziale) vale:

$$d f = \text{grad } f \cdot d\mathbf{P}. \tag{1.63}$$

⁵¹A volte indicato come *o piccolo di Landau*. Detto *small o* nella letteratura inglese.

⁵²Ovverossia la (1.62) va interpretata come se in luogo di $o(|\Delta \mathbf{P}|)$ vi fosse in realtà una funzione scalare infinitesima $g(\Delta \mathbf{P})$ della quale si sa soltanto essere di ordine superiore rispetto a quella definita dal modulo del vettore $\Delta \mathbf{P}$, nel senso che:

$$\lim_{\Delta \mathbf{P} \rightarrow 0} \frac{g(\Delta \mathbf{P})}{|\Delta \mathbf{P}|} = 0.$$

Per maggiori informazioni si veda per esempio Gilardi (1995, pp. 384-390).

⁵³Se P è la variabile indipendente allora $d\mathbf{P} = \Delta \mathbf{P}$.

1.3 Tensori doppi

Si considerino ora i *tensori doppi*, che come detto sono identificati nel seguito con le trasformazioni lineari dello spazio dei vettori ordinari, quindi trasformazioni lineari che ad un generico vettore \mathbf{v} associano un altro vettore \mathbf{u} . Indicando con \mathbf{A} un generico tensore doppio⁵⁴ e con $\mathbf{A}\mathbf{v}$ il vettore corrispondente a \mathbf{v} tramite \mathbf{A} (fig. 1.5), si può indicare tale circostanza con

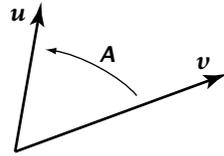


Figura 1.5: Tensore doppio

la scrittura:

$$\mathbf{A} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{v}. \quad (1.64)$$

La linearità richiede che sia soddisfatta, analogamente alla (1.53), la seguente relazione:

$$\mathbf{A}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{A}\mathbf{u} + b\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (1.65)$$

per ogni numero reale a e b e per ogni vettore \mathbf{u} e \mathbf{v} . Tale condizione, come già per le forme lineari, è equivalente alle due condizioni di omogeneità di grado uno e di additività:

$$\mathbf{A}(a\mathbf{u}) = a\mathbf{A}\mathbf{u}, \quad (\text{omogeneità di grado uno}), \quad (1.66a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (\text{additività}). \quad (1.66b)$$

⁵⁴In accordo con le raccomandazioni UNI CEI EN ISO 80000-2, che richiedono caratteri in grassetto sia per i vettori che per i tensori, e allo scopo di differenziare visivamente questi dai vettori, i tensori verranno rappresentati da caratteri in grassetto corsivo a bastone (in inglese *slanted bold sans serif type*).

1.3.1 Algebra tensoriale

È intuitivo come si possano definire dei tensori doppi particolari e delle operazioni relative a tensori doppi.⁵⁵

$$\mathbf{0}\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{0} \text{ è il tensore nullo}, \quad (1.67a)$$

$$\mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \quad \mathbf{I} \text{ è il tensore identità}, \quad (1.67b)$$

$$(-\mathbf{A})\mathbf{v} = -(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad -\mathbf{A} \text{ è il tensore opposto di } \mathbf{A}, \quad (1.67c)$$

$$(a\mathbf{A})\mathbf{v} = a(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad a\mathbf{A} \text{ è il prodotto di un numero reale per un tensore}, \quad (1.67d)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{v}, \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} \text{ è la somma di due tensori}, \quad (1.67e)$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{v}), \quad \mathbf{A}\mathbf{B} \text{ è il prodotto, o composizione, di due tensori}. \quad (1.67f)$$

Nelle (1.67) le uguaglianze si intendono valide per ogni vettore \mathbf{v} . Tali uguaglianze definiscono senz'altro delle trasformazioni dello spazio dei vettori. La dimostrazione che le trasformazioni definite dalle (1.67) siano anche lineari è lasciata al lettore. Senza insistere troppo sull'argomento, si potrebbe facilmente dimostrare che il tensore nullo, il tensore opposto, la somma di due tensori e il prodotto di un numero reale per un tensore soddisfano le proprietà analoghe di quelle (1.32) e (1.33) che valgono per i vettori ordinari, il che qualifica l'insieme dei tensori doppi quale spazio vettoriale reale, spesso indicato in letteratura con il simbolo Lin .

Tensore trasposto. Dato un tensore doppio \mathbf{A} , l'uguaglianza:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}), \quad (1.68)$$

per ogni vettore \mathbf{u} e \mathbf{v} , definisce in modo univoco un tensore doppio \mathbf{A}^T detto *tensore trasposto*⁵⁶ di \mathbf{A} .

Dimostrazione. È di facile verifica che la trasformazione $f : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u})$ è lineare e che quindi f è una forma lineare a cui corrisponde in modo

⁵⁵Nella letteratura inglese si utilizzano rispettivamente i termini *zero tensor*, *identity tensor* e *negative of a tensor* per tensore nullo, tensore identità e tensore opposto di un altro.

⁵⁶Si noti che la posizione

$$f_{\mathbf{A}} : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v})$$

univoco il vettore f che la rappresenta. Resta quindi definita in modo univoco la trasformazione $\mathbf{A}^T : \mathbf{v} \mapsto f$ soddisfacente la (1.68). La linearità di tale trasformazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}^T (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) &= (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{A} \mathbf{u} \\ a_1 \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u}) + a_2 \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u}) &= \mathbf{u} \cdot (a_1 \mathbf{A}^T \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{A}^T \mathbf{v}_2) \end{aligned} \quad (1.69)$$

dimostra infine che \mathbf{A}^T è un tensore doppio. ■

Si noti che l'operazione di trasposizione permette di spostare l'applicazione di un tensore a un vettore da una parte all'altra di un prodotto scalare. La definizione (1.68) di tensore trasposto di un'altro conduce poi alla definizione di *tensore simmetrico* e di *tensore emisimmetrico*.⁵⁷ Un tensore \mathbf{A} si dice simmetrico se coincide con il suo trasposto:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad (1.70)$$

mentre si dice emisimmetrico se coincide con l'opposto del suo trasposto:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T. \quad (1.71)$$

È di facile verifica che un generico tensore \mathbf{A} può essere decomposto in modo univoco nella somma di una parte simmetrica \mathbf{A}_{sym} e di una emisimmetrica \mathbf{A}_{skw} :

$$\mathbf{A}_{\text{sym}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T), \quad (1.72a)$$

$$\mathbf{A}_{\text{skw}} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T), \quad (1.72b)$$

tenuto conto che $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$, come si deduce facilmente dalla (1.68).

definisce una forma quadratica associata ad \mathbf{A} e che l'analogha forma quadratica $f_{\mathbf{A}}^T$ associata ad \mathbf{A}^T si ottiene "trasponendo" \mathbf{u} con \mathbf{v} :

$$f_{\mathbf{A}}^T : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u}).$$

Nella letteratura inglese si utilizza il termine *transpose of a tensor* per tensore trasposto di un altro.

⁵⁷Rispettivamente *symmetric tensor* e *skew-symmetric tensor* nella letteratura inglese.

Prodotto tensoriale di due vettori. Nell'ambito dell'algebra tensoriale è di fondamentale importanza il *prodotto tensoriale*⁵⁸ $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ di due vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} , che può essere definito dall'uguaglianza:

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \mathbf{v} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}, \quad (1.73)$$

da ritenersi valida per ogni vettore \mathbf{v} . La definizione (1.73) consente di definire la *proiezione* \mathbf{P} nella direzione orientata definita da un versore \mathbf{e} nella semplicissima forma seguente (fig. 1.6):

$$\mathbf{P} = \mathbf{e} \otimes \mathbf{e}. \quad (1.74)$$

Inoltre, in tutti i casi in cui un vettore \mathbf{v} compare quale membro di un

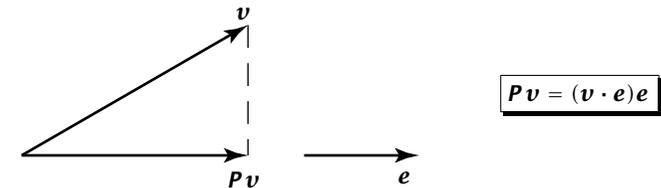


Figura 1.6: Operazione di proiezione

prodotto scalare in una espressione di tipo vettoriale, per esempio $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{w}$, è possibile mettere in evidenza il vettore \mathbf{v} utilizzando la definizione di prodotto tensoriale, nell'esempio in questione sostituendo l'espressione data con l'equivalente $(\mathbf{w} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{v}$.

Tensore inverso. La trasformazione inversa di un tensore doppio \mathbf{A} , se esiste, è essa stessa un tensore doppio che viene detto *tensore inverso*⁵⁹ di \mathbf{A} ed indicato con \mathbf{A}^{-1} . L'inverso di un tensore, se esiste, soddisfa dunque le seguenti condizioni:

$$\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (1.75)$$

⁵⁸*Tensor product* nella letteratura inglese.

⁵⁹Si noti che un tensore invertibile non è altro che un automorfismo dello spazio vettoriale ordinario. Tensore inverso si rende con *inverse tensor* nella letteratura inglese.

Gradiente di un campo vettoriale. Si consideri ora una funzione vettoriale del punto, cioè una funzione \mathbf{f} definita nello spazio euclideo \mathcal{E} e a valori nello spazio dei vettori \mathcal{V} :

$$\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{V}, P \mapsto \mathbf{f}(P). \quad (1.76)$$

Come già nel caso di un campo scalare (par. 1.2.6 p. 25) si consideri un punto generico P_0 e l'incremento $\Delta \mathbf{f}$ che la funzione \mathbf{f} subisce al passare dal punto P_0 ad un'altro punto P nell'intorno di P_0 :

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(P) - \mathbf{f}(P_0), \quad (1.77)$$

incremento che anche in questo caso è funzione dell'incremento $\Delta \mathbf{P}$ del punto a partire dal punto P_0 . Ne risulta una funzione definita nello spazio dei vettori e a valori vettoriali: $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, $\Delta \mathbf{P} \mapsto \Delta \mathbf{f}$. La parte lineare della funzione incremento, se esiste, è di conseguenza un tensore doppio detto *gradiente* di \mathbf{f} e indicato con $\text{grad } \mathbf{f}$:

$$\Delta \mathbf{f} = \text{grad } \mathbf{f} \Delta \mathbf{P} + \mathbf{o}(|\Delta \mathbf{P}|), \quad (1.78)$$

dove l'o piccolo in tal caso sostituisce una funzione vettoriale infinitesima.⁶⁰ La parte lineare $d\mathbf{f}$ dell'incremento della funzione corrispondente alla parte lineare $d\mathbf{P}$ dell'incremento del punto vale quindi:

$$d\mathbf{f} = \text{grad } \mathbf{f} d\mathbf{P}. \quad (1.79)$$

È opportuno preavvisare il lettore che la convenzione di chiamare gradiente il tensore doppio definito dalla (1.78) è tutt'altro che universale essendosi diffusa solo negli ultimi decenni prevalentemente nell'ambito della meccanica del continuo, ambito nel quale è ormai velleitario rinunciare a tale denominazione. Tuttavia in altri ambiti, compresi quelli dell'analisi e della fisica matematica, il termine gradiente è strettamente riservato al vettore che rappresenta la forma lineare associata all'incremento di un campo scalare.⁶¹

⁶⁰In altri termini $\mathbf{o}(|\Delta \mathbf{P}|)$ indica una funzione vettoriale infinitesima $\mathbf{g}(\Delta \mathbf{P})$ tale che:

$$\lim_{\Delta \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{g}(\Delta \mathbf{P})}{|\Delta \mathbf{P}|} = \mathbf{0}.$$

⁶¹In tali ambiti le denominazioni più comuni del tensore doppio definito dalla (1.78) sono quelle di *differenziale*, di *derivata* oppure di *mappa* (o *applicazione tangente*). Nel caso venga chiamato differenziale, tale termine finisce quindi per identificare sia il tensore doppio che il valore che il tensore fa corrispondente ad un particolare vettore, come indicato nella (1.79).

1.3.2 Rappresentazione matriciale di un tensore doppio

Un tensore doppio \mathbf{A} trasforma la base \mathbf{e}_j nei tre vettori $\mathbf{A}\mathbf{e}_j$, che a loro volta si rappresentano nella forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i, \quad A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_j. \quad (1.80)$$

Una possibile *rappresentazione algebrica di un tensore* \mathbf{A} , relativamente alla base indotta dal dato sistema di coordinate, risulta quindi essere la matrice 3×3 composta dagli scalari A_{ij} , detti componenti di \mathbf{A} :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{bmatrix}. \quad (1.81)$$

Lo spazio Lin dei tensori doppi costituisce uno spazio vettoriale di dimensione 9. Infatti i nove tensori doppi $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ costituiscono una base di Lin, e i nove scalari A_{ij} rappresentano le componenti di \mathbf{A} in tale base:

$$\mathbf{A} = \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (1.82)$$

Dimostrazione. Infatti, utilizzando le relazioni

$$\begin{aligned} \sum_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j &= \mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z = \mathbf{I}, \\ (\mathbf{A}\mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_j &= \mathbf{A}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (\text{perché?}), \end{aligned}$$

si ottiene quanto volevasi dimostrare:

$$\begin{aligned} \sum_{ij} A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j &= \sum_j \left(\sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i \right) \otimes \mathbf{e}_j \\ &= \sum_j (\mathbf{A}\mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{A} \left(\sum_j \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_j \right) = \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Questo risultato implica che la corrispondenza $\mathbf{A} \mapsto [\mathbf{A}]$ tra tensori doppi e la loro rappresentazione è invertibile poiché ad una data matrice (1.81) di scalari corrisponde tramite la (1.82) un tensore $\mathbf{A} \in \text{Lin}$ rappresentato dalla stessa matrice.

Per quel che riguarda la rappresentazione in componenti dell'applicazione di un tensore doppio ad un vettore, risulta:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A} \left(\sum_j v_j \mathbf{e}_j \right) = \sum_j v_j \mathbf{A}\mathbf{e}_j$$

$$= \sum_j v_j \left(\sum_i A_{ij} \mathbf{e}_i \right) = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} v_j \right) \mathbf{e}_i,$$

e dunque:

$$\{\mathbf{A}\mathbf{v}\} = [\mathbf{A}] \{\mathbf{v}\}, \quad (\mathbf{A}\mathbf{v})_i = \sum_j A_{ij} v_j. \quad (1.83)$$

In modo analogo il tensore nullo $\mathbf{0}$, il tensore identità \mathbf{I} e le operazioni tensoriali definite dalle (1.67), (1.68) e (1.73) si rappresentano in componenti, rispettivamente:

$$[\mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.84)$$

e.⁶²

$$[-\mathbf{A}] = -[\mathbf{A}], \quad (-\mathbf{A})_{ij} = -A_{ij}, \quad (1.85a)$$

$$[\alpha\mathbf{A}] = \alpha[\mathbf{A}], \quad (\alpha\mathbf{A})_{ij} = \alpha(A_{ij}), \quad (1.85b)$$

$$[\mathbf{A} + \mathbf{B}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}], \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = A_{ij} + B_{ij}, \quad (1.85c)$$

$$[\mathbf{AB}] = [\mathbf{A}][\mathbf{B}], \quad (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}, \quad (1.85d)$$

$$[\mathbf{A}^T] = [\mathbf{A}]^T, \quad (\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji}, \quad (1.85e)$$

$$[\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}] = \{\mathbf{a}\}\{\mathbf{b}\}^T, \quad (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} = a_i b_j. \quad (1.85f)$$

Inoltre le condizioni di simmetria (1.70) e di emisimmetria (1.71) in componenti si scrivono rispettivamente:

$$[\mathbf{A}]^T = [\mathbf{A}], \quad A_{ij} = A_{ji}, \quad (1.86a)$$

$$[\mathbf{A}]^T = -[\mathbf{A}], \quad A_{ij} = -A_{ji}. \quad (1.86b)$$

Infine il tensore inverso \mathbf{A}^{-1} di \mathbf{A} esiste se e solo se $\det[\mathbf{A}] \neq 0$ e in tal caso risulta:

$$[\mathbf{A}^{-1}] = [\mathbf{A}]^{-1}. \quad (1.87)$$

La dimostrazione delle relazioni (1.84)-(1.87) è lasciata per esercizio al lettore.

⁶²Si noti che le rappresentazioni (1.85b) e (1.85c) delle operazioni tensoriali di somma e di prodotto per uno scalare rendono la corrispondenza $\mathbf{A} \mapsto [\mathbf{A}]$ tra tensori e matrici quadrate un isomorfismo di spazi vettoriali. (Cfr. la nota 38, p. 22).

1.3.3 Tensori doppi definiti dal prodotto e dal doppio prodotto vettoriale

Il prodotto vettoriale tra un vettore fisso \mathbf{w} e un vettore variabile \mathbf{v} definisce in modo univoco un tensore doppio emisimmetrico \mathbf{W} tale che:

$$\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}. \quad (1.88)$$

Infatti la funzione (1.88) è innanzitutto lineare, e quindi un tensore doppio, poiché il prodotto vettoriale è distributivo rispetto alla somma di vettori e omogeneo di grado uno rispetto al prodotto di uno scalare per un vettore:

$$\mathbf{w} \times (a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) = a_1 (\mathbf{w} \times \mathbf{v}_1) + a_2 (\mathbf{w} \times \mathbf{v}_2). \quad (1.89)$$

Inoltre è emisimmetrica poiché il prodotto misto cambia di segno se si scambiano tra loro due dei vettori che intervengono nel prodotto:

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}). \quad (1.90)$$

La seconda delle (1.48b), che fornisce le componenti del prodotto vettoriale, permette di mettere in componenti la (1.88):

$$\sum_j W_{ij} v_j = \sum_j \left(\sum_k \varepsilon_{kji} w_k \right) v_j, \quad (1.91)$$

e di ottenere quindi le componenti di \mathbf{W} :

$$W_{ij} = -\sum_k \varepsilon_{ijk} w_k, \quad [\mathbf{W}] = \begin{bmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.92)$$

Si noti che risulta:

$$-\frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} W_{jk} = \frac{1}{2} \sum_h \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} \right) w_h = \frac{1}{2} \sum_h 2\delta_{ih} w_h = w_i, \quad (1.93)$$

dato che vale l'identità, di semplice verifica:⁶³

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih}. \quad (1.94)$$

⁶³Infatti se $i \neq h$ allora j e k sono entrambi diversi da i e h se e solo se sono uguali tra loro e quindi se e solo se i due simboli ε_{ijk} e ε_{hjk} sono entrambi nulli. Se invece $i = h$ allora ci sono due possibili valori per la coppia (j, k) che rendono entrambi i simboli ε_{ijk} e ε_{hjk} diversi da zero. Se (l, m) è uno dei due valori l'altro è (m, l) e risulta $\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} = \varepsilon_{ilm}^2 + \varepsilon_{hml}^2 = 2$

Dalla (1.93) consegue che vale anche l'inverso di quanto dedotto in precedenza, ovvero che ad ogni tensore doppio emisimmetrico \mathbf{W} corrisponde un vettore \mathbf{w} , detto *vettore assiale*⁶⁴ del dato tensore doppio (emisimmetrico), soddisfacente la (1.88) e le cui componenti valgono:

$$w_i = -\frac{1}{2} \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} W_{jk}, \quad \{\mathbf{w}\} = \begin{Bmatrix} W_{zy} \\ W_{xz} \\ W_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (1.95)$$

Si consideri ora il doppio prodotto vettoriale tra due vettori fissi \mathbf{a} e \mathbf{b} e un terzo vettore variabile \mathbf{v} . Se \mathbf{W}_a e \mathbf{W}_b sono i tensori emisimmetrici di vettore assiale \mathbf{a} e \mathbf{b} rispettivamente, dalla (1.88) si ha allora:

$$\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b \mathbf{v} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{v}). \quad (1.96)$$

Ne risulta quindi definito un tensore doppio prodotto di due tensori emisimmetrici. Procedendo in componenti, tenendo conto della (1.92), si ottiene:

$$\begin{aligned} [\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b] &= \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -b_z & b_y \\ b_z & 0 & -b_x \\ -b_y & b_x & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -a_z b_z - a_y b_y & a_y b_x & a_z b_x \\ a_x b_y & -a_z b_z - a_x b_x & a_z b_y \\ a_x b_z & a_y b_z & -a_y b_y - a_x b_x \end{bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} - (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

e quindi:

$$\mathbf{W}_a \mathbf{W}_b = \mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I}. \quad (1.98)$$

Combinando le (1.98) e (1.96) si ottiene l'identità:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I}) \mathbf{v}. \quad (1.99)$$

⁶⁴ Axial vector nella letteratura inglese.

Dalla (1.99) si deduce infine la seguente relazione:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad (1.100)$$

valida per ogni vettore \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} . Si noti che la (1.100) è in accordo col fatto che al doppio prodotto vettoriale che compare al primo membro deve corrispondere un vettore ortogonale al vettore $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ e quindi appartenente al piano di \mathbf{b} e \mathbf{c} .

1.3.4 Rappresentazione dei gradienti di campi scalari e vettoriali

Nel caso di un campo scalare $f(x, y, z)$ si ha:

$$\text{grad } f \cdot \mathbf{e}_i = \frac{\text{grad } f \cdot (dx_i \mathbf{e}_i)}{dx_i} = \lim_{dx_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f(dx_i \mathbf{e}_i)}{dx_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (1.101)$$

Ne risulta quindi:

$$(\text{grad } f)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \{\text{grad } f\} = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial z} \right]^T. \quad (1.102)$$

Nel caso del gradiente di un campo vettoriale $\mathbf{f}(x, y, z)$ si ha invece:

$$\text{grad } \mathbf{f} \mathbf{e}_j = \frac{\text{grad } \mathbf{f} (dx_j \mathbf{e}_j)}{dx_j} = \lim_{dx_j \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(dx_j \mathbf{e}_j)}{dx_j} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}. \quad (1.103)$$

Ne consegue:

$$(\text{grad } \mathbf{f})_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \text{grad } \mathbf{f} \mathbf{e}_j = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad (1.104)$$

dove f_x , f_y e f_z sono le componenti del campo vettoriale rispetto alla base ortonormale indotta dagli assi x , y e z . La forma matriciale della (1.104) risulta infine:

$$[\text{grad } \mathbf{f}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.105)$$

1.4 Direzioni principali di un tensore doppio (simmetrico)

Si consideri una generica direzione dello spazio. Tutti i vettori non nulli di tale direzione sono trasformati da un generico tensore doppio \mathbf{A} nel vettore nullo oppure in vettori aventi direzione comune, in generale diversa da quella di partenza:

$$\mathbf{A}(a\mathbf{v}) = a(\mathbf{A}\mathbf{v}), \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (1.106)$$

Ne risulta una corrispondenza tra direzioni dello spazio, in generale incompleta se ai vettori di qualche direzione corrisponde il vettore nullo. Una direzione che corrisponda a se stessa oppure tale che ai vettori della data direzione corrisponda il vettore nullo viene detta *direzione principale*⁶⁵ di \mathbf{A} . Inoltre, un asse di direzione principale viene detto *asse principale*.

1.4.1 Autovalori e autovettori

Se la direzione di un dato vettore \mathbf{v} è principale deve quindi esistere uno scalare λ tale che:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad (1.107)$$

relazione che può porsi nella forma del seguente problema lineare omogeneo nell'incognita \mathbf{v} e dipendente dal parametro scalare λ :

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (1.108)$$

Il problema della determinazione dei valori λ e \mathbf{v} che soddisfano la (1.107) oppure la (1.108) prende il nome di *problema agli autovalori e autovettori*⁶⁶ e si dice che \mathbf{v} e λ sono rispettivamente un *autovettore*⁶⁷ e un *autovalore* oppure un *valore principale*⁶⁸ del tensore doppio \mathbf{A} . Il problema (1.108) ammette senz'altro la soluzione nulla, priva però di significato non avendo nessuna direzione associata. Agli autovettori di \mathbf{A} si richiederà pertanto di non essere nulli. Inoltre l'insieme di tutti gli autovalori di un tensore doppio \mathbf{A} è detto *spettro*⁶⁹ di \mathbf{A} , mentre un autovettore che sia anche un versore

⁶⁵ *Principal direction* nella letteratura inglese.

⁶⁶ *Eigenvalue problem* nella letteratura inglese.

⁶⁷ *Eigenvector* oppure *characteristic vector* nella letteratura inglese.

⁶⁸ *Eigenvalues* oppure *characteristic value* nella letteratura inglese.

⁶⁹ *Spectrum* nella letteratura inglese.

viene detto *autoversore* di \mathbf{A} . È evidente che ad ogni direzione principale sono associati due autoversori di orientazione opposta.

Si noti che l'autovalore λ esprime l'eventuale variazione del modulo e del verso di un corrispondente autovettore \mathbf{v} sotto l'effetto dell'azione di \mathbf{A} . Moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} la relazione (1.107) e risolvendo in λ si ottiene l'autovalore nella forma:

$$\lambda = \mathbf{e}_v \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_v, \quad \mathbf{e}_v = \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}}, \quad (1.109)$$

dove \mathbf{e}_v è l'autoversore della direzione principale di \mathbf{v} , equiverso allo stesso autovettore \mathbf{v} .

1.4.2 Diagonalizzazione della matrice delle componenti

L'importanza delle direzioni principali di un tensore doppio risiede nel fatto che tali direzioni sono fondamentali per la definizione di una base ortonormale rispetto alla quale la matrice delle componenti risulti diagonale. Sia infatti dato un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Oxyz$ e si supponga che uno degli assi del sistema, per esempio z , sia principale. Detto λ_z l'autovalore associato alla direzione principale z e ricordando la (1.107) risulta allora:

$$A_{xz} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \cdot (\lambda_z \mathbf{e}_z) = 0, \quad (1.110)$$

$$A_{yz} = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_y \cdot (\lambda_z \mathbf{e}_z) = 0, \quad (1.111)$$

$$A_{zz} = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \cdot (\lambda_z \mathbf{e}_z) = \lambda_z, \quad (1.112)$$

e la matrice delle componenti diventa:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ A_{zx} & A_{zy} & \lambda_z \end{bmatrix}. \quad (1.113)$$

Vale anche l'inverso, ovvero sia che se nella data base ortonormale la rappresentazione del tensore doppio \mathbf{A} è fornita dalla (1.113), allora z è un asse principale e λ_z è l'autovalore associato. Infatti, da $\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = 0$ e $\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = 0$ risulta che $\mathbf{A}\mathbf{e}_z$ deve essere ortogonale sia a x che a y , ovvero sia deve avere la direzione di z . Assodato che l'asse z è principale, dalla (1.112) segue la coincidenza della componente A_{zz} con l'associato autovalore, come volevasi dimostrare.

Da quanto precede consegue che per diagonalizzare la matrice delle componenti di un tensore doppio occorre una base ortonormale di autovettori (una *base principale*), ovvero un sistema di coordinate cartesiano ortogonale composto da tre assi principali (un *sistema di coordinate principale*). In tal caso la rappresentazione di \mathbf{A} diventa:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}, \quad (1.114)$$

dove λ_x , λ_y e λ_z sono gli autovalori associati alle direzioni principali x , y e z rispettivamente.

Si mostrerà nel seguito che nel caso di un generico tensore doppio simmetrico esiste sempre almeno una base ortonormale principale. Per quel che riguarda i tensori non simmetrici questo invece non è mai vero, poiché la rappresentazione (1.114) implica che il tensore sia simmetrico.

1.4.3 Alcune proprietà delle direzioni principali

Proposizione 1. Autospatio associato ad un autovalore. *L'insieme degli autovettori corrispondenti ad un dato autovalore λ costituiscono un sottospazio di \mathcal{V} , detto autospatio⁷⁰ di \mathbf{A} .*

Dimostrazione. Infatti se \mathbf{u} e \mathbf{v} sono due autovettori corrispondenti a λ allora lo è anche una loro qualunque combinazione lineare:

$$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{u} + \beta\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha\lambda\mathbf{u} + \beta\lambda\mathbf{v} = \lambda(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Questo risultato è in accordo col fatto che tutti i vettori aventi una data direzione principale devono trasformarsi in vettori aventi ancora la stessa direzione. L'autospatio di \mathbf{A} associato ad un dato autovalore λ è una retta, un piano o l'intero spazio a seconda che a λ siano associati solo autovettori linearmente dipendenti, oppure almeno e non più di due autovettori linearmente indipendenti, o infine tre autovettori linearmente indipendenti.

⁷⁰Poiché il vettore nullo non fa parte degli autovettori di un dato tensore, oltre agli autovettori corrispondenti al dato autovalore l'autospatio deve contenere il vettore nullo. Autospatio si rende con *eigenspace* nella letteratura inglese.

Si noti che nel caso di autovalore nullo tutti i vettori dell'autospatio corrispondente vengono trasformati nel vettore nullo, a cui non è associata nessuna direzione dello spazio.

Proposizione 2. Autovalori e autovettori del tensore inverso. *Se esiste il tensore \mathbf{A}^{-1} inverso di un dato tensore \mathbf{A} , allora gli autovalori di \mathbf{A} sono tutti diversi dallo zero e il tensore inverso \mathbf{A}^{-1} ha gli stessi autovettori e gli autovalori reciproci di quelli di \mathbf{A} .*

Dimostrazione. Moltiplicando la definizione (1.107) di autovettori e autovalori per l'inverso \mathbf{A}^{-1} del tensore \mathbf{A} si ottiene:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v},$$

e quindi:

$$\mathbf{v} = \lambda\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v}.$$

Poiché \mathbf{v} deve essere diverso da zero, tale relazione implica che sia $\lambda \neq 0$, per cui si ottiene infine

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{v} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{v},$$

come volevasi dimostrare. ■

Proposizione 3 (tensori simmetrici). Sottospazio ortogonale ad una direzione principale. *I vettori ortogonali ad una direzione principale di un tensore doppio simmetrico si trasformano in vettori ancora ortogonali alla data direzione principale.*

In altri termini i vettori del piano (sottospazio) ortogonale alla direzione principale data sono trasformati in vettori ancora appartenenti al piano (sottospazio) ortogonale. Ne risulta quindi che la restrizione a un tale piano di un tensore doppio simmetrico spaziale (tridimensionale) risulta essere un tensore doppio simmetrico piano (bidimensionale).

Dimostrazione. Infatti se \mathbf{u} è un qualunque vettore ortogonale ad una direzione principale \mathbf{v} di un tensore doppio simmetrico \mathbf{A} risulta:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = 0,$$

come volevasi dimostrare. ■

Proposizione 4 (tensori simmetrici). Proprietà di ortogonalità delle direzioni principali. Due autovettori associati a due autovalori distinti di un tensore doppio simmetrico sono ortogonali fra loro.

Dimostrazione. Infatti, siano \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 due autovettori associati a due autovalori distinti, λ_1 e λ_2 rispettivamente, di un tensore doppio simmetrico \mathbf{A} , quindi soddisfacenti le condizioni:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2.$$

Per l'ipotesi di simmetria di \mathbf{A} risulta:

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_2) = (\mathbf{A}\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2,$$

e quindi:

$$\lambda_2(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = \lambda_1(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2),$$

e infine:

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 0.$$

Poiché per ipotesi $\lambda_2 \neq \lambda_1$ ne consegue $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$ come volevasi dimostrare. ■

1.4.4 Caso piano

Per l'importanza che riveste il caso piano sia nello studio di quello spaziale che di per se stesso, lo si affronterà nel seguito in forma diretta piuttosto che ottenerlo come caso particolare di quello spaziale. A tale proposito si ricordi che ad ogni direzione principale di un tensore doppio spaziale corrisponde un tensore piano.⁷¹

Equazione caratteristica

In componenti in un sistema di coordinate cartesiano ortogonale Oxy la relazione (1.108) rappresenta un sistema omogeneo di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.115)$$

⁷¹Cfr. la proposizione 3, nella pagina precedente.

Tale sistema ammette soluzioni $\{\mathbf{v}\} \neq 0$ se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo. Si ottiene così l'equazione determinatrice degli autovalori, detta *equazione caratteristica*.⁷²

$$\det \begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.116)$$

Se nel sistema (1.115) si sostituisce in luogo di λ una qualunque soluzione dell'equazione caratteristica, si ottengono almeno ∞^1 soluzioni, in accordo col fatto che l'insieme degli autovettori definisce un sottospazio di \mathcal{V} .⁷³ Sviluppando la (1.116) si ottiene la seguente equazione di secondo grado:

$$\lambda^2 - (A_{xx} + A_{yy})\lambda + (A_{xx}A_{yy} - A_{xy}A_{yx}) = 0. \quad (1.117)$$

L'equazione caratteristica ammette quindi in generale due radici reali eventualmente coincidenti, oppure due radici complesse coniugate. Se però il tensore doppio \mathbf{A} è simmetrico, la condizione $A_{xy} = A_{yx}$ di simmetria assicura l'esistenza di due soluzioni reali λ_ξ e λ_η :

$$\lambda_{\xi,\eta} = \frac{A_{xx} + A_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A_{xx} - A_{yy}}{2}\right)^2 + (A_{xy})^2}, \quad (1.118)$$

dato che il termine sotto il segno di radice quadrata è sempre non negativo, essendo somma di due quadrati.

Si noti che la (1.118) ammette una radice doppia λ se e solo se:

$$A_{xx} = A_{yy} = \lambda, \quad A_{xy} = 0. \quad (1.119)$$

Se questo è il caso risulta:

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}, \quad (1.120)$$

dove \mathbf{I} è il tensore identità. Ne consegue che tutti i vettori del piano sono autovettori associati all'unica radice doppia λ . Se invece le radici λ_ξ e λ_η sono distinte, la proprietà di ortogonalità delle direzioni principali implica che esistono due sole direzioni principali ξ e η ortogonali tra loro.⁷⁴ È quindi sempre possibile scegliere un sistema di coordinate cartesiano ortogonale principale $O\xi\eta$ a cui corrisponde la seguente rappresentazione principale:⁷⁵

⁷²Characteristic equation nella letteratura inglese.

⁷³Cfr. la proposizione 1, nella pagina a fronte.

⁷⁴Cfr. la proposizione 4, in questa pagina.

⁷⁵Cfr. il par. 1.4.2, p. 31.

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 \\ 0 & \lambda_\eta \end{bmatrix}, \quad (1.121)$$

dove è sottinteso che gli assi principali ξ e η corrispondono ai valori principali λ_ξ e λ_η rispettivamente.

Calcolo delle direzioni principali

Dato un sistema di coordinate cartesiano ortogonale Oxy , le componenti A_{xx} , A_{yy} e A_{xy} determinano in modo completo un generico tensore doppio simmetrico \mathbf{A} . Se tali componenti soddisfano la (1.119), come già detto risulta $\lambda_\xi = \lambda_\eta = \lambda$ e tutte le direzioni del piano sono principali. Se invece $A_{xy} = 0$ e $A_{xx} \neq A_{yy}$ la matrice delle componenti è diagonale, gli assi x e y sono principali e A_{xx} e A_{yy} sono i corrispondenti autovalori.⁷⁶ Poiché per ipotesi gli autovalori sono distinti non vi sono altre direzioni principali all'infuori di quelle degli assi x e y .

Resta quindi da analizzare il solo caso $A_{xy} \neq 0$. Poiché gli autovalori λ_ξ e λ_η non possono che essere distinti, ad ognuno di tali valori corrisponde una e una sola direzione principale. Sia allora α_ξ l'angolo che individua, rispetto all'asse x , la direzione principale ξ associata all'autovalore λ_ξ . Poiché il vettore di componenti $\begin{bmatrix} 1 & \tan \alpha_\xi \end{bmatrix}^T$ è un autovettore corrispondente a λ_ξ (fig. 1.7), deve aversi:

$$\begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda_\xi & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} - \lambda_\xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \alpha_\xi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.122)$$

Dato che il determinante dei coefficienti è nullo, si ottengono quindi due equazioni linearmente dipendenti, dalla prima delle quali si deduce:

$$\tan \alpha_\xi = \frac{\lambda_\xi - A_{xx}}{A_{xy}}. \quad (1.123)$$

Allo stesso modo può poi ottenersi la direzione principale η associata al valore principale λ_η :

$$\tan \alpha_\eta = \frac{\lambda_\eta - A_{xx}}{A_{xy}}, \quad (1.124)$$

dove α_η è l'angolo che individua, rispetto all'asse x , la direzione principale η . Si noti che poiché ξ e η sono ortogonali determinare una direzione

⁷⁶Cfr. ancora il par. 1.4.2, p. 31.

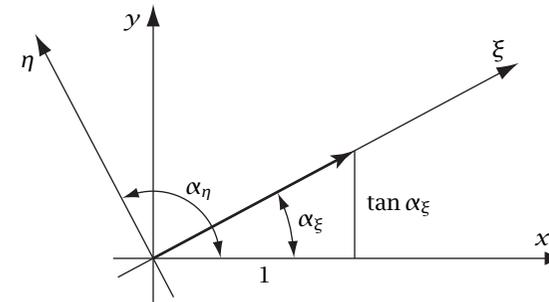


Figura 1.7: Calcolo di una direzione principale

principale significa determinarle entrambe. Si noti inoltre che le soluzioni delle equazioni trigonometriche (1.123) e (1.124) sono date a meno di multipli di un angolo piatto, per cui ognuna di tali equazioni determina una sola direzione nel piano, la direzione associata al dato autovalore. Se per ottenere una delle infinite soluzioni della (1.123) si utilizza la funzione *arcotangente*⁷⁷ si ottiene un angolo compreso tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$:

$$\alpha_\xi = \arctan \frac{\lambda_\xi - A_{xx}}{A_{xy}}. \quad (1.125)$$

1.4.5 Caso spaziale

Alcuni sviluppi del caso spaziale riportati nel seguito sono analoghi a quelli del caso piano mentre altri tengono conto di quanto già dedotto in quel caso.

Equazione caratteristica

In componenti in un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Oxyz$ la relazione (1.108) definente il problema degli autovalori e autovettori

⁷⁷Coerentemente con il fatto che le funzioni *seno*, *coseno* e *tangente* non sono invertibili si eviterà, ora e nel seguito, di utilizzare i simboli \sin^{-1} , \cos^{-1} e \tan^{-1} di funzione inversa in favore di quelli *arcsin*, *arccos* e *arctan* delle funzioni *arcoseno*, *arcoseno* e *arcotangente*, inverse delle restrizioni della funzione seno all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$, della funzione coseno all'intervallo $[0, \pi]$ e della funzione tangente all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$.

rappresenta un sistema omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} - \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (1.126)$$

Come già visto nel caso piano, tale sistema ammette soluzioni $\{\mathbf{v}\} \neq 0$ se e solo se il determinante dei coefficienti è nullo. Si ottiene così l'*equazione caratteristica* del caso spaziale, determinatrice degli autovalori:

$$\det \begin{bmatrix} A_{xx} - \lambda & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} - \lambda & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (1.127)$$

Sostituendo una qualunque soluzione dell'equazione caratteristica nella (1.126) si ottengono almeno ∞^1 soluzioni, in accordo col fatto che l'insieme degli autovettori associati ad un dato autovalore definisce un sottospazio di \mathcal{V} .⁷⁸ Sviluppando l'equazione caratteristica (1.127) si ottiene un'equazione di terzo grado in λ :

$$\lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III} = 0, \quad (1.128)$$

i cui coefficienti valgono:

$$A_I = \text{tr}[\mathbf{A}] = \sum_i A_{ii} = A_{xx} + A_{yy} + A_{zz}, \quad (1.129a)$$

$$A_{II} = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{yx} & A_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xz} \\ A_{zx} & A_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zy} & A_{zz} \end{vmatrix}, \quad (1.129b)$$

$$A_{III} = \det[\mathbf{A}], \quad (1.129c)$$

dove il simbolo "tr" indica la *traccia* di una matrice quadrata, ovvero sia la somma degli elementi diagonali della stessa matrice. Ne consegue che il primo e il terzo coefficiente dell'equazione caratteristica coincidono rispettivamente con la traccia e il determinante della matrice delle componenti di \mathbf{A} , mentre il secondo coefficiente si ottiene come somma dei determinanti dei minori principali del secondo ordine della matrice delle componenti di \mathbf{A} . A tale proposito si noti che anche il primo e il terzo coefficiente sono somma di minori principali, del primo e del terzo ordine rispettivamente.

⁷⁸Cfr. la proposizione 1, p. 32.

Invarianti

Gli autovalori λ di un tensore doppio \mathbf{A} sono soluzioni di un problema, quello definito dalla (1.108), indipendente dalle componenti dello stesso tensore utilizzate per ricavare i coefficienti (1.129) dell'equazione caratteristica. Ne consegue che anche tali coefficienti sono indipendenti dalle dette componenti e per tale motivo sono noti come *invarianti* di \mathbf{A} . Più precisamente A_I , A_{II} e A_{III} sono detti rispettivamente *primo invariante* o *invariante lineare*, *secondo invariante* o *invariante quadratico* e infine *terzo invariante* o *invariante cubico*, avendo tenuto conto del loro ordine nell'equazione caratteristica e del fatto che siano somma di componenti di \mathbf{A} , di prodotti di due componenti di \mathbf{A} o di prodotti di tre componenti di \mathbf{A} .

Traccia e determinante di un tensore doppio. L'invarianza dei coefficienti A_I e A_{III} dell'equazione caratteristica (1.128) permettono di definire la *traccia* e il *determinante* di un tensore doppio \mathbf{A} quali traccia e determinante della matrice delle sue componenti, non importa rispetto a quale base ortonormale siano calcolate:

$$\text{tr} \mathbf{A} = \text{tr}[\mathbf{A}], \quad \det \mathbf{A} = \det[\mathbf{A}]. \quad (1.130)$$

Poiché la traccia di una matrice quadrata è un operatore lineare, tale risulta la traccia di un tensore doppio:

$$\text{tr}(a\mathbf{A} + b\mathbf{B}) = a \text{tr} \mathbf{A} + b \text{tr} \mathbf{B}, \quad (1.131)$$

per ogni numero reale a e b e per ogni tensore \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Tensori sferici e deviatorici. Un tensore \mathbf{A} viene detto *sferico* oppure *isotropo*⁷⁹ se è proporzionale al tensore identità, viene invece detto *deviatorico*⁸⁰ se la sua traccia è nulla:

$$\mathbf{A} = a \mathbf{I} \quad (\mathbf{A} \text{ è un tensore sferico}), \quad (1.132a)$$

$$\text{tr} \mathbf{A} = 0 \quad (\mathbf{A} \text{ è un tensore deviatorico}). \quad (1.132b)$$

Un generico tensore \mathbf{A} può essere decomposto in modo univoco nella somma di una parte sferica \mathbf{A}_{sph} e di una parte deviatorica \mathbf{A}_{dev} :

$$\mathbf{A}_{\text{sph}} = \frac{1}{3}(\text{tr} \mathbf{A}) \mathbf{I}, \quad (1.133a)$$

⁷⁹Spherical tensor oppure isotropic tensor nella letteratura inglese.

⁸⁰Deviatoric tensor nella letteratura inglese.

$$\mathbf{A}_{\text{dev}} = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\text{tr } \mathbf{A}) \mathbf{I}, \quad (1.133b)$$

come è facile verificare tenendo conto della linearità della traccia e che $\text{tr } \mathbf{I} = 3$.

Prodotto scalare di due tensori doppi. La definizione (1.130) di traccia di un tensore doppio permette di generalizzare la definizione di prodotto scalare di due vettori ordinari al caso di due tensori doppi. Infatti si ricordi a tale proposito che il prodotto scalare di due vettori ordinari può calcolarsi sommando tutti i prodotti delle componenti omologhe dei due vettori, come espresso dalla (1.48a). L'analoga somma di tutti i prodotti delle componenti omologhe di due tensori doppi \mathbf{A} e \mathbf{B} risulta:

$$\sum_{ij} A_{ij} B_{ij} = \sum_i \left(\sum_j A_{ij} B_{ji}^T \right) = \sum_i (\mathbf{A} \mathbf{B}^T)_{ii} = \text{tr} (\mathbf{A} \mathbf{B}^T). \quad (1.134)$$

Essendo la traccia un invariante, la somma (1.134) non dipende dalle componenti dei due tensori doppi. È allora possibile definire il *prodotto scalare* di due tensori doppi \mathbf{A} e \mathbf{B} nel modo seguente:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{tr} (\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \sum_{ij} A_{ij} B_{ij}, \quad (1.135)$$

definizione che generalizza, come detto, quella di due vettori ordinari.

Si può facilmente dimostrare che il prodotto scalare di due tensori soddisfa le proprietà analoghe di quelle (1.34) che valgono per il prodotto scalare di due vettori ordinari. Ne consegue che l'insieme dei tensori doppi rappresenta un altro caso particolare di spazio con prodotto interno.

Con riguardo ai tensori simmetrici ed emisimmetrici, a quelli sferici e deviatorici ed infine al prodotto tensoriale di due vettori, il prodotto scalare di due tensori soddisfa le tre seguenti fondamentali proprietà:

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad (1.136)$$

per ogni tensore doppio simmetrico \mathbf{S} , per ogni tensore doppio emisimmetrico \mathbf{W} , per ogni tensore doppio \mathbf{A} e per ogni vettore \mathbf{a} e \mathbf{b} . Si noti che le prime due delle (1.136) affermano che i tensori simmetrici ed emisimmetrici e, rispettivamente, quelli sferici e deviatorici sono ortogonali fra loro. La terza delle (1.136) afferma invece che le componenti di \mathbf{A} si ottengono moltiplicando scalarmente per la base:

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (1.137)$$

il che dimostra l'ortonormalità della base $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ di tensori doppi.

Soluzioni dell'equazione caratteristica

L'equazione caratteristica (1.128) è di terzo grado e quindi ammette in generale almeno una radice reale alla quale resta associata almeno una direzione principale. Se il dato tensore \mathbf{A} è simmetrico, si consideri allora la sua restrizione al piano (sottospazio) ortogonale a tale direzione principale.⁸¹ La simmetria di \mathbf{A} implica che l'equazione caratteristica associata al problema piano ammette in generale due radici reali, eventualmente coincidenti.⁸² Ne consegue allora che l'equazione caratteristica associata ad un tensore doppio spaziale simmetrico ammette solo radici reali. Analizziamo nel seguito tutti i possibili tipi di soluzioni dell'equazione caratteristica (1.128) che si possono presentare nel caso di un tensore doppio spaziale simmetrico \mathbf{A} .

Tre autovalori distinti. Ai tre autovalori distinti λ_ξ , λ_η e λ_ζ di \mathbf{A} sono associate, in virtù della proprietà di ortogonalità,⁸³ tre direzioni principali ξ , η e ζ ortogonali tra loro ed univocamente determinate. Esiste quindi uno, ed un solo, *sistema principale* cartesiano ortogonale, avente tutti e tre gli assi coordinati principali. La rappresentazione algebrica di \mathbf{A} nel riferimento principale $O\xi\eta\zeta$, in virtù della rappresentazione (1.114), risulta:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\zeta \end{bmatrix}, \quad (1.138a)$$

$$\mathbf{A} = \lambda_\xi (\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) + \lambda_\eta (\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta) + \lambda_\zeta (\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta). \quad (1.138b)$$

Un autovalore semplice e un autovalore doppio. Sia ξ un'asse principale associato alla radice semplice λ_ξ . Allora al problema piano definito nel piano ortogonale a ξ deve corrispondere l'autovalore doppio λ_η e questo è possibile se e solo se tutte le direzioni del piano ortogonale a ξ sono principali.⁸⁴ Inoltre, ogni direzione principale associata a λ_ξ deve essere ortogonale a tutte le direzioni principali associate a λ_η , essendo per ipotesi $\lambda_\xi \neq \lambda_\eta$. Ne consegue che la direzione ξ è univocamente determinata. In

⁸¹cfr. la proposizione 3, p. 32.

⁸²cfr. il par. 1.4.4, p. 33.

⁸³cfr. la proposizione 4, pagina 33.

⁸⁴cfr. il par. 1.4.4, p. 34.

un qualunque sistema di coordinate cartesiano ortogonale avente ξ quale primo asse la rappresentazione di \mathbf{A} risulta quindi:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\eta \end{bmatrix}. \quad (1.139)$$

Un autovalore triplo. Se ξ è un'asse principale associato alla radice tripla λ_ξ , ragionando come nel caso precedente si deduce che tutte le direzioni del piano ortogonale a ξ sono principali e che in un qualunque sistema di coordinate cartesiano ortogonale avente ξ quale primo asse la rappresentazione di \mathbf{A} risulta essere proporzionale alla matrice identità:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\xi & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\xi \end{bmatrix} = \lambda_\xi [\mathbf{I}]. \quad (1.140)$$

Ne consegue allora che il tensore \mathbf{A} è sferico, essendo proporzionale al tensore identità:

$$\mathbf{A} = \lambda_\xi \mathbf{I}, \quad (1.141)$$

che tutte le direzioni dello spazio sono principali e che infine la rappresentazione (1.140) vale in un qualunque sistema di coordinate cartesiano ortogonale.

Esistenza di un sistema di riferimento principale. Quanto precede dimostra tra l'altro che un tensore doppio \mathbf{A} simmetrico possiede sempre tre direzioni principali ortogonali tra loro. È dunque possibile scegliere un *sistema principale* cartesiano ortogonale $O\xi\eta\zeta$ nel quale il tensore si rappresenta nella forma (1.138). Resta inteso che il sistema principale varia al variare del tensore simmetrico considerato. Inoltre, tale sistema è unico se e solo se i tre autovalori sono tutti distinti.

Dato che in tale sistema di riferimento la rappresentazione algebrica di \mathbf{A} è nella forma (1.138), gli invarianti (1.129) di \mathbf{A} possono essere dati in funzione dei suoi valori caratteristici:

$$\text{tr } \mathbf{A} = \lambda_\xi + \lambda_\eta + \lambda_\zeta, \quad (1.142a)$$

$$A_{II} = \lambda_\zeta \lambda_\eta + \lambda_\xi \lambda_\zeta + \lambda_\eta \lambda_\xi, \quad (1.142b)$$

$$\det \mathbf{A} = \lambda_\xi \lambda_\eta \lambda_\zeta. \quad (1.142c)$$

Si noti che i valori caratteristici λ_ξ , λ_η e λ_ζ sono le radici dell'equazione caratteristica (1.128) che, come noto dall'algebra, può scriversi nella seguente forma equivalente:

$$(\lambda - \lambda_\xi)(\lambda - \lambda_\eta)(\lambda - \lambda_\zeta) = 0. \quad (1.143)$$

Ne risulta che le (1.142) valgono anche nel caso più generale di tensore non simmetrico in cui innanzitutto due delle radici dell'equazione caratteristica potrebbero essere complesse coniugate ed inoltre anche se tutte le radici fossero reali non esisterebbe comunque una base principale ortonormale di versori, perchè se così fosse il tensore dovrebbe essere obbligatoriamente simmetrico. Poiché il prodotto di un numero complesso α per il suo complesso coniugato $\bar{\alpha}$ uguaglia il quadrato $|\alpha|^2$ del modulo dello stesso numero complesso, se l'equazione caratteristica ammette una radice reale λ e due radici α e $\bar{\alpha}$ complesse coniugate allora per la (1.142c) risulta:

$$\det \mathbf{A} = \lambda |\alpha|^2, \quad (1.144)$$

e il determinante di \mathbf{A} ha lo stesso segno dell'unica radice reale.

◇ ◇ ◇

Autovalori di una matrice reale simmetrica di dimensione generica. In quanto precede si è mostrato che un tensore doppio spaziale simmetrico ammette solo autovalori reali, basandosi sull'analogo risultato valido per i tensori doppi piani simmetrici. Questi risultati sono stati ottenuti trasformando i rispettivi problemi agli autovalori e autovettori negli equivalenti problemi algebrici facendo riferimento alle matrici delle componenti, di dimensione 2×2 nel caso piano e 3×3 in quello spaziale.

Si vuole ora mostrare che tale risultato è generale, ovvero che *gli autovalori di una matrice reale simmetrica di dimensione generica sono tutti reali*.

Dimostrazione. A tale scopo sia \mathbf{A} una matrice reale simmetrica di dimensione $n \times n$ e di equazione caratteristica:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0, \quad (1.145)$$

dove \mathbf{I} è la matrice identità di ordine $n \times n$. Procedendo per assurdo, si supponga che l'equazione caratteristica (1.145) ammetta una radice complessa λ . A tale autovalore corrisponde in generale un autovettore complesso \mathbf{v} di dimensione n soluzione del seguente sistema di n equazioni in n incognite:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0, \quad (1.146)$$

dove 0 è il vettore colonna nullo di dimensione n . Per quanto detto devono esistere due numeri reali λ_1 e λ_2 , il secondo dei quali non nullo, e due vettori colonna reali v_1 e v_2 di dimensione n , non entrambi nulli, tali che:

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \quad v = v_1 + iv_2, \quad (1.147)$$

dove i è l'unità immaginaria. Sviluppando la (1.146) tenendo conto delle (1.147) ed uguagliando le parti reali ed immaginarie si ottiene:

$$Av_1 = \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, \quad Av_2 = \lambda_1 v_2 + \lambda_2 v_1. \quad (1.148)$$

Sottraendo la prima delle (1.148), premoltiplicata per il vettore v_2 trasposto, dalla seconda delle (1.148), premoltiplicata per il vettore v_1 trasposto, si perviene poi alla relazione:

$$v_1^T Av_2 - v_2^T Av_1 = \lambda_1 (v_1^T v_2 - v_2^T v_1) + \lambda_2 (v_1^T v_1 + v_2^T v_2). \quad (1.149)$$

Per la simmetria di A il primo membro della (1.149) è nullo. Tenendo poi conto che il coefficiente di λ_1 nella (1.149) è nullo, si ottiene infine:

$$\lambda_2 (v_1^T v_1 + v_2^T v_2) = 0, \quad (1.150)$$

relazione che può essere soddisfatta se e solo se $\lambda_2 = 0$ oppure $v_1 = v_2 = 0$, contrariamente all'ipotesi, come volevasi dimostrare. ■

◇ ◇ ◇

1.4.6 Tensori simmetrici definiti positivi

Un tensore doppio simmetrico A è detto *definito positivo*⁸⁵ se:

$$v \cdot Av \geq 0 \quad \text{e} \quad v \cdot Av = 0 \Leftrightarrow v = 0, \quad (1.151)$$

per ogni vettore v . Ne risulta che la forma quadratica⁸⁶ associata al tensore doppio A :

$$f: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f(v) = v \cdot Av, \quad (1.152)$$

è definita positiva.

⁸⁵Positive definite nella letteratura inglese.

⁸⁶Sul concetto di forma quadratica si veda per esempio Lipschutz (1975, cap. 12). Cfr. anche la nota 56, p. 26. In inglese il termine forma quadratica si rende con *quadratic form*.

Caratterizzazione dei tensori simmetrici definiti positivi. *Un tensore doppio simmetrico è definito positivo se e solo se i suoi autovalori sono positivi.*

Nel sistema di riferimento principale il tensore A si rappresenta conseguentemente nella forma (1.138), ma con la precisazione che gli autovalori siano positivi:

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_\zeta \end{bmatrix}, \quad \text{con } \lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta > 0. \quad (1.153)$$

Dimostrazione. Infatti, detti λ_ξ , λ_η e λ_ζ i valori principali di A , la (1.151) è equivalente a richiedere:

$$\lambda_\xi v_\xi^2 + \lambda_\eta v_\eta^2 + \lambda_\zeta v_\zeta^2 \geq 0, \quad (1.154)$$

e:

$$\lambda_\xi v_\xi^2 + \lambda_\eta v_\eta^2 + \lambda_\zeta v_\zeta^2 = 0 \Leftrightarrow v_\xi = 0, v_\eta = 0, v_\zeta = 0, \quad (1.155)$$

dove v_ξ , v_η e v_ζ sono numeri reali generici poiché tali sono le componenti nel sistema principale di A di un generico vettore v . La (1.154) è equivalente a che λ_ξ , λ_η e λ_ζ siano non negativi, mentre la (1.155) esclude che uno qualunque dei valori principali possa essere nullo, come volevasi dimostrare. ■

◇ ◇ ◇

Radice quadrata di un tensore doppio simmetrico definito positivo. *Se A è un tensore doppio simmetrico definito positivo allora esiste uno e un solo tensore doppio simmetrico definito positivo B tale che:*

$$B^2 = BB = A. \quad (1.156)$$

Si pone per definizione:

$$B = \sqrt{A}. \quad (1.157)$$

Dimostrazione. Si supponga innanzitutto che \sqrt{A} esista e che λ sia un valore principale di \sqrt{A} di corrispondente autovettore v . Si ha allora:

$$Av = \sqrt{A}\sqrt{A}v = \lambda^2 v.$$

Ne discende quindi che \sqrt{A} ha le stesse direzioni principali di A , che i suoi autovalori sono le radici quadrate positive degli autovalori di A e che nel sistema

principale di \mathbf{A} , in cui \mathbf{A} stesso si rappresenta tramite la (1.153), $\sqrt{\mathbf{A}}$ si rappresenta nella forma:

$$[\sqrt{\mathbf{A}}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_\zeta} \end{bmatrix}, \quad (1.158)$$

e quindi è unico. D'altronde se $\sqrt{\mathbf{A}}$ si definisce, nel sistema principale di \mathbf{A} , tramite la rappresentazione (1.158) allora la rappresentazione di $(\sqrt{\mathbf{A}})^2$ coincide con quella (1.153) di \mathbf{A} nello stesso sistema e vale la (1.156), come volevasi dimostrare. ■

◇ ◇ ◇

1.5 Tensori ortogonali e tensori rotazione

I tensori doppi descritti nel seguito hanno il preciso scopo di fornire uno strumento utilizzabile sia per lo studio delle trasformazioni rigide, e quindi del moto rigido, che per la deduzione delle formule di trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio al variare del sistema di riferimento cartesiano ortogonale e quindi della relativa base ortonormale.

1.5.1 Tensori ortogonali

La proprietà fondamentale che assicura l'esistenza di tali strumenti è la circostanza che una qualunque trasformazione $\mathbf{Q}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ che lascia invariati i moduli dei vettori e gli angoli tra vettori è omogenea di grado uno ed additiva, come potrebbe essere dimostrato basandosi sulla fig. 1.8. Ne consegue che \mathbf{Q} è un tensore doppio, detto *tensore ortogonale*.⁸⁷ È evidente che, lasciando invariati i moduli dei vettori e gli angoli tra vettori, un tensore ortogonale lascia anche invariato il prodotto scalare di due generici vettori e viceversa:

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (1.159)$$

Utilizzando le definizioni di tensore trasposto (1.68) e di tensore identità (1.67b) dalla (1.159) consegue che:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (1.160)$$

⁸⁷ *orthogonal tensor* nella letteratura inglese.

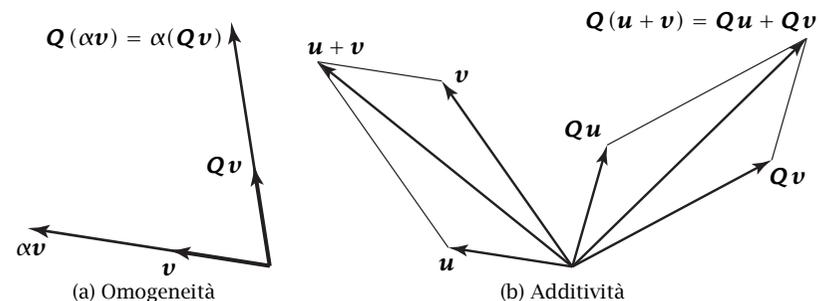


Figura 1.8: Tensori ortogonali

e quindi:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} = \mathbf{I}. \quad (1.161)$$

Le proprietà del determinante di un tensore doppio⁸⁸ permettono di scrivere $(\det \mathbf{Q})^2 = 1$ e quindi:

$$\det \mathbf{Q} = \pm 1. \quad (1.162)$$

La (1.162) implica $\det \mathbf{Q} \neq 0$ per cui un qualunque tensore ortogonale \mathbf{Q} è invertibile. La relazione (1.161) afferma allora che il tensore \mathbf{Q}^{-1} inverso di \mathbf{Q} coincide con il tensore trasposto di questi:

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T. \quad (1.163)$$

Da quest'ultima relazione consegue tra l'altro che:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{I}\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.164)$$

e che quindi anche \mathbf{Q}^T è ortogonale.

1.5.2 Tensori rotazione

Si noti ora che il prodotto vettoriale dei trasformati di due generici vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} tramite un generico tensore ortogonale \mathbf{Q} soddisfa la

⁸⁸In particolare, un tensore e il suo trasposto hanno identico determinante mentre il determinante del prodotto di due tensori uguaglia il prodotto dei determinanti dei singoli tensori, proprietà che si possono dedurre utilizzando le rappresentazioni algebriche di tali relazioni e le analoghe proprietà delle matrici quadrate, per le quali si veda per esempio Lipschutz (1975, p. 173-174).

proprietà:

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} \times \mathbf{Q}\mathbf{v} = \pm \mathbf{Q}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \quad (1.165)$$

Infatti $\mathbf{Q}\mathbf{u} \times \mathbf{Q}\mathbf{v}$ è per definizione ortogonale ai vettori $\mathbf{Q}\mathbf{u}$ e $\mathbf{Q}\mathbf{v}$ mentre $\mathbf{Q}(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ lo è perchè \mathbf{Q} preserva gli angoli e quindi i due vettori oggetto dell'uguaglianza (1.165) hanno la stessa direzione. La preservazione di moduli e angoli implica inoltre che tali vettori abbiano lo stesso modulo, ma non che obbligatoriamente abbiano lo stesso verso.

Un tensore ortogonale \mathbf{R} che invece soddisfi l'uguaglianza (1.165) con il segno positivo viene detto *tensore rotazione*:⁸⁹

$$\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}). \quad (1.166)$$

Tre vettori non complanari vengono quindi trasformati da un tensore rotazione in tre vettori ancora non complanari e che hanno tra loro lo stesso ordine. In altri termini, se per esempio i tre vettori sono destri in un dato ordine restano destri se presi nello stesso ordine e l'orientazione dello spazio \mathcal{V} dei vettori resta invariato.⁹⁰

La proprietà (1.166), distintiva dei tensori rotazione nei riguardi dei tensori ortogonali, è equivalente alla condizione:

$$\det \mathbf{R} = 1. \quad (1.167)$$

Dimostrazione. Infatti:

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{R}] &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} R_{ix} R_{jy} R_{kz} && \text{per la (1.40)} \\ &= \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} (\mathbf{R}\mathbf{e}_x)_i (\mathbf{R}\mathbf{e}_y)_j (\mathbf{R}\mathbf{e}_z)_k && \text{per la (1.80)} \\ &= (\mathbf{R}\mathbf{e}_x \times \mathbf{R}\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_z && \text{per la (1.50)} \\ &= \mathbf{R}(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_z && \text{per la (1.166)} \\ &= (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{e}_z && \text{per la (1.159)} \\ &= \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z = 1, \end{aligned}$$

⁸⁹Il nome di questo tipo di tensori è dovuto al fatto che sono in grado di rappresentare quelle particolari trasformazioni rigide che sono chiamate rotazioni, il che poi giustifica la terminologia comunemente utilizzata per indicare la corrispondenza tra un vettore \mathbf{v} e la sua immagine $\mathbf{R}\mathbf{v}$ tramite \mathbf{R} . Tensore rotazione si rende in inglese con il termine *rotation tensor*.

⁹⁰Infatti se tre vettori \mathbf{u}, \mathbf{v} e \mathbf{w} sono destri in quest'ordine deve risultare $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} > 0$. Ma se così è, dalla (1.166) risulta anche $(\mathbf{R}\mathbf{u} \times \mathbf{R}\mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{R}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{R}\mathbf{w} > 0$ per via della conservazione del prodotto scalare.

come volevasi dimostrare. ■

Poiché $\det \mathbf{R}^T = \det \mathbf{R} = 1$, ne consegue che anche il trasposto \mathbf{R}^T di un tensore rotazione \mathbf{R} è un tensore rotazione.

1.5.3 Vettori rotazione

Per analizzare il modo di agire di un tensore rotazione occorre innanzitutto stabilire se abbia delle direzioni principali e in tal caso quali siano i corrispondenti valori principali. La sua equazione caratteristica, analogamente ad un qualunque tensore del secondo ordine spaziale anche non simmetrico, ha almeno una radice reale. Se anche gli altri due valori principali fossero reali, almeno uno tra i tre valori principali deve obbligatoriamente essere positivo poiché il loro prodotto, come stabilito dalla (1.142c), uguaglia il determinante di \mathbf{R} che per la (1.167) deve essere positivo. Nel caso in cui gli altri due valori principali siano invece complessi coniugati, ancora per lo stesso motivo l'unico valore reale deve essere positivo per via della (1.144). Ne consegue che un qualunque tensore rotazione ha almeno una direzione principale di rotazione ζ , corrispondente di un valore principale λ_ζ reale e positivo che, per l'invarianza dei moduli dei vettori, deve coincidere con il numero uno:

$$\lambda_\zeta = 1. \quad (1.168)$$

Si noti ora che, per la conservazione degli angoli, un vettore \mathbf{v} ortogonale alla direzione principale ζ viene trasformato in un vettore ancora ortogonale a ζ .⁹¹ Inoltre detto \mathbf{e}_ζ un autoversore di direzione ζ e presi due vettori \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 nel piano ortogonale a ζ , l'ordine dei tre vettori \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{e}_ζ , per via della conservazione dell'ordine, è lo stesso dei loro trasformati $\mathbf{R}\mathbf{v}_1$, $\mathbf{R}\mathbf{v}_2$ e \mathbf{e}_ζ . Da questa circostanza e dalla conservazione degli angoli si implica che la coordinata angolare φ che individua il vettore $\mathbf{R}\mathbf{v}_1$ rispetto a \mathbf{v}_1 , che ora e nel seguito sarà presa positiva se concorde alla orientazione di \mathbf{e}_ζ , individua anche il vettore $\mathbf{R}\mathbf{v}_2$ rispetto a \mathbf{v}_2 . Data l'arbitrarietà di \mathbf{v}_1 e di \mathbf{v}_2 , ne consegue che la coordinata angolare φ che individua il vettore $\mathbf{R}\mathbf{v}$ trasformato di un generico vettore \mathbf{v} rispetto allo stesso vettore \mathbf{v} è invariante.

⁹¹Si noti che tale proprietà di ortogonalità è quella stessa che vale per i tensori simmetrici (cfr. la proposizione 3, p. 32). Si ha una conferma di tale proprietà dal fatto che per la (1.163) e per la proposizione 2, p. 32, dalla $\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$ si ottiene $\mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{v} = \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{v} = 0$.

riante su tutti i vettori ortogonali a ζ . La coordinata angolare φ è detta *angolo di rotazione* o *ampiezza della rotazione* (fig. 1.9).⁹²

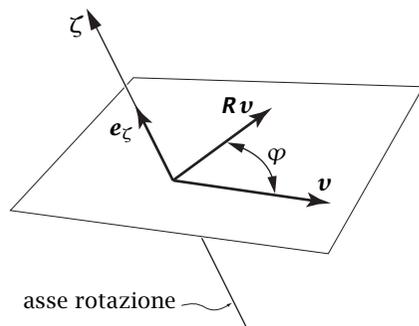


Figura 1.9: Ampiezza della rotazione

Si tenga ora conto che un qualunque vettore può essere decomposto nella somma di due vettori, l'uno avente la direzione principale ζ , che resta invariato sotto l'azione di \mathbf{R} , e l'altro di direzione ortogonale, che invece ruota di φ attorno a ζ per effetto di \mathbf{R} . Si può quindi affermare che l'azione di un tensore rotazione \mathbf{R} è completamente individuata dall'autovettore \mathbf{e}_ζ e dall'angolo di rotazione φ , cioè da una direzione orientata e da uno scalare che insieme definiscono un vettore $\boldsymbol{\varphi}$, detto *vettore rotazione*,⁹³ tale che:

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.169)$$

Avendo definito l'ampiezza della rotazione quale coordinata angolare ne consegue che ad un dato tensore rotazione corrispondono infiniti valori dell'ampiezza della rotazione, valori che differiscono fra loro di multipli di 2π . Conseguentemente vi sono infiniti vettori rotazione, corrispondenti di un unico tensore rotazione, vettori che hanno tutti la stessa direzione, il cui verso può essere opposto e i cui moduli, a parità di verso, differiscono di multipli interi di 2π . La corrispondenza inversa è invece univo-

⁹²È forse bene a tal punto sottolineare che propriamente un *angolo* è una parte di piano compresa tra due semirette, quindi un ente geometrico, mentre una *coordinata angolare* fornisce la misura dell'angolo che una semiretta forma con una semiretta presa quale riferimento, in generale a meno del segno e di un multiplo di 2π . È comunque usuale l'uso del termine *angolo* anche con il significato di *coordinata angolare*.

⁹³*Rotation vector* nella letteratura inglese.

ca, ovvero ad un dato vettore $\boldsymbol{\varphi}$ corrisponde uno e solo un tensore rotazione \mathbf{R}_φ .

Per quel che riguarda il tensore inverso \mathbf{R}^{-1} di \mathbf{R} , questi ha la stessa direzione principale ζ di \mathbf{R} ancora associata all'autovalore $\lambda_\zeta = 1$.⁹⁴ Poiché a $\mathbf{R}\mathbf{v}$ corrisponde \mathbf{v} tramite \mathbf{R}^{-1} , a parità della scelta dell'autovettore \mathbf{e}_ζ l'angolo di rotazione è in modulo lo stesso di \mathbf{R} ma di segno opposto. Ne risulta che se $\boldsymbol{\varphi}$ è un vettore rotazione associato a \mathbf{R} , allora $-\boldsymbol{\varphi}$ è un vettore rotazione associato a \mathbf{R}^{-1} .

Per quel che riguarda invece l'esistenza di altre direzioni principali all'interno del piano ortogonale all'asse di rotazione, da quanto dedotto è evidente che se φ è diverso da multipli di π non ve ne sono altre e che di conseguenza le altre due radici dell'equazione caratteristica sono complesse coniugate.⁹⁵ Se invece φ è uguale a π o a multipli dispari di π , tutte le direzioni del piano ortogonale alla direzione principale ζ sono principali e l'equazione caratteristica ha una radice doppia che vale -1 , poiché ruotando di π un qualunque vettore di tale piano il vettore stesso cambia di segno. Si noti che ruotare di π o di $-\pi$ un vettore del piano ortogonale a ζ ha lo stesso effetto e che quindi in tal caso $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}$ e \mathbf{R} è simmetrico. Non solo, ma ne consegue anche che se $\boldsymbol{\varphi}$ è un vettore rotazione associato a \mathbf{R} , lo è anche $-\boldsymbol{\varphi}$. Se infine φ è uguale a zero, oppure ad un multiplo pari di π , tutte le direzioni del piano ortogonale a ζ sono principali e l'equazione caratteristica ha un'ulteriore radice doppia che vale 1 , dato che un qualunque vettore del piano resta invariato. Ne risulta che in realtà la radice 1 è tripla, che tutte le direzioni dello spazio sono principali e che \mathbf{R} coincide con il tensore identità \mathbf{I} .

Una ulteriore osservazione riguarda il caso in cui φ è uguale a $\frac{\pi}{2}$ o a multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$ ed è basata sul fatto che il tensore inverso \mathbf{R}^{-1} ruota un qualunque vettore \mathbf{v} del piano ortogonale alla direzione principale ζ nel vettore $-\mathbf{R}\mathbf{v}$. Ne risulta allora che la restrizione \mathbf{R}_ζ di \mathbf{R} al piano principale ortogonale a ζ soddisfa la relazione $\mathbf{R}_\zeta^T = \mathbf{R}_\zeta^{-1} = -\mathbf{R}_\zeta$ e che quindi tale restrizione è emisimmetrica.

Sfruttando la definizione di prodotto scalare di due vettori, è immediato dedurre che gli infiniti angoli di rotazione associati ad un tensore rotazione \mathbf{R} soddisfano l'equazione trigonometrica (fig. 1.10):

$$\cos \varphi = \mathbf{e} \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}, \quad (1.170)$$

⁹⁴Cfr. la proposizione 2, p. 32.

⁹⁵Si noti che in tal caso l'azione di \mathbf{R}^{-1} è diversa da quella di \mathbf{R} e quindi il trasposto \mathbf{R}^T , che uguaglia l'inverso \mathbf{R}^{-1} , differisce da \mathbf{R} , con la conseguenza che \mathbf{R} non è simmetrico.

Sommabilità al primo ordine dei vettori rotazione. Introdotta una variabile reale λ per il confronto dell'ordine e posto $\boldsymbol{\varphi}_a = \lambda \overline{\boldsymbol{\varphi}}_a$ e $\boldsymbol{\varphi}_b = \lambda \overline{\boldsymbol{\varphi}}_b$, con $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_a$ e $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_b$ due vettori qualunque indipendenti da λ , si ha:

$$\boldsymbol{\varphi}_{ba} = \boldsymbol{\varphi}_a + \boldsymbol{\varphi}_b + o(\lambda). \quad (1.177)$$

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto che la corrispondenza tra un tensore emisimmetrico e il suo vettore assiale è lineare. Se $\overline{\boldsymbol{W}}_a$ e $\overline{\boldsymbol{W}}_b$ corrispondono a $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_a$ e $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_b$ rispettivamente, allora $\boldsymbol{W}_a = \lambda \overline{\boldsymbol{W}}_a$ e $\boldsymbol{W}_b = \lambda \overline{\boldsymbol{W}}_b$ corrispondono a $\boldsymbol{\varphi}_a$ e $\boldsymbol{\varphi}_b$ rispettivamente.

Per via della (1.175) si ha quindi:

$$\boldsymbol{R}_b \boldsymbol{R}_a = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_b)(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_a) + o(\lambda) = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_b + \boldsymbol{W}_a + o(\lambda) \quad (1.178)$$

poiché $\boldsymbol{W}_b \boldsymbol{W}_a = \lambda^2 \overline{\boldsymbol{W}}_b \overline{\boldsymbol{W}}_a = o(\lambda)$. Se poi \boldsymbol{W}_{ba} è il tensore emisimmetrico corrispondente a $\boldsymbol{\varphi}_{ba}$ ancora per la (1.175) si avrà:

$$\boldsymbol{R}_b \boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{W}_{ba} + o(\lambda). \quad (1.179)$$

Dal confronto delle (1.178) e (1.179) si deduce che:

$$\boldsymbol{W}_{ba} = \boldsymbol{W}_b + \boldsymbol{W}_a + o(\lambda), \quad (1.180)$$

e poiché per la linearità della corrispondenza tra un vettore assiale e un tensore emisimmetrico al tensore emisimmetrico $\boldsymbol{W}_b + \boldsymbol{W}_a$ corrisponde l'assiale $\boldsymbol{\varphi}_b + \boldsymbol{\varphi}_a$ ne risulta infine la sommabilità (1.177) al primo ordine dei vettori rotazione. ■

1.5.4 Componenti di un tensore rotazione

Allo scopo di determinare il significato geometrico delle componenti di un generico tensore rotazione \boldsymbol{R} , si consideri un sistema di coordinate $Oxyz$ cartesiano ortogonale e siano \boldsymbol{e}_x , \boldsymbol{e}_y e \boldsymbol{e}_z i versori della associata base ortonormale. Con riferimento alla fig. 1.12, si indichino poi con x^* , y^* e z^* gli assi ottenuti ruotando gli assi x , y e z rispettivamente. Si noti che $Ox^*y^*z^*$ è un sistema di coordinate ancora cartesiano ortogonale di cui i versori \boldsymbol{e}_x^* , \boldsymbol{e}_y^* e \boldsymbol{e}_z^* rappresentano l'associata base ortonormale soddisfacente la relazione:

$$\boldsymbol{e}_i^* = \boldsymbol{R} \boldsymbol{e}_i. \quad (1.181)$$

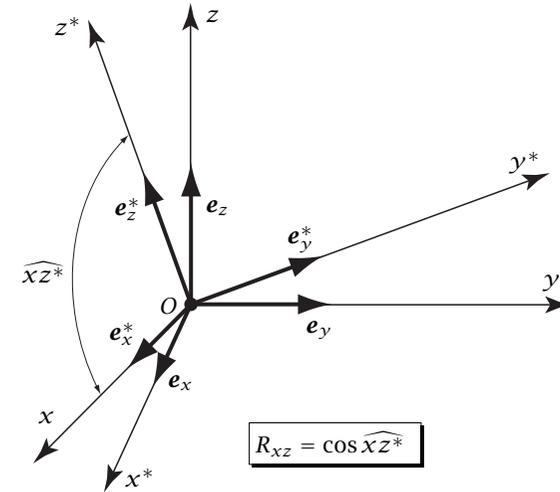


Figura 1.12: Componenti di un tensore rotazione

Ciò premesso, la generica componente del dato tensore rotazione risulta:

$$R_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{R} \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j^* = \cos \widehat{x_i x_j^*}. \quad (1.182)$$

Le colonne della matrice delle componenti di \boldsymbol{R} rappresentano dunque i coseni direttori degli assi ruotati x^* , y^* e z^* relativamente agli assi x , y e z del sistema di riferimento:

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} \cos \widehat{xx^*} & \cos \widehat{xy^*} & \cos \widehat{xz^*} \\ \cos \widehat{yx^*} & \cos \widehat{yy^*} & \cos \widehat{yz^*} \\ \cos \widehat{zx^*} & \cos \widehat{zy^*} & \cos \widehat{zz^*} \end{bmatrix}. \quad (1.183)$$

Se la direzione dell'asse z coincide con la direzione principale ζ e φ è l'angolo di rotazione, positivo se antiorario sulla faccia positiva del piano xy (fig. 1.13), risulta poi:

$$[\boldsymbol{R}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.184)$$

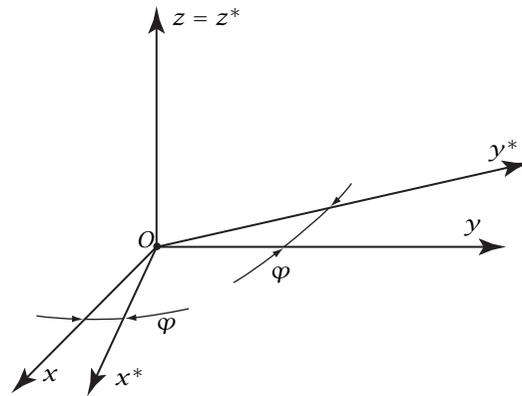


Figura 1.13: Asse z coincidente con l'asse rotazione

Si noti che \mathbf{R} si rappresenta nella forma (1.184) in un qualunque sistema di riferimento che abbia il terzo asse coincidente con la direzione principale ζ , in virtù del fatto che tutti i vettori del piano xy ruotano di φ .

◇ ◇ ◇

Angoli di Eulero. Delle nove componenti di un tensore rotazione \mathbf{R} solo tre sono indipendenti. Infatti, dato che le componenti sono dei coseni direttori, la somma dei quadrati sia delle righe che delle colonne della matrice $[\mathbf{R}]$ che rappresenta \mathbf{R} devono uguagliare l'unità:

$$\sum_j R_{ij}^2 = 1, \quad (i = x, y, z), \quad \sum_i R_{ij}^2 = 1, \quad (j = x, y, z). \quad (1.185)$$

Le (1.185) rappresentano sei relazioni tra le nove componenti di \mathbf{R} .

Una conferma di tale fatto è che ad un tensore rotazione resta associato un vettore rotazione di tre sole componenti in grado di definire il tensore rotazione stesso. Un modo alternativo di definire tre scalari a cui corrisponda in modo univoco un tensore rotazione è quello di decomporre il dato tensore rotazione \mathbf{R} nel prodotto di tre opportuni tensori rotazione \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_3 \mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1, \quad (1.186)$$

le cui direzioni principali associate all'autovalore unitario siano univocamente individuate dalla scelta degli assi coordinati x , y e z . Ne risulta allora che \mathbf{R} è pienamente individuato dai rispettivi angoli di rotazione φ_1 , φ_2 e φ_3 , detti *angoli di Eulero*.⁹⁷ Poiché la decomposizione (1.186) non è univoca, esistono diversi modi

⁹⁷Eulerian angle nella letteratura inglese.

non equivalenti di definire gli angoli di Eulero, ognuno dei quali conduce quindi ad associare ad uno stesso tensore rotazione terne diverse di angoli.

Una possibilità⁹⁸ è quella di introdurre innanzitutto l'asse n dei *nodi*, intersezione dei piani ortogonali all'asse z e al suo ruotato z^* (fig. 1.14), e di definire poi

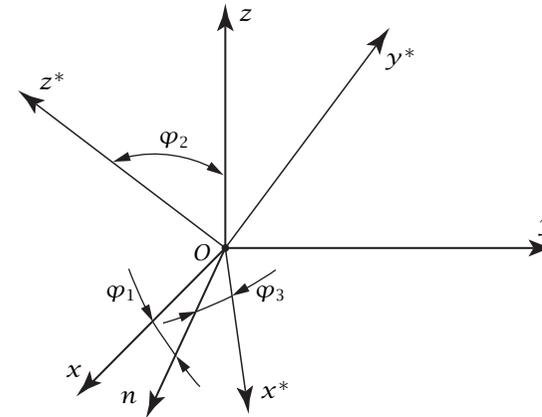


Figura 1.14: Angoli di Eulero

\mathbf{R}_1 di direzione principale z e angolo φ_1 , detto *precessione*, tale che ruoti x su n , \mathbf{R}_2 di direzione principale n e angolo φ_2 , detto *nutazione*, tale che ruoti z su z^* e infine \mathbf{R}_3 di direzione principale z^* e angolo φ_3 , detto *rotazione propria*, tale che ruoti n su x^* . Se prima viene applicato \mathbf{R}_1 , poi \mathbf{R}_2 e infine \mathbf{R}_3 gli assi x e z ruotano sugli assi x^* e z^* , rispettivamente, ovvero sui ruotati di x e z tramite \mathbf{R} , il che è sufficiente per dire che vale la (1.186).

◇ ◇ ◇

1.5.5 Trasformazione delle componenti di un vettore e di un tensore doppio

Le componenti di un vettore oppure di un tensore doppio dipendono dalla scelta della base ortonormale di riferimento. Al variare della base variano quindi, in generale, le relative componenti vettoriali e tensoriali. Allo scopo di determinare le relazioni che legano le componenti rispetto a due

⁹⁸Spesso utilizzata nell'ambito della meccanica razionale sia italiana che internazionale. Si veda per esempio Levi-Civita e Amaldi (1949, p. 194-199).

diverse basi ortonormali di uno stesso vettore o tensore doppio, si nota innanzitutto che una delle due basi si ottiene dall'altra tramite un'opportuno tensore rotazione.

Siano allora $Oxyz$ e $Ox^*y^*z^*$ due sistemi di coordinate cartesiane ortogonali, di cui il secondo si ottiene dal primo tramite il tensore rotazione \mathbf{R} (fig. 1.12, p. 43). Siano inoltre $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ e $\mathbf{e}_x^*, \mathbf{e}_y^*, \mathbf{e}_z^*$ le due basi ortonormali individuate dagli assi dei due sistemi di coordinate. In accordo con la relazione (1.181), la base \mathbf{e}_i^* è individuata ruotando tramite \mathbf{R} la base \mathbf{e}_i .

La definizione (1.43), p. 23, delle componenti di un vettore, insieme alla relazione (1.181), permette di porre le componenti, nella base \mathbf{e}_i^* , di un generico vettore \mathbf{v} nella forma:

$$v_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \mathbf{e}_i = (\mathbf{R}^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.187)$$

Ne consegue che tali componenti uguagliano le componenti del vettore $\mathbf{R}^T \mathbf{v}$ nella base \mathbf{e}_i :

$$\{\mathbf{v}\}^* = [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{v}\}, \quad v_i^* = \sum_j R_{ji} v_j. \quad (1.188)$$

Analogamente, ricordando la definizione (1.80), p. 28, le componenti di un generico tensore \mathbf{A} nella base \mathbf{e}_i^* risultano:

$$A_{ij}^* = \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_j^* = (\mathbf{R} \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{A} (\mathbf{R} \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{e}_j), \quad (1.189)$$

e quindi rappresentano le componenti del tensore $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ nella base \mathbf{e}_i :

$$[\mathbf{A}]^* = [\mathbf{R}]^T [\mathbf{A}] [\mathbf{R}], \quad A_{ij}^* = \sum_{hk} R_{hi} R_{kj} A_{hk}. \quad (1.190)$$

Le componenti di \mathbf{R} che compaiono nelle formule di trasformazione (1.188) e (1.190) devono essere calcolate rispetto alla base \mathbf{e}_i e sono fornite dalla (1.182). Le colonne della matrice $[\mathbf{R}]$ delle componenti di \mathbf{R} , e quindi le righe della sua trasposta $[\mathbf{R}]^T$, rappresentano di conseguenza i coseni direttori degli assi del secondo sistema di coordinate $Ox^*y^*z^*$ rispetto al primo sistema di coordinate $Oxyz$.

Formule di rotazione

Si vuole ora determinare come variano le componenti A_{xx}, A_{yy} e A_{xy} di un tensore doppio simmetrico piano \mathbf{A} al ruotare degli assi x e y attorno al loro centro. Si noti che ruotando il sistema di coordinate ruota la base rispetto alla quale sono calcolate le componenti di \mathbf{A} . Senza perdita

di generalità, si individui il sistema di coordinate Oxy per il tramite dell'angolo α , positivo se antiorario, che l'asse x forma con l'asse principale ξ del sistema principale $O\xi\eta$ (fig. 1.15). Si ricordi poi che per la formula

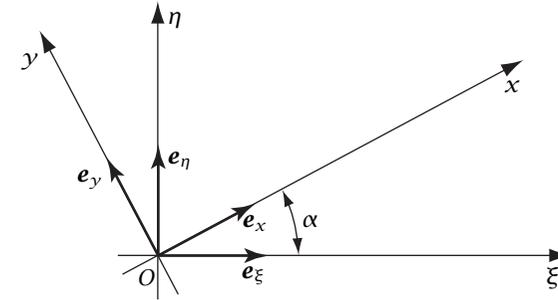


Figura 1.15: Formule di rotazione

di trasformazione (1.190) le componenti di \mathbf{A} nel sistema Oxy coincidono con le componenti del tensore $\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R}$ nel sistema principale di \mathbf{A} , dove il tensore rotazione \mathbf{R} rappresenta la rotazione che ruota il sistema principale $O\xi\eta$ nel sistema generico Oxy . Nel sistema principale le componenti di \mathbf{R} sono:⁹⁹

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad (1.191)$$

mentre \mathbf{A} si rappresenta in forma diagonale tramite i suoi autovalori e risulta quindi:

$$\begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} \\ A_{xy} & A_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_\xi & 0 \\ 0 & \lambda_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (1.192)$$

Sviluppando si ottengono infine le seguenti relazioni:

$$A_{xx} = \lambda_\xi \cos^2 \alpha + \lambda_\eta \sin^2 \alpha, \quad (1.193a)$$

$$A_{yy} = \lambda_\xi \sin^2 \alpha + \lambda_\eta \cos^2 \alpha, \quad (1.193b)$$

$$A_{xy} = (\lambda_\eta - \lambda_\xi) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (1.193c)$$

dette *formule di rotazione*.

⁹⁹cfr. la (1.184), p. 43.

◇ ◇ ◇

Componenti di un tensore rotazione in funzione degli angoli di Eulero. Per determinare le componenti di \mathbf{R} in funzione degli angoli di Eulero¹⁰⁰ si tenga innanzitutto conto che le componenti di \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 e \mathbf{R}_3 in un qualunque sistema di assi che abbia rispettivamente quale terzo asse z , primo asse n e infine terzo asse z^* valgono:

$$[\mathbf{R}_1]_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.194a)$$

$$[\mathbf{R}_2]_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (1.194b)$$

$$[\mathbf{R}_3]_{z^*} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.194c)$$

Tenendo conto che \mathbf{R}_1^T ruota n su x , utilizzando la (1.190) si ottengono le componenti di \mathbf{R}_2 rispetto al sistema $Oxyz$ nella forma $[\mathbf{R}_1]_z [\mathbf{R}_2]_n [\mathbf{R}_1]_z^T$. Tenendo poi conto che \mathbf{R}_2^T ruota z^* su z , si ottengono le componenti di \mathbf{R}_3 rispetto al sistema $Oxyz$ nella forma $[\mathbf{R}_1]_z [\mathbf{R}_2]_n [\mathbf{R}_3]_{z^*} [\mathbf{R}_2]_n^T [\mathbf{R}_1]_z^T$. Ne risulta allora la seguente rappresentazione algebrica di \mathbf{R} nel sistema $Oxyz$ in funzione degli angoli di Eulero:

$$[\mathbf{R}] = [\mathbf{R}_1]_z [\mathbf{R}_2]_n [\mathbf{R}_3]_{z^*} = \begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \sin \varphi_3 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ +\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & +\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 & -\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & \sin \varphi_2 \cos \varphi_3 & \cos \varphi_2 \end{bmatrix}, \quad (1.195)$$

◇ ◇ ◇

1.6 Rappresentazione di Mohr

Nel seguito si vuole rappresentare in un piano, detto *piano di Mohr*, la restrizione di un generico tensore simmetrico \mathbf{A} all'insieme \mathcal{U} dei versori.

¹⁰⁰cfr.il par. 1.5.4, p. 44.

Poiché ad un generico asse r corrisponde in modo univoco il versore \mathbf{e}_r equiverso, la restrizione di cui sopra può intendersi definita nell'insieme degli assi dello spazio.

Alla direzione orientata r corrisponde il vettore $\mathbf{A}\mathbf{e}_r$ che può essere decomposto nella direzione di r e in quella ortogonale a r stessa. Si noti che a differenza della componente in direzione r , la componente vettoriale nel piano ortogonale a r può avere, in generale, una direzione qualunque in tale piano e che quindi non è possibile associare, in generale, un segno al suo modulo.

Ciò premesso, scelti nel piano di Mohr due assi cartesiani ortogonali si riporteranno in scala lungo gli assi delle ascisse e delle ordinate la componente a_r in direzione r e, rispettivamente, il modulo a_{sr} della componente nel piano ortogonale a r :

$$a_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_r, \quad a_{sr} = |\mathbf{A}\mathbf{e}_r - a_r \mathbf{e}_r|, \quad (1.196)$$

individuando così il punto di coordinate (a_r, a_{sr}) che rappresenterà nel piano di Mohr la direzione orientata r . Si noti che i punti rappresentativi delle direzioni principali non possono che trovarsi sull'asse delle ascisse dato che in tal caso la componente ortogonale è nulla.

1.6.1 Circonferenza di Mohr

Nel caso piano il vettore $\mathbf{a}_r = \mathbf{A}\mathbf{e}_r$, immagine dell'asse r , si troverà ancora nel piano e la componente ortogonale a r avrà la direzione dell'asse s ortogonale a r (fig. 1.16). È quindi possibile in tal caso dare un segno anche alla seconda coordinata del punto che nel piano di Mohr corrisponde alla direzione r . Scelta una faccia positiva del piano in cui è definito il tensore \mathbf{A} , l'orientazione dell'asse s sarà per convenzione definita dalla rotazione oraria di $\pi/2$ rad dell'asse r . Le coordinate a_r e a_{sr} del punto che nel piano di Mohr rappresenta la direzione orientata r saranno allora le componenti scalari di $\mathbf{A}\mathbf{e}_r$ in direzione r e s rispettivamente:

$$a_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_r, \quad a_{sr} = \mathbf{e}_s \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_r. \quad (1.197)$$

Il caso in cui i due autovalori di \mathbf{A} sono coincidenti è privo di interesse in quanto tutte le direzioni del piano sono principali e sono rappresentate nel piano di Mohr da un unico punto appartenente all'asse delle ascisse, di ascissa il valore principale. Nel caso in cui i due autovalori di \mathbf{A} siano

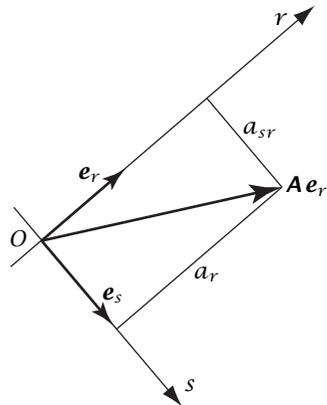


Figura 1.16: Decomposizione locale

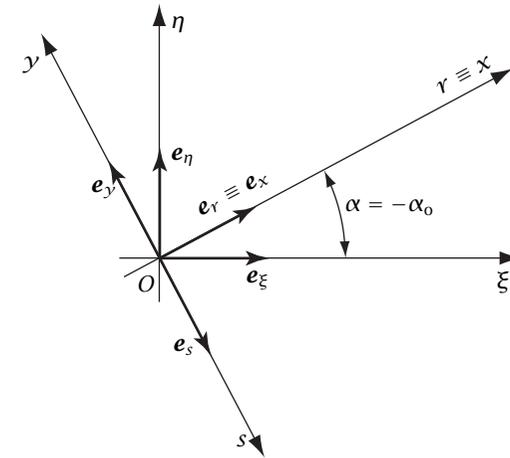


Figura 1.17: Direzioni nel piano

invece distinti, al ruotare dell'asse r il punto corrispondente tratterà nel piano di Mohr una curva che, per la continuità delle trasformazioni lineari, non può che essere chiusa. Tale curva è in effetti una circonferenza, detta *circonferenza di Mohr*.¹⁰¹

Dimostrazione. Si individui la generica direzione orientata r del piano tramite l'angolo α , positivo se antiorario, che la direzione forma con il primo asse ξ del sistema principale. Nella fig. 1.17 è illustrata la situazione nel caso l'angolo α sia positivo e compreso tra 0 e $\pi/4$. Si noti che se il primo asse x di un generico sistema di coordinate Oxy si fa coincidere con r allora l'asse y è opposto a s . Si noti inoltre che l'angolo α_0 che individua l'asse principale ξ rispetto all'asse x ha lo stesso modulo ma segno opposto dell'angolo α che individua l'asse $r \equiv x$ rispetto all'asse principale ξ . Se l'angolo α è positivo, come nel caso di fig. 1.17, allora l'angolo α_0 è negativo.

Senza perdita di generalità si scelga quale primo asse del sistema principale quello che corrisponde all'autovalore massimo tra i due, supposti distinti:

$$\lambda_\xi > \lambda_\eta. \tag{1.198}$$

¹⁰¹Spesso citata quale *circolo di Mohr* nella letteratura italiana. Circonferenza di Mohr si rende in inglese con *Mohr's circle*.

Nel sistema principale il tensore \mathbf{A} , come già detto, si rappresenta in forma diagonale tramite i suoi autovalori mentre i versori delle direzioni r e s valgono:

$$\mathbf{e}_r = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_s = \begin{Bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{Bmatrix} \tag{1.199}$$

Risulta allora, sviluppando in componenti le (1.197):

$$a_r = \lambda_\xi \cos^2 \alpha + \lambda_\eta \sin^2 \alpha, \tag{1.200a}$$

$$a_{sr} = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) \sin \alpha \cos \alpha. \tag{1.200b}$$

Se nelle (1.200) si inseriscono le seguenti relazioni trigonometriche:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}, \tag{1.201}$$

conseguenze dirette delle formule di duplicazione, le coordinate a_r e a_{sr} risultano espresse in funzione del doppio dell'angolo α :

$$a_r = \frac{\lambda_\xi + \lambda_\eta}{2} + \frac{\lambda_\xi - \lambda_\eta}{2} \cos 2\alpha, \tag{1.202a}$$

$$a_{sr} = \frac{\lambda_\xi - \lambda_\eta}{2} \sin 2\alpha. \tag{1.202b}$$

Queste si possono infine scrivere nella forma:

$$a_r = c + \mathcal{R} \cos 2\alpha, \tag{1.203a}$$

$$a_{sr} = \mathcal{R} \sin 2\alpha, \tag{1.203b}$$

se si pone:

$$c = \frac{\lambda_\xi + \lambda_\eta}{2}, \quad \mathcal{R} = \frac{\lambda_\xi - \lambda_\eta}{2}. \tag{1.204}$$

Poiché per la (1.198) \mathcal{R} è positivo, le due equazioni (1.203) rappresentano, nel piano di Mohr, le equazioni parametriche di una circonferenza di raggio \mathcal{R} e di centro il punto C di ascissa c e di ordinata nulla (fig. 1.18), come

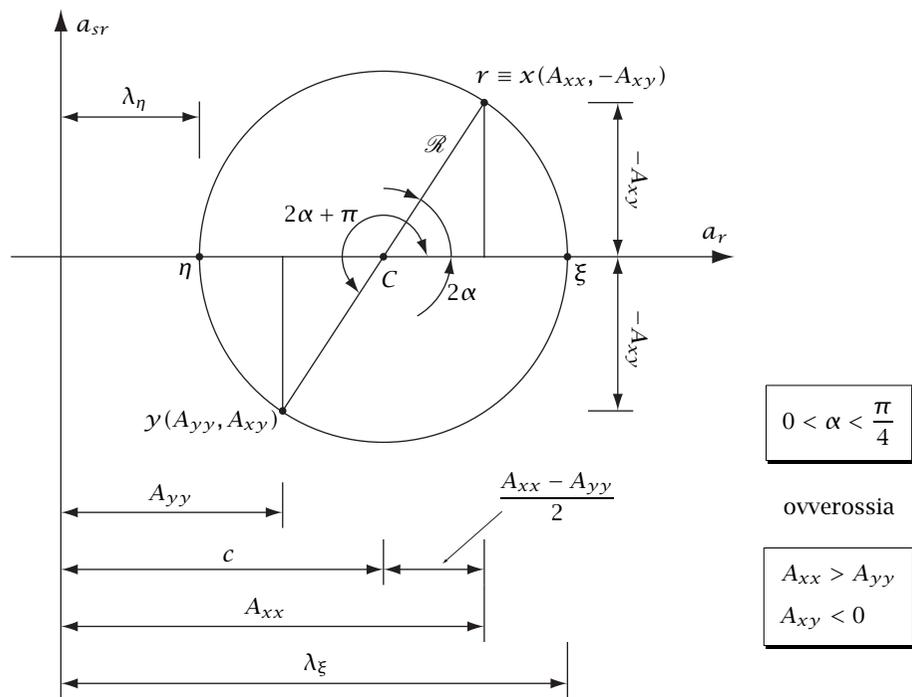


Figura 1.18: Circonferenza di Mohr

volevasi dimostrare. ■

Nel caso in cui gli autovalori di \mathbf{A} siano coincidenti di valore λ , che poi è il caso in cui tutte le direzioni del piano sono principali, risulta $c = \lambda$ e $\mathcal{R} = 0$ e le coordinate nel piano di Mohr divengono indipendenti dall'angolo α :

$$a_r = \lambda, \quad a_{sr} = 0. \tag{1.205}$$

La circonferenza degenera allora in punto posto sull'asse delle ascisse del piano di Mohr, in accordo con quanto già osservato analizzando direttamente tale caso particolare.

1.6.2 Alcune proprietà della circonferenza di Mohr

Nel seguito si riportano alcune proprietà della circonferenza di Mohr grazie alle quali è possibile risolvere in modo completo il problema della determinazione dei valori e delle direzioni principali nel caso piano. Ci si continuerà a riferire alla fig. 1.18, tracciata coerentemente con la scelta dell'angolo α nell'intervallo $(0, \pi/4)$.

Proprietà degli angoli. *L'angolo tra i raggi della circonferenza individuati dai punti corrispondenti a due assi del piano vale il doppio dell'angolo compreso tra gli stessi assi e i due angoli predetti sono equiversi.*

Dimostrazione. Infatti nelle equazioni parametriche della circonferenza (1.203), il parametro angolare α compare sempre raddoppiato. Inoltre affinché la rotazione sia concorde occorre che un incremento $d\alpha$ dell'angolo provochi un decremento da_r dell'ascissa se l'ordinata è positiva e viceversa, per cui la concordanza del verso della rotazione è equivalente alla diseguglianza $a_{sr} da_r d\alpha < 0$, senz'altro soddisfatta dato che $a_{sr} da_r d\alpha = -2\mathcal{R}^2 (\sin 2\alpha)^2 (d\alpha)^2$, come volevasi dimostrare. ■

Poiché nella deduzione del fatto che le rotazioni siano equiverse interviene il segno dell'ordinata a_{sr} , tale proprietà dipende strettamente dalla convenzione di segno a suo tempo adottata e la giustifica a posteriori. Si noti inoltre che, coerentemente con la fig. 1.17, la fig. 1.18 è stata disegnata con la misura dell'angolo 2α appartenente all'intervallo $(0, \pi/2)$. Si noti infine che ad una generica direzione del piano corrisponde un solo punto del piano di Mohr indipendentemente dalla orientazione, dato che all'angolo piatto tra due assi di uguale direzione e verso opposto corrisponde un angolo giro nel piano di Mohr.

Punti rappresentativi degli assi di riferimento. Se la direzione r si fa coincidere con l'asse x (fig. 1.17), allora $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x$ e $\mathbf{e}_s = -\mathbf{e}_y$ e quindi, ricordando le (1.197):

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_x = A_{xx}, \quad \mathbf{a}_{sr} = (-\mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_x = -A_{xy}, \quad (1.206)$$

avendo tenuto conto che $A_{yx} = A_{xy}$ per la simmetria di \mathbf{A} . Il punto rappresentativo dell'asse ha quindi coordinate $(A_{xx}, -A_{xy})$. Il punto rappresentativo dell'asse y ha invece coordinate (A_{yy}, A_{xy}) . Infatti, se si fa coincidere l'asse generico r con l'asse y del sistema Oxy , risulta $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_y$ e $\mathbf{e}_s = \mathbf{e}_x$ e ne consegue:

$$\mathbf{a}_r = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_y = A_{yy}, \quad \mathbf{a}_{sr} = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_y = A_{xy}. \quad (1.207)$$

Questo risultato è in accordo col fatto che i punti rappresentativi di x e y devono differire nel piano di Mohr di un angolo piatto (il doppio dell'angolo retto tra i due assi) e che quindi devono essere opposti in diametro.

Si noti che se $\alpha \in (0, \pi/4)$ ovvero se $2\alpha \in (0, \pi/2)$, come nel caso rappresentato nelle fig. 1.17 e 1.18, allora il punto rappresentativo dell'asse x si trova dalla parte delle ordinate positive e a destra del punto opposto in diametro e che rappresenta l'asse y . Ne risulta che tale caso corrisponde alle condizioni $A_{xx} > A_{yy}$ e $A_{xy} < 0$.

Punti rappresentativi degli assi principali. È immediato rendersi conto che i punti rappresentativi degli assi principali, individuati nel piano di Mohr dall'angolo nullo e da quello piatto, si trovano in corrispondenza delle intersezioni della circonferenza con l'asse delle ascisse.

Costruzione della circonferenza. Si supponga ora di non conoscere le direzioni principali ξ e η e i relativi valori principali λ_ξ e λ_η , ma di conoscere le componenti A_{xx} , A_{yy} e A_{xy} di \mathbf{A} in un dato sistema di coordinate Oxy . Per quanto detto più sopra, è possibile costruire la circonferenza a partire dai punti di coordinate $(A_{xx}, -A_{xy})$ e (A_{yy}, A_{xy}) corrispondenti degli assi x e y rispettivamente. Unendo i due punti si ottiene un diametro. L'intersezione del diametro con l'asse delle ascisse individua il centro e la sua ascissa mentre il teorema di Pitagora determina il raggio:

$$c = \frac{A_{xx} + A_{yy}}{2}, \quad \mathcal{R} = \sqrt{\left(\frac{A_{xx} - A_{yy}}{2}\right)^2 + (A_{xy})^2}. \quad (1.208)$$

Valori e direzioni principali. I valori principali sono deducibili dalla conoscenza dell'ascissa c del centro della circonferenza e del suo raggio:

$$\lambda_{\xi, \eta} = c \pm \mathcal{R}. \quad (1.209)$$

Si noti che inserendo le (1.208) nella (1.209) si riottiene la (1.118).

I punti rappresentativi della direzione principale ξ e dell'asse x nel piano di Mohr determinano poi il doppio dell'angolo α_0 che determina ξ rispetto a x , positivo se antiorario a partire dall'asse x . Dalla fig. 1.18, tenendo conto che in tal caso $\alpha_0 = -\alpha < 0$, $A_{xx} - A_{yy} > 0$ e $A_{xy} < 0$, si trae allora:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2A_{xy}}{A_{xx} - A_{yy}}. \quad (1.210)$$

Si noti che le soluzioni di questa equazione trigonometrica sono date a meno di multipli di un angolo retto, per cui essa determina entrambe le direzioni principali. Se per ottenere una delle infinite soluzioni della (1.210) si utilizza la funzione *arcotangente* si ottiene un angolo compreso tra $-\pi/4$ e $+\pi/4$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2A_{xy}}{A_{xx} - A_{yy}} \right). \quad (1.211)$$

Tale soluzione determina la direzione principale che soddisfa la predetta condizione, ovvero la direzione principale di massimo autovalore se il punto rappresentativo di x si trova a destra di quello rappresentativo di y ($A_{xx} > A_{yy}$), come nel caso di fig. 1.18, oppure la direzione principale di minimo autovalore nel caso opposto ($A_{xx} < A_{yy}$).

Si noti anche che le (1.210) e (1.211) valgono solo nel caso sia $A_{xx} \neq A_{yy}$. D'altronde se $A_{xx} = A_{yy}$ allora in modulo $\alpha_0 = \pi/4$ e non è necessario alcun calcolo.

1.6.3 Arbelo di Mohr

Si supponga ora che il tensore doppio spaziale \mathbf{A} abbia tre autovalori distinti λ_ξ , λ_η e λ_ζ e che, senza perdita di generalità, siano posti nel seguente ordine:

$$\lambda_\xi > \lambda_\eta > \lambda_\zeta. \quad (1.212)$$

A ciascuno dei tre autovalori corrisponde una e una sola direzione principale alla quale resta associato un problema piano¹⁰² i cui due autovalori

¹⁰²Cfr. la proposizione 3, p. 32.

coincidono con gli altri due autovalori del problema spaziale. Per esempio all'autovalore λ_ζ resta associato un problema piano di autovalori λ_ξ e λ_η . Poiché a un problema piano con autovalori distinti corrisponde una circonferenza di Mohr,¹⁰³ ad un caso spaziale con tre autovalori distinti saranno associate tre circonferenze di Mohr, come rappresentato in fig. 1.19.

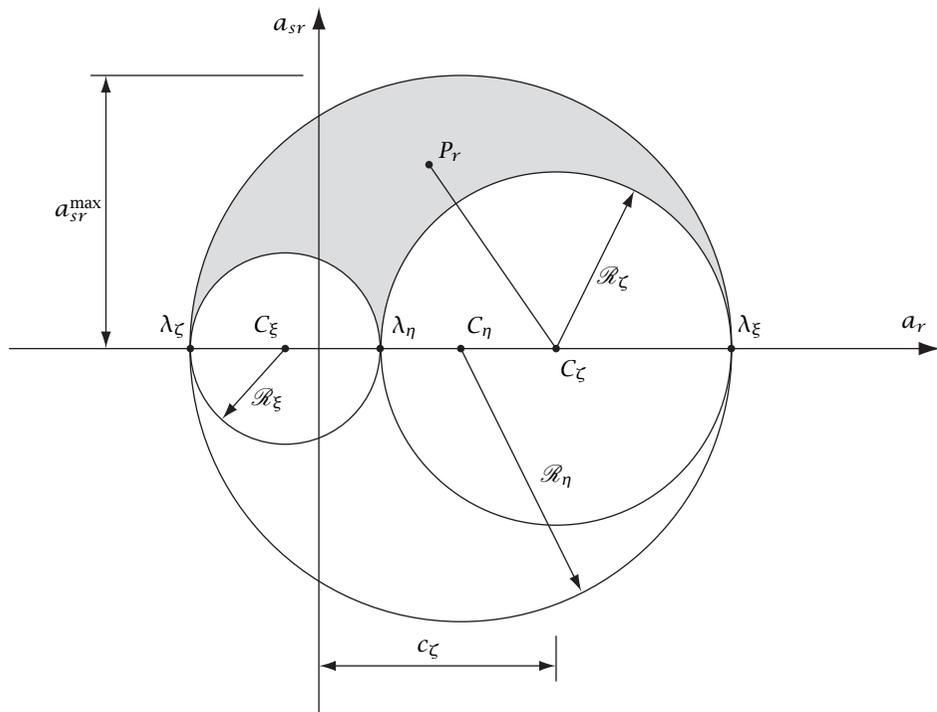


Figura 1.19: Arbelo di Mohr

Per esempio all'autovalore λ_ζ resta associata la circonferenza che intercetta l'asse delle ascisse in corrispondenza degli autovalori λ_ξ e λ_η , di centro C_ζ e raggio \mathcal{R}_ζ tali che:

$$c_\zeta = \frac{\lambda_\xi + \lambda_\eta}{2}, \quad \mathcal{R}_\zeta = \frac{\lambda_\xi - \lambda_\eta}{2}, \quad (1.213)$$

avendo indicato con c_ζ l'ascissa del centro.

Le tre circonferenze di Mohr rappresentano punti corrispondenti a direzioni ortogonali ad una direzione principale. Si consideri ora un'asse generico r non ortogonale a nessuna direzione principale. Il versore \mathbf{e}_r dell'asse avrà quindi componenti r_ξ , r_η e r_ζ nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ tutte diverse dallo zero:

$$r_\xi \neq 0, \quad r_\eta \neq 0, \quad r_\zeta \neq 0. \quad (1.214)$$

A tale direzione generica corrisponderà quindi, sul piano di Mohr, il punto P_r di coordinate (1.196).

Si vuole mostrare nel seguito che il punto P_r è interno all'arbelo di Mohr,¹⁰⁴ figura individuata, nel piano di Mohr, dalle semicirconferenze di Mohr che giacciono dalla parte positiva dell'asse delle ordinate (fig. 1.19).

Dimostrazione. A tale fine occorre mostrare che il punto P_r dista dai centri C_ξ e C_ζ delle due circonferenze interne più dei rispettivi raggi \mathcal{R}_ξ e \mathcal{R}_ζ e dal centro della circonferenza esterna C_η meno del suo raggio \mathcal{R}_η :

$$\overline{P_r C_\xi} > \mathcal{R}_\xi, \quad \overline{P_r C_\eta} < \mathcal{R}_\eta, \quad \overline{P_r C_\zeta} > \mathcal{R}_\zeta. \quad (1.215)$$

Tenendo conto che nelle disuguaglianze precedenti si ha a che fare con quantità positive, queste possono scriversi equivalentemente nella forma:

$$\overline{P_r C_\xi}^2 - \mathcal{R}_\xi^2 > 0, \quad \overline{P_r C_\eta}^2 - \mathcal{R}_\eta^2 < 0, \quad \overline{P_r C_\zeta}^2 - \mathcal{R}_\zeta^2 > 0. \quad (1.216)$$

Si consideri innanzitutto la circonferenza relativa alla direzione principale ζ , la cui coordinata c_ζ del centro e il suo raggio \mathcal{R}_ζ sono forniti dalle (1.213). Occorre quindi mostrare che vale la terza delle (1.216). Poiché (fig. 1.19):

$$\overline{P_r C_\zeta}^2 = (a_r - c_\zeta)^2 + a_{sr}^2, \quad (1.217)$$

risulta:

$$\overline{P_r C_\zeta}^2 - \mathcal{R}_\zeta^2 = (a_r^2 + a_{sr}^2) + (c_\zeta^2 - \mathcal{R}_\zeta^2) - 2a_r c_\zeta. \quad (1.218)$$

Il primo addendo a secondo membro della (1.218) può porsi nella forma:

$$a_r^2 + a_{sr}^2 = |\mathbf{Ae}_r|^2 = \mathbf{Ae}_r \cdot \mathbf{Ae}_r = \lambda_\xi^2 r_\xi^2 + \lambda_\eta^2 r_\eta^2 + \lambda_\zeta^2 r_\zeta^2, \quad (1.219)$$

¹⁰⁴Nella letteratura inglese l'arbelo, la figura geometrica individuata dalle tre circonferenze, è detta *arbelos* ma ciò nonostante la dizione *Mohr's Arbelos* non è comunemente utilizzata.

¹⁰³Cfr. il par. 1.6.1, p. 46.

avendo sviluppato il calcolo del prodotto scalare nel riferimento principale, rispetto al quale la matrice delle componenti di \mathbf{A} è diagonale. Utilizzando le (1.213) si ottiene poi:

$$c_\zeta^2 - \mathcal{R}_\zeta^2 = \lambda_\xi \lambda_\eta. \quad (1.220)$$

e:

$$\begin{aligned} 2a_r c_\zeta &= 2(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_r) \left(\frac{\lambda_\xi + \lambda_\eta}{2} \right) \\ &= (\lambda_\xi r_\xi^2 + \lambda_\eta r_\eta^2 + \lambda_\zeta r_\zeta^2) (\lambda_\xi + \lambda_\eta) \\ &= \lambda_\xi^2 r_\xi^2 + \lambda_\eta^2 r_\eta^2 + \lambda_\xi \lambda_\eta + (\lambda_\xi \lambda_\zeta + \lambda_\eta \lambda_\zeta - \lambda_\xi \lambda_\eta) r_\zeta^2, \end{aligned} \quad (1.221)$$

avendo ancora sviluppato il calcolo del prodotto scalare nel riferimento principale e avendo tenuto conto della relazione $r_\xi^2 + r_\eta^2 = 1 - r_\zeta^2$. Inserendo le (1.219), (1.220) e (1.221) nella (1.218) si ottiene infine:

$$\begin{aligned} \overline{P_r C_\zeta^2} - \mathcal{R}_\zeta^2 &= (\lambda_\zeta^2 - \lambda_\xi \lambda_\zeta - \lambda_\eta \lambda_\zeta + \lambda_\xi \lambda_\eta) r_\zeta^2 \\ &= (\lambda_\zeta - \lambda_\xi) (\lambda_\zeta - \lambda_\eta) r_\zeta^2. \end{aligned} \quad (1.222)$$

Per ipotesi $r_\zeta \neq 0$ e dunque $r_\zeta^2 > 0$. Inoltre, sempre per ipotesi è $\lambda_\zeta < \lambda_\xi$ e $\lambda_\zeta < \lambda_\eta$. Ne consegue che la terza delle (1.216) risulta soddisfatta.

Procedendo in modo analogo si ottiene poi:

$$\overline{P_r C_\xi^2} - \mathcal{R}_\xi^2 = (\lambda_\xi - \lambda_\eta) (\lambda_\xi - \lambda_\zeta) r_\xi^2, \quad (1.223)$$

$$\overline{P_r C_\eta^2} - \mathcal{R}_\eta^2 = (\lambda_\eta - \lambda_\xi) (\lambda_\eta - \lambda_\zeta) r_\eta^2. \quad (1.224)$$

Risultando per ipotesi:

$$r_\xi \neq 0, \quad \lambda_\xi > \lambda_\eta, \quad \lambda_\xi > \lambda_\zeta, \quad (1.225)$$

$$r_\eta \neq 0, \quad \lambda_\eta < \lambda_\xi, \quad \lambda_\eta > \lambda_\zeta, \quad (1.226)$$

anche la prima e la seconda delle (1.216) risultano soddisfatte, come volevasi dimostrare. ■

L'arbelo di Mohr e il suo contorno contengono quindi i punti definiti dalle componenti a_r e a_{sr} dei vettori $\mathbf{A} \mathbf{e}_r$, corrispondenti alle direzioni r dello spazio. Da tale circostanza si deducono immediatamente le seguenti *proprietà di estremo dei valori principali* (fig. 1.19):

1. il minimo e il massimo valore della generica componente $a_r = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_r$ coincidono rispettivamente con il minimo e il massimo autovalore di \mathbf{A} :

$$a_r^{\min} = \min \{ \lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta \}, \quad a_r^{\max} = \max \{ \lambda_\xi, \lambda_\eta, \lambda_\zeta \}; \quad (1.227)$$

2. il massimo modulo a_{sr}^{\max} della componente vettoriale nel piano ortogonale alla generica direzione r coincide con il raggio della circonferenza esterna:

$$a_{sr}^{\max} = \frac{1}{2} \max \{ |\lambda_\xi - \lambda_\eta|, |\lambda_\eta - \lambda_\zeta|, |\lambda_\zeta - \lambda_\xi| \}. \quad (1.228)$$

Si conclude notando che nel caso in cui due valori principali coincidono la circonferenza di Mohr corrispondente alla direzione principale associata al valore principale distinto collassa in un punto, mentre le infinite circonferenze di Mohr relative alle infinite direzioni principali associate al valore principale doppio sono tutte coincidenti. Nel caso poi che i valori principali siano tutti coincidenti, le infinite circonferenze di Mohr relative a tutte le direzioni dello spazio collassano tutte in un punto. In entrambi i casi l'arbelo di Mohr non esiste, in accordo col fatto che tutte le direzioni dello spazio sono ortogonali ad almeno una direzione principale.

◇ ◇ ◇

Proprietà di estremo dei valori principali. La proprietà di estremo (1.227) dei valori principali può essere dimostrata in modo diretto ricercando il minimo e il massimo della seguente funzione a valori scalari e definita nell'insieme dei versori \mathcal{U} :

$$f: \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{e}_r \mapsto f(\mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{A} \mathbf{e}_r. \quad (1.229)$$

Poiché la funzione f è continua nell'insieme di definizione, privo di frontiera e limitato, il minimo e il massimo valore coincidono con due valori stazionari. Per determinare i valori stazionari della funzione f , la si estende all'insieme \mathcal{V} dei vettori ponendo:

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.230)$$

Cercare i valori stazionari della funzione (1.229) equivale a cercare i valori stazionari della funzione estesa (1.230) sotto il vincolo:

$$g(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 1 = 0, \quad (1.231)$$

o, in altri termini, equivale a cercare i valori $f(\mathbf{v})$ corrispondenti dei vettori \mathbf{v} che soddisfano sia il vincolo (1.231) che la condizione di incremento nullo della f per ogni incremento di \mathbf{v} soddisfacente il vincolo (1.231):

$$df = 0, \quad \text{per ogni } d\mathbf{v} \text{ tale che } dg=0. \quad (1.232)$$

Si può raggiungere lo scopo utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, cioè cercando i valori stazionari di una funzione l non vincolata, dipendente non solo dal vettore \mathbf{v} ma anche da uno scalare λ , detto *moltiplicatore di Lagrange*, ottenuta sommando alla funzione f estesa il vincolo g amplificato dallo scalare λ :

$$l(\mathbf{v}, \lambda) = f(\mathbf{v}) - \lambda g(\mathbf{v}), \quad \text{per ogni } \mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.233)$$

Infatti la condizione di stazionarietà della funzione l :

$$dl = 0, \quad \text{per ogni } d\mathbf{v} \in \mathcal{V} \text{ e } d\lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.234)$$

conduce alle due condizioni equivalenti:

$$g(\mathbf{v}) d\lambda = 0, \quad \text{per ogni } d\lambda \in \mathbb{R}, \quad (1.235)$$

$$dl = df - \lambda dg = 0, \quad \text{per ogni } d\mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (1.236)$$

La prima condizione impone che la soluzione soddisfi il vincolo (1.231), mentre la seconda condizione impone che sia $df = 0$ per ogni $d\mathbf{v}$ tale che $dg = 0$, come richiesto dalla (1.232). La (1.236) equivale a richiedere che \mathbf{v} soddisfi la condizione:

$$\text{grad}_{\mathbf{v}} l = \mathbf{0}. \quad (1.237)$$

Poiché l'incremento Δl della funzione l , dovuto all'incremento $d\mathbf{v}$ del vettore \mathbf{v} , vale:

$$\begin{aligned} \Delta l &= (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot \mathbf{A} (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - \lambda \{(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} + d\mathbf{v}) - 1\} \\ &\quad - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v} + \lambda (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} - 1) \\ &= 2(\mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v} + o(|d\mathbf{v}|), \end{aligned} \quad (1.238)$$

si ottiene:

$$\text{grad}_{\mathbf{v}} l = 2(\mathbf{A} \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v}). \quad (1.239)$$

La condizione (1.237) impone allora che \mathbf{v} sia un autoversore e che quindi il valore stazionario $f(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \mathbf{v}$ sia il corrispondente autovalore, in accordo con la (1.109).

◇ ◇ ◇

1.7 Tensori simmetrici non invertibili

Come già detto al par. 1.3.2, p. 29, un tensore doppio \mathbf{A} è invertibile se e solo se $\det \mathbf{A} \neq 0$. L'equazione (1.142c), p. 37, assicura allora che un tensore doppio è non invertibile se e solo se almeno uno dei suoi valori principali è nullo.

Si presentano dunque tre possibilità, a seconda che l'autovalore nullo sia una radice tripla, doppia oppure semplice del dato tensore non invertibile. A parte il caso banale di radice tripla in cui il dato tensore non può che coincidere con il tensore nullo, si presentano quindi due soli casi interessanti che saranno discussi nel seguito nel caso in cui il dato tensore doppio sia simmetrico.

1.7.1 Tensori monoassiali simmetrici

Si dice che un tensore doppio \mathbf{A} è *monoassiale*¹⁰⁵ se trasforma tutti i vettori in vettori aventi la stessa direzione. Se la direzione comune è quella dell'asse z deve dunque risultare:

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda_v \mathbf{e}_z, \quad (1.240)$$

dove \mathbf{v} è un qualunque vettore e λ_v uno scalare in generale dipendente dalla direzione.

Caratterizzazione dei tensori monoassiali simmetrici. *Un tensore doppio simmetrico non nullo è monoassiale se e solo se ha un autovalore doppio nullo. L'asse del tensore è inoltre ortogonale al piano di direzioni principali individuato dalla radice doppia nulla.*¹⁰⁶

In un qualunque sistema di riferimento avente z quale terzo asse il tensore \mathbf{A} si rappresenta quindi nella forma:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = a (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z), \quad a \neq 0, \quad (1.241)$$

dove a è l'autovalore associato alla direzione z .

Dimostrazione. Infatti, nel caso il tensore sia monoassiale vale la relazione (1.240) e poiché questa deve valere anche per i vettori aventi la direzione dell'asse z ne consegue che la direzione dell'asse z è principale. Risulta

¹⁰⁵ *Uniaxial* nella letteratura inglese.

¹⁰⁶ Se il tensore doppio non è simmetrico esiste ancora un piano di direzioni principali associato ad una radice doppia nulla. La direzione principale z non è però ortogonale a tale piano. Se quale asse y viene scelto l'unico asse principale ortogonale a z , l'asse x non è principale e l'elemento A_{zx} della prima colonna della rappresentazione (1.241) non è in generale nullo.

inoltre che ad un qualunque vettore ortogonale all'asse z corrisponde il vettore nullo, poiché gli deve corrispondere contemporaneamente un vettore avente la direzione di z , per via della (1.240), e un vettore ortogonale a z , essendo \mathbf{A} simmetrico e z una direzione principale.¹⁰⁷ Il tensore \mathbf{A} possiede quindi un autovalore doppio nullo corrispondente al problema piano associato alla direzione z e un autovalore semplice associato alla direzione principale z .

Se invece il tensore doppio \mathbf{A} simmetrico e non nullo possiede un autovalore doppio nullo, la terza radice a è necessariamente diversa da zero, e quindi semplice, altrimenti il tensore sarebbe nullo. Alla radice semplice deve poi corrispondere una direzione principale ortogonale al piano di direzioni principali corrispondenti alla radice doppia nulla. Se tale direzione è quella dell'asse z , un qualunque vettore \mathbf{v} può scomporsi nella somma della sua componente $v_z \mathbf{e}_z$ in direzione z e di quella in direzione ortogonale, per cui risulta, in accordo con la (1.240), $\mathbf{A}\mathbf{v} = av_z \mathbf{e}_z$, come volevasi dimostrare. ■

Per quel che riguarda la rappresentazione nel piano di Mohr, le infinite circonferenze delle infinite direzioni principali associate all'autovalore nullo doppio, di centro $a/2$ e di raggio $a/2$, sono tutte coincidenti mentre quella associata all'autovalore non nullo semplice collassa nel punto origine degli assi, come illustrato nella fig. 1.20. Come già detto, in tal caso non

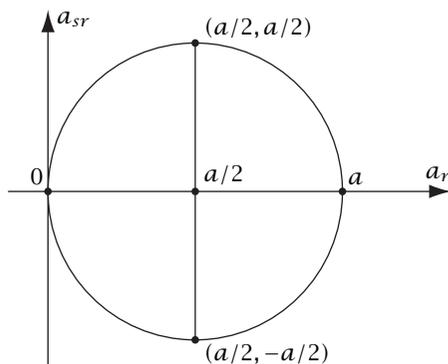


Figura 1.20: Circonferenze di Mohr di un tensore monoassiale

¹⁰⁷Cfr. la proposizione 3, p. 32.

esiste arbelo di Mohr in accordo col fatto che tutte le direzioni dello spazio sono ortogonali ad almeno una direzione principale.

1.7.2 Tensori piani simmetrici

Si dice invece che un tensore doppio \mathbf{A} simmetrico è *piano*¹⁰⁸ (o *biassiale*) se trasforma tutti i vettori in tutti i vettori di un dato piano. Se z è un asse ortogonale a tale piano deve dunque risultare:

$$\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{A}\mathbf{v} = 0, \quad (1.242)$$

per ogni vettore \mathbf{v} .

Caratterizzazione dei tensori piani simmetrici. *Un tensore doppio simmetrico non nullo è piano se e solo se ha un autovalore semplice nullo e due autovalori non nulli. Il piano del tensore è inoltre ortogonale alla direzione principale associata alla radice semplice nulla.*¹⁰⁹

In un qualunque sistema di riferimento avente asse z ortogonale al piano del tensore \mathbf{A} , questi si rappresenta conseguentemente nella forma:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ A_{yx} & A_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{con } A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2 \neq 0. \quad (1.243)$$

Dimostrazione. Infatti, se il tensore è piano vale la relazione (1.242) che per la simmetria di \mathbf{A} può scriversi nella forma $\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}\mathbf{e}_z = 0$ per ogni vettore \mathbf{v} . Se ne deduce allora che $\mathbf{A}\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$ e quindi che z è una direzione principale di autovalore nullo. Non solo, ma tale autovettore deve essere semplice, altrimenti si ricadrebbe nel caso monodimensionale e a tutti i vettori dello spazio corrisponderebbe una retta di vettori e non un piano.

¹⁰⁸Si faccia attenzione all'ambiguità del termine "piano" che in tal caso non si riferisce ad un tensore bidimensionale ma al fatto che l'immagine di un tensore spaziale, che quindi agisce sullo spazio di vettori tridimensionale, è un piano. Nella letteratura inglese il tensore è detto *plane* (or *biaxial*).

¹⁰⁹Se il tensore doppio non è simmetrico la direzione principale associata alla radice semplice nulla non coincide con l'asse z ortogonale al piano del tensore. Ne consegue che nella rappresentazione (1.243) gli elementi A_{xz} e A_{yz} della terza colonna non saranno in generale nulli.

¹¹⁰È necessario richiedere che sia $A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2 \neq 0$ al fine di escludere che \mathbf{A} sia monoassiale oppure nullo.

Se invece il tensore doppio \mathbf{A} simmetrico possiede un autovalore semplice nullo di direzione principale z allora un qualunque vettore \mathbf{v} può scomporsi nella somma della sua componente in direzione z , che si trasforma nel vettore nullo, e di quella in direzione ortogonale, che si trasforma restando ortogonale a z . Inoltre a tutti i vettori deve corrispondere tutto il piano ortogonale a z altrimenti si ricadrebbe nel caso monoassiale e la radice nulla non sarebbe semplice, come volevasi dimostrare. ■

Nel caso di un tensore piano, l'unica particolarità nella rappresentazione di Mohr è che due delle tre circonferenze passano per l'origine degli assi.¹¹¹

1.7.3 Tensori piani simmetrici e deviatorici

Se un tensore piano simmetrico è anche deviatorico deve necessariamente possedere due radici opposte non nulle affinché la sua traccia sia nulla. Detto a l'autovalore positivo, ne consegue che la circonferenza di Mohr associata alla radice nulla ha centro nell'origine degli assi e raggio a , come illustrato nella fig. 1.21a. Si scelgano quali assi x e y i due assi rappre-

sentati nel piano di Mohr dai punti di coordinate $(0, -a)$ e $(0, a)$. Gli assi prescelti sono cartesiani ortogonali poiché i due punti che li rappresentano nel piano di Mohr sono opposti in diametro sulla circonferenza del problema piano associato all'autovalore semplice nullo. Ne risulta la seguente rappresentazione, in cui la sola componente non nulla è non diagonale:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = a (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x), \quad a \neq 0. \quad (1.244)$$

Si noti che vale anche l'inverso, cioè che se il tensore \mathbf{A} si rappresenta nella forma (1.244) in un dato sistema di coordinate, allora è un tensore simmetrico piano e deviatorico. Inoltre i suoi autovalori non nulli valgono a e $-a$ e le associate direzioni principali giacciono nel piano xy e si ottengono a partire da x ruotando di 45° in senso antiorario e, rispettivamente, orario sulla faccia positiva definita da z uscente, come illustrato in fig. 1.21b.

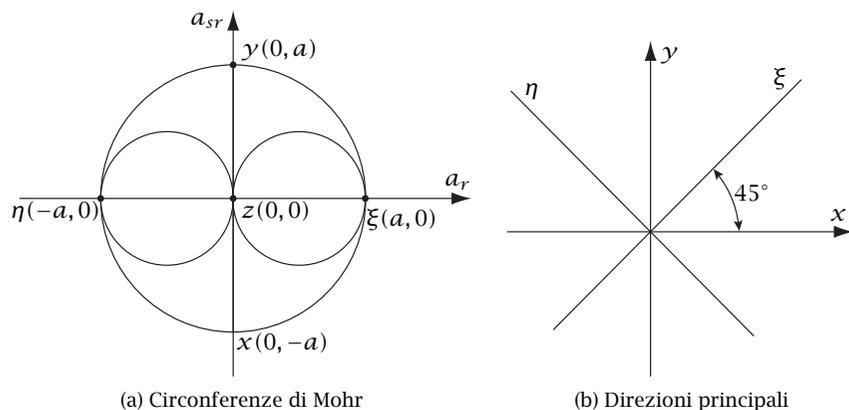


Figura 1.21: Tensore piano deviatorico

¹¹¹Salvo il caso in cui \mathbf{A} possieda un autovalore doppio non nullo. In tal caso la situazione sul piano di Mohr è simile a quella che si ha nel caso monoassiale, ma ora la circonferenza corrispondente all'autovalore semplice (nullo) collassa nel punto, diverso dall'origine, individuato dall'autovalore doppio (non nullo).

MODELLI MECCANICI DELLE STRUTTURE

2.1 Componenti elementari delle strutture

La *Scienza delle costruzioni*¹ si propone essenzialmente lo scopo di dare un fondamento comune allo studio del comportamento meccanico dei diversi tipi di *costruzioni*² eseguite dall'uomo. A tal fine è inevitabilmente strettamente connessa sia con gli studi che riguardano le interazioni delle costruzioni con i vari mezzi materiali con cui si trovano in contatto nel corso della loro esistenza che con quelli riguardanti le proprietà dei materiali di cui le costruzioni sono composte. L'importanza di tale studio risulta immediato ove si pensi che nel suo ambito si pone il problema di giudicare, nella fase progettuale di una costruzione:

1. la fattibilità della costruzione stessa dal punto di vista meccanico;
2. la resistenza alle sollecitazioni a cui si prevede la costruzione sarà assoggettata;

¹Tra i corsi e i trattati in lingua inglese i cui contenuti coincidono in tutto o in parte con quelli della Scienza delle costruzioni italiana di primo livello vi sono quelli di *Strength of Materials* (resistenza dei materiali), probabilmente i più aderenti, di *Mechanics of Structures* (meccanica delle strutture), che potrebbero però avere dei contenuti che nell'organizzazione italiana degli studi competono agli insegnamenti di tipo tecnologico come la Tecnica delle costruzioni del settore civile, e infine di *Theory of Elasticity* (teoria dell'elasticità), che potrebbero però avere dei contenuti avanzati oppure un'impronta nettamente matematica.

²Nella letteratura inglese *buildings*, soprattutto per costruzione civile, oppure *construction*.

3. la rispondenza della costruzione alle necessità che ne giustificano la sua realizzazione.

Inoltre, per il già costruito, la Scienza delle costruzioni fornisce gli strumenti per giudicare:

1. la resistenza di una costruzione nel suo effettivo stato sotto l'azione delle sollecitazioni a cui la costruzione stessa è assoggettata;
2. la fattibilità di eventuali modifiche che si rendessero desiderabili;
3. il tipo di interventi tesi a rimediare ad eventuali dissesti della costruzione o al suo non essere più adeguata all'uso previsto.

Per descrivere il comportamento meccanico di una costruzione occorre innanzitutto enucleare la *struttura*,³ ovvero occorre individuare le parti che la compongono e come queste interagiscono le une con le altre. L'individuazione della struttura soggiacente ad una data costruzione permette di ridurre lo studio del suo comportamento meccanico, che può essere molto complesso, all'interazione di parti dal comportamento meccanico più semplice. Non solo, le parti in cui possono scomporsi costruzioni anche molto diverse fra loro possono presentare spesso notevoli somiglianze di forma e di comportamento. Inoltre, alcune parti possono essere relativamente ininfluenti nei riguardi della *capacità portante*⁴ della costruzione.

³*Structure* nella letteratura inglese.

⁴Nella letteratura inglese *capacity load*, con riferimento a costruzioni civili.

ne, cioè della capacità di portare carichi, e in tal caso viene enucleata una struttura semplificata, detta *struttura portante*.⁵

In secondo luogo occorre studiare l'interazione della costruzione con gli eventuali mezzi materiali con cui si trova in contatto. I mezzi principali sono essenzialmente:

1. il terreno, su cui poggiano o sono fondate le costruzioni o che spinge opere di contenimento come i muri di sostegno o che risulta veicolo delle onde sismiche;
2. l'aria, relativamente alla quale basta ricordare l'effetto del vento oppure la forza di sostentamento degli aerei in volo;
3. l'acqua, con gli effetti, tra l'altro, della pressione sui contenitori (comprese le dighe di ritenuta) oppure il sostentamento assicurato ai vari tipi di imbarcazioni od ancora l'effetto delle onde e delle correnti sulle costruzioni marittime.

Altri mezzi con cui interagiscono le costruzioni possono essere vari tipi di fluidi oppure di liquidi, ma anche ammassi di materiali sciolti di vario tipo, come per esempio i cereali con la loro azione di pressione sulle pareti dei silos di contenimento. È intuibile che lo studio delle interazioni con i vari tipi di mezzi è indispensabile al fine di una corretta analisi dei carichi agenti su una struttura.

Da quanto detto ne risulta che lo studio meccanico di una costruzione consiste essenzialmente delle seguenti fasi:

1. individuazione della sua struttura portante;
2. individuazione dei carichi che agiscono su tale struttura portante;
3. studio della struttura portante tramite i modelli meccanici di comportamento delle singole parti.

Di queste fasi, quella che ci interessa prevalentemente in questo corso è l'ultima, ovvero sia lo studio di alcuni modelli meccanici interpretanti il comportamento di parti semplici di strutture, e il conseguente studio del comportamento meccanico di strutture portanti complessive. In tale studio le *costruzioni reali* sono lasciate, con termine teatrale, dietro le quinte. È

⁵Supporting structure nella letteratura inglese.

compito dei corsi a contenuto tecnologico fornire tutte quelle informazioni che riguardano la pratica realizzazione, a partire dalla fase progettuale per arrivare a quella esecutiva, di un particolare tipo di costruzione. Affinché non sorgano equivoci è bene dire che, quando una costruzione viene pensata, deve essere già ben presente quella che sarà la sua struttura portante, almeno se si aspira ad una buona progettazione e che quindi, a tale livello, deve essere ben chiaro il comportamento meccanico dei vari tipi di strutture.

Nel seguito ci si propone innanzitutto di descrivere il modello di *corpo continuo*⁶ che allo stato attuale risulta essere l'unico modello esistente, di per se stesso o in una qualche forma semplificata, per il calcolo effettivo di parti semplici di strutture, di strutture complessive e dei vari mezzi materiali che interagiscono con esse. Se la parte semplice di struttura che si vuole modellare presenta una geometria, ovvero sia una forma, particolare ne possono scaturire delle notevoli semplificazioni del modello continuo. Si descriveranno allora i modelli di corpo continuo semplificati su tale base, ovvero sia i modelli monodimensionali, in cui una dimensione "prevale" sulle altre due e i modelli bidimensionali, in cui due dimensioni "prevalgono" sulla terza.

2.2 Corpo continuo

Al fine di ottenere modelli strutturali effettivamente in grado di prevedere quantitativamente il comportamento meccanico delle costruzioni reali occorre prescindere, almeno in parte, dalla composizione discreta della materia e supporre quindi che questa possa essere indefinitamente decomposta in parti sempre più piccole. Il modello di *corpo continuo* assume di conseguenza l'ipotesi della *continuità*, sia per quel che riguarda la possibile distribuzione nello spazio della materia costituente il corpo che per quel che riguarda le funzioni che ne definiscono il comportamento. A tali funzioni sarà inoltre richiesto di essere sufficientemente regolari, almeno nel senso che sia possibile eseguire tutte quelle operazioni richieste dal dato modello.

⁶Un altro termine utilizzato è quello di *mezzo continuo*. Tale termine è più propriamente utilizzato nel caso in cui oggetto di studio sia uno dei mezzi materiali con i quali interagiscono le costruzioni e le macchine. Nella letteratura inglese si usa il termine *continuous body* per rendere corpo continuo e *continuous medium* oppure *continuum* per rendere mezzo continuo.

2.2.1 Geometria del corpo continuo

La forma del corpo può essere generica e per tale motivo viene comunemente rappresentata una forma il più “informe” possibile, simile a quella di una patata (fig. 2.1). È quindi evidente che nell’ambito di un tale model-

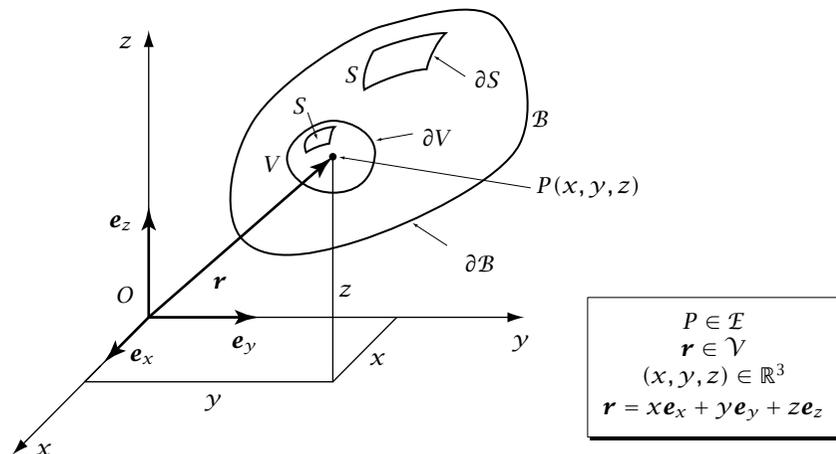


Figura 2.1: Corpo continuo

lo possono ricadere non solo tutte le parti semplici di strutture, comprese quelle mono o bidimensionali, ma anche le strutture complete e i mezzi materiali che interagiscono con esse. Ancora con riferimento alla fig. 2.1, il dominio \mathcal{B} , di contorno $\partial\mathcal{B}$, dello spazio euclideo \mathcal{E} tridimensionale occupato dal corpo continuo è detto *configurazione*⁷ dello stesso corpo. La configurazione \mathcal{B} che il corpo effettivamente assume ad un dato istante è poi detta *configurazione attuale*.⁸

Nel seguito sono elencati gli elementi geometrici fondamentali della generica configurazione di un corpo continuo:

1. i *punti* P , interni al corpo oppure posti sul suo contorno;
2. i *volumi* V estraibili dal corpo, con il loro contorno ∂V ;

3. le *superfici* S , con il loro contorno ∂S , appartenenti al contorno esterno $\partial\mathcal{B}$ del corpo oppure interne al corpo, per esempio sul contorno ∂V di un volume V interno al corpo;
4. le *linee* ℓ interne al corpo o poste sul suo contorno.

Per via dell’ipotesi di continuità, gli unici elementi isolabili da un corpo continuo sono costituiti dai volumi. Dato un generico punto P potrà quindi al più isolarsi un volume V intorno del punto e non il punto stesso. Con riferimento ad un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, i punti P possono essere individuati dal vettore posizione $\mathbf{r} = P - O$ oppure, numericamente, dalle coordinate (x, y, z) . Si noti che il punto appartiene al dominio \mathcal{B} occupato dal corpo mentre gli oggetti che lo individuano appartengono rispettivamente allo spazio dei vettori ordinari \mathcal{V} e allo spazio numerico a tre dimensioni \mathbb{R}^3 .

◇ ◇ ◇

Corpo microcontinuo. Il modello di corpo continuo non esclude la possibilità di inserire nel modello stesso delle proprietà micromeccaniche e di studiare dei fenomeni che dipendono dalla struttura discreta della materia. Innanzitutto a volte si usano modelli micromeccanici, che quindi tengono conto della struttura discreta della materia, al fine di ottenere dei particolari legami costitutivi nell’ambito del modello continuo. Inoltre l’ipotesi che il corpo sia completamente descritto dagli elementi geometrici elencati in precedenza lo qualifica quale *corpo continuo semplice*, e nel seguito si farà senz’altro riferimento a corpi semplici. Si potrebbe tuttavia costruire un modello più generale supponendo che ad ogni punto del corpo continuo sia associata una qualche “struttura microscopica” che necessiti di una descrizione indipendente, allo scopo di permettere di inglobare nel modello continuo delle proprietà micromeccaniche. Un modello di questo tipo è modernamente detto *corpo microcontinuo*.

Le applicazioni del modello di corpo microcontinuo riguardano, per esempio, i materiali compositi, le sospensioni, i liquidi biologici (come il sangue), i cristalli liquidi, lo studio della turbolenza nei fluidi, i polimeri (materiali composti da grandi molecole), la microfratturazione diffusa, le dislocazioni, i mezzi granulari, i continui soggetti a forze elettromagnetiche.

◇ ◇ ◇

⁷ Configuration nella letteratura inglese.

⁸ Current configuration nella letteratura inglese.

2.2.2 Solidi

Durante il moto o la deformazione un *corpo solido*⁹ tende a “conservare” la propria forma o, quanto meno, conserva un ordine tra le sue parti che permette di identificarle ad ogni istante. Risulta allora possibile assumere una configurazione fissa del corpo, detta *configurazione di riferimento*,¹⁰ a cui saranno riferite tutte le altre possibili configurazioni del corpo. I punti della configurazione di riferimento, detti *punti materiali*,¹¹ etichettano, con le loro coordinate, i punti del corpo solido che nel corso del tempo possono trovarsi in posizioni diverse dello spazio. In tale contesto la configurazione attuale, ovvero sia la configurazione effettivamente assunta dal solido ad un dato istante, è anche detta *configurazione deformata*¹² (deformata relativamente alla configurazione di riferimento), e i suoi punti sono detti *punti spaziali*.¹³ La descrizione del moto e della deformazione di un solido che consegue alla scelta di una configurazione di riferimento è detta descrizione *materiale* o *lagrangiana*.¹⁴

2.2.3 Fluidi

Nel caso di un *fluido*¹⁵ le singole parti che lo compongono si possono rimescolare e quindi normalmente sono indistinguibili le une dalle altre. Ciò nonostante nel corso del tempo si presenta ad ogni istante, a livello macroscopico, come un continuo geometrico. Data l'indistinguibilità delle singole parti, non importa quali di queste parti si trovino in un certo luogo dello spazio ad un dato istante, ma piuttosto quali sono le caratteristiche meccaniche di quella parte di fluido che si trova in quel luogo. Utilizzare il modello di corpo continuo nel caso dei fluidi significa ritenere che a livello macroscopico tali caratteristiche meccaniche siano descrivibili tramite delle funzioni continue.

Conviene allora assumere una data regione dello spazio, che si può indicare come *regione di controllo*, e descrivere le proprietà che hanno le parti di fluido che nel corso del tempo occupano una stessa parte della regione di

controllo. Per esempio, nel caso di un *liquido*,¹⁶ cioè di un fluido incompressibile, la regione di controllo potrebbe essere una condotta in pressione, come nel caso dello schema di fig. 2.2, in cui tutta la regione di control-

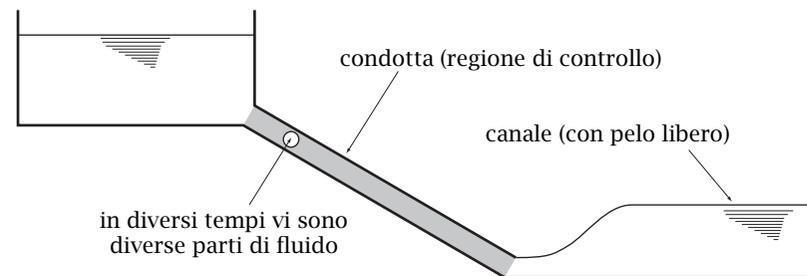


Figura 2.2: Liquido

lo è occupata dal liquido, oppure un canale, nel qual caso la regione di controllo è solo parzialmente occupata dal liquido e nasce il problema dell'individuazione del *pelo libero*,¹⁷ ossia della superficie che separa il liquido dalla soprastante atmosfera.

La descrizione dello stato di un fluido che consegue alla scelta di una regione di controllo dello spazio è detta descrizione *spaziale* o *euleriana*.¹⁸ Si presentano casi in cui la regione di controllo può anche essere infinita, per esempio nel caso della modellazione del moto di un corpo in un fluido. Se il fluido rappresenta l'atmosfera terrestre, e quindi il moto avviene internamente ad essa, la regione di controllo occuperà l'intero spazio, se invece il fluido rappresenta l'acqua del mare e il moto avviene alla sua superficie, la regione di controllo occuperà un semispazio.

2.2.4 Terreno

Il *terreno*¹⁹ si presenta come un solido molto esteso rispetto alle costruzioni che si fondano su di esso oppure alle interfacce che permettono la movimentazione dei vari tipi di veicoli (come strade, ferrovie e piste aeroportuali). Per questo motivo viene frequentemente modellato come

⁹ *Solid* nella letteratura inglese.

¹⁰ *Reference configuration* nella letteratura inglese.

¹¹ *Material points* nella letteratura inglese.

¹² *Deformed configuration* nella letteratura inglese.

¹³ *Spatial points* nella letteratura inglese.

¹⁴ *Material description* oppure *lagrangian description* nella letteratura inglese.

¹⁵ *Fluid* nella letteratura inglese.

¹⁶ *Liquid* nella letteratura inglese.

¹⁷ *Free surface* nella letteratura inglese.

¹⁸ *Spatial description* oppure *eulerian description* nella letteratura inglese.

¹⁹ *Soil* nella letteratura inglese.

un corpo solido infinito la cui configurazione di riferimento occupa un semispazio (fig. 2.3).

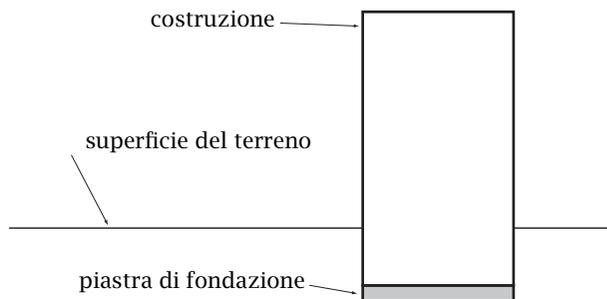


Figura 2.3: Terreno

2.3 Modelli monodimensionali

Se un corpo si sviluppa prevalentemente in una direzione, ovvero se ha due dimensioni trascurabili rispetto alla terza, si può cercare di modellarlo geometricamente facendo riferimento innanzitutto ad una sua *linea media* ℓ che in un qualche modo lo rappresenti (fig. 2.4). Innanzitutto la

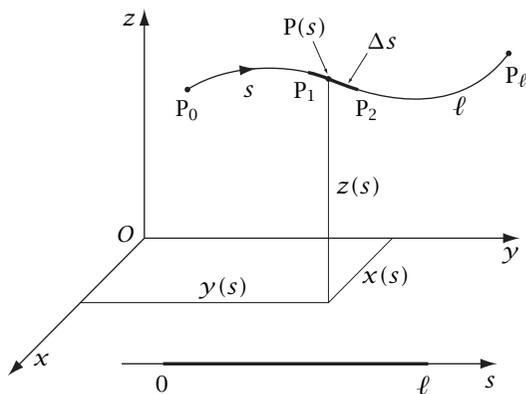


Figura 2.4: Modello monodimensionale

linea media prescelta dipenderà in generale non solo dalla forma del corpo monodimensionale che si vuole modellare ma anche dal modello che si intende utilizzare e che potrebbe far desiderare che la linea media abbia particolari proprietà significative nel dato modello. Dal punto di vista geometrico la linea media sarà in generale non solo *curva*, ma anche *sgheмба*, cioè non appartenente ad un piano. Si richiederà inoltre che la linea media sia sufficientemente regolare, nel senso che sia monoconnessa e priva di punti singolari o, in altri termini che abbia due e due soli punti di estremità e che in tutti i punti della linea sia definita la tangente alla linea stessa. Questa richiesta non esclude la possibilità di trattare casi più complessi, per i quali una linea media accettabile non può che essere pluriconnessa o presentare dei punti singolari, poichè tali casi si possono comunque modellare come sistemi composti da parti le cui linee medie soddisfano le previste richieste di regolarità.

È fondamentale comprendere che l'assunzione di descrivere il corpo per il tramite di una linea media implica che tutte le funzioni descriventi il comportamento del corpo stesso dovranno necessariamente essere delle funzioni di linea continue, in accordo con il fatto che il modello monodimensionale vuole essere una semplificazione del modello continuo tridimensionale. A tali funzioni sarà inoltre richiesto, come già per il corpo continuo tridimensionale, di essere sufficientemente regolari ancora nel senso che sia possibile eseguire tutte quelle operazioni richieste dal dato modello.

Gli elementi geometrici fondamentali della linea media di un corpo continuo monodimensionale saranno quindi:

1. i punti P interni alla linea;
2. i due punti P_0 e P_ℓ di prima e di seconda estremità, previa la scelta di una orientazione della linea stessa;
3. le parti di linea Δs con i loro due punti di estremità P_1 e P_2 .

Dato un sistema di tre assi cartesiani ortogonali $Oxyz$, i punti P della linea media saranno al solito individuati dalle loro coordinate cartesiane ortogonali (x, y, z) . Le parti di linea Δs descrivono invece i volumi estraibili da un solido monodimensionale.

2.3.1 Geometria delle curve spaziali²⁰

Ancora con riferimento la fig. 2.4, i punti di una linea curva possono essere individuati in modo naturale da una *coordinata curvilinea*²¹ s . Si tratta fondamentalmente di una corrispondenza biunivoca $s \mapsto P(s)$ sufficientemente regolare tra un intervallo I dell'insieme dei numeri reali \mathbb{R} e l'insieme dei punti della curva. Il generico punto P della curva è così individuato dalla coordinata curvilinea $s \in I$ tale che $P = P(s)$. Si noti che una coordinata curvilinea orienta in modo naturale la curva nel verso che il punto percorre al crescere della coordinata. Si noti anche che cambiando di segno alla coordinata, il che equivale a considerare la corrispondenza $-s \mapsto P(s)$, si modifica l'orientazione della curva.

Nel seguito si sceglierà prevalentemente, se non esclusivamente, una coordinata curvilinea s il cui incremento $\Delta s = s_2 - s_1$ tra due punti P_1 e P_2 che si susseguono sulla curva abbia il significato di *lunghezza d'arco*,²² ovvero sia di lunghezza del tratto di curva, tra i due dati punti. Si noti che se il punto P_2 precede il punto P_1 allora Δs è negativo. Per definire una coordinata lunghezza d'arco occorre scegliere un punto P_r di riferimento e la sua coordinata s_r , orientare la curva e porre $s = s_r \pm \Delta \ell$, dove s è la coordinata del generico punto P e $\Delta \ell$ la lunghezza del tratto di curva compreso tra P_r e P , restando inteso che va scelto il segno positivo, rispettivamente negativo, se sulla curva il punto P segue, rispettivamente precede, il punto di riferimento P_r . Nella fig. 2.4 il punto fisso P_r coincide con il punto iniziale P_0 della linea e la sua coordinata è nulla. Se questo è il caso, i punti della linea media ℓ saranno rappresentati dall'intervallo $[0, \ell]$, avendo indicato la lunghezza della linea ancora con il simbolo ℓ . Le coordinate cartesiane dei punti della linea in funzione della coordinata curvilinea s sono dette *equazioni parametriche* della linea stessa:

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), & s \in I. \\ z = z(s) \end{cases} \quad (2.1)$$

Come detto, una coordinata curvilinea è una funzione della variabile reale s a valori nei punti dello spazio. L'incremento $\Delta P = P(s + \Delta s) - P(s)$ di tale funzione a partire da un punto $P(s)$ della curva e corrispondente

all'incremento Δs della coordinata a partire da quella del dato punto è una funzione di variabile reale a valori vettoriali. La parte lineare dP di tale funzione, se esiste, definisce la *retta tangente*²³ alla curva nel dato punto. Nel caso la coordinata curvilinea s sia una lunghezza d'arco, l'incremento di coordinata Δs coincide con la lunghezza sulla curva mentre il modulo del corrispondente incremento ΔP del punto uguaglia la lunghezza della corda sottesa al dato tratto di curva. Per $\Delta s \rightarrow 0$ il rapporto tra le due lunghezze tende a 1 e ne consegue allora che la derivata del punto coincide con il versore \mathbf{t} della retta tangente alla curva, equiverso alla orientazione della curva stessa:²⁴

$$\frac{dP}{ds} = \mathbf{t}. \quad (2.2)$$

Al generico elemento di linea ds corrisponde l'incremento $dP = ds \mathbf{t}$ che individua il punto $P(s + ds)$ sulla linea tangente (fig. 2.5) e vale lo sviluppo asintotico:

$$\Delta P = ds \mathbf{t} + \mathbf{o}(ds), \quad \text{per } ds \rightarrow 0. \quad (2.3)$$

Questo fatto qualifica la tangente quale retta che meglio "approssima" la curva nell'intorno del dato punto.

Differenziando la relazione $\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1$ si ottiene $2 d\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 0$. Il vettore $d\mathbf{t}$, che esprime come tende a variare il versore tangente muovendosi lungo la curva, è dunque ortogonale al versore tangente stesso. Ancora con riferimento alla fig. 2.5, la retta avente la direzione dell'incremento $d\mathbf{t}$ della tangente definisce la *retta normale o normale principale*²⁵ alla curva nel dato punto. Il piano individuato dalla tangente e dalla normale principale è detto *piano osculatore*.²⁶ La retta normale al piano osculatore è poi detta *binormale*.²⁷ I versori tangenti nei due punti $P(s)$ e $P(s + ds)$ appartengono quindi, a meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in ds , al piano

²³ *Tangent line* nella letteratura inglese.

²⁴ Se s non è una lunghezza d'arco, la derivata del punto può essere messa nella forma:

$$\frac{dP}{ds} = \lambda \mathbf{t}.$$

dove λ rappresenta la lunghezza d'arco per unità di incremento della coordinata s e vale:

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{dP}{ds}\right) \cdot \left(\frac{dP}{ds}\right)}.$$

²⁵ *Principal normal* nella letteratura inglese.

²⁶ *Osculating plane* nella letteratura inglese.

²⁷ *Binormal* nella letteratura inglese.

²⁰ Per maggiori dettagli si veda per esempio do Carmo (1976, par. 1-5, pp. 1-22)

²¹ *Curvilinear coordinate* nella letteratura inglese.

²² *Arc length* nella letteratura inglese.

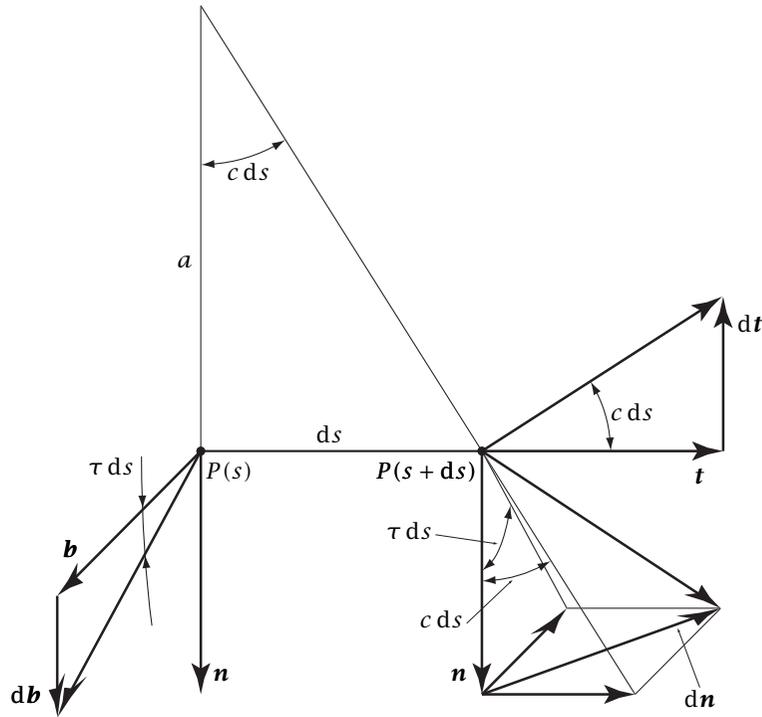


Figura 2.5: Geometria della curva sghemba

osculatore in $P(s)$ e la rotazione che porta l'uno nell'altro avviene attorno alla binormale. Si scelgano allora i versori \mathbf{n} della normale principale e \mathbf{b} della binormale in modo tale che la terna di versori $\mathbf{b}, \mathbf{n}, \mathbf{t}$, in quest'ordine, costituisca una base ortonormale destra:²⁸

$$\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{t} \times \mathbf{b}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{b} \times \mathbf{n}. \quad (2.4)$$

Si indichi poi con c la rotazione della tangente per unità di linea, detta *cur-*

²⁸L'orientazione del versore tangente è determinata dalla orientazione della curva e la sua variazione lungo la curva è continua. La scelta di una orientazione dei versori normale e binormale in un dato punto viene poi estesa in modo continuo agli altri punti. Si noti che le convenzioni (2.4) sono coerenti con le convenzioni utilizzate nel seguito nell'ambito della meccanica della trave, anche se in contrasto con le convenzioni normalmente utilizzate nell'ambito della geometria differenziale.

vatura, positiva se concorde con l'orientazione prescelta della binormale.²⁹ Ne consegue allora (fig. 2.5):

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = -c \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Un *punto di flesso*³⁰ della curva è, per definizione, un punto in cui la curvatura cambia di segno. I punti della curva prima e dopo un punto di flesso si trovano conseguentemente da parti opposte rispetto al piano contenente tangente e binormale.³¹ Se la funzione curvatura è continua allora in un punto di flesso la curvatura necessariamente si annulla, anche se tale circostanza non è sufficiente a caratterizzare un punto di flesso. Il *raggio di curvatura*³² a è, per definizione, l'inverso del modulo della curvatura:

$$a = \frac{1}{|c|}. \quad (2.6)$$

La *circonferenza osculatrice* della curva in $P(s)$ è, per definizione, tangente alla curva nel dato punto ed ha raggio pari al raggio di curvatura a . A meno di infinitesimi di ordine superiore al primo in ds la circonferenza osculatrice non solo contiene i punti $P(s)$ e $P(s+ds)$, ma in tali punti le tangenti alla circonferenza coincidono con quelle della curva, come si verifica immediatamente dalla fig. 2.5. Si noti che il centro della circonferenza si trova sulla normale principale, dalla parte negativa se la curvatura è positiva.

Differenziando la prima delle (2.4) e tenendo conto che per la (2.5) risulta $\mathbf{n} \times d\mathbf{t} = 0$ si ottiene il differenziale del versore binormale:

$$d\mathbf{b} = d\mathbf{n} \times \mathbf{t}, \quad (2.7)$$

che quindi risulta ortogonale alla tangente. Ma poiché il differenziale del versore binormale soddisfa la relazione $2d\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 0$, come richiesto dalla differenziazione della $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$, deve anche risultare ortogonale alla binormale e quindi avere la direzione normale alla curva. A meno di infinitesimi

²⁹Curvature nella letteratura inglese.

³⁰Inflection point nella letteratura inglese.

³¹Si può usare tale proprietà per definire un punto di flesso, senza quindi riferirsi al cambiamento di segno della curvatura. Resta quindi aperta la possibilità, a volte utilizzata in letteratura, di orientare la normale principale in ogni punto in modo tale da rendere sempre positiva la curvatura. Ma si viene così a creare una discontinuità dei versori normale e binormale negli eventuali punti di flesso della curva senza che vi siano reali discontinuità geometriche lungo la curva, il che sconsiglia tale pratica.

³²Radius of curvature nella letteratura inglese.

di ordine superiore al primo in ds i versori delle binormali in due punti $P(s)$ e $P(s + ds)$ appartengono quindi al piano normale in $P(s)$ alla curva e la rotazione che porta l'uno nell'altro avviene attorno alla tangente. Se con τ si indica la rotazione della binormale per unità di linea, detta *torsione*,³³ positiva se concorde con l'orientazione della tangente, si ottiene:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \tau \mathbf{n}. \quad (2.8)$$

Differenziando la seconda delle (2.4) ed utilizzando le (2.5) e (2.8), si ottiene infine:

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} \times \mathbf{b} + \mathbf{t} \times \frac{d\mathbf{b}}{ds} = c \mathbf{t} - \tau \mathbf{b}. \quad (2.9)$$

2.3.2 Fili

Il modello monodimensionale più semplice è quello di un *filo*,³⁴ caratterizzato dalla scarsa resistenza alla variazione di forma. È cioè possibile atteggiare il filo secondo una linea geometrica qualsiasi. Naturalmente l'ordine delle parti che compongono il filo viene mantenuto, cosicché non è improprio catalogare i fili tra i corpi solidi.

2.3.3 Travi

Una *trave*³⁵ è un solido monodimensionale che, a differenza dei fili, presenta una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Tale resi-

³³Torsion nella letteratura inglese.

³⁴In tale contesto il termine filo è usato in senso generico per indicare un solido monodimensionale con scarsa resistenza alla variazione di forma. Le *funi*, le *corde*, i *cavi*, le *catene* e i *fili metallici* sono tutti esempi di sistemi materiali modellabili come fili. Nella letteratura inglese si usano in senso generico i termini *string*, che corrisponde a corda sottile, e *cable*, che corrisponde a cavo. Altri termini utilizzati sono *rope*, che corrisponde a corda, *wire*, che corrisponde a filo metallico e *chain*, che corrisponde a catena.

³⁵Il termine trave, che strettamente parlando indica un elemento monodimensionale rettilineo orizzontale, è usato come termine generico per indicare un qualsiasi solido monodimensionale che presenti una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Esempi particolari di travi sono gli *alberi*, elementi rettilinei a sezione circolare utilizzati nelle costruzioni navali e nelle costruzioni meccaniche, i *pilastri*, elementi verticali di costruzioni civili, le *colonne*, elementi verticali a sezione circolare, le *pile*, elementi verticali di appoggio dei ponti, gli *archi*, elementi curvi di costruzioni civili, gli *anelli*, elementi curvi chiusi (che però, essendo biconnessi, sono più propriamente un sistema di travi che una trave vera e propria) e infine le *aste*, elementi rettilinei generici. Un altro termine per indicare una trave verticale è quello di *montante*. Nella letteratura inglese sono generalmente utilizzati i

termini *rod* e *bar*, corrispondenti di asta, quali termini generici, mentre con *beam* si indica generalmente una trave orizzontale, con *mast* un albero di nave, con *shaft* un albero di macchina, con *column* un pilastro, con *arch* un arco e con *ring* un'anello.

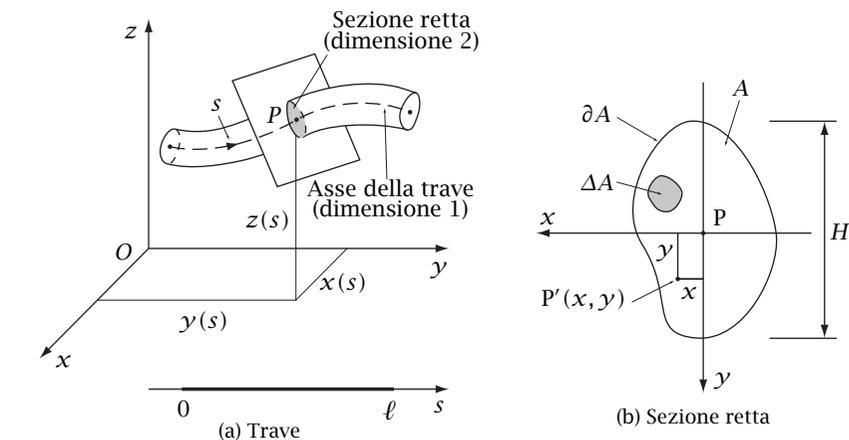


Figura 2.6: Trave (modello monodimensionale con struttura)

un modello *monodimensionale con struttura*, nel senso che alla geometria monodimensionale della linea d'asse occorre aggiungere la geometria bidimensionale delle sezioni rette associate ai punti della linea d'asse. Equivalientemente, una trave può anche essere definita quale solido generato dal moto di una figura piana, vincolata ad essere perpendicolare ad una data linea, che si muove nello spazio lungo la linea stessa variando, in generale, di forma e di dimensioni.

Geometricamente la sezione retta, indicata con la lettera A in fig. 2.6b, è una figura piana avente quale contorno ∂A una linea chiusa, oppure più linee chiuse se la figura è pluriconnessa. All'interno della sezione si possono isolare parti di area ΔA , il cui contorno sarà ancora una linea

termini *rod* e *bar*, corrispondenti di asta, quali termini generici, mentre con *beam* si indica generalmente una trave orizzontale, con *mast* un albero di nave, con *shaft* un albero di macchina, con *column* un pilastro, con *arch* un arco e con *ring* un'anello.

³⁶Cross section nella letteratura inglese.

chiusa. Infine, nel piano della sezione retta si sceglierà un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Pxy , con origine P appartenente alla linea d'asse.

Una parte continua di linea Δs della linea d'asse ℓ individua un *tronco di trave*, volume V del solido compreso tra le due sezioni rette di estremità del dato tratto di trave (fig. 2.7). Finché il solido monodimensionale è ana-

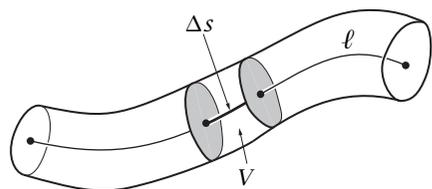


Figura 2.7: Tronco di trave

lizzato come trave all'interno di una meccanica della trave, i tronchi di trave sono gli unici volumi estraibili dal solido e le sezioni compaiono sempre integralmente. Tutte le volte in cui vengono invece estratti volumi che sono parti di tronchi di trave o altro oppure vengono considerate parti di sezioni rette il solido monodimensionale è analizzato come solido nell'ambito della meccanica dei solidi, sia allo scopo di implementare una meccanica della trave particolare che allo scopo di ottenere la soluzione nell'ambito della meccanica dei solidi di un problema risolto preventivamente nell'ambito della meccanica della trave.³⁷

Se con H si indica una dimensione significativa delle sezioni rette (fig. 2.6b), oppure una loro dimensione media, il rapporto H/ℓ fornirà un'indice della attendibilità del modello monodimensionale. Normalmente si indicherà questo fatto dicendo che il modello di trave è attendibile se tale rapporto è molto minore dell'unità, in simboli $H/\ell \ll 1$. L'intervallo di valori di H/ℓ che soddisfano tale condizione dipenderà dal caso concreto in esame. Poiché tale affermazione sembra peccare di ambiguità, conviene a tal punto ricordare, una volta per tutte, che solo l'accumulo di indagini teoriche e sperimentali e di esperienza tecnica legati ad un modello parti-

³⁷Attenzione al fatto che risolvere un problema nell'ambito della meccanica della trave significa determinare le funzioni di linea che descrivono il solido trave. Estendere tale soluzione nell'ambito della meccanica dei solidi significa determinare le funzioni che descrivono il solido quale continuo tridimensionale, funzioni che sono definite nella configurazione tridimensionale dello stesso corpo e che ne descrivono le proprietà.

colare è in grado di dissipare almeno in parte l'ambiguità che contraddistingue il dominio di applicabilità del modello stesso. Questo vale anche, ma non solo, nel caso esposto in cui il modello discusso è in un qualche senso una possibile semplificazione di un altro modello, anch'esso di suo soggetto ad analoghe ambiguità. È responsabilità di chi usa un modello decidere se nel caso concreto in esame esso è soddisfacente e quali sono i suoi limiti, utilizzando a tale scopo non solo la conoscenza già maturata e accumulata nella letteratura scientifica e tecnica, spesso in parte codificata nella normativa in vigore, ma anche procedendo se è il caso con proprie indagini teoriche e sperimentali, contribuendo in tal caso all'accumulo di conoscenza di cui si è detto.

2.3.4 Travi di sezione sottile

Se la sezione della trave è composta di parti di spessore medio b "piccolo" rispetto alla dimensione media globale H della sezione, la trave viene detta *di sezione sottile* oppure *in parete sottile*.³⁸ Questo fatto è alla base dello sviluppo di modelli di trave semplificati. Se questi modelli semplificati sono soddisfacenti si dice, al solito, che lo spessore b delle parti è molto più piccolo della dimensione H della sezione, in simboli $b/H \ll 1$.

Nella fig. 2.8a è illustrato il caso di una sezione sottile a doppio T. In tale

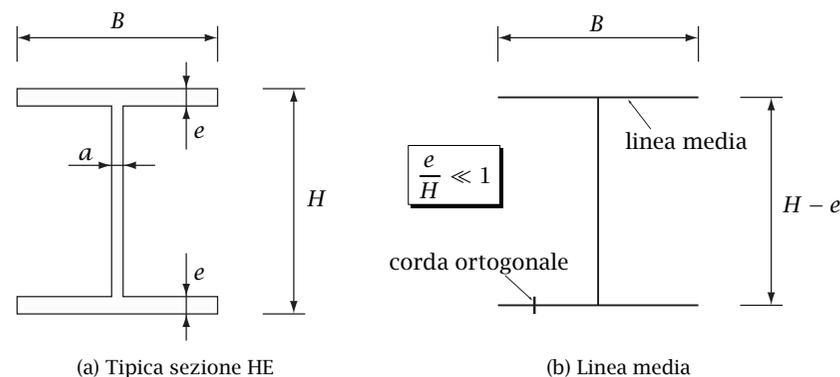


Figura 2.8: Sezione sottile aperta

³⁸Thin walled cross section nella letteratura inglese.

tipo di profilo lo spessore e delle ali è sempre maggiore dello spessore a dell'anima. Nel caso delle travi commerciali a doppio T di tipo IPE l'altezza H è maggiore della base B , mentre per le travi commerciali tipo HE è all'incirca uguale. Come indice di spessore sottile si può allora assumere in tal caso il rapporto e/H .

Nel caso di una trave di sezione sottile si può fare riferimento alla linea media della sezione, che è una linea piana posta nel piano della sezione (fig. 2.8b). Ad ogni punto della linea è associata la corda ortogonale alla linea stessa. Se la linea media è aperta, come nel caso della fig. 2.8b, la trave si dice *di sezione sottile aperta* o *in parete sottile aperta*.³⁹ Se invece la linea media è una curva chiusa, come nel caso di fig. 2.9, la trave si dice

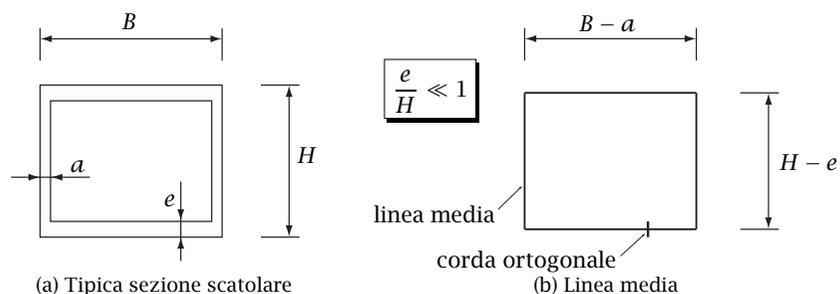


Figura 2.9: Sezione sottile chiusa

di sezione sottile chiusa o *in parete sottile chiusa*.⁴⁰

2.3.5 Problema di Saint-Venant⁴¹

Si tratta del problema della determinazione, nell'ambito della meccanica dei solidi tridimensionali, di alcune soluzioni particolari riguardanti un solido cilindrico (fig. 2.10) avente le basi di forma generica, composto di materiale omogeneo e isotropo e caricato solo in corrispondenza delle basi. In fig. 2.10 si sono indicate con A_0 e A_l le basi del cilindro e con \mathcal{L} la sua superficie laterale, che insieme individuano tutta la superficie di contorno del cilindro.

³⁹ *Open cross section* nella letteratura inglese.

⁴⁰ *Closed cross section* nella letteratura inglese.

⁴¹ *Saint-Venant's problem* nella letteratura inglese.

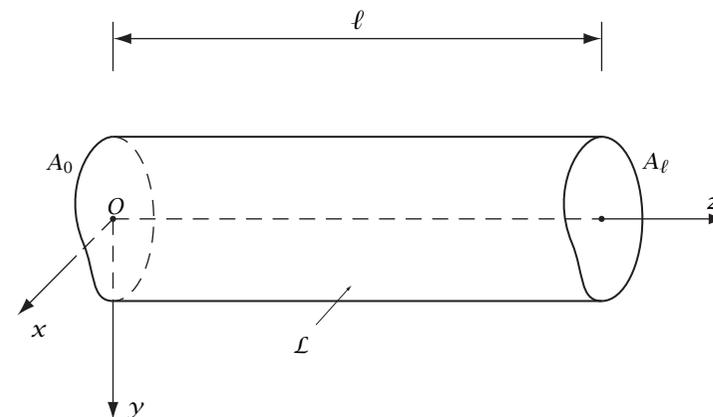


Figura 2.10: Solido di Saint-Venant

Si noti che un solido cilindrico di lunghezza l molto maggiore delle dimensioni delle basi corrisponde ad una trave ad asse rettilineo ed a sezione retta costante lungo l'asse della trave. Ne consegue la possibilità di utilizzare le soluzioni di tale problema allo scopo di implementare modelli realistici di travi.

2.4 Modelli bidimensionali

Un solido che si sviluppa prevalentemente in due direzioni, avente quindi una dimensione trascurabile rispetto alle altre due, potrebbe essere modellato geometricamente facendo riferimento ad una superficie "media" S (fig. 2.11). Tale superficie media dipenderà senz'altro dalla forma del corpo bidimensionale che si vuole modellare, ma sulla sua scelta potrebbero influire anche altri fattori tra cui il desiderio che abbia particolari proprietà.

La superficie media che rappresenta un solido bidimensionale sarà in generale *curva*. Si richiederà inoltre che sia sufficientemente regolare, nel senso che sia parametrizzabile e che in quasi tutti i punti della superficie media sia definito il piano tangente alla superficie stessa. Inoltre occorre avere ben chiaro che al fatto di descrivere il corpo per il tramite di una superficie media consegue che tutte le funzioni descriventi il comportamento del corpo stesso dovranno necessariamente essere delle funzioni definite

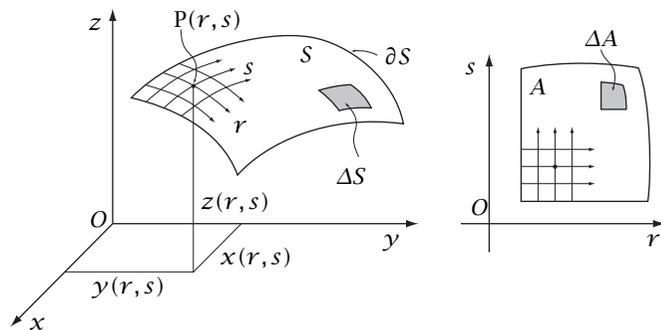


Figura 2.11: Modello bidimensionale

sulla superficie stessa e continue, in accordo con il fatto che il modello bidimensionale vuole essere una semplificazione del modello continuo tridimensionale. Tali funzioni dovranno anche essere sufficientemente regolari, almeno nel senso che sia possibile eseguire tutte quelle operazioni richieste dal dato modello.

Gli elementi geometrici fondamentali della superficie media di un corpo continuo bidimensionale saranno quindi:

1. i punti P interni alla superficie S ;
2. la linea continua chiusa ∂S di contorno della superficie;⁴²
3. le parti di superficie ΔS con la loro linea di contorno chiusa.

Le parti di superficie ΔS descrivono i volumi estraibili da un solido bidimensionale, coerenti con la descrizione bidimensionale che se ne vuole dare. Si noti comunque che considerando il solido quale normale solido tridimensionale risulta sempre possibile estrarre dei volumi che non corrispondono a parti di superficie.

◇ ◇ ◇

Geometria delle superfici.⁴³ Con riferimento ancora alla fig. 2.11, i punti della superficie media S possono essere riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane

⁴²La superficie potrebbe essere senza contorno, come nel caso di una sfera, oppure il contorno potrebbe essere composto da più di una linea continua chiusa, come nel caso di una superficie cilindrica con linea direttrice chiusa.

⁴³Per maggiori dettagli si veda per esempio do Carmo (1976, cap. 3 e cap. 4, pp. 51-216)

ortogonale $Oxyz$, ma possono anche essere individuati da due coordinate curvilinee r ed s . In quest'ultimo caso, si tratta fondamentalmente di una corrispondenza biunivoca $(r, s) \mapsto P(r, s)$ sufficientemente regolare tra un dominio A dell'insieme delle coppie di numeri reali \mathbb{R}^2 e l'insieme dei punti della superficie media. Il generico punto P della superficie è così individuato dalla coppia di coordinate curvilinee $(r, s) \in A$ tale che $P = P(r, s)$. Facendo variare la prima coordinata r e tenendo la seconda coordinata s costante, e viceversa, si disegna sulla superficie media un reticolo costituito da due famiglie di curve. Attraverso le coordinate curvilinee, ad un elemento di superficie ΔS sulla superficie S corrisponde un elemento ΔA nel dominio A che rappresenta la superficie in \mathbb{R}^2 .

Le coordinate cartesiane (x, y, z) dei punti della superficie media S in funzione delle coordinate curvilinee r ed s sono dette *equazioni parametriche* della superficie stessa:

$$\begin{cases} x = x(r, s) \\ y = y(r, s), & (r, s) \in A. \\ z = z(r, s) \end{cases} \quad (2.10)$$

Occorre a questo punto ricordare che non è in generale possibile parametrizzare in modo univoco una generica superficie. In altri termini, una singola parametrizzazione descrive in generale solo parte di una superficie generica. Per descrivere un'intera superficie occorre quindi in generale più di una parametrizzazione.⁴⁴

Si indichino con \mathbf{r} e \mathbf{s} i vettori tangenti alle curve $s = \text{cost}$ e $r = \text{cost}$ e rispettivamente:

$$\mathbf{r} = \frac{\partial P}{\partial r}, \quad \mathbf{s} = \frac{\partial P}{\partial s}. \quad (2.11)$$

I vettori \mathbf{r} e \mathbf{s} individuano il piano tangente nel generico punto di coordinate (r, s) e, attraverso il loro prodotto vettoriale normalizzato, il versore \mathbf{N} normale alla superficie, orientato dalle orientazioni delle linee $s = \text{cost}$ e $r = \text{cost}$:

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{s}}{|\mathbf{r} \times \mathbf{s}|}. \quad (2.12)$$

La variazione $d\mathbf{N}$ del versore normale avviene ortogonalmente al versore normale \mathbf{N} stesso e quindi è un vettore del piano tangente al pari della variazione dP di un punto sulla superficie. Ne risulta che il gradiente $\text{grad } N$ del campo vettoriale $N(r, s)$ definito sulla superficie rappresenta una corrispondenza lineare $dP \mapsto dN$ nel piano tangente, ovvero sia un tensore del secondo ordine piano.

⁴⁴Il concetto di *superficie regolare* è spesso definito richiedendo che per ogni suo punto esista almeno un intorno del dato punto descrivibile da una parametrizzazione sufficientemente regolare. Il sufficientemente regolare può variare da autore ad autore, ma in generale garantisce che esista il piano tangente, e quindi la normale, in ogni punto della data superficie. Ne consegue che una curva intersezione della superficie con un piano è regolare, almeno nel senso che è dotata di tangente in ogni punto. Nella letteratura inglese superficie regolare si rende con *regular surface*.

Una proprietà fondamentale di $\text{grad}N$ riguarda il fatto di essere un tensore doppio simmetrico e quindi di avere due direzioni principali ortogonali tra loro.

Dimostrazione. Data una parametrizzazione $(r, s) \mapsto P(r, s)$ nell'intorno di un punto P , due generici vettori \mathbf{u} e \mathbf{v} del piano tangente alla superficie in P possono mettersi nella forma:

$$\mathbf{u} = u_r \mathbf{r} + u_s \mathbf{s}, \quad \mathbf{v} = v_r \mathbf{r} + v_s \mathbf{s}. \quad (2.13)$$

Ne consegue che:

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad} N \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \text{grad} N \mathbf{u} = (u_r v_s - u_s v_r) (\mathbf{r} \cdot \text{grad} N \mathbf{s} - \mathbf{s} \cdot \text{grad} N \mathbf{r}). \quad (2.14)$$

Derivando la relazione $\mathbf{N} \cdot \mathbf{r} = 0$ rispetto a s e la relazione $\mathbf{N} \cdot \mathbf{s} = 0$ rispetto a r e sottraendo si ottiene poi:

$$\mathbf{r} \cdot \text{grad} N \mathbf{s} - \mathbf{s} \cdot \text{grad} N \mathbf{r} + \mathbf{N} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.15)$$

La seguente uguaglianza completa infine la dimostrazione:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} - \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial r} = \frac{\partial^2 P}{\partial s \partial r} - \frac{\partial^2 P}{\partial r \partial s} = 0. \quad (2.16)$$

■

Si consideri ora una direzione t sul piano tangente alla superficie S nel punto P (fig. 2.12) di versore \mathbf{t} e si indichi con \mathbf{b} la direzione normale a t sul piano tangente di versore \mathbf{b} tale che la terna di versori $\mathbf{b}, \mathbf{N}, \mathbf{t}$, in quest'ordine, costituisca una base ortonormale destra. Ciò premesso l'incremento $d\mathbf{N}$ della normale \mathbf{N} alla superficie nella direzione t , corrispondente quindi ad un incremento del punto del tipo $dP = d\ell \mathbf{t}$, si può mettere in una forma analoga a quella della relazione (2.9), p. 62, che fornisce l'incremento della normale principale ad una curva:

$$d\mathbf{N} = c_t d\ell \mathbf{t} - \tau_{tb} d\ell \mathbf{b}, \quad (2.17)$$

In tale relazione c_t e τ_{tb} sono gli angoli di rotazione per unità di linea della normale alla superficie intorno agli assi \mathbf{b} e \mathbf{t} rispettivamente e valgono:

$$c_t = \mathbf{t} \cdot \text{grad} N \mathbf{t} \quad \tau_{tb} = -\mathbf{b} \cdot \text{grad} N \mathbf{t}. \quad (2.18)$$

Ne risulta la seguente rappresentazione di $\text{grad} N$ nella base ortonormale destra con primo versore \mathbf{t} e secondo versore \mathbf{b} :

$$[\text{grad} N] = \begin{bmatrix} c_t & -\tau_{tb} \\ -\tau_{bt} & c_b \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

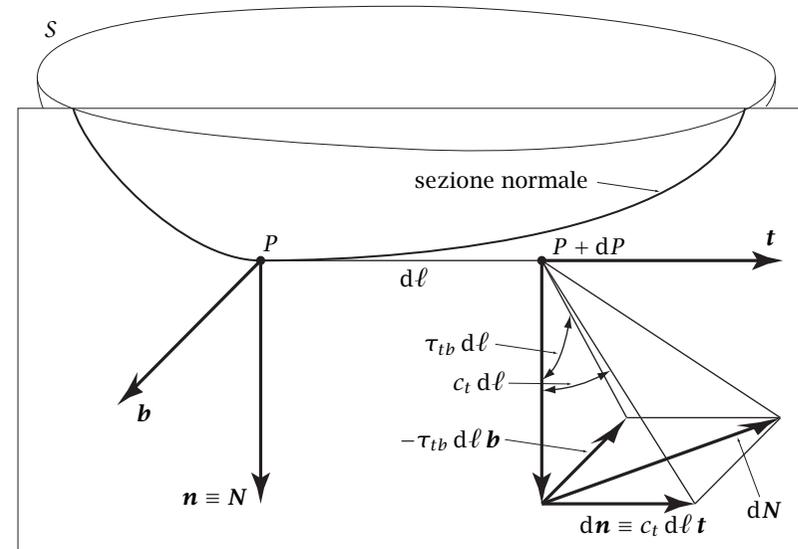


Figura 2.12: Sezione normale

dove c_b e τ_{bt} sono le rotazioni per unità di linea attorno agli assi $-\mathbf{t}$ e \mathbf{b} che la normale subisce muovendosi in direzione \mathbf{b} . La simmetria di $\text{grad} N$ assicura che $\tau_{tb} = \tau_{bt}$.

Per dare un significato fisico alla componente c_t della rotazione che la normale subisce muovendosi nella direzione t , si consideri la curva piana *sezione normale* di S nella direzione t , ovvero la curva sezione della superficie con il piano normale contenente t (fig. 2.12). Essendo una curva piana di normale principale \mathbf{n} coincidente con \mathbf{N} , la variazione $d\mathbf{t}$ della tangente, in accordo con la (2.5), p. 61, vale $-c d\ell \mathbf{N}$, se c è la curvatura della sezione normale. Poiché la tangente ad una curva che giace sulla superficie è ortogonale in ogni punto alla normale alla superficie in quel punto deve risultare $(\mathbf{t} - c d\ell \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{N} + c_t d\ell \mathbf{t} - \tau_{tb} d\ell \mathbf{b}) = 0$ e quindi $c_t d\ell - c d\ell = 0$ e infine $c_t = c$. Ne risulta che c_t rappresenta la curvatura della sezione normale nella direzione t . Si noti che c_t positivo significa che la convessità della curva è dalla parte di \mathbf{N} positiva.

Per dare poi un significato fisico alla seconda componente τ_{tb} della rotazione che la normale subisce muovendosi nella direzione t , si consideri una curva per P di piano osculatore coincidente con il piano normale alla superficie contenente t , quindi con tangente \mathbf{t} e normale principale \mathbf{N} , la cui normale principale si incrementi come \mathbf{N} . Confrontando le (2.9), p. 62, e (2.17) se ne deduce che τ_{tb} coincide

con la torsione di tale curva. Una curva appartenente alla superficie con normale principale coincidente in ogni punto con la normale alla superficie è detta *curva geodetica* e per tale motivo τ_{tb} è detta *curvatura geodetica*.⁴⁵

Se ξ è una direzione principale di $\text{grad } N$, la normale N alla superficie varia in tale direzione restando nel piano individuato da N e da ξ . Questo implica che la sezione normale ha normale principale che varia come la normale alla superficie. Il valore principale c_ξ associato alla direzione principale ξ , che coincide come detto con la curvatura della sezione normale, viene detto *curvatura principale* mentre la direzione principale è detta *principale di curvatura*.

Si conclude questa breve esposizione rendendo noto che con il termine di *curvatura gaussiana* si definisce il determinante di $\text{grad } N$, mentre con quello di *curvatura media* si definisce metà della traccia di $\text{grad } N$.

◇ ◇ ◇

2.4.1 Membrane

Il modello bidimensionale più semplice è quello di una *membrana*⁴⁶ caratterizzato, come per i fili, da una scarsa resistenza alla variazione di forma. È cioè possibile deformare la membrana con relativa facilità. Comunque, a causa della doppia curvatura di una superficie, una membrana possiede una maggiore rigidità alla variazione di forma rispetto a quella di un filo. Ovverossia non sempre è possibile, senza sforzo, adattare una membrana ad una generica superficie. Come nel caso dei fili, l'ordine delle parti che compongono la membrana viene mantenuto, cosicché non è improprio catalogare anche le membrane tra i corpi solidi.

2.4.2 Lastre

Una *lastra*⁴⁷ è un solido bidimensionale che presenta sempre una non trascurabile resistenza alla variazione di forma. Tale resistenza dipende,

⁴⁵Ci sono vari modi per definire una curva geodetica su una superficie, ma comunque venga definita se ne può dedurre tale proprietà. Nella letteratura inglese curva geodetica e curvatura geodetica si rendono con *geodesic curve* e *geodesic curvature* rispettivamente.

⁴⁶*Membrane* nella letteratura inglese.

⁴⁷Il termine lastra è usato come termine generico per indicare un qualsiasi solido bidimensionale di tale tipo. Esempi particolari di lastre sono le *piastre*, ovverossia le lastre piane caricate ortogonalmente al piano della lastra, le *travi parete*, lastre piane verticali impiegate in costruzioni civili, i *gusci*, lastre con superficie media a semplice o doppia curvatura, i *tubi*, elementi cilindrici cavi e infine le *volte* e le *cupole*, gusci impiegati quali coperture in costruzioni civili. Nella letteratura inglese sono generalmente utilizzati il termine *shell*, che significa guscio, per indicare le lastre curve e *plate* per indicare le lastre piane.

oltre che dal materiale di cui è composta la lastra, anche dalla geometria tridimensionale della lastra stessa. In tale caso viene associato ad ogni punto della superficie media il corrispondente *segmento ortogonale*, figura geometrica monodimensionale che si ottiene intersecando la lastra con una linea perpendicolare alla sua superficie media in corrispondenza del punto considerato (fig. 2.13). La lastra è dunque un modello *bidimensionale*

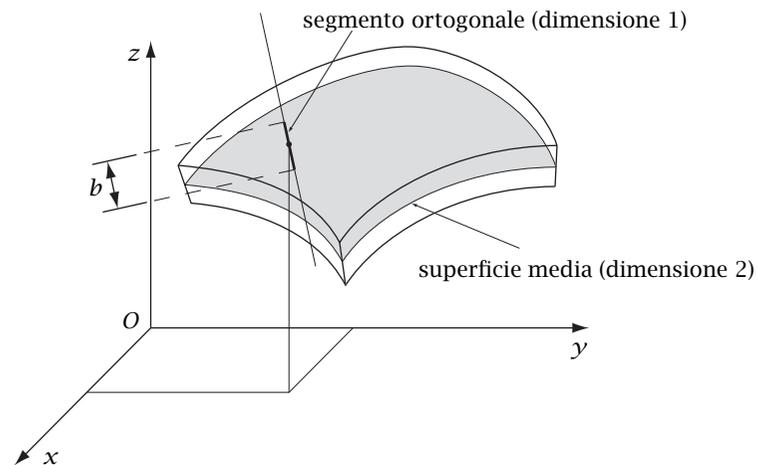


Figura 2.13: Lastra (modello bidimensionale con struttura)

con struttura, nel senso che alla geometria bidimensionale della superficie media occorre aggiungere la geometria monodimensionale dei segmenti ortogonali ai punti della superficie media.

Se con b_{\max} si indica lo spessore massimo della lastra e con H si indica una dimensione significativa della superficie media della lastra, il rapporto b_{\max}/H fornirà un'indice della attendibilità del modello bidimensionale. Si indica questo fatto dicendo che il modello di lastra è attendibile se $b_{\max}/H \ll 1$. Ancora una volta, l'intervallo di valori di b_{\max}/H che soddisfano tale condizione dipenderà dal caso concreto in esame e sarà responsabilità di chi userà tale modello sapere quando è soddisfacente e quali sono i suoi limiti.

2.4.3 Travi di sezione sottile

Le travi di sezione sottile (cfr. il par. 2.3.4) la cui sezione retta è composta di parti di spessore medio piccolo rispetto alla dimensione media globale della sezione, possono essere modellate anche come lastre o come insiemi di lastre nel caso vi siano spigoli di raccordo.

In molte circostanze il modello di trave di sezione sottile è sufficiente, ma esistono fenomeni, anche molto pericolosi, che non si prestano ad essere descritti nel modello in questione. Tra questi, i fenomeni di *instabilità locale*⁴⁸ con la formazione, per esempio, di rigonfiamenti localizzati (fenomeno dell'*imbozzamento*) oppure di vere e proprie onde aventi la direzione dell'asse della trave ed una lunghezza tipica delle onde comparabile con la dimensione media della sezione retta. In questi casi diventa inevitabile l'uso del modello di lastra per interpretare il comportamento di una trave in parete sottile.

⁴⁸*Local instability* nella letteratura inglese. Il rigonfiamento localizzato viene reso con *buckles*, mentre la deformazione ad onde con il termine di *ripple*.

FONDAMENTI DI MECCANICA DEI SOLIDI

Come già detto,¹ nel caso di un solido è possibile assumere una configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 per mappare i punti del solido il cui moto è oggetto di studio. Per esempio, in fig. 3.1 è illustrato il caso di un soli-

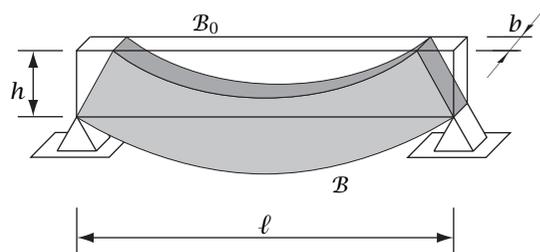


Figura 3.1: Deformazione di una trave

do monodimensionale la cui generica configurazione deformata è descritta con riferimento ad una configurazione cilindrica che, oltre ad essere geometricamente semplice, potrebbe anche rappresentare la configurazione ideale che il solido avrebbe se non fosse soggetto a forze.

Nel seguito ci si porrà pertanto da un punto di vista lagrangiano, scegliendo una opportuna configurazione di riferimento. Si noti che tale scelta è in linea di principio arbitraria, a parte la coerenza con le ipotesi alla base dei problemi considerati oltre al fatto che la configurazione di riferimento

¹Cfr. il par. 2.2.2, p. 58.

possa far parte di un moto che a partire da essa conduca alla o alle configurazioni effettive del corpo che si vogliono descrivere. Si faccia attenzione al fatto che far parte di un possibile moto non significa far parte del moto che si vuole descrivere, anche se spesso la configurazione di riferimento coincide con quella che il corpo assume ad un certo istante, per esempio l'istante iniziale, poiché è bene comunque privilegiare le scelte in grado di semplificare l'analisi del problema oggetto di studio. Nel caso del problema statico della determinazione della configurazione equilibrata sotto date forze, una scelta usuale è quella della configurazione che il corpo assume in assenza di forze applicate. Si noti che quest'ultima configurazione rappresenta una idealità poiché, almeno sulla Terra, non esiste corpo non soggetto al peso proprio.

3.1 Cinematica

3.1.1 Deformazione e spostamento

Per descrivere, da un punto di vista lagrangiano, la configurazione che un corpo solido assume ad un generico istante si può utilizzare la funzione ϕ che mappa la configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento nella configurazione \mathcal{B} deformata:

$$\phi : \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}, \quad X \mapsto \mathbf{x} = \phi(X), \quad (3.1)$$

dove la lettera X indica un generico punto materiale e \mathbf{x} il corrispondente punto spaziale (fig. 3.2). Tale funzione è detta *funzione di deformazione* o,

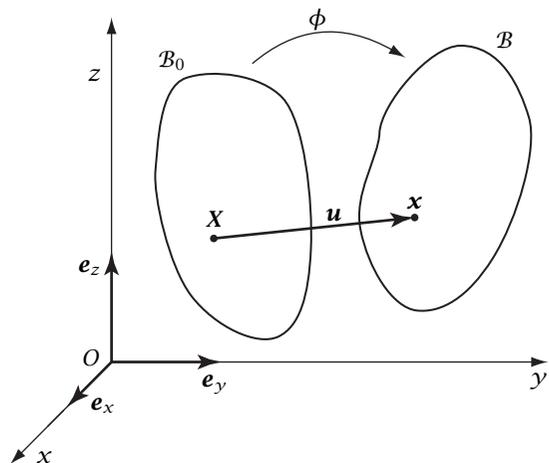


Figura 3.2: Deformazione e spostamento

più semplicemente, *deformazione*² del corpo.

Alternativamente, si può utilizzare il vettore *spostamento*³ \mathbf{u} che mappa la configurazione B_0 di riferimento nello spazio vettoriale ordinario \mathcal{V} (fig. 3.2):

$$\mathbf{u} : B_0 \rightarrow \mathcal{V}, \quad X \mapsto \mathbf{u}(X) = \mathbf{x} - X, \quad (3.2)$$

e che costituisce pertanto un campo vettoriale sulla configurazione di riferimento. Dalle (3.1) e (3.2) si deduce immediatamente la seguente relazione tra la funzione ϕ di deformazione e il campo \mathbf{u} degli spostamenti:

$$\mathbf{u}(X) = \phi(X) - X. \quad (3.3)$$

Scegliendo un sistema di coordinate cartesiano ortogonale, la funzione di deformazione (3.1) e il campo vettoriale (3.2) si scindono ognuno

²Se la configurazione deformata differisce da quella indeformata per una trasformazione rigida (cfr. il par. 3.1.5, p. 78), la funzione di deformazione ϕ coincide con la stessa trasformazione rigida e la “deformazione” del corpo è nulla. In inglese si usa il termine *deformation function*.

³*Displacement vector* nella letteratura inglese.

in tre campi scalari x_i e u_i ($i = x, y, z$) delle tre variabili scalari X, Y, Z , coordinate del punto materiale X :

$$x_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto x_i = x_i(X, Y, Z), \quad (3.4)$$

$$u_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y, Z) \mapsto u_i = u_i(X, Y, Z), \quad (3.5)$$

dove x_i è la i -esima coordinata del punto spaziale \mathbf{x} mentre u_i rappresenta la i -esima componente del vettore spostamento \mathbf{u} rispetto alla base \mathbf{e}_i dei versori degli assi coordinati (fig. 3.2).

Si noti che la deformazione, lo spostamento e tutti i concetti che da questi derivano sono dipendenti dalla configurazione di riferimento. È infatti evidente che la medesima configurazione deformata viene individuata da diverse funzioni di deformazione e da diversi campi di spostamento relativamente a diverse configurazioni di riferimento.

◇ ◇ ◇

Corpi microcontinui. La funzione ϕ di deformazione (3.1) individua in modo completo la cinematica del corpo continuo nel caso di *corpo semplice*, e nel seguito faremo senz'altro riferimento a corpi continui semplici. Come già detto, si potrebbe tuttavia considerare un modello di *corpo microcontinuo*, ottenuto associando una qualche “struttura microscopica” ad ogni punto del corpo continuo. Alla funzione ϕ di deformazione occorre di conseguenza associare una o più funzioni che descrivano il comportamento della struttura aggiuntiva.

I corpi microcontinui si distinguono principalmente in *corpi micropolari*, detti anche *polari* o di *Cosserat*,⁴ e in *corpi micromorfici* a seconda che la struttura associata ai punti sia rigida oppure, rispettivamente, deformabile. Per esempio, nel caso dei corpi micropolari ad ogni punto può essere associata una terna rigida di assi, che nel corso del moto non solo subisce uno spostamento (lo spostamento del punto a cui la terna è associata), ma anche una rotazione. Il punto acquista così una orientazione (da cui il termine polare) ed è allora possibile parlare di “rotazione di un punto”. Il comportamento della struttura aggiuntiva è quindi in tal caso descritto da una rotazione.

◇ ◇ ◇

3.1.2 Gradienti della deformazione e degli spostamenti

Dato un generico punto materiale X e il corrispondente punto spaziale $\mathbf{x} = \phi(X)$, si considerino gli incrementi $\Delta \mathbf{x}$ del punto spaziale e $\Delta \mathbf{u}$

⁴Dal nome dei fratelli Cosserat che, nel 1909, per primi esposero una teoria sull'argomento.

del campo degli spostamenti in funzione dell'incremento ΔX del punto materiale (fig. 3.3):

$$\Delta \mathbf{x} = \phi(X + \Delta X) - \phi(X), \tag{3.6}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(X + \Delta X) - \mathbf{u}(X). \tag{3.7}$$

Ne risultano due funzioni definite nello spazio dei vettori e a valori vet-

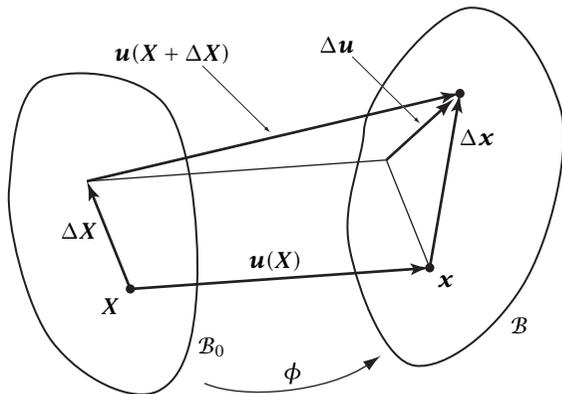


Figura 3.3: Incremento della deformazione e degli spostamenti

toriali le cui parti lineari, se esistono, definiscono due tensori doppi detti *gradiente della deformazione* e, rispettivamente, *gradiente (materiale) degli spostamenti*:⁵

$$\Delta \mathbf{x} = \text{Grad } \phi \Delta X + o(|\Delta X|), \tag{3.8a}$$

$$\Delta \mathbf{u} = \text{Grad } \mathbf{u} \Delta X + o(|\Delta X|). \tag{3.8b}$$

La iniziale maiuscola del simbolo Grad sottolinea che l'operazione gradiente è fatta su una funzione definita nella configurazione di riferimento B_0 . Data l'importanza che i due gradienti definiti dalle (3.8) hanno nella meccanica del continuo è inoltre consuetudine diffusa ma non universale di riservare loro i due simboli speciali \mathbf{F} e \mathbf{H} :

$$\mathbf{F} = \text{Grad } \phi, \quad \mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}. \tag{3.9}$$

⁵ *Deformation gradient* e *displacement gradient* nella letteratura inglese.

Indicando con dX l'elemento lineare uscente dal punto X della configurazione di riferimento B_0 e con dx l'analogo elemento lineare uscente dal punto x corrispondente di X nella configurazione deformata B , si ha (fig. 3.4):

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} dX. \tag{3.10}$$

Se invece $d\mathbf{u}$ è il differenziale di \mathbf{u} (valutato nel punto materiale X) si ha:

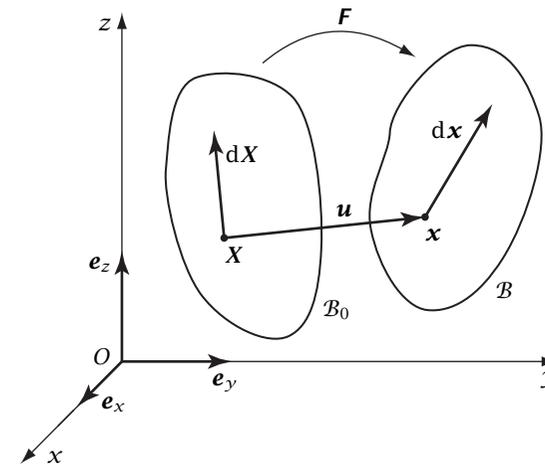


Figura 3.4: Elementi di linea

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H} dX. \tag{3.11}$$

Dalla (3.10) e dalla uguaglianza:

$$d\mathbf{x} = dX + d\mathbf{u} = (\mathbf{I} + \mathbf{H}) dX, \tag{3.12}$$

si ottiene poi la relazione tra i gradienti della deformazione e dello spostamento:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H}. \tag{3.13}$$

Le componenti di \mathbf{F} e \mathbf{H} in un generico sistema di coordinate cartesiano ortogonale, tenendo conto di quanto stabilito al par. 1.3.4, p. 30, e del fatto che le coordinate x_i possono interpretarsi quali componenti del vettore posizione $\mathbf{x} - O$, risultano:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}, \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}. \tag{3.14}$$

Se u , v e w sono le componenti dello spostamento rispetto agli assi x , y e z rispettivamente, ne consegue la seguente forma matriciale delle (3.14):

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial Z} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial w}{\partial X} & \frac{\partial w}{\partial Y} & \frac{\partial w}{\partial Z} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

La matrice delle componenti del gradiente della deformazione coincide quindi con la matrice delle derivate parziali delle componenti della funzione ϕ di deformazione, nota come *matrice jacobiana della deformazione*. Il suo determinante J :

$$J = \det \mathbf{F}, \quad (3.16)$$

è noto quale *jacobiano* (oppure *determinante jacobiano*)⁶ della deformazione.

◇ ◇ ◇

Trasformazione di elementi di area e di volume. La relazione (3.10) fornisce la legge di trasformazione di un elemento di linea materiale orientata rappresentata dal vettore $d\mathbf{X}$. Nel seguito si vogliono fornire le analoghe trasformazioni riguardanti gli elementi di area e di volume orientati, opportunamente rappresentati rispettivamente da un vettore e da uno scalare. Più precisamente, un elemento di area orientata lo si rappresenta per il tramite di un vettore $d\mathbf{A}$ di direzione ortogonale, di verso definito dalla sua orientazione per il tramite della regola della mano destra e di modulo la sua area dA . Un elemento di volume orientato lo si rappresenta invece per il tramite di uno scalare dV , positivo, rispettivamente negativo, a seconda che l'orientazione del volume sia destra, rispettivamente sinistra, e di valore assoluto la misura del volume.

Ciò premesso e con riferimento alla fig. 3.5 ad un elemento di volume orientato appartenente alla configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 e rappresentato dallo scalare dV_0 corrisponde tramite la deformazione un elemento di volume orientato appartenente alla configurazione deformata \mathcal{B} e rappresentato dallo scalare dV tale che:

$$dV = J dV_0. \quad (3.17)$$

dove J è lo jacobiano della deformazione definito dalla (3.16).

⁶Nella letteratura inglese jacobiano si rende con il termine *Jacobian*.

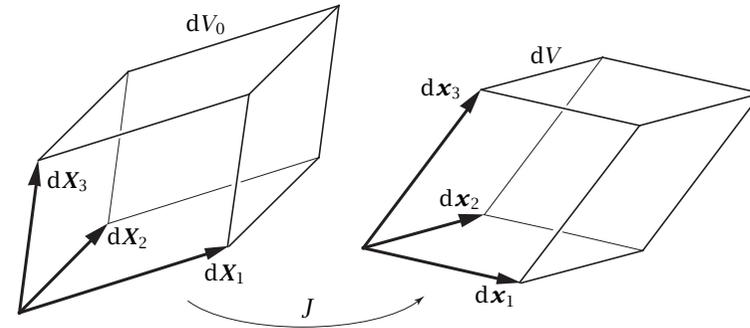


Figura 3.5: Trasformazione di un elemento di volume

Dimostrazione. La dimostrazione è basata sul fatto che tre elementi di linea linearmente indipendenti individuano un elemento di volume orientato rappresentato dallo scalare che si ottiene tramite il loro prodotto misto (fig. 3.5):

$$dV = (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3, \quad dV_0 = (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3. \quad (3.18)$$

Tenendo conto che gli elementi di linea spaziali $d\mathbf{x}_1$, $d\mathbf{x}_2$ e $d\mathbf{x}_3$ corrispondono a quelli materiali $d\mathbf{X}_1$, $d\mathbf{X}_2$ e $d\mathbf{X}_3$ tramite la (3.10) e ricordando le relazioni (1.41), p. 23, e (1.47), p. 24, relative rispettivamente al determinante di una matrice quadrata e alle componenti di un prodotto misto, si ha:

$$\begin{aligned} dV &= (d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2) \cdot d\mathbf{x}_3 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}_3 \\ &= \sum_{ijh} \varepsilon_{ijh} (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1)_i (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2)_j (\mathbf{F} d\mathbf{X}_3)_h \\ &= \sum_{ijhklm} \varepsilon_{ijh} F_{ik} F_{jl} F_{hm} (d\mathbf{X}_1)_k (d\mathbf{X}_2)_l (d\mathbf{X}_3)_m \\ &= \sum_{klm} \left((d\mathbf{X}_1)_k (d\mathbf{X}_2)_l (d\mathbf{X}_3)_m \sum_{ijh} \varepsilon_{ijh} F_{ik} F_{jl} F_{hm} \right) \\ &= \det \mathbf{F} \sum_{klm} \varepsilon_{klm} (d\mathbf{X}_1)_k (d\mathbf{X}_2)_l (d\mathbf{X}_3)_m \\ &= J (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_3 = J dV_0, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

Per quel che riguarda gli elementi di area e con riferimento alla fig. 3.6, ad un elemento di area orientato appartenente alla configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 e rappresentato dal vettore $d\mathbf{A}_0$ corrisponde tramite la deformazione un elemento

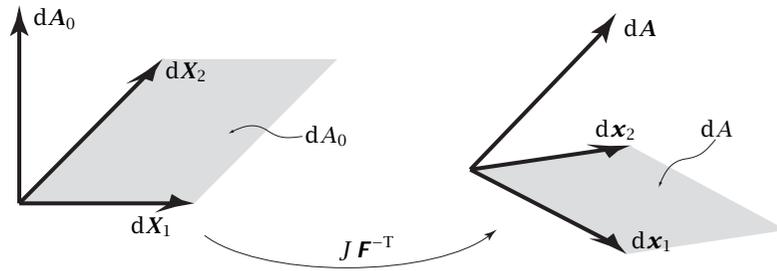


Figura 3.6: Trasformazione di un elemento di area

di area orientata appartenente alla configurazione deformata \mathcal{B} e rappresentato dal vettore dA tale che:

$$dA = J F^{-T} dA_0. \tag{3.19}$$

Dimostrazione. La dimostrazione è basata sul fatto che due elementi di linea materiale linearmente indipendenti individuano un elemento di area orientata rappresentata dal vettore che si ottiene tramite il loro prodotto vettoriale (fig. 3.6):

$$dA = d\mathbf{x}_1 \times d\mathbf{x}_2, \quad dA_0 = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2, \tag{3.20}$$

considerando che anche in tal caso gli elementi di linea spaziali $d\mathbf{x}_1$ e $d\mathbf{x}_2$ corrispondono a quelli materiali $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ tramite la (3.10).

Innanzitutto si mostra che le componenti del vettore $F^T(F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2)$ in direzione di $d\mathbf{X}_1$ e $d\mathbf{X}_2$ sono nulle, cioè che tale vettore ha la direzione di $d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$:

$$\begin{aligned} F^T(F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_1 &= (F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot F d\mathbf{X}_1 = 0, \\ F^T(F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot d\mathbf{X}_2 &= (F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot F d\mathbf{X}_2 = 0. \end{aligned}$$

Il versore \mathbf{e} della direzione di $d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2$, concorde con questo, vale

$$\mathbf{e} = \frac{d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2}{|d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2|}. \tag{3.21}$$

La seguente uguaglianza completa quindi la dimostrazione:

$$\begin{aligned} F^T(F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot \mathbf{e} &= \frac{1}{|d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2|} (F d\mathbf{X}_1 \times F d\mathbf{X}_2) \cdot F (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \\ &= \frac{\det F}{|d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2|} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) \cdot (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = J |d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2|, \end{aligned}$$

avendo fatto uso della (3.17) e delle (3.18) per lo sviluppo del prodotto misto. ■

3.1.3 Misure di deformazione

Si introducono nel seguito alcune misure di deformazione associate alla deformazione di linee, aree e volumi interni al corpo. Dato uno qualunque di questi enti geometrici, la sua misura nella configurazione di riferimento differirà in generale dalla sua misura nella configurazione deformata. Non solo, date due linee, l'angolo da esse individuato varierà nel passare dalla configurazione di riferimento a quella deformata. Nel seguito, utilizzando opportunamente tali variazioni di misura, saranno definite delle misure di deformazione relative agli enti geometrici associati al corpo.

Dilatazione lineare. Si consideri innanzitutto, nella configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 , una linea L passante per il punto materiale X (fig. 3.7a). Tale

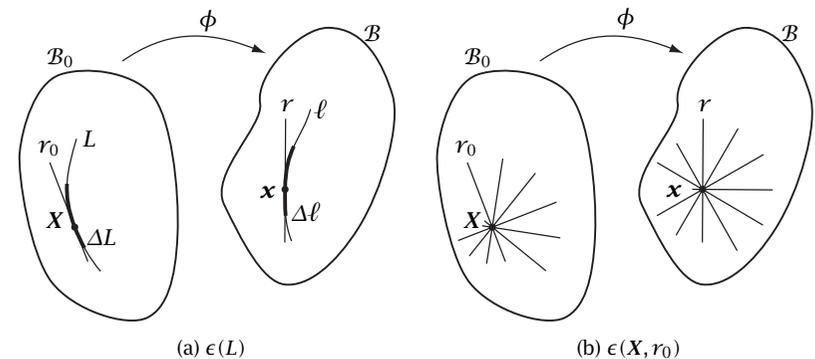


Figura 3.7: Dilatazione lineare

linea si trasforma, durante la deformazione, nella linea ℓ della configurazione deformata \mathcal{B} . In tale processo la linea subisce un *allungamento*, definito dalla differenza $\ell - L$ tra la lunghezza deformata e quella indeformata,⁷ avendo indicato le lunghezze delle linee con gli stessi simboli L ed ℓ utilizzati per indicare le linee stesse. Rapportando poi l'allungamento

⁷Il termine allungamento è qui utilizzato in senso esteso. Se $\ell < L$ l'allungamento è negativo e corrisponde ad un accorciamento. Nella letteratura inglese allungamento viene reso con *elongation* oppure con *extension*.

della linea alla sua misura indeformata si ottiene l'*allungamento per unità di linea* o *dilatazione lineare* ϵ :⁸

$$\epsilon = \frac{\ell - L}{L}. \quad (3.22)$$

La (3.22) fornisce una misura di deformazione $\epsilon(L)$ legata ad una linea materiale L , misura che può essere indicata con il simbolo ϵ_L per sottolineare tale fatto. Poiché l'allungamento e la lunghezza di una linea sono dimensionalmente omogenee, per esempio entrambe possono essere misurate in metri, ne risulta che la dilatazione lineare è adimensionale. Nell'ipotesi che gli spostamenti siano piccoli, anche le dilatazioni lineari sono piccole. È allora usuale esprimerle in percentuale; per esempio una dilatazione dello 0.2% indica una dilatazione pari a 0.002.

Un'altra misura di deformazione collegata con la dilatazione lineare è lo *stiramento*,⁹ definito dal rapporto ℓ/L tra la lunghezza della linea dopo la deformazione e la lunghezza prima della deformazione. Visto che per la (3.22) la dilatazione lineare vale $\ell/L - 1$, ne consegue che lo stiramento vale $\epsilon + 1$.

Si consideri ora una successione di parti ΔL della linea L che si racchiudano attorno al punto materiale X , appartenente alla linea stessa (fig. 3.7a). La dilatazione lineare della generica parte di linea ΔL vale $(\Delta\ell - \Delta L)/\Delta L$, avendo indicato con $\Delta\ell$ la corrispondente parte di linea nella configurazione deformata. Questa espressione può considerarsi alla stregua di una dilatazione lineare media sulla linea L nell'intorno del punto X . Si perviene così a definire, al limite per $\Delta L \rightarrow X$, la dilatazione lineare nel punto X nella direzione della linea L , che si indicherà ancora con ϵ :¹⁰

$$\epsilon = \lim_{\substack{\Delta L \rightarrow X \\ \Delta L < L}} \frac{\Delta\ell - \Delta L}{\Delta L}. \quad (3.23)$$

Tenendo conto che al limite la linea ΔL tende alla tangente alla linea L nel punto X se ne deduce che il limite (3.23) non dipende tanto dalla linea L

⁸Nella letteratura inglese si utilizzano i termini *unit extension*, *unit elongation* e *linear strain* (o, più semplicemente, *strain*) per dilatazione lineare. Qualche volta si trova impiegato anche il termine *extension*, come, per esempio, in Truesdell e Toupin (1960, p. 255).

⁹*Stretch* nella letteratura inglese.

¹⁰Per evitare ambiguità, si sottolinea il fatto che nel termine $\Delta L \rightarrow X$ della (3.23) ΔL rappresenta una linea (che è parte della linea L), ed infatti tale termine indica che il limite è eseguito su una successione di parti della linea L che si racchiudono attorno al punto X . Nella frazione $(\Delta\ell - \Delta L)/\Delta L$ lo stesso simbolo compare invece con il significato di lunghezza della linea.

quanto dalla tangente r_0 alla linea nel punto X . In altri termini, il limite (3.23) coincide se eseguito su due diverse linee passanti per X ed aventi medesima tangente in tale punto. In definitiva la relazione (3.23) definisce una misura di deformazione $\epsilon(X, r_0)$ legata ai punti materiali del solido ed alle direzioni uscenti da tali punti (fig. 3.7b). Tale misura può essere indicata con il simbolo ϵ_r per sottolineare tale fatto.

La relazione (3.23) definisce un allungamento per unità di linea ϵ nell'intorno del punto X . Per recuperare l'allungamento $\ell - L$ dell'intera linea occorre allora integrare la dilatazione lineare sulla linea stessa:

$$\ell - L = \int_L \epsilon dL, \quad (3.24)$$

dove dL indica l'elemento di linea indeformato. L'integrale (3.24) è ben definito poiché in un generico punto X della linea è definita la sua tangente r_0 e quindi anche il valore $\epsilon(X, r_0)$ della dilatazione nella direzione della linea stessa.

Dilatazione quadratica e dilatazione cubica. Tutto quello che è stato detto per una linea appartenente al corpo si può dire per una sua superficie (interna) e per un suo volume. Siano allora S_0 una superficie e V_0 un volume appartenenti alla configurazione di riferimento B_0 del solido (fig. 3.8). Siano poi S e V i corrispondenti elementi geometrici nella configurazione B

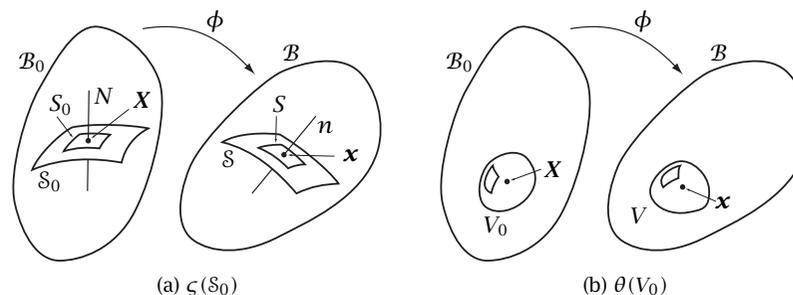


Figura 3.8: Dilatazione quadratica e cubica

deformata. La *dilatazione quadratica*¹¹ ζ e la *dilatazione cubica*¹² θ restano

¹¹*Surface strain* nella letteratura inglese.

¹²*Volume strain, bulk strain* e anche *dilatation* nella letteratura inglese.

definite in modo analogo alla (3.22):

$$\zeta = \frac{S - S_0}{S_0}, \quad \theta = \frac{V - V_0}{V_0}, \quad (3.25)$$

intendendo che gli stessi simboli impiegati precedentemente per gli enti geometrici indichino ora le loro misure (di superficie e di volume).

Introducendo poi una successione di superfici S_0 in S_0 che si racchiudono attorno al punto materiale X (fig. 3.8a), ed analogamente una successione di volumi V_0 che ancora si racchiudono attorno al punto X (fig. 3.8b), si ottengono le misure di dilatazione quadratica e cubica nell'intorno del punto materiale X :

$$\zeta = \lim_{\substack{S_0 \rightarrow X \\ S_0 \subset S_0}} \frac{S - S_0}{S_0}, \quad \theta = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{V - V_0}{V_0}. \quad (3.26)$$

Poiché al limite la superficie S_0 appartiene al piano tangente nel punto X alla superficie S_0 , il limite espresso dalla prima delle (3.26) dipende solo da tale piano tangente, o, se si vuole, dalla direzione N normale alla superficie nel punto X (fig. 3.8a). In altre parole, due diverse superfici per X aventi lo stesso piano tangente, e quindi la stessa normale, in X conducono allo stesso valore della dilatazione quadratica. In definitiva la prima delle (3.26) definisce una misura di deformazione $\zeta(X, N)$ legata ai punti materiali del solido ed ai piani di sostegno tali punti, piani rappresentati dalle direzioni normali. Per quel che riguarda la dilatazione cubica, la misura espressa dalla seconda delle (3.26) dipende solo dal punto X e risulta quindi un campo scalare del tipo $\theta(X)$.

Scorrimento tra due linee orientate. Si considerino ora due linee orientate L ed M passanti per il punto materiale X della configurazione di riferimento B_0 . Nella fig. 3.9a l'orientamento delle due linee è individuato dai versori tangenti r_0 e s_0 nel punto X . L'angolo Ψ tra le due linee orientate rappresenta l'angolo ($\leq \pi$) compreso tra le parti positive delle rette tangenti in X alle due linee. Nel corso della deformazione le due linee materiali si trasformano nelle due linee spaziali ℓ ed m , appartenenti alla configurazione deformata B e passanti per il punto x corrispondente del punto materiale X . L'orientazione delle due linee materiali L ed M si estende alle due linee deformate ℓ ed m : restano così individuati i due versori r e s tangenti alle due linee deformate nel punto x e l'angolo ψ tra questi, corrispondente nella deformazione dell'angolo Ψ iniziale (fig. 3.9a). Il decremento γ dell'angolo tra le due linee che si ha nel corso della deformazione

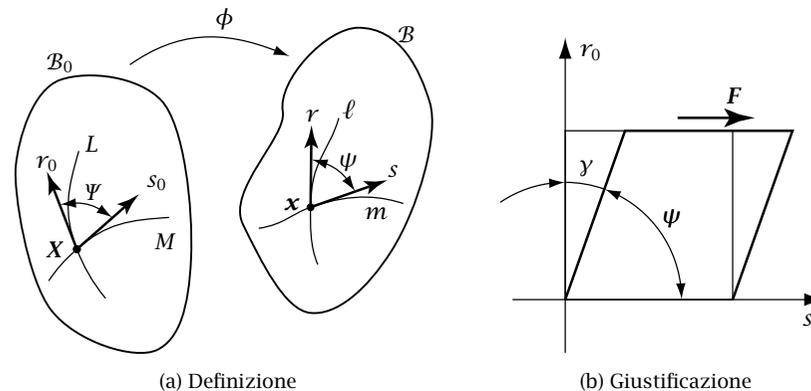


Figura 3.9: Scorrimento di due linee

viene chiamato *scorrimento*:¹³

$$\gamma = \Psi - \psi. \quad (3.27)$$

Lo scorrimento dipende dalle due linee orientate L ed M solo attraverso i versori tangenti r_0 e s_0 , e quindi risulta già ridotto al punto senza bisogno di un'operazione di limite. In definitiva la (3.27) definisce una misura di deformazione $\gamma(X, r_0, s_0)$ legata ai punti materiali del solido ed alle coppie di direzioni orientate uscenti da tali punti. Tale misura può essere indicata con il simbolo γ_{rs} per sottolineare tale fatto.

Per giustificare la scelta del decremento dell'angolo piuttosto che del suo incremento nella definizione (3.27) di scorrimento, si consideri un cubo la cui faccia laterale è illustrata nella fig. 3.9b. Se il cubo è sollecitato, nella sua faccia superiore, da una forza F concorde con il verso di s_0 , ci si aspetta che la faccia superiore "scorra" rispetto alla faccia inferiore nella direzione della forza e quindi di s_0 , provocando una diminuzione dell'angolo tra r_0 e s_0 . La convenzione adottata assicura che in tale caso lo scorrimento sia positivo analogamente allo spostamento della faccia su cui agisce la forza. Quale differenza tra due angoli lo scorrimento ha le dimensioni di un angolo e può quindi essere misurato in radianti (cfr. la tab. 1.3 p. 18).

Se le due linee sono inizialmente ortogonali, cioè se $\Psi = \pi/2$ e quindi

¹³ *Shear strain* o, più semplicemente, *shear* nella letteratura inglese.

$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, risulta:

$$\sin \gamma_{rs} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \cos \psi = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}. \quad (3.28)$$

Quindi il seno dello scorrimento di due linee inizialmente ortogonali uguaglia il prodotto scalare dei versori tangenti alle linee deformate.

Scorrimento tra una linea ed una superficie. Siano date, nella configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento di un corpo, una linea L ed una superficie \mathcal{S}_0 inizialmente ortogonali, e sia X il loro punto di intersezione (fig. 3.10). Si

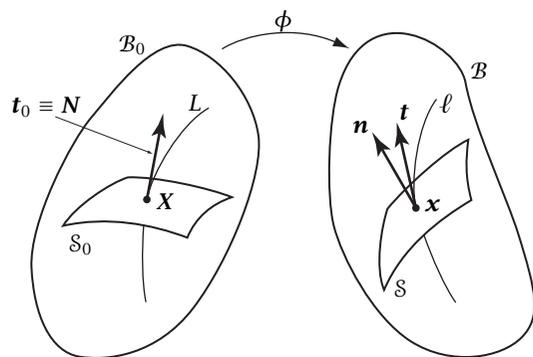


Figura 3.10: Scorrimento tra una linea ed una superficie

orientino sia la linea, scegliendo il versore \mathbf{t}_0 tangente alla linea L nel punto X , che la superficie, scegliendo il versore \mathbf{N} ortogonale alla superficie \mathcal{S}_0 nel punto X , in modo tale che i due versori siano equiversi. Dopo la deformazione il versore \mathbf{t} tangente nel punto spaziale \mathbf{x} alla linea deformata ℓ , non è più, in generale, ortogonale alla superficie \mathcal{S} deformata. Siano π il piano tangente in \mathbf{x} alla superficie spaziale \mathcal{S} e π_0 il piano tangente in X alla superficie materiale \mathcal{S}_0 (fig. 3.11). Siano poi \mathbf{s} il versore della retta orientata individuata dalla proiezione sul piano π della tangente alla linea ℓ , \mathbf{r} uno dei due versori della retta appartenente al piano π ed ortogonale ad \mathbf{s} ed infine γ l'angolo tra la tangente alla linea ℓ e la normale alla superficie \mathcal{S} . Poiché la direzione del versore \mathbf{s} è individuata dalla proiezione del versore tangente \mathbf{t} , i versori \mathbf{n} , \mathbf{t} ed \mathbf{s} stanno su un piano ed \mathbf{r} è ortogonale a tale piano. Di conseguenza γ rappresenta lo scorrimento tra la linea materiale

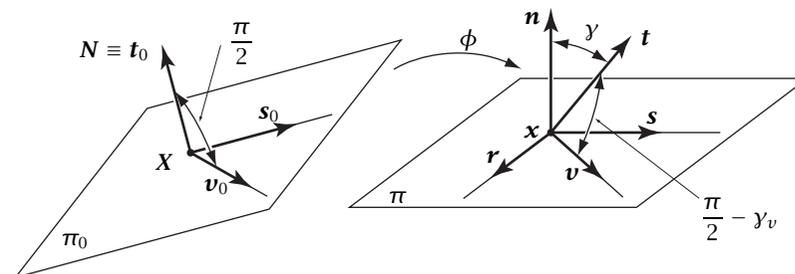


Figura 3.11: Particolare del piano tangente in \mathbf{x} a \mathcal{S}

L e una qualunque linea di \mathcal{S}_0 che dopo la deformazione ha \mathbf{s} quale versore tangente, mentre lo scorrimento tra la linea materiale L e una qualunque linea che nella configurazione deformata ha per tangente \mathbf{r} è nullo. Si vuole ora individuare il valore dello scorrimento, rispetto alla linea L , di una linea generica di \mathcal{S}_0 .

Sia allora \mathbf{v} il versore di una generica retta di π . Se una linea di \mathcal{S}_0 si deforma in una linea di tangente \mathbf{v} allora lo scorrimento γ_v tra tale linea e la linea L , tenendo conto della (3.28), soddisfa la relazione:

$$\sin \gamma_v = \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{t} \cdot \{ (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{s} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r} \} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{s}) (\mathbf{t} \cdot \mathbf{s}) = (\sin \gamma \mathbf{s}) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.29)$$

poiché, ancora per la (3.28), risulta $\sin \gamma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{s}$. Posto:

$$\boldsymbol{\gamma} = \sin \gamma \mathbf{s}, \quad (3.30)$$

si ha infine:

$$\sin \gamma_v = \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{v}. \quad (3.31)$$

Il vettore $\boldsymbol{\gamma}$, definito dalla (3.30), assume quindi il significato di *scorrimento* tra la linea L e la superficie \mathcal{S}_0 , rappresentando, attraverso la dipendenza lineare (3.31) dal versore \mathbf{v} , gli scorrimenti tra la linea L ed una qualunque linea appartenente ad \mathcal{S}_0 . La relazione (3.31) implica che tali scorrimenti sono compresi tra $-\gamma$ e γ .

3.1.4 Proprietà della funzione di deformazione

La funzione di deformazione ϕ e conseguentemente, per via della (3.3), il campo degli spostamenti \mathbf{u} , non possono essere arbitrari, ma devono

soddisfare delle condizioni di regolarità che fanno parte, insieme alla sua continuità geometrica, del modello di corpo continuo.

Continuità. *Si assume che la funzione di deformazione ϕ sia continua.*

Tale proprietà garantisce la *continuità della materia*,¹⁴ ovvero che parti del corpo a contatto prima della deformazione restino a contatto dopo la deformazione. Ne consegue che gli intorni dei punti del corpo vengono preservati nel corso del moto. Infatti è importante non dimenticare che nel modello di corpo continuo non è possibile isolare dei singoli punti ma solo degli intorni dei punti stessi, intorni che assumono quindi il ruolo di punti materiali. È quindi indispensabile che la materia che compone l'intorno di un punto non si disperda nel corso del moto, rendendo quindi l'ipotesi di continuità parte integrante del modello di corpo continuo.

Si noti che l'ipotesi di continuità della deformazione è fisicamente soddisfatta nel caso dei solidi, definiti infatti come corpi che preservano la disposizione della materia. Ma vi sono casi particolari, come quello dello sviluppo di dislocazioni, in cui diversi strati di materia scorrono gli uni rispetto agli altri senza però che con questo si determini un distacco degli strati stessi, per cui alla fine del processo viene conservata la continuità geometrica. Non per nulla in tal caso si dice che il solido *fluisce*, comportandosi come un fluido, ovvero come un mezzo materiale che non conserva in generale la disposizione reciproca delle particelle costituenti, senza perdere per questo la propria continuità geometrica. È evidente che in casi del genere, e limitatamente alle zone del solido soggette a dislocazioni, una funzione di deformazione continua non può fisicamente che rappresentare un moto medio delle particelle del solido.

Tale osservazione vale a maggior ragione nel caso di un fluido, soggetto, nel caso di moto turbolento, ad un continuo rimescolamento. Se la posizione delle singole particelle del fluido nel corso del moto fosse importante, non si potrebbe prescindere quindi dall'uso di un modello discreto, rappresentato da un insieme molto grande di punti materiali interagenti tra loro e con l'esterno. Purtroppo modelli discreti di questo tipo raggiungono livelli di complessità teorica e computazionale ampiamente al di fuori della portata dei mezzi odierni. Tuttavia nel caso del moto di un fluido (ma anche quando un solido fluisce a causa dello sviluppo di dislocazioni) le singole particelle sono fisicamente indistinguibili l'una dalle altre, salvo che alcune non siano state, per esempio, opportunamente colorate proprio allo scopo

di seguirne la traiettoria. Ne consegue che il moto delle singole particelle di un fluido è spesso privo di importanza. Al modello continuo si richiede pertanto di descrivere quelle proprietà del fluido che sono importanti e che per la natura stessa di un fluido non possono che essere, in generale, delle proprietà medie. La stessa funzione di deformazione potrebbe interpretarsi fisicamente come descrivente il moto medio delle particelle del fluido, moto medio a cui si riferisce quindi la continuità della deformazione.

Si noti inoltre che l'ipotesi di continuità della deformazione esclude, nell'ambito dei solidi, molte singolarità di interesse fisico. Tuttavia questa esclusione è giustificata dal fatto che tali singolarità sono normalmente localizzate in un numero ristretto di punti oppure di linee o superfici. A questi punti, linee o superfici si dovrà allora prestare una particolare attenzione nel caso si vogliano mettere in gioco tali singolarità. Un esempio importante dal punto di vista strutturale è quello dello sviluppo di superfici di frattura in un solido. In tal caso i punti interni del solido lungo i quali si sviluppa la superficie di frattura vengono a sdoppiarsi nel corso della deformazione, e quindi la funzione ϕ non è definita su tali punti. La continuità è comunque preservata per le parti del solido non interessate dal processo di frattura e quindi per tali parti si applica tutto ciò che dipende dall'ipotesi di continuità.

Si noti infine che per via della relazione (3.3) tra deformazione e spostamento anche il campo degli spostamenti risulta continuo.

Iniettività. *Si assume che la funzione di deformazione ϕ sia iniettiva, ovvero che a due punti distinti P_0 e Q_0 in \mathcal{B}_0 corrispondano due punti distinti P e Q in \mathcal{B} . Tale ipotesi garantisce l'esistenza della funzione inversa $\phi^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$.*

Fisicamente l'iniettività della funzione di deformazione garantisce l'*impenetrabilità della materia*,¹⁵ ovvero che parti distinte della configurazione di riferimento del corpo non si sovrappongano nella configurazione deformata.

Si noti che il campo degli spostamenti può non essere iniettivo e quindi non invertibile, come nel caso banale di una traslazione rigida a cui corrisponde un campo di spostamenti costante.

¹⁴Continuity of matter nella letteratura inglese.

¹⁵Nella letteratura inglese si usa il termine *impenetrability of matter*.

Derivabilità e invertibilità locale. *Si assume l'esistenza, la continuità e l'invertibilità del gradiente della deformazione.*

Tale assunzione è equivalente a richiedere che, in ogni punto del solido, le componenti x_i della funzione ϕ di deformazione siano derivabili almeno una volta, con derivate prime continue, e che lo iacobiano della deformazione sia diverso dallo zero.

Tenendo conto che per via della (3.10) il gradiente della deformazione trasforma gli elementi di linea materiali in elementi di linea spaziali, ne consegue che tale proprietà preserva l'individualità locale degli enti geometrici (linee, superfici e volumi) nell'intorno di un punto. È quindi garantita l'esistenza delle misure di deformazione locali ed esclusa la possibilità che queste possano annullarsi. Le proprietà di regolarità precedenti assicurano poi la continuità delle misure di deformazione.

Le ipotesi di continuità, di derivabilità e di invertibilità locale del gradiente della deformazione assicurano l'invertibilità locale della funzione di deformazione e che tale funzione locale inversa sia continua, derivabile fino allo stesso ordine della funzione ϕ e con derivate continue (*teorema dell'invertibilità locale*). La funzione inversa globale $\phi^{-1} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$, la cui esistenza è assicurata dalla ipotesi di iniettività, è dunque continua, derivabile fino allo stesso ordine della funzione ϕ e con derivate continue, e soddisfa quindi tutte le proprietà richieste ad una funzione di deformazione. Non solo, ma ogni linea, ogni superficie ed ogni volume appartenenti alla configurazione di riferimento si trasformano rispettivamente in linee, superfici e volumi appartenenti alla configurazione deformata del corpo, e viceversa.¹⁶

Preservazione dell'orientazione. *Si assume che lo jacobiano della deformazione sia positivo in ogni punto del solido.*

Tale proprietà garantisce che la funzione di deformazione preservi l'*orientazione della materia*.¹⁷ Affinché vi sia preservazione dell'orientazione della materia occorre che tre linee orientate uscenti da un punto e costituenti, prese in un certo ordine, una terna destra siano trasformate dalla deformazione in tre linee orientate ancora costituenti, prese nello stesso ordine, una terna destra.

Le proprietà precedenti assicurano la conservazione della disposizione delle diverse parti del solido ma non la loro *orientazione*. Infatti, per esempio, una riflessione è continua, derivabile con derivate continue e iniettiva ma inverte la destra con la sinistra, modificando l'orientazione del solido.

3.1.5 Trasformazioni rigide

Una trasformazione dello spazio \mathcal{E} :

$$r : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}, \quad X \mapsto \mathbf{x} = r(X) \quad (3.32)$$

che mantenga invariate sia le distanze tra i punti che l'orientazione dello stesso spazio viene detta *trasformazione rigida*.¹⁸ Nel caso più generale in cui venga richiesta la sola invarianza delle distanze tra i punti, la (3.32) è detta invece *trasformazione ortogonale*.¹⁹ Come già in precedenza e in accordo con la (3.32), finché possibile e se non si generano ambiguità, si indicherà con \mathbf{x} l'immagine $r(X)$ del punto X sotto l'azione della trasformazione rigida r .

Le trasformazioni rigide dello spazio sono alla base dello studio del moto rigido e conseguentemente delle trasformazioni che, nell'ambito della meccanica newtoniana, si hanno tra diversi osservatori in moto rigido relativo tra loro. Per evitare equivoci dovuti all'abuso del termine "moto rigido" occorre osservare che a volte tale termine è utilizzato per indicare in realtà una trasformazione rigida. Nel seguito si cercherà di evitare tale abuso.

Proprietà fondamentali delle trasformazioni rigide. È immediato rendersi conto che le trasformazioni rigide, e più in generale quelle ortogonali, trasformano rette in rette mantenendo l'ordine dei punti sulla retta stessa. Infatti se tre punti inizialmente allineati X_1 , X_2 e X_3 si trasformassero in tre punti non allineati \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 e \mathbf{x}_3 , questi individuerebbero un triangolo nel quale, per via della conservazione delle distanze, sarebbe violata la disuguaglianza triangolare (fig. 3.12a). Se poi dei tre punti iniziali fosse X_2 ad essere quello compreso tra gli altri due, ma non così per il suo punto immagine \mathbf{x}_2 , le distanze tra i punti non potrebbero conservarsi. Da quanto dimostrato consegue che un segmento si trasforma in un segmento di uguale lunghezza.

¹⁶Si veda, per esempio, Gurtin (1981, p. 22) oppure Sedov (1971, p. 21).

¹⁷*Orientation of matter* nella letteratura inglese.

¹⁸*Rigid transformation* nella letteratura inglese.

¹⁹*Orthogonal transformation* nella letteratura inglese.

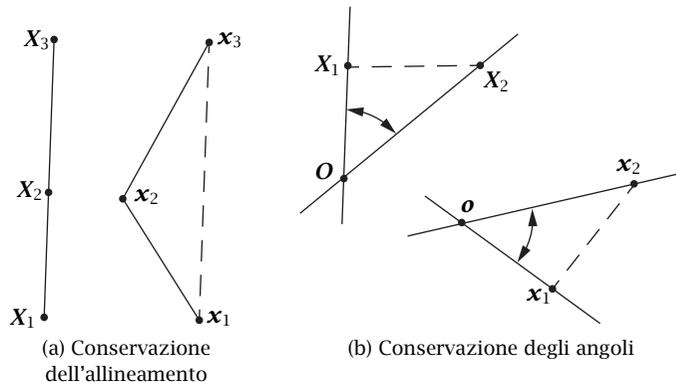


Figura 3.12: Trasformazioni rigide

Inoltre una trasformazione rigida conserva l'angolo tra due rette. Infatti due rette parallele si trasformano in due rette ancora parallele, altrimenti ci sarebbero un punto della prima retta e un punto della seconda con distanza nulla dopo la trasformazione, in contrasto con la conservazione delle distanze. Se poi O è l'intersezione tra due rette non parallele e X_1 e X_2 sono due punti distinti da O ed appartenenti rispettivamente alla prima e alla seconda retta, allora il triangolo OX_1X_2 si trasforma in un triangolo ox_1x_2 avente i lati, e quindi anche gli angoli, uguali a quelli del triangolo di partenza (fig. 3.12b).

Infine una trasformazione rigida trasforma piani in piani. Infatti dato un piano e tre rette mutuamente non parallele, queste si trasformano in tre rette mutuamente non parallele definenti un piano a cui devono appartenere tutte le rette del piano di partenza, dato che una qualunque retta di tale piano interseca almeno due delle tre rette inizialmente prescelte.

Restrizioni delle trasformazioni rigide. La restrizione alla configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento di un corpo di una trasformazione rigida r è una funzione ϕ di deformazione che conserva le distanze tra i punti del corpo e la loro orientazione reciproca, rendendo quindi nulle tutte le misure di deformazione. Una funzione di deformazione di tale tipo ha una e una sola estensione a tutto lo spazio \mathcal{E} che sia una trasformazione rigida r o, in altri termini, è la restrizione di una e una sola trasformazione rigida r dello spazio.

◇ ◇ ◇

Dimostrazione. Per poter estendere a tutto lo spazio una trasformazione rigida, questa deve agire almeno su tre punti non allineati, che possono essere presi in un dato ordine X_1, X_2, X_3 . I due punti X_1 e X_2 definiscono una retta i cui punti hanno una data distanza da X_1 , distanza che può essere riportata sulla retta trasformata, utilizzando quale orientazione il punto X_2 , estendendo così la trasformazione rigida a tutta la retta.

La retta X_1X_2 e il punto X_3 definiscono un piano i cui punti, non appartenenti alla retta X_1X_2 , hanno una data distanza dalla retta stessa, distanza che può essere riportata a partire dalla retta trasformata, utilizzando quale orientazione il punto X_3 , estendendo così la trasformazione rigida a tutto il piano.

Infine i punti dello spazio non appartenenti al piano $X_1X_2X_3$ hanno una data distanza dallo stesso piano, distanza che può essere riportata a partire dal piano trasformato, utilizzando quale orientazione l'ordine dei tre punti X_1, X_2, X_3 insieme alla orientazione destra dello spazio (se la mano è atteggiata secondo l'ordine dei tre punti il pollice fornisce la desiderata orientazione), estendendo così la trasformazione rigida a tutto lo spazio.

È evidente da quanto detto che una generica trasformazione rigida di un segmento non è estendibile in modo univoco a tutto lo spazio per la mancanza del terzo punto non allineato. ■

◇ ◇ ◇

Non esiste quindi alcuna ambiguità nel chiamare col termine di trasformazione rigida sia le funzioni (3.32) che le loro restrizioni al dominio di un corpo. Se il corpo è rigido la funzione di deformazione ϕ è evidentemente vincolata ad essere rigida e la sua estensione r a tutto lo spazio trasforma i punti dello spazio esterni al corpo come se fossero *rigidamente connessi* al corpo rigido stesso, o in altri termini come se il dominio del corpo fosse inglobato in uno spazio rigido.

Tensore rotazione associato ad una trasformazione rigida. Si consideri una generica trasformazione rigida r ed un generico punto O preso come polo.²⁰ La trasformazione $R: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ nello spazio dei vettori definita dalla condizione:

$$R\mathbf{v} = r(\mathbf{O} + \mathbf{v}) - \mathbf{o}, \tag{3.33}$$

²⁰La generica trasformazione rigida oggetto di analisi potrebbe essere l'estensione a tutto lo spazio di una funzione di deformazione di un corpo rigido. Si comprende quindi come non sia indispensabile, se questo è il caso, che il punto prescelto quale polo appartenga al corpo. D'altronde nella meccanica del corpo rigido è comune riferirsi al baricentro delle masse inerziali del corpo, baricentro che può anche non appartenere al corpo se questi è non convesso come per esempio nel caso presenti delle cavità interne.

dove $\mathbf{o} = \mathbf{r}(\mathbf{O})$, è un tensore rotazione indipendente dalla scelta del punto \mathbf{O} .

Dimostrazione. Infatti dal fatto che la trasformazione rigida conserva distanze e angoli segue immediatamente che \mathbf{R} soddisfa la definizione di tensore ortogonale.²¹

Inoltre, la conservazione dell'ordine dello spazio impone che tre segmenti orientati spiccati da un punto \mathbf{O} si trasformino in tre segmenti orientati aventi lo stesso ordine e che quindi valga la definizione di tensore rotazione.²²

Infine, siano \mathbf{O}_1 e \mathbf{R}_1 rispettivamente un secondo polo e l'associato tensore rotazione e sia \mathbf{v} un generico vettore (fig. 3.13). Detti $\mathbf{X} = \mathbf{O} + \mathbf{v}$ e

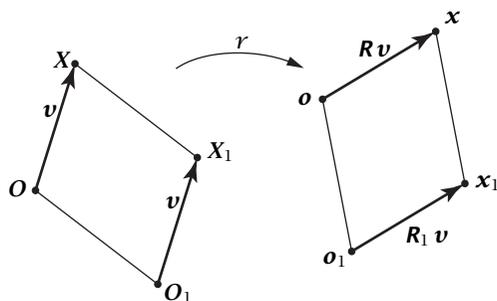


Figura 3.13: Indipendenza dal polo

$\mathbf{X}_1 = \mathbf{O}_1 + \mathbf{v}$, per via della conservazione delle distanze e degli angoli il parallelogramma $\mathbf{O}\mathbf{O}_1\mathbf{X}_1\mathbf{X}$ si trasforma nel parallelogramma $\mathbf{o}\mathbf{o}_1\mathbf{x}_1\mathbf{x}$, dove $\mathbf{x} = \mathbf{o} + \mathbf{R}\mathbf{v}$ e $\mathbf{x}_1 = \mathbf{o}_1 + \mathbf{R}_1\mathbf{v}$. Risulta quindi $\mathbf{x} - \mathbf{o} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{o}_1$ e infine $\mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{R}_1\mathbf{v}$ come volevasi dimostrare. ■

Si può scrivere l'effetto della trasformazione di un punto utilizzando il tensore rotazione \mathbf{R} associato alla trasformazione rigida e definito dalla (3.33) tenendo conto che $\mathbf{X} = \mathbf{O} + (\mathbf{X} - \mathbf{O})$ e che quindi:

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{O}). \tag{3.34}$$

Confrontando tale relazione con la definizione (3.8a), p. 71, di gradiente della deformazione \mathbf{F} , risulta evidente che nel caso di una trasformazione

rigida di un corpo tale gradiente è costante e coincidente con il tensore rotazione \mathbf{R} associato alla trasformazione rigida stessa:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}. \tag{3.35}$$

Si noti che affinché la deformazione sia nulla nell'intorno di un punto, nel punto stesso il gradiente della deformazione deve coincidere con un tensore rotazione, cioè nel punto deve valere la (3.35) affinché le lunghezze e gli angoli, e di conseguenza le varie misure di deformazione discusse in precedenza, restino invariati. Si noti comunque che in tal caso \mathbf{R} nell'uguaglianza (3.35) deve essere inteso come un semplice tensore rotazione e non il tensore rotazione associato ad una data trasformazione rigida. Solo se la (3.35) vale in tutti i punti del solido, e quindi nel caso la deformazione sia nulla ovunque, il solido non può che subire una trasformazione rigida di cui \mathbf{R} , indipendente dal punto, è l'associato tensore rotazione.

Dalla relazione (3.34) si ha che $\mathbf{x} - \mathbf{X} = (\mathbf{o} - \mathbf{O}) + (\mathbf{O} - \mathbf{X}) + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{O})$, per cui utilizzando la (3.3) si ottiene allora, nel caso di una trasformazione rigida, il seguente campo di spostamenti (fig. 3.14):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{X} - \mathbf{O}), \tag{3.36}$$

dove \mathbf{I} è il tensore identità e \mathbf{u}_O lo spostamento del punto \mathbf{O} , preso come polo della descrizione. Si ricordi che il tensore rotazione \mathbf{R} è indipendente

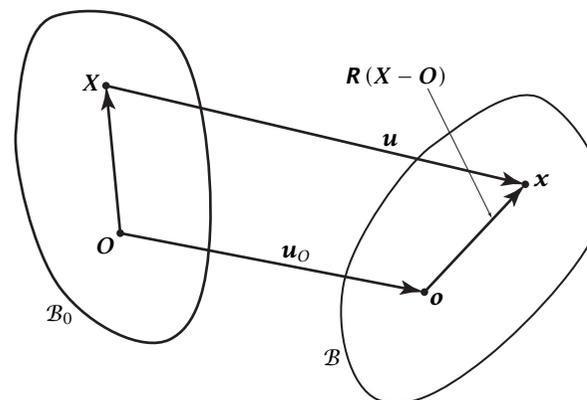


Figura 3.14: Campo di spostamenti rigidi

dalla scelta del polo, ma non lo sono in generale nè lo spostamento \mathbf{u}_O del

²¹Cfr. la (1.159), p. 39.

²²Cfr. la (1.166), p. 40.

polo n  il vettore posizione $X - O$ del punto generico X rispetto al polo O stesso.

Traslazioni e rotazioni. La decomposizione additiva (3.36) del campo degli spostamenti suggerisce la definizione di due particolari trasformazioni rigide, le traslazioni e le rotazioni, alle quali corrispondano dei campi di spostamento tali che nella (3.36) si annullino rispettivamente il secondo ed il primo addendo. Conseguenza immediata e fondamentale   che una qualunque trasformazione rigida risulta cos  essere la composizione di una traslazione e di una rotazione.

Per definizione, una *traslazione*   caratterizzata da un tensore rotazione uguale al tensore identit :

$$\mathbf{R} = \mathbf{I}, \tag{3.37}$$

per cui dalla (3.36) si deduce che tutti i punti dello spazio hanno uguale spostamento o , in altri termini, si spostano della stessa quantit , coincidente con lo spostamento del polo (fig. 3.15a):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O. \tag{3.38}$$

Lo spostamento costante dei punti dello spazio, rappresentato dallo spostamento \mathbf{u}_O del polo,   detto *traslazione dello spazio* (fig. 3.15a).

Per definizione, una *rotazione*   caratterizzata dall'esistenza di almeno un punto O che abbia spostamento nullo:

$$\mathbf{u}_O = \mathbf{0}. \tag{3.39}$$

Scelto tale punto quale polo della descrizione della rotazione, dalla (3.36) si deduce che:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{X} - \mathbf{O}). \tag{3.40}$$

Si ribadisce che la forma (3.40) del campo degli spostamenti vale solo se il polo coincide con un punto a spostamento nullo. Se il polo prescelto non soddisfa tale propriet  continua a valere la forma (3.36) del campo degli spostamenti. La (3.40) implica che tutti i punti dell'asse principale ζ di \mathbf{R} di autovalore unitario e passante per O , detto *asse rotazione*, hanno spostamento nullo. Con riferimento alla fig. 3.15b, sia poi X un punto non appartenente all'asse rotazione e siano π' il piano per X ortogonale all'asse rotazione stesso e O' l'intersezione tra π' e ζ . Conformemente alla (3.34),

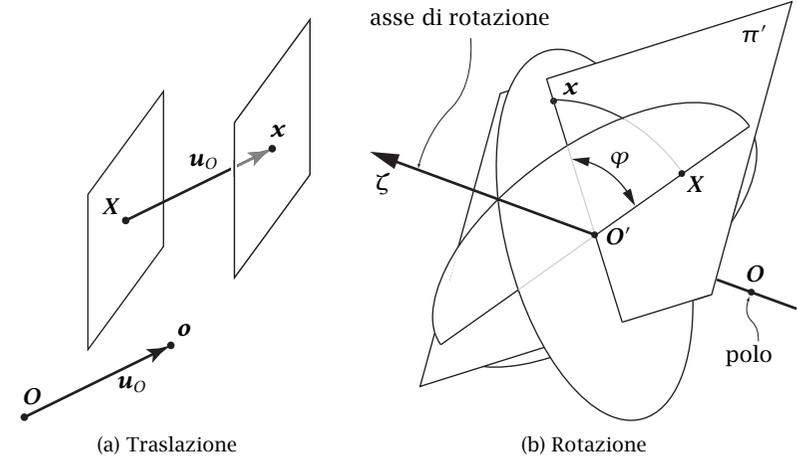


Figura 3.15: Traslazioni e rotazioni

al fatto che cambiando polo non si modifica il tensore rotazione associato ad una trasformazione rigida e al fatto che $\mathbf{o}' = \mathbf{O}'$ si ha:

$$\mathbf{x} - \mathbf{O}' = \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{O}'). \tag{3.41}$$

Dato che il vettore posizione $\mathbf{X} - \mathbf{O}'$   ortogonale alla direzione principale ζ , il suo trasformato $\mathbf{x} - \mathbf{O}'$   ortogonale a tale asse e forma con $\mathbf{X} - \mathbf{O}'$ un angolo φ pari all'angolo di rotazione del tensore rotazione \mathbf{R} . Per via di tale fatto e della conservazione delle distanze il trasformato \mathbf{x} del punto X appartiene quindi al piano π' , si trova sulla circonferenza di centro O' e di raggio $|\mathbf{X} - \mathbf{O}'|$ e forma con X l'angolo al centro φ .²³ Si noti che un piano del fascio di piani di sostegno l'asse rotazione si trasforma in un piano di tale fascio formante con il piano originale l'angolo di rotazione φ .

Data una qualunque trasformazione rigida r , la decomposizione additiva (3.36) del campo di spostamenti conseguente alla scelta del polo O mostra che   possibile decomporre la trasformazione rigida stessa nel prodotto di una traslazione r_O e di una rotazione r'_R in quest'ordine oppure nel prodotto di una rotazione r''_R e della stessa traslazione in quest'ordine:

$$r = r_O \circ r'_R = r''_R \circ r_O. \tag{3.42}$$

²³Cfr. il par. 1.5.3, p. 40.

La traslazione è caratterizzata dallo spostamento \mathbf{u}_O del polo e le due rotazioni dal tensore rotazione \mathbf{R} , differenziandosi per la sola posizione dei due assi rotazione, che d'altronde sono paralleli tra loro. Infatti nel primo caso, in cui avviene prima la rotazione, l'asse non può che passare per il polo \mathbf{O} mentre nel secondo caso, avvenendo prima la traslazione, l'asse deve passare per il trasformato \mathbf{o} del polo (fig. 3.16).

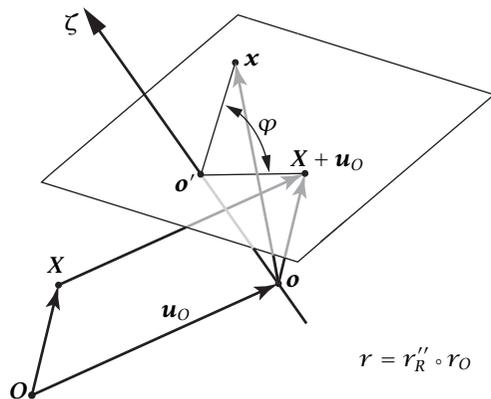


Figura 3.16: Decomposizione di una trasformazione rigida

3.1.6 Moto e velocità

Se ora si considera il moto di un corpo, la configurazione deformata \mathcal{B} diventa funzione del tempo, così come la deformazione ϕ e il vettore spostamento \mathbf{u} . Si indichi con \mathbf{x} la *funzione del moto*, che fornisce la posizione spaziale del punto materiale X all'istante t :

$$\mathbf{x} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{E}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t), \quad (3.43)$$

dove T rappresenta l'asse del tempo, mentre \mathcal{E} indica lo spazio (euclideo) in cui avviene il moto del solido. Se si tiene costante il tempo t si ottiene la deformazione ϕ all'istante t . Se invece si tiene costante il punto materiale X si ottiene il moto di tale punto, descritto dalla seguente funzione del tempo:

$$\mathbf{x}_X : T \rightarrow \mathcal{E}, \quad t \mapsto \mathbf{x}(X, t). \quad (3.44)$$

La *traiettoria*²⁴ del punto materiale è la curva dello spazio individuata dalle posizioni occupate dal punto nel corso del moto, curva che ammette la (3.44) come equazione parametrica.

Si faccia ora riferimento alla fig. 3.17, dove sono indicate sia la traietto-

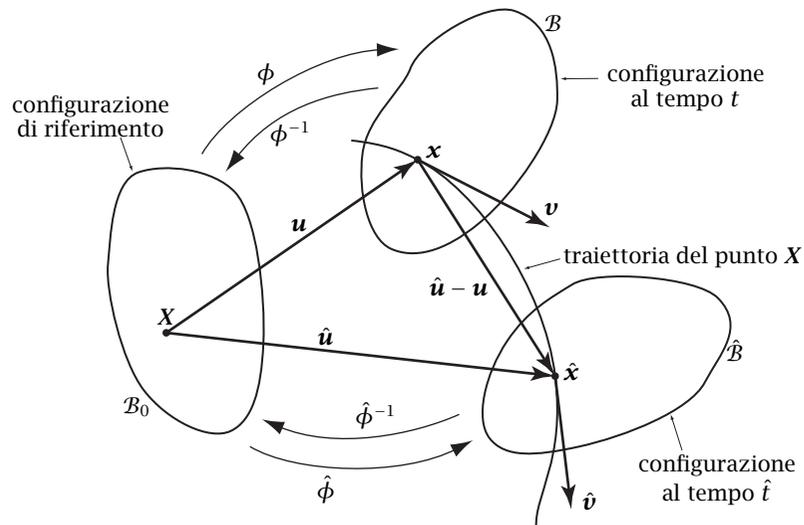


Figura 3.17: Moto di un corpo solido

ria di un generico punto materiale X che le posizioni spaziali $\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$ e $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}(X, \hat{t})$ che questo punto occupa all'istante generico t e rispettivamente ad un istante successivo variabile \hat{t} , posizioni individuate dai vettori spostamento \mathbf{u} e $\hat{\mathbf{u}}$ rispettivamente. Allora la *velocità*²⁵ \mathbf{v} del punto materiale X è definita come segue:²⁶

$$\mathbf{v} = \lim_{\substack{\hat{t} \rightarrow t \\ X = \text{cost}}} \frac{\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}}{\hat{t} - t} = \frac{d\mathbf{x}_X}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}. \quad (3.45)$$

Nella (3.45) $\hat{t} - t$ è la misura dell'intervallo di tempo compreso tra gli istanti t e \hat{t} , sottintendendo che i simboli t e \hat{t} , oltre che i due istanti di tempo (cioè

²⁴Trajectory nella letteratura inglese.

²⁵In inglese velocità si indica prevalentemente con il termine *velocity*, ma a volte è anche utilizzato il termine *speed*.

²⁶Si veda per esempio Levi-Civita e Amaldi (1949, par. 3, pp. 95-96) oppure Kittel et al. (1970, par. 2.6, pp. 37-38).

due enti temporali), rappresentino anche le loro coordinate temporali (cioè due numeri reali). Inoltre $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$ è lo spostamento del punto materiale X nel predetto intervallo di tempo, mentre \mathbf{x}_X e \mathbf{x} sono le funzioni della traiettoria del punto X e, rispettivamente, del moto. La fig. 3.17 rende poi evidente il ruolo di vettore posizione assunto dal vettore spostamento relativamente alla descrizione della traiettoria di un generico punto materiale X :

$$\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}. \quad (3.46)$$

Ne consegue la seguente espressione della velocità:

$$\mathbf{v} = \lim_{\substack{\hat{t} \rightarrow t \\ X = \text{cost}}} \frac{\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}}{\hat{t} - t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad (3.47)$$

dove la funzione \mathbf{u} è ora intesa dipendere anche dal tempo:

$$\mathbf{u} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{u}(X, t). \quad (3.48)$$

Come già detto, gli spostamenti \mathbf{u} a un dato tempo t risultano un campo materiale, cioè un campo definito nel riferimento materiale \mathcal{B}_0 , e così risulta di conseguenza il campo delle velocità al tempo t , ottenuto tramite la (3.47). L'esistenza della deformazione inversa ϕ^{-1} al tempo t generico permette di esprimere il campo delle velocità \mathbf{v} nella configurazione spaziale \mathcal{B} . Indicando con \mathbf{v}_{ref} e \mathbf{v}_{sp} le versioni rispettivamente materiale e spaziale della velocità:

$$\mathbf{v}_{\text{ref}} : \mathcal{B}_0 \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (X, t) \mapsto \mathbf{v}_{\text{ref}}(X, t), \quad (3.49)$$

$$\mathbf{v}_{\text{sp}} : \mathcal{B} \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t). \quad (3.50)$$

risulta:

$$\mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{ref}}(\phi^{-1}(\mathbf{x}), t), \quad (3.51)$$

dove si è utilizzata la deformazione inversa ϕ^{-1} corrispondente al tempo t per ottenere il punto materiale X che al tempo t occupa la posizione spaziale \mathbf{x} , dopodiché si è applicata la funzione velocità materiale per ottenere la velocità di tale punto materiale al tempo t . Inversamente, si può esprimere la funzione velocità materiale \mathbf{v}_{ref} in termini di quella spaziale \mathbf{v}_{sp} :

$$\mathbf{v}_{\text{ref}}(X, t) = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\phi(X), t) = \mathbf{v}_{\text{sp}}(\mathbf{x}(X, t), t), \quad (3.52)$$

dove ora è stata utilizzata la funzione di deformazione ϕ corrispondente al tempo t per ottenere il punto spaziale \mathbf{x} che al tempo t è occupato dal

punto materiale X , dopodiché si è applicata la funzione velocità spaziale per ottenere la velocità del punto materiale che al tempo t si trova nella posizione spaziale \mathbf{x} .

Il campo delle *accelerazioni*²⁷ \mathbf{a} si ottiene poi derivando rispetto al tempo la velocità lungo le traiettorie, cioè eseguendo la cosiddetta *derivazione materiale*²⁸ del campo delle velocità, derivazione indicata con il simbolo $\dot{\mathbf{v}}$. Nel caso in cui il campo delle velocità \mathbf{v} sia quello materiale (3.49), come di solito avviene nella meccanica dei solidi, la derivazione materiale si ottiene facendo la derivata parziale della velocità rispetto al tempo e ne risulta il campo materiale delle accelerazioni:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{ref}}}{\partial t}. \quad (3.53)$$

Se invece il campo delle velocità \mathbf{v} è quello spaziale (3.50), come di solito avviene nella meccanica dei fluidi, la derivazione materiale si ottiene utilizzando la (3.52) nella (3.53), applicando la regola di derivazione delle funzioni di funzione e passando dalla descrizione materiale a quella spaziale tramite la funzione di deformazione, ottenendo così il campo spaziale delle accelerazioni:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_{\text{sp}}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}_{\text{sp}}) \mathbf{v}_{\text{sp}}. \quad (3.54)$$

La iniziale minuscola del simbolo grad sottolinea che l'operazione gradiente è fatta su una funzione definita nella configurazione spaziale \mathcal{B} .

Per quel che riguarda le condizioni di regolarità della funzione del moto relativamente alla sua dipendenza dal tempo, alla generica traiettoria \mathbf{x}_X si richiederà sia di essere continua che di possedere derivate continue fino all'ordine richiesto. Si noti che mentre una traiettoria discontinua è priva (almeno attualmente) di qualunque significato fisico, così non è in generale per una traiettoria che presenti delle discontinuità nelle sue derivate. Per esempio, nel caso di un impulso concentrato ad un dato istante, fornito da un colpo di martello od altro, la velocità, che rappresenta la derivata prima della funzione traiettoria, subisce una discontinuità a quell'istante. Comunque tali eventuali discontinuità sono normalmente localizzate in un numero ristretto di istanti di tempo, ai quali si dovrà allora prestare una particolare attenzione nel caso si vogliano mettere in gioco le discontinuità

²⁷ *Acceleration* nella letteratura inglese.

²⁸ *Material derivative* nella letteratura inglese.

stesse. La continuità è comunque preservata per gli intervalli di tempo compresi tra due discontinuità successive.

Si considerino ora sia le ipotesi di continuità delle traiettorie e delle sue derivate prime (temporali) che le ipotesi della continuità della funzione di deformazione e delle sue derivate prime (spaziali) assieme all'ipotesi che lo jacobiano della deformazione sia diverso da zero. Ne consegue allora che nel corso di un moto lo jacobiano della deformazione, dipendendo in modo continuo dal tempo e non annullandosi mai, ha sempre lo stesso segno. Se ad una qualunque configurazione \mathcal{B} possibile del corpo si richiede di far parte di un moto possibile contenente la configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 , lo jacobiano della deformazione deve sempre essere strettamente positivo. Infatti se esiste un moto possibile tale che:

$$\mathcal{B}(t_0) = \mathcal{B}_0, \quad (3.55)$$

almeno ad un istante t_0 non necessariamente coincidente con l'istante iniziale, allora allo stesso istante la matrice jacobiana coincide con la matrice identità e il suo determinante, coincidendo con l'unità, è positivo. Quindi sotto l'ipotesi che valga la (3.55) per un moto possibile del corpo e per un dato istante t_0 , la preservazione dell'orientazione è una conseguenza diretta delle ipotesi di regolarità della deformazione e del moto.

3.1.7 Moto rigido

Nel caso di un moto rigido di un corpo la trasformazione rigida r che mappa la configurazione di riferimento \mathcal{B}_0 nella configurazione spaziale \mathcal{B} diventa funzione del tempo. La funzione del moto $\mathbf{x}(X, t)$ si ottiene allora dalla (3.34), p. 80, con l'avvertenza che la posizione spaziale \mathbf{o} del polo \mathbf{O} prescelto nella configurazione di riferimento e il tensore rotazione \mathbf{R} associato alla trasformazione rigida sono funzioni del tempo:

$$\mathbf{x}(X, t) = \mathbf{o}(t) + \mathbf{R}(t)(X - \mathbf{O}). \quad (3.56)$$

Analogamente dalla (3.36), p. 80, si ottiene il campo degli spostamenti rigidi:

$$\mathbf{u}(X, t) = \mathbf{u}_O(t) + (\mathbf{R}(t) - \mathbf{I})(X - \mathbf{O}), \quad (3.57)$$

dove $\mathbf{u}_O(t)$ è lo spostamento del polo all'istante t .

Conformemente alla (3.47), p. 83, la velocità \mathbf{v} della generica particella X si ottiene derivando parzialmente rispetto al tempo la funzione del

moto (3.56) oppure il campo (3.57) degli spostamenti:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \dot{\mathbf{R}}(X - \mathbf{O}) = \mathbf{v}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T \mathbf{R}(X - \mathbf{O}) = \mathbf{v}_O + \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T (\mathbf{x} - \mathbf{o}), \quad (3.58)$$

dove si è sfruttata la proprietà $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ delle trasformazioni ortogonali.²⁹

La relazione (3.58) è indipendente dalla configurazione di riferimento e quindi lo è anche la quantità tensoriale seguente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad (3.59)$$

detta *velocità angolare*.³⁰ Derivando materialmente l'identità $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$ ne deriva l'emisimmetria della velocità angolare:

$$\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + \mathbf{R}\dot{\mathbf{R}}^T = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T + (\dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T)^T = \mathbf{0}. \quad (3.60)$$

Se $\boldsymbol{\omega}$ è il vettore assiale di $\boldsymbol{\Omega}$,³¹ il campo (3.58) delle velocità può scriversi quindi nella forma:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{x} - \mathbf{o}). \quad (3.61)$$

Si noti che il vettore velocità angolare agisce sui vettori posizione $\mathbf{x} - \mathbf{o}$ che si hanno nella configurazione effettiva del solido (quella spaziale) e che tali vettori non coincidono in generale con quelli $X - \mathbf{O}$ che si hanno invece nella configurazione di riferimento del solido (fig. 3.14, p. 80).

3.2 Dinamica

Le grandezze dinamiche descrivono le cause del moto di un corpo. In altri termini, descrivono le azioni che l'ambiente esterno al corpo esercita sul corpo stesso oppure sulle sue parti. Per poter descrivere le azioni esercitate su una parte del corpo, occorre isolare, almeno in via concettuale, tale parte dal resto del corpo. Questo fatto impone che le variabili dinamiche di un corpo continuo siano legate ai volumi e non ai punti, dato che i punti non sono isolabili da un corpo continuo. Poiché si suppone che un corpo continuo sia indefinitamente suddivisibile, esso non è direttamente assimilabile ad un sistema di punti materiali. Occorre allora recuperare

²⁹Cfr. Ia (1.161), p. 39.

³⁰*Angular velocity* oppure *spin* nella letteratura inglese.

³¹Cfr. il par. 1.3.3, p. 30.

il suo comportamento come limite del comportamento di sistemi di punti materiali approssimanti il corpo ed ottenuti eseguendo delle partizioni sempre più fini del corpo stesso.

Si ricorda che alla base della dinamica di un sistema di punti materiali possono porsi le *leggi di Newton*,³² che comprendono il *principio di inerzia*, la *proporzionalità tra forza ed accelerazione* ed infine la *legge di azione e reazione*. Le variabili fisiche che entrano in gioco in tali leggi sono essenzialmente le forze applicate alle particelle e le velocità e le accelerazioni delle stesse particelle. Come noto sia la velocità che l'accelerazione dipendono dall'osservatore mentre le forze ne sono invece indipendenti o, in altri termini, sono delle *quantità oggettive*. Per far sì che le leggi di Newton siano indipendenti dall'osservatore, e quindi oggettive, occorre allora far entrare in gioco non le velocità e le accelerazioni delle particelle rispetto al dato osservatore, ma piuttosto quelle relative al sistema materiale delle *stelle fisse*.³³ L'influenza di tale sistema materiale sul moto di un qualunque sistema meccanico o parte di esso è quindi inerente al modo in cui le leggi del moto stesso sono scritte, mentre l'ambiente "immediatamente" circostante interviene per il tramite delle forze da esso applicate al sistema stesso. Si ricorda che la proporzionalità tra forza ed accelerazione ha come fondamentale conseguenza la *relatività galileiana*, ovvero il fatto che nelle leggi del moto si possano far entrare in gioco le quantità cinematiche valutate rispetto ad un qualunque *sistema inerziale*, ovvero ad un qualunque sistema in moto traslatorio uniforme rispetto a quello delle stelle fisse.³⁴ Come noto, l'osservatore terrestre non è inerziale, ma lo si può considerare tale con buona approssimazione in molti problemi di interesse ingegneristico. È implicito che nel seguito, salvo preavviso, l'osservatore sarà sempre inerziale nel momento in cui entrano in gioco le leggi del moto. In tal modo tutte le quantità cinematiche sono automaticamente valutate rispetto ad un osservatore inerziale. Se invece si facesse entrare in gioco un osservatore non inerziale, occorrerebbe trasformare le sue

³²Newton's laws nella letteratura inglese.

³³In realtà è noto che le "stelle fisse", *fixed stars* nella letteratura inglese, hanno dei moti relativi fra di loro, ma ciò è di scarsa importanza per quanto si sta dicendo poiché sono almeno approssimativamente fisse per i relativamente brevi periodi di tempo richiesti nell'ambito della meccanica newtoniana.

³⁴Si noti che il principio di relatività, che richiede che le leggi del moto espresse in termini di quantità cinematiche valutate rispetto ad un qualunque osservatore siano oggettive, è un concetto più forte della richiesta che le leggi del moto siano indipendenti dall'osservatore: le leggi di Newton sono oggettive ma non soddisfano il principio di relatività, se non nella forma ristretta della relatività galileiana.

quantità cinematiche in quelle relative ad un osservatore inerziale prima di scrivere le leggi del moto, il che poi significa che non si può prescindere dal far entrare in gioco un osservatore inerziale.

Per inquadrare il problema della dinamica dei solidi nella giusta prospettiva, si farà innanzitutto un excursus delle grandezze dinamiche associate ai sistemi di particelle e delle loro interrelazioni per farne poi un'opportuna estensione al caso del corpo continuo.

3.2.1 Dinamica dei sistemi di particelle

Con riferimento alla fig. 3.18, una particella in moto può essere descrit-

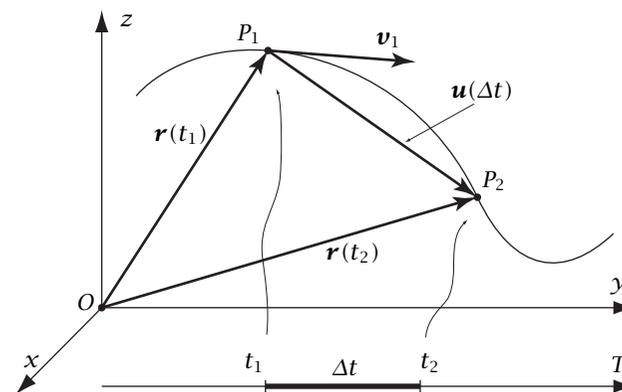


Figura 3.18: Moto di una particella

ta cinematicamente dal vettore posizione $\mathbf{r} = P - O$, che rappresenta lo spostamento fittizio che porta il punto O di riferimento nella posizione P occupata dalla particella ad un dato istante. Con tale assunzione, lo spostamento $\mathbf{u}(\Delta t)$ della particella in un intervallo di tempo Δt compreso tra gli istanti t_1 e t_2 vale $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1)$, e la sua velocità \mathbf{v} risulta:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (3.62)$$

Una particella in moto è poi caratterizzata fondamentalmente dalla resistenza che presenta alle variazioni di velocità. L'azione \mathbf{i} che in un dato intervallo di tempo Δt agisce sulla particella modificandone la sua velocità

è detta *impulso*.³⁵ L'impulso per unità di tempo rappresenta la *forza* f ³⁶ applicata alla particella ad un dato istante di tempo t :

$$f = \lim_{\Delta t \rightarrow t} \frac{i(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.63)$$

Si noti che nel caso di una sola particella non vi sono forze interne e che quindi la forza totale applicata alla particella coincide con la forza esterna totale. L'impulso necessario per annullare la velocità della particella ad un dato istante rappresenta infine la *quantità di moto* p ³⁷ a quell'istante. Ne consegue che nell'intervallo di tempo Δt , compreso tra gli istanti t_1 e t_2 , l'impulso vale la differenza della quantità di moto in tali istanti:

$$i(\Delta t) = p(t_2) - p(t_1), \quad (3.64)$$

e che quindi la forza rappresenta la derivata della quantità di moto:

$$f = \frac{dp}{dt}, \quad (3.65)$$

relazione nota come *bilancio della quantità di moto*.

La quantità di moto, impulso necessario ad un dato istante per annullare la velocità della particella, rappresenta una funzione della velocità della particella. Affinché la quantità di moto sia una quantità oggettiva, al pari sia degli impulsi che delle forze, consegue che la velocità che deve essere annullata è quella relativa al sistema materiale delle stelle fisse. Per velocità sufficientemente piccole rispetto alla velocità della luce nel vuoto tale legame, in accordo con la legge di inerzia e la proporzionalità tra forza e accelerazione, può ritenersi lineare:

$$p = mv, \quad (3.66)$$

dove il coefficiente di proporzionalità m rappresenta la *massa*³⁸ della particella.

Si noti che la relazione (3.66) assume il ruolo di un *legame costitutivo*,³⁹ ovvero di un legame tra variabili fisiche dipendente dal materiale. Si noti

inoltre che il bilancio della quantità di moto (3.65) e il legame costitutivo (3.66) sono equivalenti alla proporzionalità tra forza ed accelerazione. La relazione lineare (3.66) è quindi equivalente alla relatività galileiana ed implica l'esistenza degli osservatori inerziali. Dato che l'osservatore terrestre è, come già detto, approssimativamente inerziale la (3.66) può essere ritenuta approssimativamente valida nel caso la velocità v sia quella relativa all'osservatore terrestre.

Nel diagramma di fig. 3.19 è riassunta la situazione relativa alla

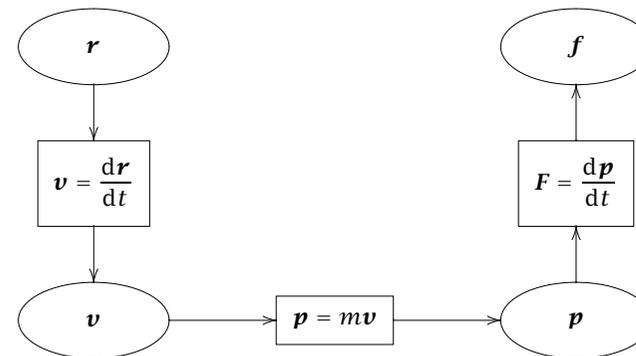


Figura 3.19: Cinematica e dinamica della particella

cinematica e alla dinamica di una particella.⁴⁰

Nel caso di un sistema di n particelle, la forza esterna F totale agente sul sistema e la quantità di moto P totale si ottengono sommando i contributi delle singole particelle:

$$F = \sum_i f_i^{(e)}, \quad P = \sum_i m_i v_i, \quad (3.67)$$

dove $f_i^{(e)}$ è la sola forza esterna totale agente sulla i -esima particella. Si introducono poi i momenti di tali grandezze, e cioè il *momento delle forze esterne* M ⁴¹ e il *momento della quantità di moto* o *momento angolare* L ,⁴²

³⁵ *Impulse* nella letteratura inglese.

³⁶ *Force* nella letteratura inglese.

³⁷ *Linear momentum* o, più semplicemente, *momentum* nella letteratura inglese.

³⁸ *Mass* nella letteratura inglese.

³⁹ *Constitutive equation* nella letteratura inglese.

⁴⁰ Diagrammi del tipo di quello riportato in fig. 3.19 sono noti nella letteratura scientifica con il nome di diagrammi di Tonti.

⁴¹ Momento delle forze si rende in inglese con il termine *moment of forces*.

⁴² *Moment of momentum* oppure *angular momentum* nella letteratura inglese.

calcolati per esempio rispetto al punto O (fisso) di riferimento (fig. 3.18):

$$\mathbf{M} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i^{(e)}, \quad \mathbf{L} = \sum_i m \mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \quad (3.68)$$

Richiedere che valgano, per ogni singola particella, il bilancio della quantità di moto (3.65) e l'equazione costitutiva (3.66) (che, come detto più sopra, equivale a richiedere la proporzionalità tra forza ed accelerazione) e che inoltre valga il principio di azione e reazione è equivalente a richiedere che per ogni parte del sistema valgano le due seguenti *equazioni di bilancio*:⁴³

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}, \quad \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \quad (3.69)$$

note quali *prima equazione di bilancio* o *bilancio della quantità di moto* e, rispettivamente, *seconda equazione di bilancio* o *bilancio del momento della quantità di moto*. Si sottolinea come, in virtù del principio di azione e reazione, nelle (3.69) compaiano i contributi delle sole forze esterne. Nel diagramma di fig. 3.20 è riassunta la situazione relativa alla cinematica e

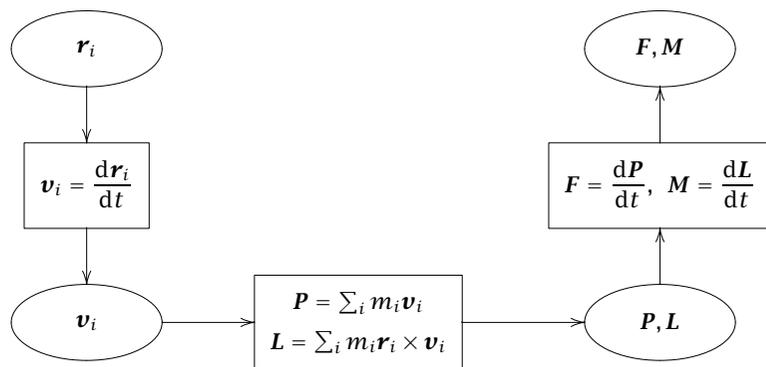


Figura 3.20: Cinematica e dinamica dei sistemi di particelle

alla dinamica di un sistema di particelle.

Richiedere che valgano le due equazioni di bilancio (3.69) per ogni parte del sistema di particelle è quindi equivalente a richiedere che valgano la proporzionalità tra forza ed accelerazione e la legge di azione e reazione per ogni particella del sistema. Ne consegue che le due equazioni

⁴³ *Balance equations* nella letteratura inglese.

di bilancio (3.69) possono essere poste, insieme alla legge di inerzia, alla base della dinamica dei sistemi di punti materiali, compresi quelli che si ottengono partizionando idealmente un mezzo continuo e che lo approssimano sempre meglio più la partizione è fine. Nel seguito le equazioni di bilancio (3.69) saranno quindi generalizzate ai mezzi continui tramite opportune operazioni di limite. Si noti che ponendo alla base della dinamica dei sistemi, discreti o continui che siano, le due equazioni di bilancio il principio di azione e reazione non risulterà più un principio indipendente, ma una semplice conseguenza di tale assunzione e come tale dimostrabile.

3.2.2 Estensione al caso continuo

Dalla discussione precedente discende la seguente assunzione.

Assunzione fondamentale della dinamica del corpo continuo. *Ad ogni parte, cioè ad ogni volume, di un corpo continuo si richiede di soddisfare le due equazioni di bilancio.*

Ciò premesso, si tratta allora di estendere le due equazioni di bilancio (3.69) al caso di un corpo continuo. Si consideri allora un volume V interno alla generica configurazione deformata \mathcal{B} del corpo (fig. 3.21). A

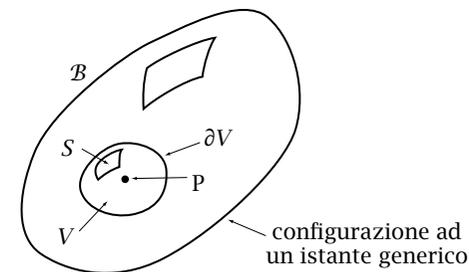


Figura 3.21: Volume generico

tale volume dovranno essere associate una *forza esterna* \mathbf{F} , un *momento delle forze esterne* \mathbf{M} , una quantità di moto \mathbf{P} e infine un momento della quantità di moto \mathbf{L} soddisfacenti le due equazioni di bilancio, che nel nuovo contesto occorre scrivere nella forma:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{P}}, \quad \mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}, \quad (3.70)$$

dove il punto indica derivazione materiale, cioè valutata seguendo l'evoluzione del volume V nel corso del tempo. Nel caso statico, ovvero in assenza di variazioni della quantità di moto e del momento della quantità di moto, le due equazioni di bilancio (3.70) si riducono alle due *equazioni di equilibrio*⁴⁴ delle forze e dei momenti delle forze, dette anche equazioni di equilibrio alla *traslazione* e alla *rotazione* rispettivamente e spesso citate quali *equazioni cardinali di equilibrio* o *equazioni cardinali della statica*:

$$\mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{0}. \quad (3.71)$$

Si ribadisce che le equazioni di bilancio (3.70), oppure quelle di equilibrio (3.71), devono essere imposte ad ogni volume V estraibile dal corpo: le sole equazioni di bilancio, o di equilibrio, globali (relative a tutto il corpo \mathcal{B}) sono sufficienti, come noto, a stabilire la dinamica, o la statica, del solo corpo rigido ma non del corpo continuo deformabile generico.

Nel seguito, onde rendere operative le equazioni di bilancio (3.70), si preciseranno innanzitutto, relativamente al modello di corpo continuo, da una parte i concetti di massa, di quantità di moto e di momento della quantità di moto e dall'altra parte i concetti di forza e di momento delle forze.

3.2.3 Massa, quantità di moto e momento della quantità di moto

Conformemente al fatto che da un corpo continuo si possano isolare solo volumi, la quantità di moto, il momento della quantità di moto e la massa sono considerate delle *funzioni di dominio*, ovvero delle quantità fisiche associate ai volumi estraibili dal corpo. Ad ogni volume V estraibile dal corpo e sufficientemente regolare (fig. 3.21) viene quindi associata la sua massa $m(V)$. La *massa per unità di volume* ρ , detta *densità* o *massa specifica*⁴⁵ e definita in un qualunque punto P del corpo, risulta definita dal limite:

$$\rho = \lim_{V \rightarrow P} \frac{m(V)}{V}. \quad (3.72)$$

Se la massa per unità di volume esiste, ovvero se esiste il limite (3.72), la massa associata ad un dato volume V viene recuperata via integrazione:

$$m(V) = \int_V \rho \, dV. \quad (3.73)$$

Un caso particolare in cui il limite (3.72) non esiste è quello di una massa concentrata \bar{m} in un punto P .⁴⁶

$$m(V) = \begin{cases} \bar{m} & \text{se } P \in V \\ 0 & \text{se } P \notin V \end{cases}. \quad (3.74)$$

Ciò premesso, con riferimento alla fig. 3.22, si suddivida il volume gene-

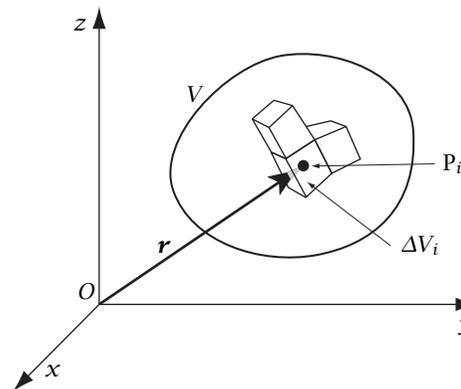


Figura 3.22: Partizione di un volume generico

rico V , appartenente al corpo \mathcal{B} , in un certo numero di parti ΔV_i , e siano P_i un punto interno alla generica parte ΔV_i , $\mathbf{v}(P_i)$ la sua velocità ed infine $\mathbf{r}(P_i)$ il vettore posizione del punto P_i rispetto al polo O di riduzione dei momenti. La “finezza” δ della partizione può essere caratterizzata dal massimo diametro delle sfere circoscritte ai volumi ΔV_i . Ricordando le espressioni valide per i sistemi di punti materiali e riportate nelle seconde equazioni delle (3.67) e (3.68), la quantità di moto e il momento della quantità di moto (rispetto al polo O) di tutto il volume V si possono “approssimativamente” porre nella forma:

$$\mathbf{P} \approx \sum_i m(\Delta V_i) \mathbf{v}(P_i) = \sum_i \frac{m(\Delta V_i)}{\Delta V_i} \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i, \quad (3.75)$$

⁴⁶La funzione ρ risulta invece definita nel senso esteso di *distribuzione*. In particolare, nel caso della (3.74) si genera una cosiddetta *delta di Dirac*. Per chi fosse interessato al concetto di distribuzione si veda per esempio Gilardi (1994, cap. III, pp. 89-154) oppure Tricomi (1970, par. 2.10, pp. 115-125).

⁴⁴Equilibrium equations nella letteratura inglese.

⁴⁵Mass per unit volume oppure mass density, o più semplicemente density, nella letteratura inglese.

$$\mathbf{L} \approx \sum_i \mathbf{r}(P_i) \times [m(\Delta V_i) \mathbf{v}(P_i)] = \sum_i \frac{m(\Delta V_i)}{\Delta V_i} \mathbf{r}(P_i) \times \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i. \quad (3.76)$$

Tenendo conto della definizione (3.72) di densità, la quantità di moto e il momento della quantità di moto (rispetto al polo O) del volume V saranno allora approssimati dalle seguenti somme:

$$\mathbf{P} \approx \sum_i \rho(P_i) \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i, \quad (3.77a)$$

$$\mathbf{L} \approx \sum_i \rho(P_i) \mathbf{r}(P_i) \times \mathbf{v}(P_i) \Delta V_i. \quad (3.77b)$$

Le due somme ai secondi membri delle (3.77) definiscono, al limite per $\delta \rightarrow 0$, due integrali tripli (secondo Riemann). Si ottengono così i seguenti legami tra quantità di moto e momento della quantità di moto da una parte e campo delle velocità dall'altra parte, estensioni al caso continuo del legame lineare (3.66):

$$\mathbf{P} = \int_V \rho \mathbf{v} dV, \quad \mathbf{L} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v} dV. \quad (3.78)$$

Dato che il volume V spaziale varia in generale nel tempo, essendo il corrispondente di un dato volume materiale V_0 , per il calcolo delle derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto serve il *teorema del trasporto di Reynolds*,⁴⁷ nella forma particolare che assume quando sotto il segno di integrale compare la densità ρ :

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{g} = \int_V \rho \dot{\mathbf{g}} dV, \quad (3.79)$$

dove \mathbf{g} è una qualunque funzione vettoriale. Le derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto valgono allora:

$$\dot{\mathbf{P}} = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} dV, \quad \dot{\mathbf{L}} = \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} dV, \quad (3.80)$$

avendo tenuto conto che:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad (3.81)$$

poiché $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$.

⁴⁷Affermato da Reynolds nel 1903, ma dimostrato da Spielrein nel 1916. *Reynolds transport theorem* nella letteratura inglese.

Quantità di moto specifica. Si noti che, come la massa, anche la quantità di moto è una funzione di dominio e la *quantità di moto per unità di volume* \mathbf{p} risulta definita dal limite:

$$\mathbf{p} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{P}(V)}{V}. \quad (3.82)$$

Dalla prima delle (3.78) consegue che il legame tra la quantità di moto specifica e la velocità è lineare e vale:

$$\mathbf{p} = \rho \mathbf{v}. \quad (3.83)$$

Anche la derivata materiale della quantità di moto è una funzione di dominio e la funzione specifica associata \mathbf{q} è definita dal limite:

$$\mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\dot{\mathbf{P}}(V)}{V} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\int_V \dot{\mathbf{p}} dV}{V}. \quad (3.84)$$

L'ultimo membro dell'uguaglianza è stato inserito per rendere evidente che essendo il volume V in generale funzione del tempo, la funzione specifica \mathbf{q} associata alla derivata materiale della quantità di moto non si ottiene in generale derivando materialmente la quantità di moto specifica \mathbf{p} , poiché, proprio per il fatto di essere V funzione del tempo, non è possibile portare direttamente il segno di derivata all'interno del segno di integrale. Dalla prima delle (3.80) si ottiene poi il legame lineare tra la funzione specifica \mathbf{q} e l'accelerazione $\dot{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{q} = \rho \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.85)$$

Per quel che riguarda le funzioni specifiche associate al momento della quantità di moto e alla derivata materiale del momento della quantità di moto, queste, nel caso di corpi semplici, si ritengono in generale generate dalle funzioni specifiche associate alla quantità di moto e alla derivata della quantità di moto:

$$\lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{L}(V)}{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad \lim_{V \rightarrow P} \frac{\dot{\mathbf{L}}(V)}{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{q}, \quad (3.86)$$

in accordo con il caso particolare generato dalle seconde delle (3.78) e (3.80)

$$\lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{L}(V)}{V} = \rho \mathbf{r} \times \mathbf{v}, \quad \lim_{V \rightarrow P} \frac{\dot{\mathbf{L}}(V)}{V} = \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}. \quad (3.87)$$

◇ ◇ ◇

Dimostrazione del teorema del trasporto di Reynolds. A tale scopo occorre innanzitutto osservare che, per il teorema di cambiamento di variabile,⁴⁸ la (3.73) diventa:

$$m(V) = \int_V \rho \, dV = \int_{V_0} \rho J \, dV_0, \quad (3.88)$$

dove J è lo jacobiano della deformazione. Dato un generico volume V_0 materiale a cui corrisponde tramite la deformazione il volume V spaziale, funzione in generale del tempo, l'ipotesi che la massa si conservi impone che la massa $m(V)$ sia indipendente dal tempo, essendo tale massa quella associata ad ogni istante allo stesso volume materiale V_0 . Dalla (3.88) si deduce allora che l'integrale $\int_{V_0} \rho J \, dV_0$ non dipende dal tempo e questo per ogni V_0 . Tale invarianza deve quindi valere anche localmente, cioè la quantità ρJ , se valutata ad ogni istante per la stessa particella materiale ($\mathbf{X} = \text{cost}$), deve essere indipendente dal tempo. Ne consegue infine:

$$\frac{\dot{\rho J}}{\rho J} = 0. \quad (3.89)$$

Ciò premesso si ha, applicando due volte il teorema di cambiamento di variabile e tenendo conto della (3.89):

$$\int_V \dot{\rho \mathbf{g}} \, dV = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial t} (\rho J \mathbf{g}) \, dV = \int_{V_0} \rho J \dot{\mathbf{g}} \, dV = \int_V \rho \dot{\mathbf{g}} \, dV, \quad (3.90)$$

come volevasi dimostrare. Si noti che è sottinteso che nel termine $\int_{V_0} \rho J \dot{\mathbf{g}} \, dV$ le funzioni in gioco siano materiali, per cui in tal caso risulta $\dot{\mathbf{g}} = \partial \mathbf{g} / \partial t$. Invece nel termine $\int_V \rho \dot{\mathbf{g}} \, dV$ è sottinteso che le funzioni siano spaziali e dunque in tal caso si ha $\dot{\mathbf{g}} = \partial \mathbf{g} / \partial t + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{g}$. ■

Cenni alla meccanica dei fluidi. Nella meccanica dei fluidi si adotta un punto di vista euleriano, ovvero sia la descrizione del moto e dello stato del fluido è fatta utilizzando campi spaziali, che quindi descrivono, ad un dato istante e in una data parte di spazio, lo stato del fluido che in quell'istante si trova in quella parte di spazio. Si noti che la derivazione materiale di un qualunque campo spaziale può sempre eseguirsi, analogamente alla (3.54), senza fare riferimento alla funzione di deformazione (o al campo degli spostamenti), ma semplicemente basandosi sul campo spaziale delle velocità e che la scrittura delle equazioni di bilancio necessita della conoscenza del solo campo spaziale delle velocità.

Per descrivere, da un punto di vista euleriano, lo stato di un fluido ad un generico istante si può quindi utilizzare il campo spaziale delle velocità \mathbf{v} che mappa una regione \mathcal{R} dello spazio euclideo \mathcal{E} nello spazio vettoriale ordinario \mathcal{V} :

$$\mathbf{v} : \mathcal{R} \times T \rightarrow \mathcal{V}, \quad (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (3.91)$$

⁴⁸Si noti che la (3.88) non è altro che una semplice conseguenza della relazione (3.17) che esprime il modo di variare di un elemento di volume a seguito della deformazione.

dove \mathbf{x} è il generico punto spaziale appartenente alla regione \mathcal{R} . Naturalmente si suppone che il campo delle velocità sia regolare, secondo le richieste del modello continuo.

Il compito principale riservato al campo (3.91) è quello di fornire la quantità di moto e il momento della quantità di moto di un qualunque volume finito V tramite le (3.78). Ci si rende quindi conto che il significato di tale campo continuo di velocità non è quello di fornire le velocità locali dei singoli elementi di fluido, bensì quello di riprodurre, ad una scala macroscopica, la quantità di moto e il momento della quantità di moto di un qualunque volume V . In questo senso il campo delle velocità è una variabile virtuale non direttamente osservabile ma capace di fornire, tramite le (3.78), delle quantità suscettibili di misura diretta. In altri termini, la velocità $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, deve intendersi approssimativamente quale limite del rapporto $\mathbf{P}(V)/m(V)$, limitatamente a volumi V macroscopici. D'altronde questo è il caso di tante altre variabili fisiche, anche se questo non viene quasi mai detto esplicitamente, come la densità ρ definita dalla (3.72).

Comunque, scelto un dato volume materiale di fluido, individuato per esempio dalla sua posizione $V(t_0)$ ad un dato istante t_0 , è sempre possibile integrare il campo delle velocità in un campo di spostamenti ed ottenere così le traiettorie degli elementi fluidi del dato volume. Occorre però ricordare che queste traiettorie hanno in generale solo un significato medio, e che non è possibile in generale prevedere dove un elemento di fluido del volume $V(t_0)$ si troverà effettivamente ad un dato istante di tempo.

◇ ◇ ◇

3.2.4 Forze e momenti delle forze

Le forze e i momenti applicati ad un generico volume V di un corpo continuo rappresentano l'azione che l'ambiente esterno al volume esercita sul volume stesso. Queste azioni si distinguono in *azioni a distanza*, che competono direttamente al volume, e in *azioni di contatto* trasmesse attraverso una qualunque porzione S della superficie di contorno del volume (fig. 3.21 p. 87).

Si noti che se S è una qualunque superficie interna ad un corpo continuo occorre distinguere le sue due facce, attraverso le quali si esercitano le azioni di una parte del corpo sull'altra. Per esempio se S è parte del contorno ∂V di un volume interno V , è allora necessario distinguere tra l'azione che il resto del corpo esercita su tale volume attraverso la superficie S e l'azione che il volume V esercita sulla parte restante del corpo, sempre attraverso tale superficie. Allo scopo di distinguere le due facce di

una stessa superficie interna S si *orienta esternamente* la superficie, orientando per esempio la normale \mathbf{n} tracciata per uno qualunque dei suoi punti (fig. 3.23a). Ad una superficie interna così orientata si associano per con-

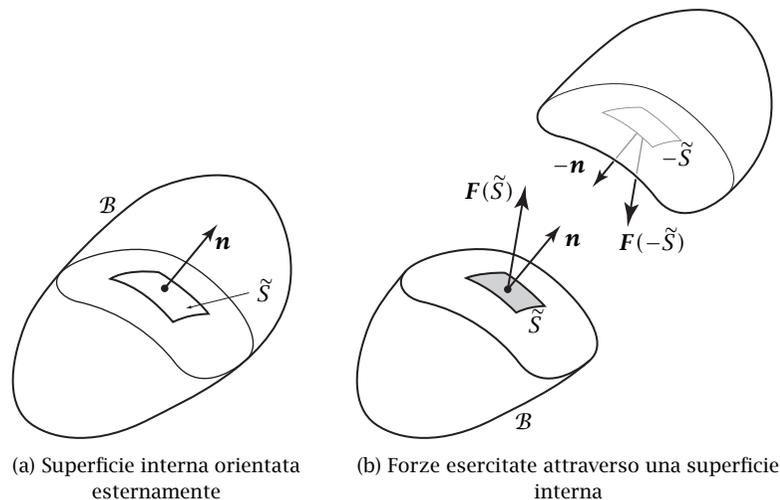


Figura 3.23: Superficie interna a un corpo continuo

venzione le forze che agiscono sulla parte del corpo di normale positiva uscente. Nel seguito indicheremo con \tilde{S} la superficie interna S dotata di una delle due possibili orientazioni e con $-\tilde{S}$ la stessa superficie dotata dell'orientazione opposta.

Ciò precisato, occorre distinguere quindi tra *forze di volume*⁴⁹ $\mathbf{F}(V)$ e *momenti di volume*⁵⁰ $\mathbf{M}(V)$ che competono ad un generico volume V del corpo \mathcal{B} , eventualmente coincidente con il corpo stesso, e *forze di superficie*⁵¹ $\mathbf{F}(S)$ e $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e *momenti di superficie*⁵² $\mathbf{M}(S)$ e $\mathbf{M}(\tilde{S})$, che competono ad una generica superficie esterna S , appartenente quindi al contorno del corpo continuo, oppure ad una generica superficie interna orientata \tilde{S} , che può quindi essere parte del contorno di un volume interno al corpo. Se S è una qualunque superficie interna ne risultano quindi le forze $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e $\mathbf{F}(-\tilde{S})$

⁴⁹ *Body force* nella letteratura inglese.

⁵⁰ *Moment of body forces* nella letteratura inglese.

⁵¹ *Surface force* oppure *contact force* nella letteratura inglese.

⁵² *Moment of surface forces* nella letteratura inglese.

e le coppie $\mathbf{M}(\tilde{S})$ e $\mathbf{M}(-\tilde{S})$ vicendevolmente esercitate dalle due parti del corpo attraverso la superficie stessa (fig. 3.23b).

Relativamente ad un volume V di cui si sta scrivendo il bilancio, le forze e le coppie di volume rappresentano normalmente delle azioni esterne, mentre le forze e le coppie di superficie rappresentano delle azioni esterne od interne al corpo a seconda che competano alla superficie di contorno del corpo oppure, rispettivamente, ad una superficie interna che idealmente tagli il corpo a cui il volume appartiene. Si faccia attenzione alla affermazione precedente: le forze e le coppie trasmesse attraverso una superficie interna al corpo sono forze e coppie interne al corpo, non interne al volume. Dal punto di vista di un volume V del corpo, tutte le forze e le coppie che si trasmettono attraverso la sua superficie di contorno sono forze esterne, cioè forze che l'ambiente esterno al volume (compresa la parte restante del corpo) esercita sul volume stesso, e come tali entrano tutte nel bilancio del volume. Si noti che se si volesse mettere in conto l'interazione a distanza delle diverse parti del corpo, dovuta, per esempio, alla loro mutua attrazione newtoniana, vi sarebbero delle forze di volume che rappresenterebbero delle azioni interne.

La forza peso, forza dovuta all'attrazione gravitazionale terrestre, rappresenta il tipico esempio di forza di volume. Anche le forze elettromagnetiche dovute alla presenza di cariche elettriche, statiche o in moto, distribuite nel corpo costituiscono esempi di forze di volume. La pressione di un fluido costituisce invece un esempio tipico di forza di superficie. Ma anche un corpo pesante appoggiato sulla superficie di contorno di un corpo trasmette una forza di superficie. Inoltre, le interazioni macroscopiche lungo una superficie interna di un solido, somma delle interazioni a livello microscopico tra le particelle site da una parte e dall'altra della superficie stessa, si possono normalmente compendiare in una forza di superficie.

Si ricordi che nel sistema SI di unità la forza (cfr. la tab. 1.3 a p. 18) è misurata in newton, in sigla N, mentre il momento di una forza, di formula dimensionale FL, è invece misurato in N m. Si noti che le dimensioni di un momento coincidono con quelle dell'energia che (come indicato nella tabella già citata) è misurata in joule, sigla J. Comunque, si ricordi che il nome joule e la sigla J sono riservati alla grandezza energia e non vengono utilizzati per la grandezza momento di una forza.

3.2.5 Forze e momenti specifici

Al fine di generare variabili dinamiche legate al punto, costituenti quindi dei campi definiti nella configurazione deformata \mathcal{B} del corpo, si introducono le forze e i momenti specifici.

Forza esterna per unità di volume. La *forza f per unità di volume*⁵³ associata ad un punto P (fig. 3.24a), resta definita come il limite della forza

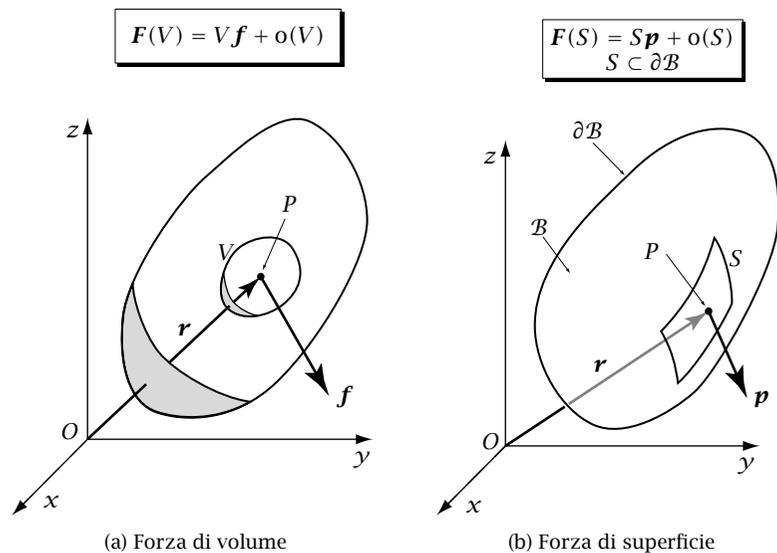


Figura 3.24: Forze di volume e di superficie

rapportata alla misura del volume:

$$\mathbf{f}(P) = \lim_{V \rightarrow P} \frac{F(V)}{V}, \tag{3.92}$$

dove V rappresenta sia un generico volume nell'intorno del punto P che la sua misura. Una forza per unità di volume, di formula dimensionale FL^{-3} , è misurata per esempio in N/mm^3 .

⁵³Body force per unit volume nella letteratura inglese.

Forza esterna per unità di superficie. Siano P un punto della superficie di contorno $\partial\mathcal{B}$ del mezzo continuo e S una generica superficie intorno del punto P e contenuta in $\partial\mathcal{B}$. Allora la *forza esterna per unità di superficie*⁵⁴ \mathbf{p} associata al punto P (fig. 3.24b) resta definita dal limite della forza rapporto l'area della superficie:

$$\mathbf{p}(P) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial\mathcal{B}}} \frac{F(S)}{S}. \tag{3.93}$$

Nel sistema SI di unità la forza per unità di superficie (cfr. la tab. 1.3 a p. 18) ha dimensioni FL^{-2} e può essere misurata in N/mm^2 , indicazione che viene nel seguito preferita al MPa che gli equivale.

Tensione. Sia \mathcal{S} una generica superficie contenuta nel mezzo continuo e contenente il punto P (fig. 3.25). Come già detto, la superficie \mathcal{S} separa il

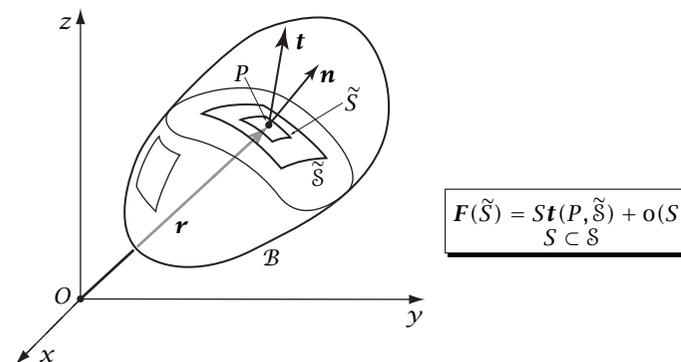


Figura 3.25: Tensione interna

corpo mettendo in luce due facce attraverso le quali si esercitano le azioni di una parte sull'altra. Nella fig. 3.25 la superficie è orientata dal versore normale \mathbf{n} in P uscente dalla parte del corpo sulla quale agisce la forza.

Ciò premesso, la *forza interna \mathbf{t} per unità di superficie*, detta *vettore di tensione* o più semplicemente *tensione*,⁵⁵ associata al punto P ed alla

⁵⁴Traction nella letteratura inglese. Alcuni autori usano il termine traction con il significato più generale di forza per unità di superficie, sia esterna che interna.

⁵⁵Stress vector oppure contact force density nella letteratura inglese.

superficie orientata \tilde{S} risulta:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S}) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \tilde{S}}} \frac{\mathbf{F}(\tilde{S})}{S}, \quad (3.94)$$

dove S rappresenta una generica superficie intorno del punto P e contenuta in \tilde{S} . Naturalmente la tensione ha le dimensioni di una forza per unità di superficie e quindi si misurerà prevalentemente in N/mm².

Momenti specifici. Si suppone che i momenti specifici siano generati dalle forze specifiche.⁵⁶ Si assume dunque la validità dei seguenti limiti dei momenti rapporto la misura dell'elemento geometrico cui competono (fig. 3.24 e 3.25):

$$\lim_{V \rightarrow P} \frac{\mathbf{M}(V)}{V} = \mathbf{r} \times \mathbf{f}, \quad (3.95a)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \partial B}} \frac{\mathbf{M}(S)}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (3.95b)$$

$$\lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \tilde{S}}} \frac{\mathbf{M}(\tilde{S})}{S} = \mathbf{r} \times \mathbf{t}, \quad (3.95c)$$

che forniscono rispettivamente il *momento per unità di volume*, il *momento esterno per unità di superficie* e il *momento interno per unità di superficie*. Nelle (3.95) l'operazione \times indica al solito il prodotto vettoriale di due vettori e \mathbf{r} il vettore posizione del punto P rispetto al polo di riduzione dei momenti. Le formule dimensionali di un momento per unità di volume oppure per unità di superficie sono rispettivamente FL⁻² e FL⁻¹ e possono quindi misurarsi per esempio in N/mm² e, rispettivamente, in N/mm.

Non sempre i limiti (3.92), (3.93), (3.94) e (3.95) esistono, come succede, per esempio, nel caso di una forza $\bar{\mathbf{F}}$ concentrata in un punto \bar{P} :

$$\mathbf{F}(V) = \begin{cases} \bar{\mathbf{F}} & \text{se } \bar{P} \in V \\ \mathbf{0} & \text{se } \bar{P} \notin V \end{cases}. \quad (3.96)$$

⁵⁶Nel caso di corpi microcontinui, di cui p. 70, occorre considerare anche la presenza di *momenti intrinseci*, ovvero sia non generati dalle forze applicate al continuo, al fine di modellare le azioni che riguardano la microstruttura che si vuole inglobare nel modello. In inglese si usa il termine generale *torque* per indicare sia momenti intrinseci che momenti dovuti a forze, mentre a volte si usa il termine *couple* per indicare il solo momento intrinseco.

In tal caso il limite (3.92) vale $\mathbf{0}$ se $P \neq \bar{P}$ mentre il modulo del limite diventa infinito se $P = \bar{P}$, e dunque la funzione \mathbf{f} non è definita in \bar{P} .⁵⁷

Come sempre quando si eseguono dei limiti di funzioni di dominio rapporto la misura di dominio (nel nostro caso funzioni di volume e di superficie) si recuperano le funzioni di dominio da quelle puntuali via integrazione nel dominio:

$$\mathbf{F}(V) = \int_V \mathbf{f} \, dV, \quad \mathbf{M}(V) = \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV, \quad (3.97a)$$

$$\mathbf{F}(S) = \int_S \mathbf{p} \, dS, \quad \mathbf{M}(S) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dS, \quad S \subset \partial B, \quad (3.97b)$$

$$\mathbf{F}(\tilde{S}) = \int_S \mathbf{t} \, dS, \quad \mathbf{M}(\tilde{S}) = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, dS, \quad S \subset \tilde{S}. \quad (3.97c)$$

3.2.6 Equazioni di bilancio in forma integrale

Dopo gli sviluppi dei precedenti paragrafi, siamo finalmente in grado di specializzare le equazioni di bilancio (3.70) valide nel caso di un corpo continuo:

$$\mathbf{F}(\partial V) + \mathbf{F}(V) = \int_V \rho \dot{\mathbf{v}} \, dV, \quad (3.98)$$

$$\mathbf{M}(\partial V) + \mathbf{M}(V) = \int_V \rho \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \, dV, \quad (3.99)$$

dove $\mathbf{F}(\partial V)$ e $\mathbf{M}(\partial V)$ sono le forze e i momenti globali trasmessi attraverso il contorno ∂V , $\mathbf{F}(V)$ e $\mathbf{M}(V)$ sono le forze e i momenti globali che competono al volume V , e dove si sono utilizzate le espressioni (3.80) delle derivate materiali della quantità di moto e del momento della quantità di moto. Queste due equazioni devono valere per ogni volume V di B . Introducendo le forze e i momenti specifici le equazioni di bilancio assumono la seguente forma integrale:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} \, dS + \int_V (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV + \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (3.100)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, dS + \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (3.101)$$

⁵⁷Come già nel caso di una massa concentrata (si veda la nota 46 a p. 88), la funzione \mathbf{f} risulta invece una delta di Dirac.

dove \mathbf{t} indica la *tensione interna*, \mathbf{f} la *forza per unità di volume* e si è tenuto conto che per i corpi semplici i momenti specifici sono ottenuti quali momenti delle forze specifiche. Nelle equazioni (3.100) e (3.101) si è anche tenuto conto della presenza di eventuali forze concentrate \mathbf{F}_i in un numero finito di punti di V . Si noti che la presenza di forze concentrate nella versione integrale (3.100) e (3.101) delle equazioni di bilancio non crea alcuna difficoltà formale.⁵⁸

Nel diagramma di fig. 3.26 è riassunta la situazione relativa alla

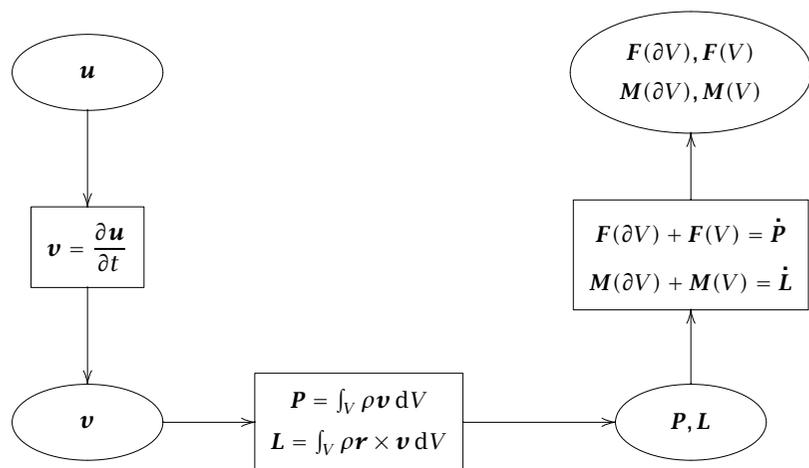


Figura 3.26: Cinematica e dinamica dei solidi

cinematica e dinamica di un corpo solido.

Nel caso statico, cioè quando le accelerazioni sono nulle, le (3.100) e (3.101) si specializzano nelle seguenti *equazioni di equilibrio*:

$$\int_{\partial V} \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad (3.102)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f} dV + \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}. \quad (3.103)$$

Si ricorda che tali equazioni devono valere per un qualunque volume V contenuto nel corpo.

⁵⁸Non è invece così per quel che riguarda le *equazioni del moto*, che rappresentano la versione differenziale delle equazioni di bilancio, poiché in tal caso le forze concentrate generano, come detto, delle delta di Dirac.

3.2.7 Tensioni interne

Nel seguito si suppone che esistano le forze per unità di volume definite dalla (3.92) e la distribuzione di massa definita dalla (3.72).⁵⁹ Ne consegue che le forze di volume $\mathbf{F}(V)$, così come le derivate materiali della quantità di moto $\dot{\mathbf{P}}(V)$ e del momento della quantità di moto $\dot{\mathbf{L}}(V)$, associate ad un dato volume V sono infinitesime per $V \rightarrow 0$ dello stesso ordine del volume. In altri termini i limiti: $\lim_{V \rightarrow 0} \mathbf{F}(V)/V$, $\lim_{V \rightarrow 0} \dot{\mathbf{P}}(V)/V$ e $\lim_{V \rightarrow 0} \dot{\mathbf{L}}(V)/V$, esistono e sono finiti.

Relativamente alle forze $\mathbf{F}(\tilde{S})$ e $\mathbf{F}(-\tilde{S})$ e alle coppie $\mathbf{M}(\tilde{S})$ e $\mathbf{M}(-\tilde{S})$ reciprocamente trasmesse attraverso una superficie S interna al corpo (fig. 3.23b p. 91) si dimostra il seguente

Principio di azione e reazione.⁶⁰ *Le forze e le coppie agenti sulle due facce di una stessa superficie interna sono l'una l'opposta dell'altra, oppure, in altri termini hanno uguale direzione e modulo, e verso opposto:*

$$\mathbf{F}(-\tilde{S}) = -\mathbf{F}(\tilde{S}), \quad \mathbf{M}(-\tilde{S}) = -\mathbf{M}(\tilde{S}). \quad (3.104)$$

Dimostrazione. Data una superficie S interna ad un corpo \mathcal{B} e dato un vettore \mathbf{n} normale in un suo punto P , si consideri innanzitutto il cilindro di generatrice parallela alla normale \mathbf{n} in P e di direttrice il contorno ∂S della superficie (fig. 3.27a). Si trasli poi la superficie S sia nella direzione positiva che in quella negativa di \mathbf{n} in modo che le due superfici S' e S'' così ottenute siano poste alla distanza b . Si consideri infine la parte V del cilindro compresa tra le due superfici S' e S'' . Se \tilde{S}' e $-\tilde{S}''$ indicano le superfici S' e S'' orientate rispettivamente da \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$, il bilancio relativo al volume V si scrive:

$$\mathbf{F}(\tilde{S}') + \mathbf{F}(-\tilde{S}'') + \mathbf{F}(\mathcal{L}) + \mathbf{F}(V) = \dot{\mathbf{P}}(V), \quad (3.105)$$

dove $\mathbf{F}(\mathcal{L})$ è la forza esercitata su V attraverso la parte di contorno \mathcal{L} appartenente alla superficie cilindrica.

Poiché $\mathbf{F}(\tilde{S}') \rightarrow \mathbf{F}(\tilde{S})$ mentre $\mathbf{F}(-\tilde{S}'') \rightarrow \mathbf{F}(-\tilde{S})$ per $b \rightarrow 0$, si ottiene immediatamente la prima delle (3.104) ove si consideri che gli altri termini che compaiono nella (3.105) sono infinitesimi con V e quindi con b .

⁵⁹Tale assunzione non è per esempio verificata, per quel che riguarda le forze di volume, in corrispondenza di punti soggetti a forze concentrate e analogamente, per quel che riguarda la distribuzione di massa, in corrispondenza di punti in cui le masse siano concentrate.

⁶⁰*Law of action and reaction* nella letteratura inglese.

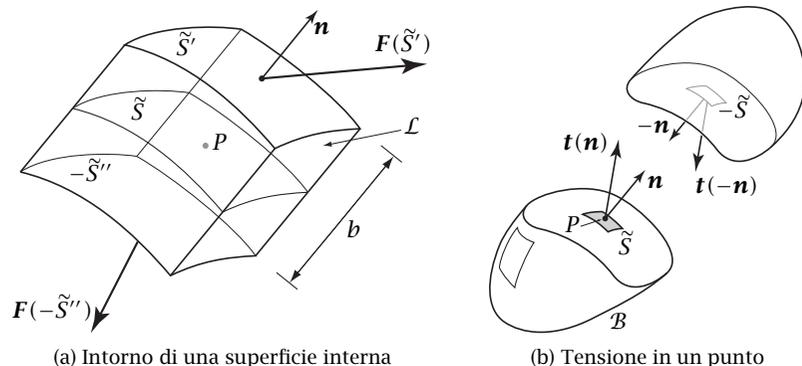


Figura 3.27: Principio di azione e reazione

Se poi allo stesso elemento di volume si impone il bilancio del momento della quantità di moto, in modo analogo si ottiene la seconda delle (3.104).⁶¹ ■

Se alla prima delle (3.104) si applica il limite (3.94) con la superficie S che tende al punto P variando su una superficie fissa \tilde{S} , si ottiene il principio di azione e reazione scritto in termini di tensione:⁶²

$$\mathbf{t}(P, -\tilde{S}) = -\mathbf{t}(P, \tilde{S}). \tag{3.106}$$

Si ricordi ora che la tensione interna (3.94) dipende, oltre che dal punto, dalla superficie orientata \tilde{S} su cui sono valutate le forze interne. Sulla dipendenza dalla superficie \tilde{S} viene fatta la seguente fondamentale ipotesi.

Ipotesi di Cauchy. *La tensione $\mathbf{t}(P, \tilde{S})$ dipende dalla superficie orientata \tilde{S} tramite il versore normale \mathbf{n} a \tilde{S} in P , di verso concorde con l'orientazione della superficie, cioè si riduce ad una funzione del tipo $\mathbf{t}(P, \mathbf{n})$.*

⁶¹Si noti che in tale dimostrazione non viene utilizzata l'ipotesi di corpo semplice, secondo la quale le coppie specifiche coincidono con i momenti delle forze specifiche, e che quindi la seconda delle (3.104) resta valida anche nel caso dei corpi microcontinui.

⁶²Nel caso di corpo semplice la seconda delle (3.104) è una semplice conseguenza della (3.106). Nel caso di corpo microcontinuo dalla seconda delle (3.104) si può dedurre per le coppie specifiche una relazione analoga alla (3.106).

In altre parole, a due superfici orientate \tilde{S}_1 e \tilde{S}_2 per P , aventi lo stesso versore normale in P concorde con l'orientazione di entrambe le superfici, compete la stessa tensione in P . Tale comune valore non può che coincidere con quello relativo alla tensione agente nel piano tangente in P alle due superfici. Per tale motivo quando si descrive la tensione nell'intorno di un punto si utilizza il termine *giacitura*, termine che è relativo ad un piano, per indicare la superficie orientata, o meglio l'*elemento di superficie*,⁶³ su cui agisce la tensione.

Poiché alle due facce di una superficie interna al corpo corrispondono versori normali opposti, l'ipotesi di Cauchy permette di porre il principio di azione e reazione (3.106) nella forma:

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}), \tag{3.107}$$

avendo lasciata sottintesa la dipendenza di \mathbf{t} dal punto.

◇ ◇ ◇

Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy. *In realtà è possibile dimostrare l'ipotesi di Cauchy sulla base di ragionevoli assunzioni sulla tensione \mathbf{t} .*⁶⁴ *Nel seguito si dà un cenno di tale dimostrazione.*

Dimostrazione. Sia infatti S una superficie qualunque per P di versore normale \mathbf{n} in P . Si consideri innanzitutto un quadrato di lato b , intorno del punto P sul piano π tangente a S in P , e il cilindro di generatrice parallela al versore normale \mathbf{n} e di direttrice il dato quadrato. Ciò premesso si consideri infine il volume V intorno del dato punto P che si ottiene sezionando il detto cilindro con la superficie S' e con il piano π'' ottenuti traslando nella direzione positiva, rispettivamente negativa, del versore normale \mathbf{n} la superficie S , rispettivamente il piano π , in modo tale che la distanza dei punti P' e P'' , traslati del punto P , sia b (fig. 3.28). Si tenga ora conto che sia l'area di S , intersezione di S con il cilindro a base quadrata, che le aree delle quattro facce che costituiscono le due coppie di facce parallele, si differenziano dall'area del quadrato di lato b di un infinitesimo di ordine superiore a b^2 . Supponendo allora che le funzioni che intervengono nel bilancio della quantità di moto del volume V siano continue in un intorno di P , tale bilancio risulta, per il teorema della media:⁶⁵

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S})b^2 - \mathbf{t}(P, \tilde{\pi})b^2 + o(b^2) = 0, \tag{3.108}$$

⁶³Surface element nella letteratura inglese.

⁶⁴Per una dimostrazione rigorosa di tale teorema, citato in letteratura come *teorema di Hamel-Noll*, si veda per esempio Truesdell (1991, pp. 172-174) oppure Wang e Truesdell (1973, pp. 122-125).

⁶⁵Cfr. la nota 5, p. 122.

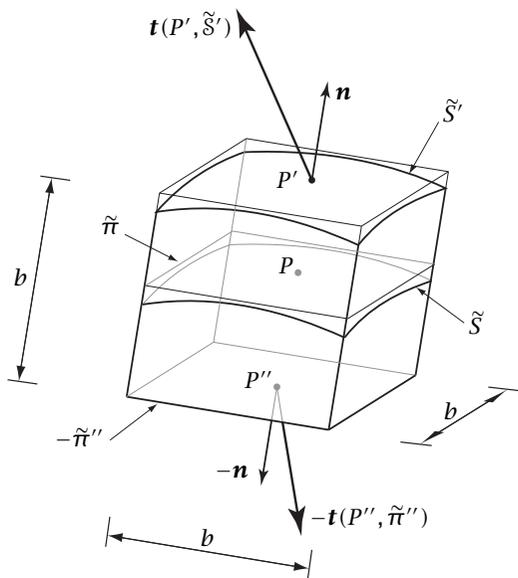


Figura 3.28: Dimostrazione dell'ipotesi di Cauchy

dove è sottinteso che i valori di tensione sono calcolati nel punto P . Nel dedurre la (3.108) si è tenuto conto sia del fatto che due coppie di facce parallele hanno normale uscente di verso opposto e che quindi sono soggette a tensioni opposte per il principio di azione e reazione, che del fatto che la misura del volume V , dominio di integrazione per la forza di volume e la derivata della quantità di moto, è dell'ordine di b^3 . Dividendo la (3.108) per b^2 e mandando al limite per $b \rightarrow 0$, si ottiene:

$$\mathbf{t}(P, \tilde{S}) = \mathbf{t}(P, \tilde{\pi}), \tag{3.109}$$

per ogni superficie S per P di normale \mathbf{n} in P . Poiché $\tilde{\pi}$ dipende solo da \mathbf{n} ne risulta dimostrata la tesi. ■

◇ ◇ ◇

Componenti normale e tangenziale di tensione. Data una giacitura di normale \mathbf{n} nell'intorno di un punto P la tensione \mathbf{t} che agisce sulla giacitura può scomporsi nella direzione normale alla giacitura e in una direzione parallela alla giacitura (fig. 3.29a). La componente nella direzione norma-

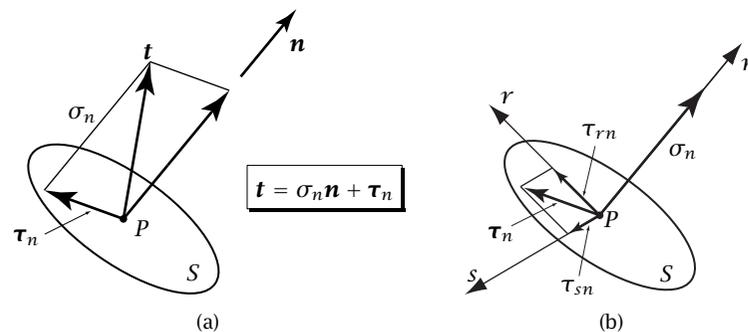


Figura 3.29: Componenti normale e tangenziale

le viene detta *componente normale di tensione* oppure *tensione normale*,⁶⁶ mentre quella in una direzione parallela alla giacitura viene detta *componente tangenziale di tensione* o, meglio, *tensione tangenziale*.⁶⁷ La componente scalare σ_n nella direzione normale e la componente tangenziale $\boldsymbol{\tau}_n$ valgono:

$$\sigma_n = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t} - \sigma_n \mathbf{n}. \tag{3.110}$$

Scegliendo due assi ortogonali r e s sulla giacitura (fig. 3.29b) è poi possibile decomporre la tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}_n$ in due componenti scalari τ_{rn} e τ_{sn} .

Si noti che la scomposizione della tensione in una componente normale e in una tangenziale dipende da un riferimento locale definito dalla giacitura stessa e non da un riferimento cartesiano ortogonale esterno.

3.3 Piccoli spostamenti e piccole deformazioni

Le azioni esterne agenti su un corpo solido generico avranno l'effetto sia di provocarne il moto, almeno nel caso in cui non siano opportunamente contrastate, che di variane la forma, ovvero sia di *deformarlo*. Le *deformazioni* potranno essere più o meno pronunciate in dipendenza sia delle proprietà del o dei materiali componenti il corpo che dell'entità delle azio-

⁶⁶Normal stress nella letteratura inglese.

⁶⁷Tangential stress oppure shear stress nella letteratura inglese.

ni stesse, ma rappresentano una conseguenza inevitabile se il corpo viene sollecitato.

È noto che molti corpi solidi reali si deformano poco anche se soggetti ad azioni esterne notevoli e questo conduce alla possibilità di notevoli semplificazioni. È però necessario essere più precisi, in quanto è evidente che diminuendo opportunamente l'entità delle azioni esterne si può sempre fare in modo che le deformazioni siano sufficientemente piccole. La chiave risiede nella espressione "azioni esterne notevoli", che indica genericamente azioni senz'altro non inferiori a quelle a cui il corpo si trova normalmente ad essere soggetto. In altri termini, per parlare di piccole deformazioni queste devono essere dovute agli effettivi carichi normalmente agenti.

Se un corpo solido reale è vincolato in modo tale da non poter subire degli spostamenti rigidi, non solo le deformazioni, ma anche gli spostamenti che conseguono all'applicazione delle azioni esterne effettive sono spesso di piccola entità. D'altronde se il corpo, non sufficientemente vincolato, può subire degli spostamenti rigidi di notevole entità, mentre le deformazioni continuano ad essere ancora di piccola entità, ciò non può dirsi in generale per gli spostamenti. Tuttavia è in tal caso spesso possibile ottenere un campo di spostamenti di piccola entità se agli spostamenti complessivi vengono tolti i contributi di un opportuno campo di spostamenti rigidi.

Ciò premesso, si può allora ottenere una notevole semplificazione dei problemi di meccanica dei solidi sviluppandoli sotto l'*ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni*, con l'avvertenza che per "spostamenti" deve intendersi in generale "spostamenti a meno di un opportuno campo di spostamenti rigidi". Naturalmente la "piccolezza" sia degli spostamenti che delle deformazioni può essere più o meno pronunciata e quindi più o meno accettabile nelle varie circostanze. Si comprende quindi come vi possano essere diversi gradi di applicazione delle semplificazioni che ne derivano. Nel seguito elencheremo alcune possibilità di semplificazione basate sulla ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni, chiarendo così i limiti di applicabilità che ne conseguono.

3.3.1 Corpo rigido

La semplificazione più drastica è quella di trascurare completamente le deformazioni utilizzando quindi la *meccanica del corpo rigido* al fine della

descrizione del moto di un corpo, oppure del suo equilibrio se la possibilità del moto è opportunamente contrastata.

Se il corpo è sufficientemente vincolato gli spostamenti sono nulli e la configurazione finale coincide con quella iniziale. Se invece il corpo è libero di muoversi il suo moto è rigido, il campo degli spostamenti a meno del moto rigido è nullo, e la configurazione finale differisce da quella iniziale. In entrambi i casi l'equilibrio (o più in generale il bilancio) viene scritto nella configurazione finale, che è quella in cui sussiste l'equilibrio (o il bilancio). Nel primo caso la configurazione finale coincide, come detto, con quella iniziale, mentre in entrambi i casi si tratta di una configurazione indeformata. L'*ipotesi di indeformabilità* può quindi essere separata nelle tre ipotesi seguenti:

1. spostamenti nulli, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. deformazioni nulle;
3. bilancio (o equilibrio) scritto in una configurazione indeformata (nella configurazione iniziale indeformata se è impedito il moto rigido).

Come già detto, il modello di corpo rigido è una semplificazione troppo drastica, poiché non è, evidentemente, in grado di fornire il quadro deformativo del corpo, quadro che è spesso necessario conoscere anche nel caso le deformazioni siano piccole. Non solo, ma non è nemmeno quasi mai in grado, per limitazioni intrinseche al modello, di fornire il quadro delle sollecitazioni interne, quadro da cui non si può prescindere per stimare la sicurezza delle costruzioni. D'altronde il modello di corpo rigido è completamente determinato dalle equazioni di bilancio di tutto il corpo, nelle quali la tensione interna non ha alcun ruolo.

3.3.2 Teoria del primo ordine

Per poter calcolare sia la deformazione che la sollecitazione di un corpo solido occorre quindi mettere in conto la deformazione stessa. Il modo più semplice per farlo è di assumere l'*ipotesi di piccolezza* sia degli spostamenti che della deformazione con tutte le conseguenti approssimazioni. Il che poi da una parte significa linearizzare le relazioni dipendenti dagli spostamenti e dalle deformazioni trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo negli stessi spostamenti e deformazioni. Dall'altra parte significa

invece approssimare, ai fini della scrittura delle equazioni di bilancio (oppure di equilibrio), la configurazione finale deformata con una configurazione indeformata vicina, grazie all'ipotesi di piccolezza degli spostamenti che conducono dalla configurazione indeformata a quella deformata.

A questo punto è bene segnalare che anche ad eventuali spostamenti rigidi di piccola entità vanno applicate le approssimazioni di cui sopra. In altri termini, un campo di spostamenti rigidi piccolo può essere linearizzato, trascurando tutto ciò che è di ordine superiore al primo nei parametri lagrangiani che lo descrivono. Non solo, ma anche la configurazione finale può essere approssimata dalla configurazione iniziale. Se allora il corpo è vincolato a non subire spostamenti rigidi di notevole entità (potendoli però in generale subire di piccola entità) la configurazione finale deformata può confondersi con quella indeformata iniziale.

Un modello sviluppato utilizzando queste approssimazioni prende il nome di *teoria del primo ordine*. Riassumendo, una teoria del primo ordine è basata sulle seguenti ipotesi:

1. piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. piccole deformazioni;
3. bilancio (o equilibrio) scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata (nella configurazione iniziale indeformata se sono impediti spostamenti rigidi di notevole entità).

Si noti che in una teoria del primo ordine il bilancio (o l'equilibrio) viene scritto in una configurazione indeformata, come se il corpo fosse rigido.

3.3.3 Teoria del secondo ordine

Vi sono casi in cui le azioni esterne applicate sono tali che non è lecito scrivere il bilancio (o l'equilibrio) in una configurazione indeformata vicina a quella deformata, nonostante gli spostamenti (eventualmente a meno di un moto rigido) e le deformazioni dovute alle stesse forze possano ancora essere considerati piccoli. La piccolezza degli spostamenti e delle deformazioni permettono ancora di trascurare i termini di ordine superiore negli spostamenti e nelle deformazioni stesse ma non vi è più la possibilità di scrivere il bilancio (o l'equilibrio) come se il corpo fosse rigido.

Questi casi si presentano per esempio quando la coincidenza della struttura deformata con quella indeformata si ottiene al prezzo di trascurare

dei contributi al calcolo del momento delle forze proporzionali sia alle forze che agli spostamenti. Questi termini vanno a zero al tendere a zero degli spostamenti ma vanno all'infinito al tendere all'infinito delle forze e per tale motivo non sempre è lecito trascurarli.

Un modello sviluppato utilizzando la sola approssimazione di trascurare i termini di ordine superiore negli spostamenti e nelle deformazioni, cioè basata solo sulle prime due ipotesi alla base di una teoria del primo ordine, prende il nome di *teoria del secondo ordine*. Quindi una teoria del secondo ordine è basata sulle due ipotesi seguenti:

1. piccoli spostamenti, eventualmente a meno di un moto rigido;
2. piccole deformazioni.

3.3.4 Grandi spostamenti e piccole deformazioni

Vi sono infine casi, come quelli relativi a *travi molto snelle*, in cui gli spostamenti possono facilmente diventare grandi non tanto perché le deformazioni sono grandi, ma in quanto queste sono distribuite su una notevole lunghezza. Ne risulta che in tal caso non sono più possibili le linearizzazioni dovute all'ipotesi di piccoli spostamenti, ma continuano ad essere lecite quelle dovute all'ipotesi di piccole deformazioni. Poiché l'equilibrio può essere scritto in una configurazione indeformata vicina a quella deformata solo se gli spostamenti sono piccoli, in tal caso tale approssimazione non è di conseguenza mai lecita.

Quindi un modello di trave molto snella può essere basato solo sulla seconda ipotesi alla base di una teoria del primo ordine, e cioè quella di *piccole deformazioni*.

3.3.5 Cinematica linearizzata

La meccanica dei solidi usualmente sviluppata nella scienza delle costruzioni è una teoria del primo ordine, quindi basata sull'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni e su tutte le sue conseguenze. Questo significa che la cinematica sarà linearizzata rispetto agli spostamenti. Poiché gli spostamenti sono un campo vettoriale definito nella configurazione di riferimento, bisogna innanzitutto precisare in che senso è fatta tale linearizzazione. Si consideri a tale scopo un dato campo \mathbf{u} di spostamenti definito in \mathcal{B}_0 e lo si "amplifichi" tramite uno scalare λ generico. Si

ottengono così tutti i campi del tipo $\lambda \mathbf{u}$ aventi la stessa “direzione” (ovverossia la stessa forma) di quello originale. Il campo originale corrisponde a $\lambda = 1$. Uno spostamento \mathbf{u}' che non ha la direzione di \mathbf{u} individua un altro insieme di spostamenti $\lambda \mathbf{u}'$.

Per linearizzare una qualunque funzione degli spostamenti si sostituisce $\lambda \mathbf{u}$ a \mathbf{u} nell'espressione della funzione, rendendola così dipendente dalla sola variabile reale λ . Si può allora sviluppare la funzione in serie di potenze di λ trascurandone i termini di ordine superiore al primo. Ponendo infine $\lambda = 1$ si ripristina la dipendenza dallo spostamento \mathbf{u} della funzione così semplificata.

Quando una funzione dipende da una quantità scalare che sia del primo ordine rispetto agli spostamenti, la quantità scalare stessa assume il ruolo di parametro rispetto al quale può essere eseguito lo sviluppo in serie di potenze. È anche evidente che tutte le volte che in un termine compare il prodotto di due o più quantità che siano almeno del primo ordine negli spostamenti, il termine stesso è trascurabile nel senso sopradetto. Si noti infine che il *gradiente degli spostamenti* $\mathbf{H} = \text{Grad } \mathbf{u}$ è una *funzione dello spostamento omogenea di grado 1* e risulta quindi dello stesso ordine dello spostamento:

$$\text{Grad}(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \text{Grad } \mathbf{u}. \quad (3.111)$$

Dimostrazione. Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda \mathbf{u}) &= \text{Grad}(\lambda \mathbf{u}) \Delta \mathbf{X} + o(|\Delta \mathbf{X}|), \\ \lambda(\Delta \mathbf{u}) &= \lambda \text{Grad } \mathbf{u} \Delta \mathbf{X} + o(|\Delta \mathbf{X}|), \end{aligned}$$

per ogni $\Delta \mathbf{X}$. Poiché:

$$\Delta(\lambda \mathbf{u}) = \lambda \mathbf{u}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) - \lambda \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \lambda(\mathbf{u}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X})) = \lambda(\Delta \mathbf{u}),$$

ne risulta immediatamente la tesi. ■

3.3.6 Linearizzazione di una rotazione

Nel caso in cui il campo degli spostamenti sia rigido e tali spostamenti, rispetto alla configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento, si possano considerare piccoli l'ampiezza φ della eventuale rotazione che determina la generica configurazione \mathcal{B} del corpo potrà pure essere considerata piccola. Ne

risulta allora approssimativamente una notevole semplificazione della relazione (3.36), p. 80, che fornisce il campo degli spostamenti associato ad una trasformazione rigida previa scelta di un polo \mathbf{O} . Infatti lo sviluppo asintotico (1.175), p. 42, permette di scrivere il campo degli spostamenti nella seguente forma approssimata:

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_O + \boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{X} - \mathbf{O}). \quad (3.112)$$

Si potrebbe arrivare a tale espressione anche rappresentando in componenti il tensore $\mathbf{R} - \mathbf{I}$ in un sistema in cui l'asse z coincide con l'asse rotazione e tenendo conto che, a meno di termini di ordine superiore al primo, $\cos \varphi - 1$ e $\sin \varphi$ si approssimano rispettivamente con 0 e φ .⁶⁸

$$[\mathbf{R} - \mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi - 1 & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.113)$$

Il tensore $\mathbf{R} - \mathbf{I}$ è dunque approssimativamente emisimmetrico e il suo vettore assiale ha la direzione e il verso dell'asse rotazione orientato dalla rotazione stessa e modulo pari all'ampiezza φ della rotazione.⁶⁹ Quindi il vettore assiale dell'approssimazione emisimmetrica di $\mathbf{R} - \mathbf{I}$ coincide con il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ di rotazione associato al tensore rotazione \mathbf{R} (fig. 3.30)⁷⁰ e ne consegue la (3.112).

Si ricordi inoltre che i vettori rotazione sono approssimativamente somabili, nel senso che una rotazione $\boldsymbol{\varphi}_1$ seguita da una rotazione $\boldsymbol{\varphi}_2$ corrisponde approssimativamente ad un'unica rotazione pari a $\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2$, come visto al par. 1.5.3, p. 43. D'altronde se \mathbf{R}_1 e \mathbf{R}_2 sono i tensori rotazione corrispondenti dei vettori rotazione $\boldsymbol{\varphi}_1$ e $\boldsymbol{\varphi}_2$ rispettivamente e se $\boldsymbol{\varphi}$ è il vettore rotazione corrispondente della composizione $\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1$ delle due rotazioni, risulta, per ogni vettore \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v} &\approx (\mathbf{R}_2 \mathbf{R}_1 - \mathbf{I}) \mathbf{v} = (\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_1 - \mathbf{I}) + (\mathbf{R}_2 - \mathbf{I})) \mathbf{v} \\ &\approx \mathbf{R}_2 (\boldsymbol{\varphi}_1 \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\varphi}_2 \times \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{R}_2 - \mathbf{I}) (\boldsymbol{\varphi}_1 \times \mathbf{v}) + \boldsymbol{\varphi}_1 \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}_2 \times \mathbf{v} \end{aligned}$$

⁶⁸Si è tenuto conto della rappresentazione (1.184), p. 43, di \mathbf{R} valida nel caso sopradetto di asse z coincidente con l'asse di rotazione.

⁶⁹Cfr. la (1.92), p. 29.

⁷⁰Cfr. la (1.169), p. 41.

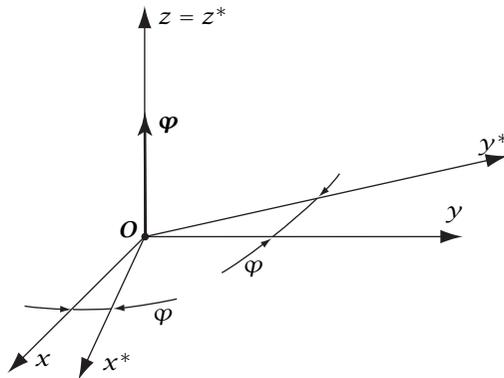


Figura 3.30: Vettore rotazione

$$\begin{aligned} &\approx \boldsymbol{\varphi}_2 \times (\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2) \times \boldsymbol{v} \\ &\approx (\boldsymbol{\varphi}_1 + \boldsymbol{\varphi}_2) \times \boldsymbol{v}, \end{aligned} \quad (3.114)$$

avendo tenuto conto del fatto che il termine $\boldsymbol{\varphi}_2 \times (\boldsymbol{\varphi}_1 \times \boldsymbol{v})$, contenendo il prodotto di due rotazioni, è un infinitesimo di ordine superiore al primo nelle rotazioni.

3.4 Vincoli e reazioni dei vincoli

Come noto, *vincolare*⁷¹ un generico sistema (un punto materiale, un sistema di punti materiali, un corpo rigido, un sistema di corpi rigidi, un corpo solido, un sistema di corpi solidi) equivale ad imporre delle limitazioni cinematiche al moto del sistema stesso. In particolare i *vincoli di posizione* impongono delle condizioni sulle possibili configurazioni che il sistema può assumere nel corso del moto mentre i *vincoli di mobilità* le impongono sui possibili incrementi degli spostamenti dei punti del sistema.

Si ricordi che un qualunque vincolo di posizione implica inevitabilmente delle condizioni sui possibili incrementi degli spostamenti dei punti del sistema, non potendo questi essere arbitrari in quanto se lo fossero condurrebbero anche a quelle configurazioni impedita dal vincolo di posizione

stesso. In altri termini un vincolo di posizione è anche vincolo di mobilità. Non è invece vero l'inverso poiché innanzitutto esistono dei vincoli di mobilità, detti *propri*, che non sono implicati da alcun vincolo di posizione. Inoltre un vincolo di mobilità, anche se fosse implicato da un vincolo di posizione che però non sia contestualmente imposto al sistema, non è in grado da solo di imporre alcuna condizione alle configurazioni che il sistema può assumere nel corso del moto. Infatti, per via del vincolo di mobilità, una generica configurazione potrebbe non essere raggiungibile a partire da una data configurazione, ma inevitabilmente lo è a partire da un'altra e in ogni caso, se non è impedita da alcun vincolo di posizione, potrebbe essere la stessa configurazione iniziale del moto.

Sia i vincoli di posizione che quelli di mobilità possono essere *dependenti* oppure *indipendenti dal tempo*.

Possono essere inoltre *bilaterali* oppure *monolaterali*, anche detti *unilaterali*, a seconda che gli incrementi degli spostamenti dei punti del sistema a partire da una qualunque configurazione possibile siano sempre invertibili oppure no.

I vincoli di posizione bilaterali, sia dipendenti che indipendenti dal tempo, sono detti *vincoli olonomi* e i sistemi soggetti a vincoli olonomi *sistemi olonomi*. I vincoli di mobilità bilaterali, sia propri che impropri e sia dipendenti che indipendenti dal tempo, sono invece detti *vincoli anolonomi* e i sistemi soggetti a vincoli anolonomi *sistemi anolonomi*. Inoltre i vincoli di mobilità bilaterali propri, dipendenti oppure indipendenti dal tempo, sono detti *vincoli anolonomi propri* e i sistemi soggetti a tali vincoli *sistemi anolonomi propri*.

Poiché per definizione i vincoli olonomi e quelli anolonomi sono bilaterali, ne risulta che sia nei sistemi olonomi che in quelli anolonomi gli incrementi degli spostamenti dei punti del sistema a partire da una qualunque configurazione possibile sono sempre invertibili.

Modellizzazione dei vincoli. È bene precisare che la modellizzazione dei “vincoli reali”, ovvero sia di quegli elementi di una struttura che la collegano all'esterno oppure che collegano tra di loro le sue diverse parti oppure che impongono condizioni sulla mobilità del sistema, dipende essenzialmente sia dai materiali che dalla tecnologia impiegata nella loro costruzione. La modellizzazione dei vincoli, in tutta la loro complessità, appartiene quindi agli studi a contenuto tecnologico. Nei casi in cui non sia lecita l'interpretazione del loro comportamento per il tramite di imposizioni ci-

⁷¹Nella letteratura inglese vincolo si rende con *restraint* oppure *constraint*.

nematiche semplici, i vincoli vanno modellati come una qualunque parte della struttura. Ciò premesso, è comunque spesso lecito modellare i vincoli come se fossero *rigidi* o *perfetti*, cioè in grado di imporre perfettamente condizioni cinematiche semplici.⁷² Per esempio un vincolo rigido potrebbe impedire in modo completo lo spostamento di un punto del sistema a partire da una data configurazione, come potrebbe anche imporre che il suo spostamento, sempre a partire da una data configurazione, abbia un dato valore non nullo prefissato. In entrambi i casi il punto è obbligato a trovarsi in una data posizione dello spazio. Dato che i vincoli rigidi, così come il corpo rigido, sono solo un'approssimazione della realtà, nell'esempio di cui sopra il vincolo reale, modellato quale vincolo rigido, non farà altro che limitare in ampiezza, quasi azzerandolo, lo spostamento del punto del sistema dalla data posizione dello spazio in cui si vorrebbe si trovasse il punto per effetto del vincolo. Può quindi essere necessario in diverse situazioni tenere conto dei *cedimenti dei vincoli*, ovvero sia di quegli spostamenti che i vincoli stessi sono deputati ad impedire ma che in realtà avvengono, anche se, come detto, con ampiezza limitata.

Comunque, più spesso di quanto si creda, i vincoli rigidi, o comunque le imposizioni perfette di condizioni cinematiche semplici, che si considerano durante il calcolo di una struttura non sono sempre la modellizzazione di “vincoli reali”, ma piuttosto le condizioni cinematiche residue che derivano dall'aver eseguito “virtualmente” delle sconnessioni perfette, ovvero sia la rimozione di alcune condizioni cinematiche inizialmente presenti, mentre in altri casi sono semplicemente dei vincoli virtuali aggiunti, non presenti quindi nella struttura originaria, oppure ancora potrebbero equivalere alle condizioni cinematiche imposte dalla presenza di simmetrie di vario tipo.

Reazioni dei vincoli. Come già detto,⁷³ una delle assunzioni fondamentali della meccanica newtoniana è di esprimere l'azione su un corpo o parte di esso da parte dell'ambiente circostante per il tramite di forze applicate al corpo stesso. Coerentemente con tale assunzione viene ammessa l'esistenza delle *reazioni vincolari* o *reazioni dei vincoli*,⁷⁴ cioè di forze che possono essere sostituite ai vincoli senza alterare lo stato del punto vinco-

lato. Un'ulteriore assunzione, limitata ai vincoli *privi di attrito*,⁷⁵ permette a volte di determinare la direzione e anche il verso della reazione vincolare. Precisamente si suppone che la reazione vincolare abbia la direzione e il verso opposto di uno spostamento del punto *totalmente impedito*.⁷⁶ Se il vincolo è *bilaterale* il verso non è più prevedibile e gli spostamenti totalmente impediti hanno direzione ortogonale a qualunque incremento di spostamento possibile, cioè non impedito dal vincolo stesso. In tal caso la reazione vincolare è quindi ortogonale a qualunque incremento di spostamento non impedito dal vincolo.

Condizioni al contorno sugli spostamenti. Il vincolamento di una parte ∂B_{0u} del contorno del solido,⁷⁷ come indicato in fig. 3.31, si traduce spesso

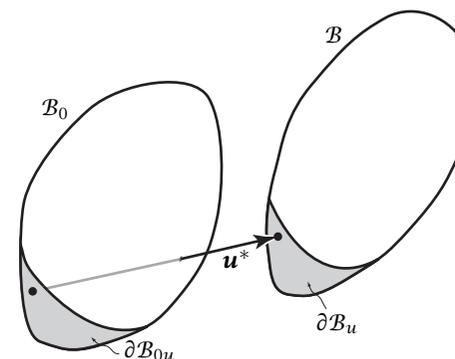


Figura 3.31: Condizione al contorno sugli spostamenti

in una *condizione al contorno sugli spostamenti*.⁷⁸ Per esempio, se il vincolamento impone agli spostamenti sulla data parte di contorno un valore prestabilito \mathbf{u}^* la condizione al contorno sarà:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \text{su } \partial B_{0u}. \quad (3.115)$$

⁷⁵Tale assunzione la si può anche interpretare come definizione di vincolo privo di attrito. Privo di attrito si rende con *frictionless* nella letteratura inglese.

⁷⁶Uno spostamento totalmente impedito da un vincolo porterebbe il punto in una posizione a cui il punto stesso non può avvicinarsi con incrementi di spostamento consentiti dal vincolo.

⁷⁷In generale il vincolamento potrebbe anche essere concentrato, competendo quindi ad un singolo punto del contorno, oppure potrebbe interessare punti interni al solido.

⁷⁸*Displacement boundary condition* nella letteratura inglese.

⁷²Anche in tali casi è comunque richiesta una modellizzazione dei vincoli quali parti della struttura nel caso se ne voglia eseguire la progettazione oppure la verifica di sicurezza.

⁷³Cfr. il par. 3.2, p. 84.

⁷⁴*Reactions* oppure *forces of constraint* nella letteratura inglese.

Se $\mathbf{u}^* = 0$, la condizione al contorno sugli spostamenti è detta *omogenea*.

COMPORTAMENTO DEI MATERIALI

4.1 Modelli di comportamento dei materiali

Nel seguito si analizzerà il comportamento dei materiali dal punto di vista della *macromeccanica*¹ ovvero prescindendo dalla composizione fine della materia.²

Il quadro che si ottiene analizzando in dettaglio le proprietà macroscopiche dei diversi tipi di materiali utilizzati nelle costruzioni è molto complesso e sembrerebbe suggerire di trattare indipendentemente gli uni dagli altri i singoli materiali. Questo fatto è però vero solo fino ad un certo punto. Infatti è senz'altro inevitabile che diverse proprietà di una struttura, per esempio in cemento armato, dipendano essenzialmente dai materiali utilizzati nella sua costruzione, ma ciò non toglie che materiali anche molto diversi fra loro si comportano spesso in modo simile, come dimostrato dalla comparazione di prove meccaniche eseguite su diversi tipi di materiali. Le proprietà che sono comuni a più materiali sono alla base di *modelli ideali*³ di comportamento.

Naturalmente non ci si deve aspettare che un unico modello ideale di comportamento sia in grado di interpretare il comportamento di un materiale in ogni circostanza. Piuttosto, la validità di un particolare modello

¹ *Macromechanics* nella letteratura inglese.

² La materia, a più livelli, si compone di parti discrete (grani, molecole, atomi), e questo fatto influisce sul suo comportamento macroscopico. È scopo della *micromeccanica* indagare questa influenza.

³ *Ideal models* nella letteratura inglese.

ideale dipenderà dal tipo di struttura e dal tipo e dall'entità delle azioni cui il materiale è sottoposto. Per esempio, se le forze applicate superano certi livelli, il materiale può fratturarsi. Per forze inferiori il materiale può semplicemente subire delle deformazioni permanenti, mentre se le forze sono sufficientemente piccole il materiale si deforma elasticamente. Non solo, anche il tipo di problema e la precisione desiderata o imposta (per esempio dalla dispersione dei dati in ingresso) possono influire sul modello di comportamento da utilizzare.

Per quel che riguarda le prove sui materiali, si utilizzano normalmente delle strutture semplici, dette *provini*,⁴ costruite con il materiale oggetto di indagine ed opportunamente sollecitate. In generale l'esito della prova dipende, oltre che dal materiale, anche dalla geometria del provino e dal modo in cui questo è sollecitato. Al fine del confronto dei risultati e della riproducibilità degli stessi, ne consegue la necessità di standardizzare le prove sia nella forma dei provini che nel modo di sollecitarli.

Fondamentali per la preparazione e l'interpretazione delle prove sui materiali sono i seguenti concetti di omogeneità e isotropia.

Materiali omogenei. Un materiale è detto omogeneo⁵ se le sue caratteristiche meccaniche non variano da punto a punto, ovvero se non variano

⁴ *Specimen* nella letteratura inglese.

⁵ *Homogeneous material* nella letteratura inglese.

nello spazio occupato dal materiale. Due provini estratti entrambi da un materiale omogeneo sono meccanicamente indistinguibili.

Il concetto di omogeneità è un concetto essenzialmente di macromeccanica, dato che al livello micromeccanico qualunque materiale risulta composto di parti più o meno piccole. Dal punto di vista della macromeccanica, il poter considerare omogeneo o meno un dato materiale dipende dalla scala dei problemi che si devono affrontare e dalla scala dei grani componenti. Per esempio, il calcestruzzo di cemento si compone di parti fini di diversa grandezza che rendono senz'altro il materiale non omogeneo alla scala dei grani componenti. D'altra parte, al livello di una struttura in calcestruzzo quello che conta è la distribuzione dei grani all'interno della stessa struttura e, se questa distribuzione è omogenea, il materiale può essere considerato omogeneo.

Materiali isotropi. Un materiale è detto isotropo⁶ in un dato punto se le sue caratteristiche meccaniche non variano al variare della direzione uscente dal punto. È inoltre detto isotropo se è isotropo in tutti i punti. La rotazione di un provino di materiale omogeneo e isotropo non è meccanicamente rilevabile.

Per potere estrarre facilmente da una prova informazioni che riguardino il comportamento dovuto al solo materiale di cui è composto il provino e non alla sua geometria, occorre innanzitutto che durante la prova le singole parti del provino si trovino, se possibile, nello stesso stato. In altre parole occorre che lo stato del provino sia omogeneo e a tal fine è innanzitutto necessario che sia composto di materiale omogeneo. Se lo stato del provino è omogeneo, tale stato può essere riprodotto indipendentemente dalla grandezza del provino e può quindi essere ascritto quale proprietà del solo materiale. In secondo luogo, occorre che i risultati delle prove siano espressi attraverso variabili indipendenti dalla geometria del provino, in modo da poter essere attribuiti ad ogni singola parte del provino.

Quando non sia possibile ottenere che le singole parti del provino siano omogenee durante tutta la prova o parte di essa, l'interpretazione dei risultati potrebbe richiedere la modellizzazione della prova quale problema particolare da risolvere nell'ambito di un modello interpretativo complesso.

⁶isotropic material nella letteratura inglese.

Per rendere più concreta l'esposizione, nel seguito saranno descritte innanzitutto due tipiche prove di routine di semplice modellizzazione: la prova di trazione monoassiale e la prova di torsione. Reso esplicito il modo di eseguire e di interpretare tali prove, si desciveranno poi i più importanti modelli di comportamento ideale dei materiali. Questi modelli aiuteranno a meglio comprendere e classificare la molteplice fenomenologia dei risultati ottenuti da prove su materiali reali.⁷

4.2 Prova di trazione monoassiale

Si descrive innanzitutto la *prova di trazione monoassiale* o, più semplicemente, *prova di trazione*.⁸ In tal caso un cilindro allungato composto di materiale omogeneo e fisso ad una estremità, è assoggettato all'altra estremità ad una forza F di trazione diretta come l'asse del cilindro (fig. 4.1). La

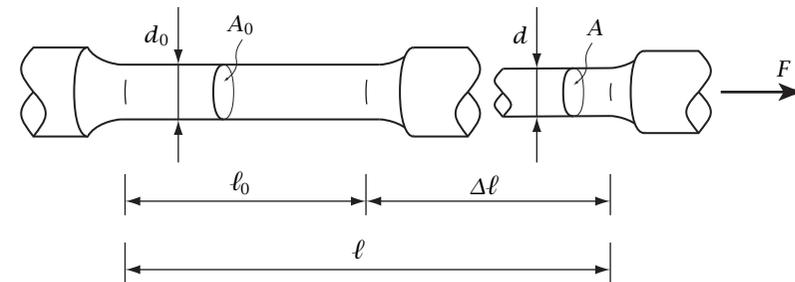


Figura 4.1: Prova di trazione monoassiale

forza F viene incrementata ad una velocità sufficientemente bassa affinché il sistema subisca una *evoluzione quasi statica*,⁹ cioè in modo tale da non provocare accelerazioni sensibili nel sistema, evitando in tal modo di far

⁷Per chi volesse approfondire gli argomenti relativi al comportamento meccanico dei materiali può consultare, tra gli altri, i seguenti testi: Nadai (1950), Courtney (1990) e Lemaitre e Chaboche (1990).

⁸Nella letteratura inglese indicata come *tension test* oppure *tensile test* od anche, più estesamente, *uniaxial tension test*.

⁹*Quasi-static evolution* nella letteratura inglese.

entrare in gioco inessenziali effetti dinamici.¹⁰ Si cerca inoltre di evitare che si sviluppino inflessioni laterali: se la sezione del cilindro presenta due assi di simmetria (per esempio se la sezione è circolare oppure rettangolare) e se le proprietà del materiale non rompono tale simmetria,¹¹ occorre a tale scopo che la retta d'azione della forza passi per l'intersezione dei due assi di simmetria.

Se tali condizioni sono soddisfatte, il provino, ad una certa distanza dalle due sezioni di estremità e fintanto che l'intensità della forza resta limitata, si presenta in uno stato di deformazione omogenea. È necessario che il provino abbia una forma allungata proprio per garantire l'esistenza, durante la prova, di una parte centrale soggetta ad una deformazione omogenea. In tale parte centrale si può pertanto supporre che anche la tensione abbia una distribuzione omogenea e che sia del tipo illustrato in fig. 4.2a, ovve-

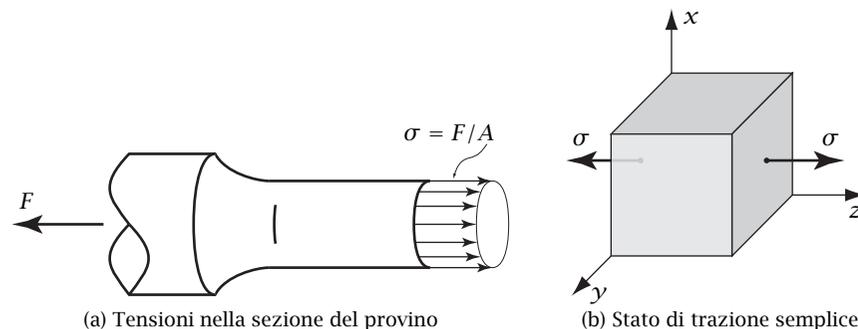


Figura 4.2: Tensioni nella prova di trazione

rossia che in una sezione ortogonale all'asse del cilindro agisca la sola tensione normale e che tale tensione normale sia costante sia sulla sezione che lungo l'asse del cilindro. La tensione normale σ sulla sezione avrà quindi il valore F/A , dove A indica la sezione del cilindro dopo l'applicazione della forza F (fig. 4.1).

È praticamente impossibile garantire durante una prova del genere che

¹⁰La prova è in realtà normalmente condotta a velocità di deformazione controllata, misurando contemporaneamente la forza che provoca tale deformazione, per esempio misurando la pressione dell'olio se la macchina di prova è a controllo idraulico.

¹¹Se il provino non è trasversalmente isotropo, occorre che le proprietà meccaniche siano invarianti lungo direzioni trasversali simmetriche.

la forza F sia applicata ad una estremità in modo che soddisfi a tale distribuzione, e d'altronde è parimenti improbabile che la reazione all'estremità fissa abbia tale distribuzione. Affinché la distribuzione della forza si regolarizzi nella parte centrale del provino, quindi ad una certa distanza dalle estremità, è necessario che il provino stesso abbia una lunghezza sufficiente a rendere possibile tale regolarizzazione. Se questo è il caso, i risultati della prova possono ascrivere al solo materiale.

Lo stato di tensione che si produce durante la prova nella zona centrale del provino è detto di *trazione semplice*.¹² Tale stato di tensione può essere rappresentato isolando, nell'intorno di un punto soggetto allo stato di trazione semplice, un cubetto avente una coppia di facce ortogonali alla direzione della trazione (direzione z nella fig. 4.2b): su queste due giaciture agisce la sola tensione normale ($\sigma = F/A$ nel caso descritto), mentre sulle altre facce del cubetto la tensione è nulla.

I risultati della prova di trazione monoassiale vengono riportati in un diagramma *tensione-dilatazione*. La tensione viene normalmente espressa tramite la *tensione nominale*¹³ definita dal rapporto F/A_0 , tra la forza F applicata e l'area iniziale A_0 del provino. È evidente che la tensione nominale approssima la tensione $\sigma = F/A$ effettivamente agente nel provino, detta anche *tensione vera*,¹⁴ solo se la dilatazione quadratica di A_0 è piccola.¹⁵ Per quel che riguarda la dilatazione (lineare), questa è definita dal rapporto $\Delta\ell/\ell_0$ tra l'allungamento $\Delta\ell$ del provino e la sua lunghezza iniziale ℓ_0 , in accordo con la definizione (3.22) riportata a pagina 74. La dilatazione così definita è anche detta *dilatazione nominale*¹⁶ in contrapposizione alla cosiddetta *dilatazione vera* o *logaritmica*,¹⁷ a volte utilizzata nell'ambito di stati di trazione semplice per esprimere l'associata dilatazione lineare (si veda la descrizione di tale concetto alla fine del paragrafo).

Oltre al diagramma *tensione-dilatazione* è possibile tracciare anche il diagramma *dilatazione trasversale-dilatazione longitudinale*. La *dilatazione trasversale* o *dilatazione laterale*¹⁸ è riferita alle fibre trasversali, ortogo-

¹²Simple tension nella letteratura inglese.

¹³Nominal stress nella letteratura inglese.

¹⁴True stress nella letteratura inglese.

¹⁵È conveniente riportare la forza all'area indeformata poiché questa è nota piuttosto che all'area effettiva che è incognita, anche se tale rapporto non rappresenta direttamente lo sforzo trasmesso attraverso la sezione. In tal modo si semplifica anche il plottaggio dei risultati della prova.

¹⁶Nominal strain nella letteratura inglese.

¹⁷True strain, logarithmic strain ed anche natural strain nella letteratura inglese.

¹⁸Lateral strain nella letteratura inglese.

nali all'asse del provino. Se il provino è cilindrico, come in fig. 4.1, e se d_0 e d rappresentano i diametri del provino rispettivamente deformato e indeformato, la dilatazione trasversale ϵ_ℓ vale:¹⁹

$$\epsilon_\ell = \frac{d - d_0}{d_0}. \quad (4.1)$$

◇ ◇ ◇

Dilatazione vera. Per definire la dilatazione vera l'incremento di allungamento viene riferito alla lunghezza del provino a partire dalla quale si ha il predetto incremento. Sia dunque $d\bar{\epsilon}$ l'incremento di dilatazione vera in corrispondenza dell'incremento di allungamento $d\ell$ a partire da una lunghezza intermedia generica ℓ dell'asta (fig. 4.3):

$$d\bar{\epsilon} = \frac{d\ell}{\ell}. \quad (4.2)$$

La dilatazione vera $\bar{\epsilon}$ corrispondente ad un allungamento $\Delta\ell_{\text{tot}}$ che porta l'asta

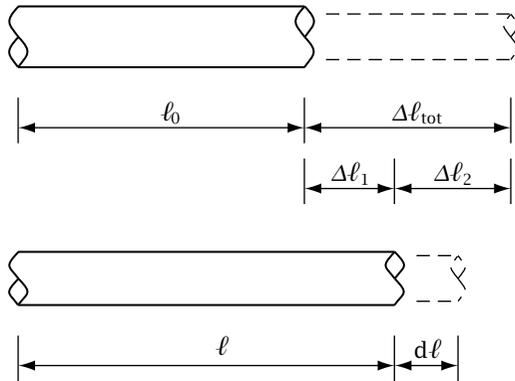


Figura 4.3: Dilatazione logaritmica

dalla lunghezza ℓ_0 alla lunghezza $\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}$ vale quindi, per definizione:

$$\bar{\epsilon} = \int_{\ell_0}^{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}} \frac{d\ell}{\ell} = [\ln \ell]_{\ell_0}^{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}} = \ln(\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}) - \ln \ell_0 = \ln \frac{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0},$$

e infine:

$$\bar{\epsilon} = \ln(1 + \epsilon), \quad (4.3)$$

¹⁹Se il provino è trasversalmente isotropo la sezione resta circolare e le fibre trasversali si dilatano uniformemente, in caso contrario la dilatazione varia da fibra a fibra.

dove la dilatazione nominale ϵ è valutata relativamente alla lunghezza iniziale ℓ_0 dell'asta. La relazione (4.3) giustifica la denominazione di dilatazione logaritmica e mostra che finché le dilatazioni sono piccole la dilatazione vera e quella nominale coincidono, valendo l'espansione in serie di Taylor $\ln(1 + \epsilon) = \epsilon + o(\epsilon)$.

La dilatazione vera, a differenza di quella nominale, gode della proprietà di essere sommabile (negli incrementi). Si consideri infatti ancora una volta un'asta di lunghezza iniziale ℓ_0 che subisca un allungamento globale $\Delta\ell_{\text{tot}}$ (fig. 4.3). Si spezzi l'allungamento $\Delta\ell_{\text{tot}}$ in due fasi: una prima fase in cui l'asta si allunga di $\Delta\ell_1$ a partire dalla lunghezza iniziale ℓ_0 ed una seconda fase in cui l'asta si allunga di $\Delta\ell_2$ a partire dalla lunghezza $\ell = \ell_0 + \Delta\ell_1$ raggiunta nella prima fase. Naturalmente risulta $\Delta\ell_{\text{tot}} = \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2$. Se rapportiamo gli allungamenti $\Delta\ell_1$ e $\Delta\ell_2$ alla lunghezza dell'asta precedente il singolo allungamento si ottengono le due dilatazioni:

$$\epsilon_1 = \frac{\Delta\ell_1}{\ell_0}, \quad \epsilon_2 = \frac{\Delta\ell_2}{\ell},$$

mentre l'allungamento globale rapportato alla lunghezza iniziale fornisce:

$$\epsilon_{\text{tot}} = \frac{\Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0} = \frac{\Delta\ell_1}{\ell_0} + \frac{\Delta\ell_2}{\ell_0} \neq \epsilon_1 + \epsilon_2.$$

Se però le dilatazioni lineari ϵ_1 , ϵ_2 e ϵ_{tot} si calcolano rapportando tutti gli allungamenti alla lunghezza di una configurazione di riferimento comune (per esempio quella iniziale di lunghezza ℓ_0), la sommabilità viene ripristinata.

Verifichiamo che vale invece la sommabilità della dilatazione vera, sempre con riferimento allo schema di fig. 4.3 in cui l'asta passa dalla lunghezza ℓ_0 alla lunghezza $\ell_0 + \Delta\ell_1$ e infine alla lunghezza $\ell_0 + \Delta\ell_1 + \Delta\ell_2 = \ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}$. Risulta:

$$\bar{\epsilon}_1 = \ln \frac{\ell_0 + \Delta\ell_1}{\ell_0}, \quad \bar{\epsilon}_2 = \ln \frac{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0 + \Delta\ell_1}, \quad \bar{\epsilon}_{\text{tot}} = \ln \frac{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0},$$

e poiché:

$$\bar{\epsilon}_1 + \bar{\epsilon}_2 = \ln \left(\frac{\ell_0 + \Delta\ell_1}{\ell_0} \frac{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0 + \Delta\ell_1} \right) = \ln \frac{\ell_0 + \Delta\ell_{\text{tot}}}{\ell_0} = \bar{\epsilon}_{\text{tot}},$$

la sommabilità è pienamente dimostrata. ■

◇ ◇ ◇

4.3 Prova di torsione (o di taglio semplice)

Nella *prova di torsione*²⁰ un cilindro allungato cavo²¹ di spessore sottile b e composto di materiale omogeneo viene fissato ad una estremità ed assoggettato all'altra estremità ad un momento torcente M_t , di asse momento coincidente con l'asse del cilindro,²² come indicato nella fig. 4.4a. Nella fig. 4.4b è riportata invece la superficie media del cilindro di raggio

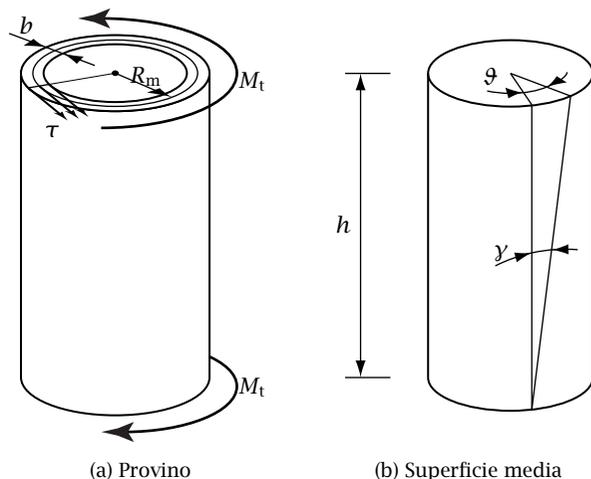


Figura 4.4: Prova di torsione

R_m e di altezza h .

In tale prova si vuole creare, nella zona centrale del provino, uno stato di sforzo omogeneo detto di *taglio semplice*.²³ Nell'intorno di un punto lo stato di sforzo è detto di taglio semplice se è possibile estrarre un cubetto con una faccia in cui agisca la sola tensione tangenziale in direzione ortogonale ad uno spigolo e con le altre facce in cui agiscono le sole tensioni

²⁰ *Torsion test* nella letteratura inglese.

²¹ La prova di torsione può eseguirsi anche su provini cilindrici pieni, ma in tal caso sia la tensione che la deformazione del provino non sono omogenee nella sezione del cilindro, il che rende più complessa l'interpretazione della prova.

²² Un momento torcente agisce nel piano della sezione retta ed ha quindi asse momento coincidente con quello del provino cilindrico.

²³ *Shearing stress* nella letteratura inglese.

tangenziali indispensabili all'equilibrio del cubetto sia alla traslazione che alla rotazione. Come indicato nella fig. 4.5a, quattro facce del cubetto sono

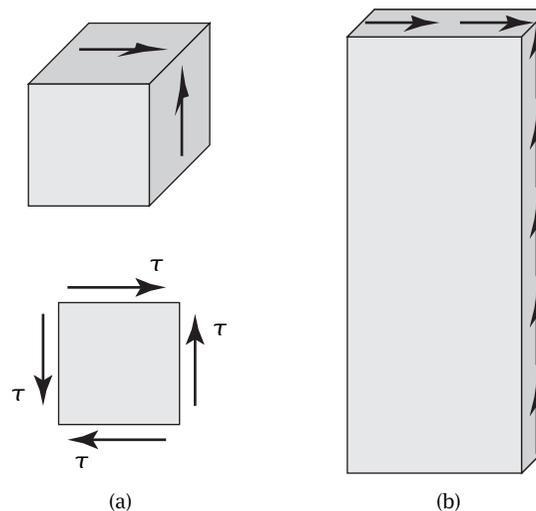


Figura 4.5: Stato di taglio semplice

soggette ad una tensione tangenziale mentre le altre due sono scariche.²⁴

Si noti che, a differenza del caso della prova di trazione, un provino di forma allungata a base rettangolare sottile non assicura l'omogeneità dello stato di tensione. Infatti al fine di generare uno stato omogeneo di taglio semplice è necessario, come indicato in fig. 4.5b, caricare in modo uniforme la superficie laterale del provino, il che è praticamente impossibile da attuare, almeno in una prova di routine. Per eliminare la necessità delle azioni esterne sulle facce laterali è sufficiente eliminare tali facce richiudendo il provino su se stesso a formare un cilindro cavo sottile nel quale le azioni tangenziali sulle basi equivalgono all'applicazione di un momento

²⁴ Si noti che le tensioni tangenziali che agiscono in due facce ortogonali hanno lo stesso modulo, sono perpendicolari allo spigolo comune ed entrambe sono di verso concorde oppure discorde con la normale uscente dall'altra faccia. Ciò è in accordo con il *teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali* (si veda il par. 5.2.3, p. 130) che afferma che le tensioni tangenziali agenti su due giaciture ortogonali hanno le componenti in direzione ortogonale alla intersezione delle due giaciture di uguale modulo e di verso concorde oppure discorde con la normale uscente dall'altra giacitura.

torcente M_t (fig. 4.4a). Essendo caricate le sole basi, nella parte centrale del provino le azioni si regolarizzano ed è quindi realistico ipotizzare che la tensione sia costante lungo la linea media della sezione circolare sottile. Si può inoltre ipotizzare, in virtù dello spessore sottile, che lungo una generica corda la tensione tangenziale sia approssimativamente costante ed abbia la direzione della linea media²⁵ (fig. 4.4a). Ne deriva uno stato omogeneo di taglio semplice nella parte centrale del provino.

I risultati della prova di torsione vengono riportati in un diagramma *tensione-scorrimento*. La tensione tangenziale τ può essere messa in relazione col momento torcente, tenendo conto che lungo una generica corda, di spessore b , la risultante τb delle tensioni tangenziali genera il contributo $\tau b R_m$ al momento torcente, avendo indicato con R_m il raggio della linea media (fig. 4.4a). Integrando infine tale contributo lungo la linea media si ottiene il momento torcente complessivo M_t , per cui la tensione tangenziale risulta:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi b R_m^2}. \quad (4.4)$$

Come già per il caso della prova di trazione semplice, è evidente che tale tensione approssima la tensione effettivamente agente nel provino solo se la dilatazione quadratica della sezione retta è piccola, cosa senz'altro vera fino a che lo spessore b e il raggio R_m variano di poco.

Lo scorrimento γ riguarda invece una generica linea longitudinale della superficie media del cilindro ed una linea a questa ortogonale tangente alla linea media di una generica sezione retta, come illustrato in fig. 4.4b dove è riportata la superficie media del cilindro. Se ϑ rappresenta la rotazione torsionale relativa tra due sezioni rette e h rappresenta la loro distanza, ne risulta la relazione:

$$\gamma = \frac{R_m \vartheta}{h}, \quad (4.5)$$

valida fino a che gli spostamenti sono piccoli.²⁶

²⁵Per via della reciprocità delle tensioni tangenziali di cui alla nota precedente, sul contorno della sezione tali tensioni devono essere tangenti al contorno stesso, altrimenti ne deriverebbe una tensione tangenziale sul contorno laterale avente la direzione dell'asse del cilindro.

²⁶La linea longitudinale si trasforma, nella deformazione, in un'elica cilindrica. Se gli spostamenti sono piccoli la linea deformata è approssimata dalla sua retta tangente all'origine, l'angolo γ approssima $\tan \gamma$ e la relazione (4.5) vale, approssimativamente, senz'altro.

4.4 Modelli ideali di comportamento

Le risposte dei diversi tipi di materiali alle azioni che li sollecitano possono essere fatte rientrare, come illustrato nel seguito, in tre tipi semplici fondamentali.

Elasticità. Un materiale è detto *elastico*²⁷ se la deformazione provocata dall'applicazione di certe forze si annulla una volta che le forze siano state rimosse. Normalmente un materiale reagisce elasticamente fintanto che le azioni cui è soggetto provocano deformazioni limitate.

Plasticità. Un materiale è poi detto *plastico*²⁸ se tutta o parte della deformazione dovuta alle forze applicate non viene recuperata, una volta che tali forze siano state rimosse. Quando le deformazioni cui è soggetto un qualunque materiale diventano notevoli in generale il materiale non recupera più la forma che questo aveva prima dell'applicazione delle azioni e si sviluppano quindi delle deformazioni permanenti.

Viscosità. Un materiale è infine detto *viscoso*²⁹ se la sua risposta alle sollecitazioni varia col tempo. Un materiale viscoso modifica quindi la sua risposta, nel corso del tempo, senza che si modifichino le azioni che lo sollecitano. Tutti i materiali presentano, su "lunghi" intervalli di tempo, un comportamento viscoso più o meno pronunciato. Di tale comportamento va tenuto conto se i carichi agenti sono permanenti, come il peso proprio, oppure se vengono applicati per lunghi intervalli di tempo.

Nel seguito verranno delineati dei modelli di comportamento ideale. Con riferimento alle prove di trazione monoassiale e di torsione descritte nei due paragrafi precedenti, saranno tracciati dei diagrammi di risposta corrispondenti a tali modelli ideali. Si sottintende che le tensioni e le dilatazioni saranno, come è consuetudine, quelle nominali che, come già detto, fino a che le deformazioni sono piccole si confondono con quelle vere. Si continua inoltre a supporre che la risposta del materiale consegua ad azioni o a deformazioni fatte variare "lentamente", ovvero sia in modo quasi statico.

²⁷Nella letteratura inglese si usano i termini *elastic material* per materiale elastico e *elasticity* per elasticità.

²⁸Nella letteratura inglese si usano i termini *plastic material* per materiale plastico e *plasticity* per plasticità.

²⁹*Viscosity* nella letteratura inglese.

4.4.1 Elasticità lineare

Se il comportamento del materiale è elastico, si ottiene una curva che passa dall'origine degli assi (provino scarico) e che viene percorsa in un senso se la forza viene incrementata (*fase di carico*), mentre viene percorsa nel verso opposto se la forza viene diminuita (*fase di scarico*).

Se la deformazione è proporzionale all'intensità delle forze applicate si parla di *elasticità lineare*.³⁰ La proporzionalità tra tensione e deformazione è nota come *legge di Hooke*.³¹ Molti materiali che presentano un comportamento elastico hanno in realtà un comportamento elastico lineare, in accordo quindi con la legge di Hooke. Nella fig. 4.6 sono riportati i diagram-

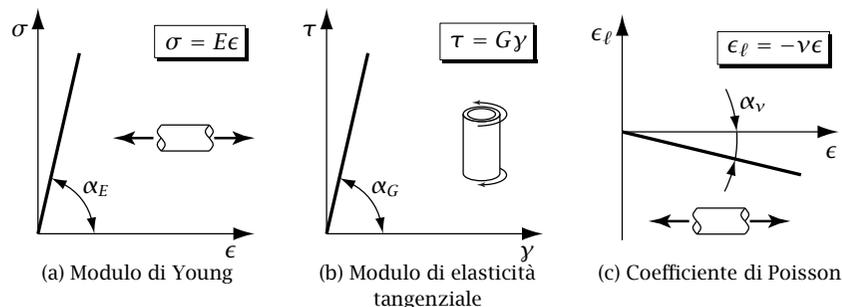


Figura 4.6: Elasticità lineare

mi lineari corrispondenti alle prove di trazione e di torsione. Le costanti di proporzionalità tra le variabili in gioco definiscono i cosiddetti *moduli tecnici di elasticità*, descritti nel seguito.

Modulo di Young. Dal diagramma lineare σ - ϵ (tensione normale-dilatazione lineare) di fig. 4.6a risulta definito il *modulo di Young* o *modulo di elasticità normale*:³²

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha_E, \quad [E] = \text{FL}^{-2}, \quad (4.6)$$

dove α_E rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse ϵ . Dimensionalmente il modulo di Young risulta una tensione per unità di dila-

tazione lineare. Poiché una tensione è una forza per unità di superficie e una dilatazione lineare è un allungamento per unità di lunghezza, cioè un numero puro, il modulo di Young ha le stesse dimensioni di una tensione, come indicato nella (4.6).³³

Modulo di elasticità tangenziale. Dal diagramma lineare τ - γ (tensione tangenziale-scorrimento) di fig. 4.6b risulta definito il *modulo di elasticità tangenziale* o *modulo di Coulomb*:³⁴

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \tan \alpha_G, \quad [G] = \text{FL}^{-2}, \quad (4.7)$$

dove α_G rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse γ . Il modulo di elasticità tangenziale è una tensione per unità di scorrimento e quindi, dato che lo scorrimento è adimensionale come la dilatazione lineare, ha le stesse dimensioni del modulo di Young, come indicato nella (4.7).

Coefficiente di Poisson. Infine, dal diagramma lineare ϵ_ℓ - ϵ (dilatazione laterale-dilatazione longitudinale) di fig. 4.6c risulta definito il *coefficiente di Poisson* o *coefficiente di contrazione trasversale*:³⁵

$$\nu = -\frac{\epsilon_\ell}{\epsilon} = -\tan \alpha_\nu, \quad [\nu] = \text{L}^2\text{L}^{-2} = 1, \quad (4.8)$$

dove α_ν rappresenta l'angolo che la linea di carico forma con l'asse ϵ . Il segno meno presente nella definizione (4.8) è giustificato dal desiderio che il coefficiente di Poisson sia positivo nel caso in cui il provino teso subisca una contrazione laterale, come in figura. Infatti in tal caso la dilatazione longitudinale è positiva mentre la dilatazione trasversale è negativa. Il coefficiente di Poisson è una dilatazione lineare per unità di dilatazione lineare e quindi adimensionale, come indicato nella (4.8).

Nella tab. 4.1³⁶ sono riportati i valori dei moduli di elasticità relativi a vari tipi di materiali, ordinati per modulo di Young decrescente. La tabella

³³Naturalmente il modulo di Young e la tensione sono variabili di genere diverso, anche se nel sistema internazionale di unità hanno le stesse dimensioni.

³⁴*Shear modulus* o *rigidity* nella letteratura inglese.

³⁵*Poisson's ratio* nella letteratura inglese.

³⁶Cfr., per esempio, Love (1944, p. 105), Lemaitre e Chaboche (1990, pp. 131-132), Gordon (1979, p. 43), Bell (1973, pp. 291-292, 306) e infine Colombo (1975, pp. 521-538)

³⁰*Linear elasticity* nella letteratura inglese.

³¹*Hooke's law* nella letteratura inglese.

³²*Young's modulus* nella letteratura inglese.

Materiale	E/MPa	G/MPa	ν
Acciaio	210 000	80 000	0.31
Ferro	200 000	77 000	0.28
Rame	120 000	45 000	0.36
Ottone	100 000	37 000	0.34
Alluminio	71 000	26 000	0.34
Vetro	60 000	24 000	0.25
Calcestruzzo	30 000	13 000	0.17
Piombo	16 000	6 000	0.44
Legno*	12 000	950	0.43
Plexiglas	3 000	1000	0.40

*Nella direzione delle fibre

Tabella 4.1: Moduli di elasticità

vuole essere puramente indicativa di quelli che sono gli ordini di grandezza dei moduli di elasticità e quindi non tiene conto della loro più o meno grande variabilità nell'ambito di uno stesso materiale. Per esempio, il modulo di elasticità del legno³⁷ ha una grande variabilità a seconda dell'essenza legnosa considerata, quello del calcestruzzo³⁸ dipende dalla granulometria, dalla natura degli inerti, dal rapporto acqua-cemento e naturalmente dalla qualità del cemento, mentre la variabilità del modulo di elasticità dell'acciaio è molto limitata.

³⁷Il legno è un materiale fortemente non isotropo e i risultati delle prove dipendono dall'orientamento delle fibre. I valori riportati sono propri dell'*abete di Douglas*, con le fibre del legno orientate nella direzione della trazione.

³⁸Il calcestruzzo è un materiale fortemente non lineare e occorre quindi distinguere tra i moduli tangenti e quelli secanti (cfr. il par. 4.4.2 in questa pagina). Inoltre il calcestruzzo è un materiale viscoso (cfr. il par. 4.4.5 p. 112) e quindi la sua deformazione, a carico costante, aumenta nel tempo originando un'apparente diminuzione del modulo di Young. Il valore riportato in tabella è indicativo di un modulo istantaneo tangente all'origine del diagramma tensione-dilatazione.

4.4.2 Elasticità non lineare

Nel caso più generale possibile l'elasticità è non lineare ed è quindi rappresentata da una curva a pendenza variabile. La fig. 4.7a fa riferimento ad

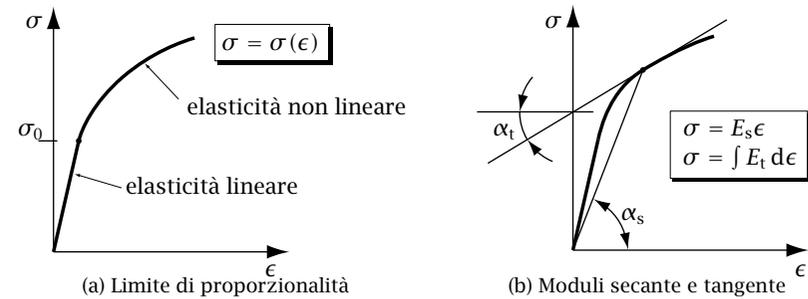


Figura 4.7: Elasticità non lineare

un diagramma tensione-dilatazione costituito da un primo tratto elastico lineare e da un successivo tratto elastico non lineare. Il valore di tensione σ_0 , che separa il tratto lineare da quello non lineare, è detto *limite di proporzionalità*.³⁹

Per il tratto non lineare, a pendenza variabile, si introducono i concetti di *modulo secante* E_s e di *modulo tangente* E_t ,⁴⁰ entrambi variabili da punto a punto:

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon} = \tan \alpha_s, \quad E_t = \frac{d\sigma}{d\epsilon} = \tan \alpha_t. \quad (4.9)$$

Come indicato in fig. 4.7b, con riferimento ad un generico punto sulla curva, il modulo secante rappresenta l'inclinazione della congiungente del punto sulla curva con l'origine degli assi, mentre il modulo tangente rappresenta l'inclinazione della retta tangente alla curva.

4.4.3 Dominio di elasticità.

Alcuni materiali "reali" presentano un comportamento istantaneo, cioè in intervalli ristretti di tempo, di tipo elastico e spesso anche di tipo elastico lineare se lo stato di sforzo a cui sono assoggettati è inferiore ad una

³⁹*Proportional limit* nella letteratura inglese.

⁴⁰*Secant modulus* e, rispettivamente, *tangent modulus* nella letteratura inglese.

certa soglia. Si è portati allora ad introdurre il concetto di *dominio elastico*,⁴¹ definito come l'insieme degli stati tensionali ai quali corrisponde un comportamento elastico da parte del materiale. Naturalmente, al di fuori del dominio elastico il materiale presenta lo sviluppo di deformazioni permanenti. La superficie di contorno del dominio di elasticità, nello spazio delle tensioni, prende il nome di *superficie di snervamento*.⁴² I criteri che permettono di stabilire se uno stato tensionale è sulla frontiera del dominio di elasticità vengono detti *criteri di snervamento*.⁴³

Se l'elasticità del materiale è di tipo lineare si parla anche di *dominio di linearità*. Inoltre il materiale potrebbe avere un dominio di elasticità con un dominio interno di linearità. In tal caso gli stati tensionali che giacciono tra i due domini rappresentano stati di elasticità non lineare.

4.4.4 Elastoplasticità

Si dice che un materiale ha un comportamento *elastoplastico*⁴⁴ se solo una parte della deformazione dovuta alle forze applicate non è recuperata, una volta che tali forze siano state rimosse.

Nella fig. 4.8a è riportato un possibile comportamento elastoplastico, consistente con l'esistenza di un dominio di elasticità. Il tratto AB rappresenta una curva di carico elastica lineare, simboleggiata dalla doppia freccia ad indicare che la linea è percorsa nei due sensi, a seconda che la forza venga aumentata oppure diminuita. Raggiunta la tensione σ_s , detta *tensione di snervamento*,⁴⁵ iniziano a svilupparsi le deformazioni permanenti. Se dopo avere superato il limite di snervamento si scarica il provino, non si segue più, a ritroso, la curva di carico del provino vergine, simboleggiata per tale motivo con le frecce nella sola direzione di carico. Nell'esempio di figura è indicata la linea CD quale possibile curva di scarico a partire dal punto C della curva di carico del provino vergine. A scarico avvenuto risultano una quota di deformazione permanente ϵ_p (deformazione plastica) e una quota di deformazione recuperata ϵ_e (deformazione elastica). In accordo

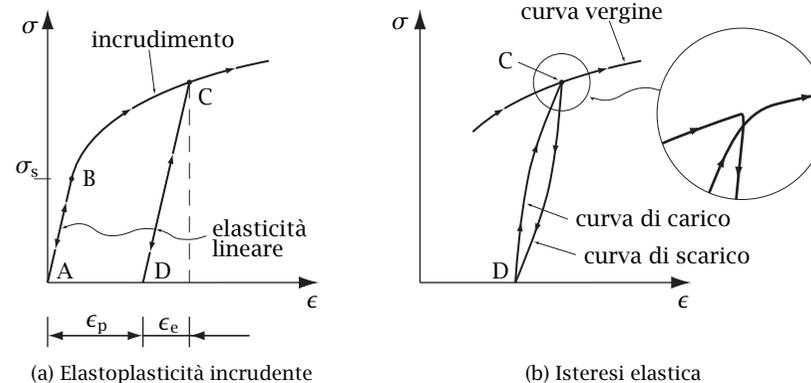


Figura 4.8: Elastoplasticità

con numerose risultanze sperimentali, la linea di scarico CD è tracciata parallelamente alla linea di carico iniziale AB. Se dopo lo scarico si ricomincia a caricare il provino si segue, a ritroso, la stessa linea per poi riprendere, a partire dal punto C, il percorso lungo la curva di carico del provino vergine: la linea CD rappresenta dunque una linea di scarico e carico elastica lineare e per questo è stata indicata con la doppia freccia. Se la curva di carico del provino vergine oltre il limite di snervamento è crescente, come nella fig. 4.8a, snervando il materiale si provoca un innalzamento del limite di snervamento, fenomeno che ha il nome di *incrudimento*.⁴⁶ Se invece la curva di carico del provino vergine dopo il limite di snervamento è costante si parla di *plasticità perfetta*,⁴⁷ mentre se è decrescente di *incrudimento negativo*.⁴⁸

La successione scarico-carico, a partire da un punto della curva di carico iniziale situato oltre il limite di snervamento, avviene in realtà lungo un ciclo chiuso più o meno schiacciato, ciclo che si ripete all'iterare dello

⁴¹Elastic domain nella letteratura inglese.

⁴²Yield surface nella letteratura inglese.

⁴³Criterio di snervamento si rende con *yield criterion* oppure *yield condition* nella letteratura inglese.

⁴⁴Nella letteratura inglese si usa il termine *elastoplasticity* per elastoplasticità.

⁴⁵La tensione di snervamento rappresenta uno stato tensionale di trazione semplice che giace sulla superficie di snervamento. Nella letteratura inglese si utilizza il termine *yield stress* per tensione di snervamento.

⁴⁶Hardening nella letteratura inglese.

⁴⁷Il tratto a carico costante non rappresenta un comportamento del materiale dipendente dal tempo poiché è possibile bloccare il flusso della deformazione, ovvero sia l'incremento della deformazione a tensione costante, diminuendo la tensione applicata di una quantità comunque piccola.

⁴⁸Nella letteratura inglese si usano i termini *perfect plasticity* per plasticità perfetta e *softening* per incrudimento negativo.

scarico-carico. Tale fenomeno è noto con il nome di *isteresi elastica*.⁴⁹ Un ciclo di isteresi che viene ripetuto poche volte nel corso del tempo è quasi sempre trascurabile e può essere sostituito da un'unica linea di carico-scarico. È evidente invece che se il ciclo di isteresi viene ripetuto numerose volte difficilmente se ne può prescindere. Non solo, al ripetersi del ciclo di isteresi compare il fenomeno della *fatica*,⁵⁰ ovvero il fenomeno dell'abbassamento del livello di snervamento del materiale al crescere del numero dei cicli. Nella fig. 4.8b è illustrato quale esempio il ciclo corrispondente allo scarico-carico lungo la linea CD della fig. 4.8a. Nel riquadro della stessa figura è anche illustrato come il ciclo normalmente si raccorda alla curva di carico vergine del provino. Come già detto, in molti casi concreti il ciclo di isteresi è trascurabile e può essere sostituito dalla corrispondente linea di fig. 4.8a.

Il modello più semplice possibile per un materiale elastoplastico è rappresentato da un diagramma composto da una bilatera: una linea passante dall'origine degli assi a rappresentare un comportamento iniziale elastico lineare ed una linea raccordata alla precedente in corrispondenza della tensione di snervamento a rappresentare un successivo comportamento plastico pure lineare. Nella fig. 4.9 sono illustrati i tre possibili casi a seconda

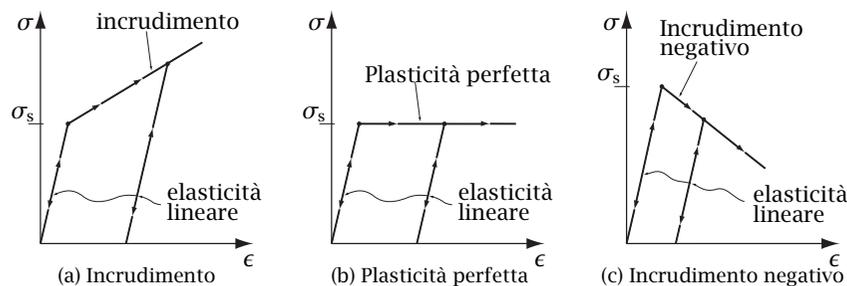


Figura 4.9: Elastoplasticità bilatera

che la fase plastica lineare sia incrudente, perfettamente plastica oppure ad incrudimento negativo.

⁴⁹ *Elastic hysteresis* nella letteratura inglese.

⁵⁰ *Fatigue* nella letteratura inglese.

4.4.5 Viscoelasticità⁵¹

Il fenomeno della viscosità avvicina il comportamento dei fluidi a quello dei solidi. Senza entrare troppo nei dettagli, un *fluido viscoso*⁵² è caratterizzato da un incremento costante della deformazione sotto carico costante, quindi da un aumento illimitato della deformazione, oltre alla tendenza a non recuperare la deformazione una volta che i carichi siano stati rimossi. Ne consegue la tendenza a non avere una forma propria che è caratteristica dei fluidi. Nella fig. 4.10a è riportato il diagramma dello scorrimento

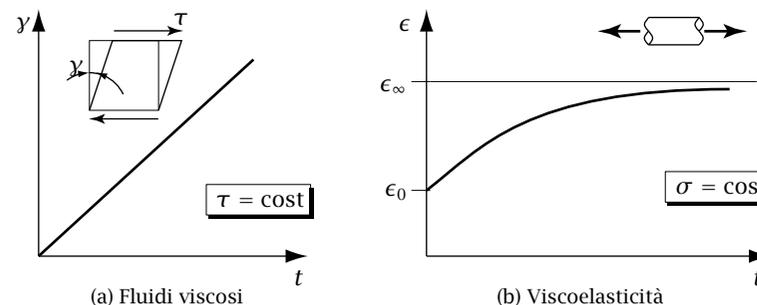


Figura 4.10: Viscosità

in un fluido in funzione del tempo quando venga applicata una tensione tangenziale mantenuta costante nel tempo.

All'opposto, un *solido viscoelastico* si comporta come un corpo elastico sotto l'azione di forze istantanee, cioè applicate e rimosse in "piccoli" intervalli di tempo, mentre sotto carichi costanti la deformazione aumenta nel corso del tempo,⁵³ ma con un incremento decrescente e restando limitata. Inoltre il solido tende a recuperare tutta la deformazione una volta che i carichi siano stati rimossi. Il diagramma riportato in fig. 4.10b illustra, per un materiale viscoelastico, l'andamento della dilatazione lineare a tensione costante. Con riferimento ad una prova di trazione semplice, in un breve intervallo di tempo viene applicata la tensione σ provocando la dilatazione elastica istantanea ϵ_0 . Mantenendo poi costante la tensione,

⁵¹ *Viscoelasticity* nella letteratura inglese.

⁵² *Viscous fluid* nella letteratura inglese.

⁵³ Nella letteratura inglese l'aumento di deformazione sotto carico costante è nota con il termine di *creep*.

la dilatazione continua a svilupparsi nel corso del tempo, raggiungendo a tempo infinito il valore asintotico ϵ_∞ . La differenza $\epsilon_\infty - \epsilon_0$ tra i valori di dilatazione asintotica e istantanea rappresenta l'*elasticità ritardata*,⁵⁴ cioè la quota di dilatazione che si sviluppa gradualmente e che gradualmente viene recuperata una volta che la tensione applicata sia stata azzerata (fig. 4.11).

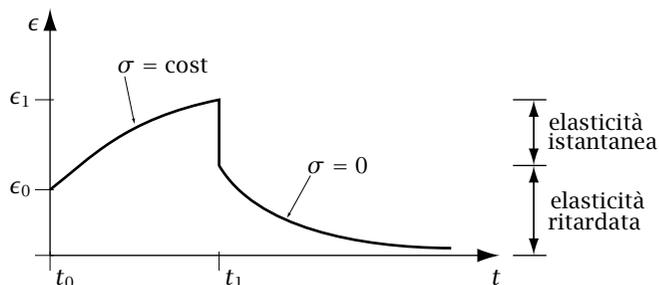


Figura 4.11: Elasticità ritardata

Tra il comportamento di un fluido viscoso e quello di un solido viscoelastico esistono tutta una serie di situazioni intermedie che avvicinano il comportamento di un solido a quello di un fluido e viceversa. La viscosità si configura quindi come un ponte gettato tra il comportamento dei fluidi e quello dei solidi.

Legato al comportamento viscoelastico di un solido è il fenomeno del *rilassamento*,⁵⁵ cioè il fenomeno della diminuzione del carico necessario a mantenere, nel corso del tempo, la stessa deformazione.⁵⁶

Il diagramma di fig. 4.12 rappresenta l'andamento nel corso del tempo della tensione σ quando la stessa venga portata al livello iniziale σ_0 , ed indi la conseguente dilatazione ϵ venga tenuta costante. A tempo infinito la tensione che mantiene la stessa dilatazione scende al valore asintotico σ_∞ . Molto importante nella tecnica è il problema del rilassamento dei cavi di acciaio pretesi nelle strutture in cemento armato precompresso. In tale tipo di strutture, dei cavi di acciaio vengono tesi al fine di comprimere il calcestruzzo e di renderlo quindi adatto ad assorbire, via decompressione,

⁵⁴ *Delayed elasticity* nella letteratura inglese.

⁵⁵ *Relaxation* nella letteratura inglese.

⁵⁶ Nel caso di un fluido viscoso occorre azzerare il carico pressoché istantaneamente se si vuole che la deformazione resti costante.

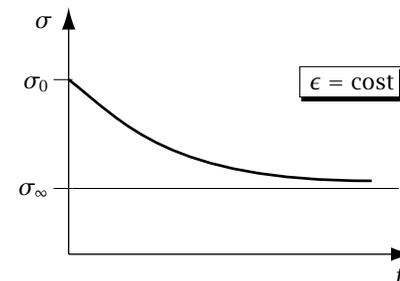


Figura 4.12: Rilassamento

le sollecitazioni di trazione che altrimenti il calcestruzzo stesso non sarebbe in grado di sopportare. La trazione iniziale dei cavi di acciaio provoca una dilatazione degli stessi cavi che viene conservata praticamente invariata nel corso del tempo dal contrasto del calcestruzzo. Il rilassamento dei cavi di acciaio fa sì che dopo qualche tempo si possa contare solo sulla tensione di trazione a tempo infinito σ_∞ al fine della benefica compressione del calcestruzzo.

4.5 Prove sui materiali

A titolo di esempio e per fornire un'idea dei valori numerici delle grandezze in gioco si riportano nel seguito alcuni diagrammi realistici di prove su materiali.

4.5.1 Materiali metallici

I materiali metallici si comportano normalmente in modo simile a trazione e a compressione. Poiché le prove di compressione sono più complesse, e quindi più costose, da realizzare non stupisce che la prova di routine tipica per un materiale metallico sia la prova di trazione.

Nella fig. 4.13 è riportato un possibile diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale*, quale risultato di una prova di trazione monoassiale a deformazione controllata eseguita su acciaio strutturale laminato a caldo tipo Fe360.⁵⁷ Si noti che le dilatazioni nominali sono state riportate

⁵⁷ La classificazione degli acciai laminati a caldo per strutture metalliche, con le loro con-

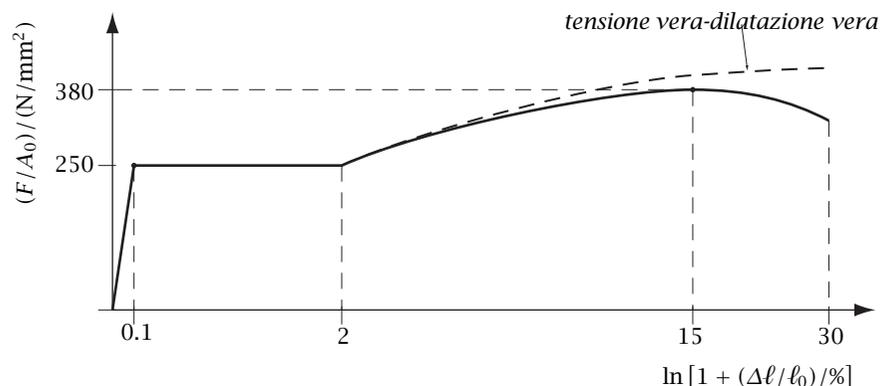


Figura 4.13: Tipico diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale* di un acciaio tipo Fe360 per strutture metalliche

in ascissa in scala logaritmica. Il diagramma è caratterizzato, nella parte iniziale, da un primo tratto elastico lineare, dalla tensione di snervamento $\sigma_s = 250 \text{ N/mm}^2$ e da un successivo tratto perfettamente plastico. In realtà, come illustrato più dettagliatamente in fig. 4.14a, lo snervamento avviene ad un valore σ_{ss} , detto *snervamento superiore*,⁵⁸ più elevato di quello indicato in fig. 4.13. Di seguito al raggiungimento dello snervamento superiore la tensione diminuisce rapidamente e, dopo una serie di oscillazioni dovute alla rapidità del fenomeno, si stabilizza ad un livello σ_{si} detto *snervamento inferiore*.⁵⁹ Lo snervamento superiore, a differenza di quello inferiore, dipende strettamente dalla forma del provino e da come la prova è eseguita. Risulta quindi giustificato assumere lo snervamento inferiore quale livello di snervamento del materiale oggetto di indagine. Sempre con riferimento alla fig. 4.13, al tratto perfettamente plastico segue poi

dizioni generali di fornitura, è stabilita dalla norma europea UNI EN 10025-1:2005 (*Prodotti laminati a caldo di acciai per impieghi strutturali - Parte 1: Condizioni tecniche generali di fornitura*), revisionata nel 2004. La norma europea UNI EN 1993-1-1:2014 (*Eurocodice 3 - Progettazione delle strutture di acciaio. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici*) prima parte dell'eurocodice 3 che fornisce i criteri generali di progettazione di edifici e opere di ingegneria civile di acciaio, passata nel 2005 dalla forma sperimentale a quella definitiva, si riferisce esplicitamente alla EN 10025-1 per quel che riguarda le proprietà degli acciai laminati a caldo.

⁵⁸ *Upper yield stress* nella letteratura inglese.

⁵⁹ *Lower yield stress* nella letteratura inglese.

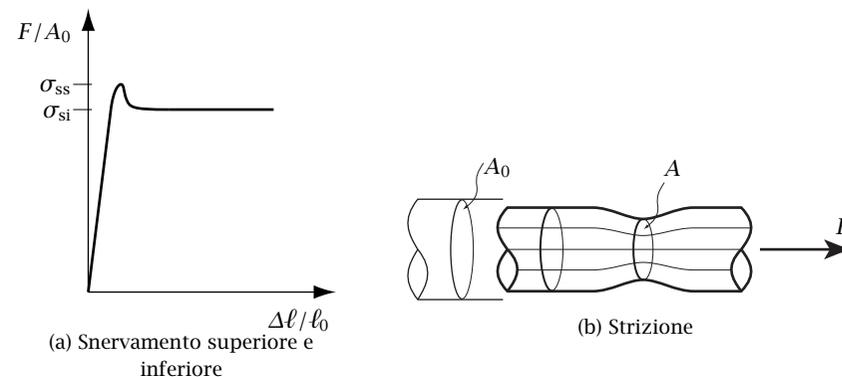


Figura 4.14: Prova di trazione semplice (provini metallici)

un tratto ad incrudimento positivo seguito a sua volta da un tratto ad incrudimento negativo. La tensione massima σ_r , raggiunta al passaggio tra l'incrudimento positivo e quello negativo, che nel diagramma di figura vale 380 N/mm^2 , è nota come *tensione di rottura*.⁶⁰ Dopo il raggiungimento della tensione di rottura, nel provino si sviluppa un fenomeno di localizzazione della deformazione noto con il termine di *strizione*⁶¹ e consistente in un restringimento localizzato nell'intorno di una sezione del provino (fig. 4.14b). È evidente che con lo sviluppo della strizione viene a perdersi l'omogeneità del provino, circostanza di cui occorre tenere conto per interpretare correttamente la parte di diagramma susseguente il raggiungimento della tensione di rottura. Inoltre, la sezione A della zona soggetta a strizione è nettamente inferiore alla sezione A_0 indeformata e ne risulta che la tensione vera F/A è notevolmente superiore di quella nominale F/A_0 . Se si traccia il diagramma *tensione vera-dilatazione vera* si ottiene la linea tratteggiata di fig. 4.13 che, a differenza del diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale*, risulta sempre crescente.

Nella fig. 4.15a è riportato invece il risultato di una prova di trazione monoassiale a deformazione controllata eseguita su acciaio trafilato a fred-

⁶⁰ Affinché un acciaio sia classificato quale Fe360 occorre che la sua tensione di rottura superi 360 N/mm^2 . Tensione di rottura si rende in inglese, tra gli altri, con i termini *ultimate stress* oppure *tensile strength*.

⁶¹ *Necking* nella letteratura inglese.

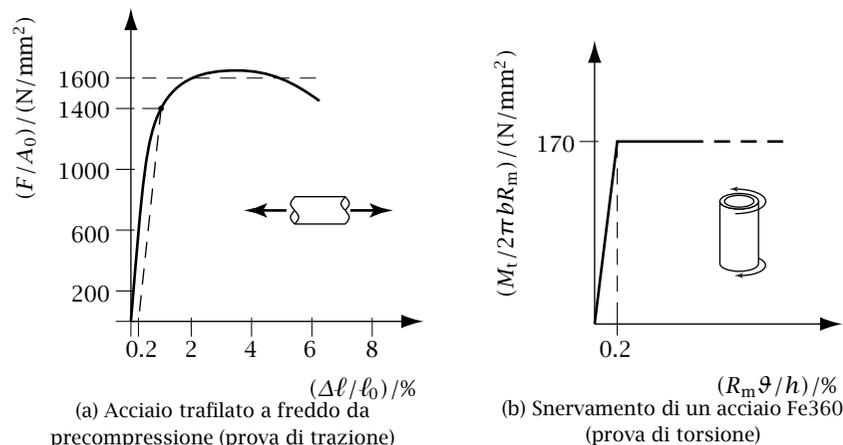


Figura 4.15: Prove di trazione e di torsione su materiali metallici

do da precompressione.⁶² Si noti che tale tipo d'acciaio, a differenza di quello laminato a caldo per strutture metalliche, non presenta un limite netto di snervamento. È consuetudine in tali casi definire quale limite di snervamento il valore di tensione al quale allo scarico corrisponde una deformazione permanente prestabilita. Nel caso illustrato in fig. 4.15a alla deformazione residua dello 0.2 % corrisponde il limite di snervamento di 1400 N/mm².

Per quel che riguarda la prova di torsione, i risultati sono qualitativamente simili alla prova di trazione. Ci si limita a riportare nella fig. 4.15b la

⁶²I requisiti dell'acciaio da precompressione sono stabiliti dalla norma europea UNI EN ISO 15630-3:2010 (*Acciaio per calcestruzzo armato e calcestruzzo armato precompresso - Metodi di prova - Parte 3: Acciaio per calcestruzzo armato precompresso*). Comunque sono in fase di preparazione le nuove norme europee EN 10138, rese disponibili nel 2006 sotto forma di bozze. Di queste, la parte prima prEN 10138-1:2006 (*Prestressing steels - Part 1: General requirements*) riguarda i requisiti generali degli acciai da precompressione.

Il semplice acciaio per cemento armato è invece oggetto della norma europea UNI EN 10080:2005 (*Acciaio d'armatura per calcestruzzo - Acciaio d'armatura saldabile - Generalità*).

Sia la EN 10138 che la EN 10080 sono citate quali riferimenti delle proprietà dell'acciaio dalla norma UNI EN 1992-1-1:2015 (*Eurocodice 2 - Progettazione delle strutture in calcestruzzo. Parte 1-1: Regole generali e regole per gli edifici*), prima parte dell'eurocodice 2 che fornisce i criteri generali per la progettazione delle strutture di calcestruzzo non armato, armato e precompresso, passata nel 2004 dalla forma sperimentale a quella definitiva.

parte iniziale del diagramma *tensione tangenziale nominale-scorrimento* nel caso di un acciaio laminato a caldo tipo Fe360 per strutture metalliche, con le indicazioni di un possibile livello di snervamento e del corrispondente valore di scorrimento.

4.5.2 Calcestruzzo

Poiché il calcestruzzo è un materiale con scarsa resistenza a trazione, la prova di resistenza tipica eseguita su campioni di calcestruzzo è la prova di compressione monoassiale. A tal fine il materiale viene sagomato, come indicato in fig. 4.16a, in forma di cubetti, tipicamente di 15 cm di lato,

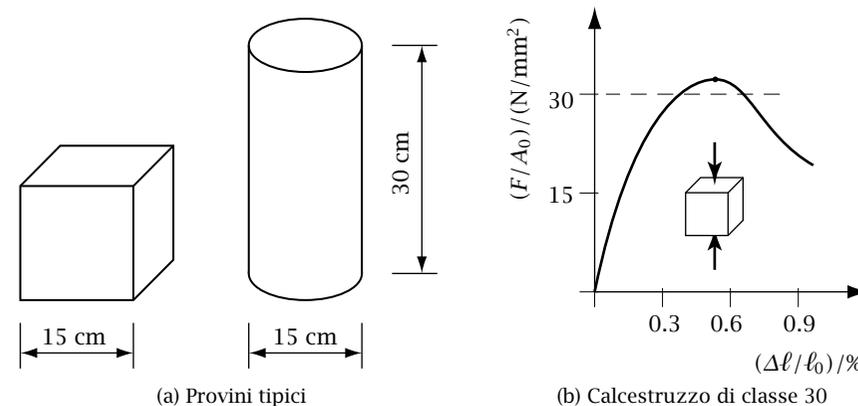


Figura 4.16: Prova di compressione (provini di calcestruzzo)

oppure in forma di cilindri di 15 cm di diametro e di 30 cm di altezza. Data la forma tozza dei provini è evidente che il loro stato durante la prova di compressione non sarà omogeneo, soprattutto per quel che riguarda i provini di forma cubica. I risultati ottenuti su provini, per esempio cubici, di diversa grandezza oppure eseguendo la prova con modalità differenti non saranno quindi direttamente confrontabili. La prova di compressione si configura quindi quale *prova convenzionale* che, al fine della confrontabilità dei risultati, deve essere necessariamente normalizzata, con l'indica-

zione di tutte le specifiche che occorre soddisfare sia nella preparazione dei provini che nell'esecuzione della prova stessa.⁶³

Il calcestruzzo viene classificato, in base alla sua *resistenza caratteristica cilindrica/cubica a compressione*, in *classi di resistenza*.⁶⁴ La resistenza caratteristica cilindrica/cubica a compressione rappresenta il livello tensionale in N/mm^2 al disotto del quale ci si aspetta di trovare al più il 5% delle tensioni di rottura relative a prove di compressione su cilindri/cubetti del dato tipo di calcestruzzo.

Nella fig. 4.16b è riportato un possibile diagramma *tensione nominale-dilatazione nominale*, quale risultato di una prova di compressione monoassiale a deformazione controllata eseguita su un provino cubico di calcestruzzo di classe 25/30. La tensione di rottura è leggermente superiore a 30 N/mm^2 , come ci si aspetta per la maggior parte delle prove eseguite su cubetti di calcestruzzo di classe 25/30. Si osservi che nel tracciamento del diagramma di fig. 4.16b si sono assunti positivi sia la forza di compressione F che l'accorciamento Δl del provino.

4.6 Duttilità, fragilità e modelli di danneggiamento

La *duttilità*⁶⁵ di un materiale rappresenta la sua capacità di subire delle deformazioni plastiche senza fratturarsi, cioè senza giungere a rottura. Un materiale duttile, come per esempio l'acciaio, può subire lavorazioni che ne modificano la forma in virtù della sua capacità di subire deformazioni permanenti.

Se il materiale non è duttile si dice *fragile*.⁶⁶ Un materiale fragile presenta deformazioni plastiche trascurabili e giunge quindi a rottura sostanzialmente in fase elastica e spesso in fase elastico lineare.

⁶³Naturalmente tutte le prove di routine per il controllo dei materiali sono normalizzate. Quello che si vuole dire è che nel caso della prova di compressione di provini di calcestruzzo, a differenza della prova di trazione per materiali metallici, la normalizzazione è indispensabile al fine di rendere confrontabili i risultati della prova stessa.

⁶⁴Le classi di resistenza e la resistenza caratteristica a compressione del calcestruzzo sono stabilite dalla norma UNI EN 206:2014 (*Calcestruzzo - Specificazione, prestazione, produzione e conformità*), riguardanti i requisiti per i materiali componenti del calcestruzzo e le proprietà del calcestruzzo.

La parte prima dell'eurocodice 2 UNI EN 1992-1-1:2015, già citato, si riferisce alla EN 206 per quel che riguarda le proprietà del calcestruzzo.

⁶⁵Materiale duttile si rende in inglese con *ductile material*.

⁶⁶Materiale fragile si rende in inglese con *brittle material*.

Occorre subito dire che il concetto di duttilità, e quindi di fragilità, non è assoluto poiché può dipendere anche dalle dimensioni in gioco. In altre parole, la duttilità non dipende solo dalle proprietà del materiale, ma anche dalla struttura. Per esempio, un materiale tipicamente duttile come l'acciaio presenta un comportamento tendenzialmente fragile in strutture di grandi dimensioni (come le lastre impiegate nella costruzione di navi in acciaio).

La differenza di comportamento tra materiali (prevalentemente) duttili e materiali (prevalentemente) fragili dipende dai *meccanismi di danneggiamento*⁶⁷ a livello microscopico. Nei materiali duttili come le leghe metalliche il danneggiamento è rappresentato dalle *dislocazioni*⁶⁸ cioè da scorrimenti tra piani atomici o cristallini, scorrimenti che preservano la continuità del materiale e sono alla base del comportamento plastico. Nei calcestruzzi e nelle rocce, materiali tipicamente fragili, esistono sempre delle *microfratture*,⁶⁹ che nel caso del calcestruzzo possono essere semplicemente degli scollamenti tra la matrice cementizia e i componenti granulari. Queste microfratture si estendono ad opera delle sollecitazioni esterne fino ad originare una fessura macroscopica che rompe la continuità del materiale. Nei *materiali compositi fibro rinforzati*, composti di una matrice rinforzata da fibre,⁷⁰ il meccanismo di danneggiamento è rappresentato dallo sfilamento delle fibre, cioè dal loro distacco dalla matrice. Invece nei *materiali compositi laminati*,⁷¹ composti da più strati incollati, il danneggiamento può presentarsi come scollamento degli strati, fenomeno noto come *delaminazione*.⁷²

I materiali duttili presentano un comportamento a trazione e a compressione simile, mentre per i materiali fragili il comportamento a trazione e compressione è nettamente diverso, potendo la resistenza a compressione essere anche di un ordine di grandezza superiore a quella di trazione.

⁶⁷Per più dettagli sui meccanismi di danneggiamento nei materiali si veda per esempio Lemaître e Chaboche (1990, cap. 1). Danneggiamento si rende in inglese con il termine *damage*.

⁶⁸Dislocazione si rende in inglese con il termine *dislocation*.

⁶⁹Microfrattura si rende in inglese con il termine *microfracture*.

⁷⁰Le matrici più comuni sono di resina, prevalentemente epossidica, ma si sono utilizzate anche matrici metalliche come leghe di alluminio. Tra i materiali prevalentemente impiegati per le fibre sono invece vetro, boro, carbonio e kevlar (un polimero organico). Per più dettagli si veda per esempio Gordon (1976, cap. 8). Materiale composito fibro rinforzato si rende in inglese con il termine *fibro-resin composite*.

⁷¹Materiale composito laminato si rende in inglese con il termine *composite laminate*.

⁷²*Delamination* nella letteratura inglese.

Se la prova di trazione di un provino in calcestruzzo viene condotta pilotando la deformazione con le moderne tecniche di controllo elettronico, in luogo di una rottura netta viene individuato un ramo di incrudimento negativo (softening), come illustrato in fig. 4.17a.⁷³ Poiché il ramo di sof-

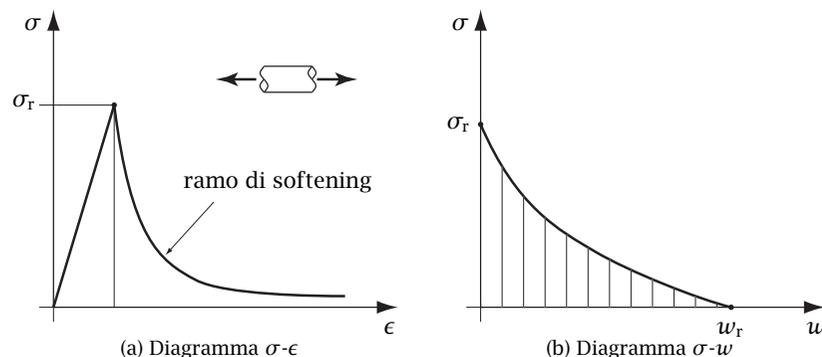


Figura 4.17: Prova di trazione di un provino in calcestruzzo

tening permette di dissipare una notevole quantità di energia, rappresenta una importante caratteristica del materiale. Quando si raggiunge il ramo di softening, la deformazione del provino tende ad essere localizzata in una stretta banda (analogamente al fenomeno della strizione per i provini metallici). In conseguenza, se ci si riferisce all'intero provino, i risultati dipendono non solo dal materiale, ma anche dalle dimensioni del provino. Per evitare questa dipendenza occorre mettere in conto l'ampiezza w della zona a deformazione localizzata dove si sviluppa la frattura che porta il provino alla rottura.

In un diagramma $\sigma - w$ (fig. 4.17b) l'area sottesa dalla curva rappresenta il lavoro L_f speso per unità di superficie per fratturare il solido, lavoro che risulta essere una proprietà intrinseca del materiale nota come *energia di frattura*:

$$L_f = \int_0^{w_r} \sigma \, dw. \quad (4.10)$$

⁷³Per più dettagli si veda per esempio Carpinteri (1992, par. 1.1).

4.7 Verifiche di sicurezza

Un modello di comportamento meccanico di una struttura, più o meno realistico che sia, permette di trasformare le azioni che si prevede agiranno sulla struttura in risposte della struttura stessa, sia in termini di spostamenti e deformazioni che in termini di tensioni e di eventuali danneggiamenti. Risulta pertanto possibile eseguire delle *verifiche di sicurezza*, ovvero sia prevedere se la struttura sarà in grado di servire allo scopo che ne giustifica l'esistenza, garantendo contemporaneamente un "sufficiente" margine di sicurezza rispetto a crolli sia parziali che totali della struttura a garanzia sia della incolumità delle persone che della conservazione delle cose che dovranno interagire con essa.

Il concetto alla base delle attuali verifiche di resistenza è quello di *stato limite*.⁷⁴ Con tale termine si intende un qualunque stato della struttura che precede un evento rispetto al quale ci si vuole cautelare.⁷⁵ Gli stati limite sono distinti essenzialmente in due categorie, come illustrato nel seguito.

1. **Stati limite ultimi.** Sono gli stati che corrispondono al collasso della struttura e riguardano, per esempio:
 - (a) la perdita di equilibrio della struttura come corpo rigido;
 - (b) lo sviluppo di deformazioni plastiche localizzate che innescano un moto rigido delle parti connesse;
 - (c) la rottura oppure la perdita di stabilità della struttura o di parti di essa.

⁷⁴Gli eurocodici che, in obbedienza alla direttiva CEE 89/106 (modificata dalla direttiva CEE 93/68 e dal regolamento CE n. 1882/2003), devono diventare la base dell'ordinamento normativo ufficiale italiano nell'ambito dell'ingegneria strutturale, contemplano la sola verifica di sicurezza basata sugli stati limite. La normativa italiana attualmente in vigore, sostanzialmente adeguata a tale direttiva, è stabilita dal decreto ministeriale 14 gennaio 2008 "Nuove norme tecniche per le costruzioni" (Supplemento ordinario n. 30 alla Gazzetta Ufficiale n. 29 del 4 febbraio 2008). Tale normativa cita esplicitamente gli eurocodici quali documenti coerenti con i suoi principi, fatto salvo ciò che non sia diversamente specificato nella normativa stessa.

⁷⁵Le verifiche di resistenza basate sul concetto di stato limite sono oggetto dell'eurocodice UNI EN 1990:2006 (*Eurocodice - Criteri generali di progettazione strutturale*), approvato nel 2002 e aggiornato nel 2005. Tale eurocodice stabilisce i principi e i requisiti per la sicurezza, l'esercizio e la durabilità delle strutture, descrive i criteri generali per la loro progettazione e verifica e fornisce le linee guida per i correlati aspetti di affidabilità strutturale.

2. **Stati limite di servizio o di esercizio.** Sono gli stati che corrispondono alla perdita di funzionalità della struttura, per esempio come conseguenza di deformazioni eccessive, senza che ne sia messa in pericolo la statica. Gli stati limite di servizio possono riguardare, tra l'altro:

- (a) deformazioni e spostamenti eccessivi che causano malfunzionamenti di macchine oppure la rottura di elementi non strutturali od anche un aspetto della struttura non accettabile;
- (b) vibrazioni eccessive con conseguente disagio per le persone oppure danneggiamento e mancanza di funzionalità della struttura;
- (c) danneggiamenti di vario tipo (tra cui la fessurazione) che non conducono di per se stessi al collasso ma influiscono sull'aspetto, la funzionalità e la durabilità della struttura.

Una struttura è giudicata affidabile nei confronti di un particolare stato limite (ultimo o di servizio) se le azioni che agiscono su di essa, eventualmente amplificate da opportuni *coefficienti di sicurezza*,⁷⁶ provocano effetti ad un livello inferiore a quelli che si hanno in corrispondenza del dato stato limite, effetti valutati mediante la scelta di un opportuno modello meccanico, alcuni parametri del quale saranno eventualmente amplificati oppure ridotti da ulteriori coefficienti di sicurezza. I valori dei coefficienti di sicurezza utilizzati dipendono dalla più o meno grande importanza o pericolosità o altro del fattore oggetto di ampliamento (o di riduzione).⁷⁷ Senza entrare nei dettagli, la verifica di sicurezza così tratteggiata si compone quindi, in generale, delle diverse fasi illustrate nel seguito.

1. **Analisi delle azioni agenti sulla struttura.**⁷⁸ Come già detto, ogni azione agente sarà eventualmente amplificata da un opportuno coeffi-

⁷⁶Safety factors nella letteratura inglese.

⁷⁷Gli eurocodici usano il termine *coefficienti parziali*, da cui il nome *metodo dei coefficienti parziali* per indicare tale metodo di verifica. L'aggettivo "parziale" sottolinea il fatto che la sicurezza offerta da uno di tali coefficienti è parziale, cioè riguarda il solo fattore a cui il coefficiente è riferito. Il metodo è introdotto nell'eurocodice UNI EN 1990:2006, già citato. Negli eurocodici UNI EN 1992-1-1:2015 e UNI EN 1993-1-1:2014, già citati, tale metodo viene applicato al caso particolare delle strutture in calcestruzzo e di quelle di acciaio rispettivamente. Negli eurocodici i coefficienti parziali sono indicati con la lettera greca γ .

⁷⁸Le azioni agenti su strutture generiche sono oggetto delle norme europee EN 1991-1, prima parte dell'eurocodice 1, insieme di sei norme che dal 2002 al 2005 sono giunte alla loro versione definitiva. Di queste, citiamo le norme UNI EN 1991-1-1:2004 (*Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture - Parte 1-1: Azioni in generale - Pesi per unità di volume, pesi propri*

ciente di sicurezza. Nel caso in cui più azioni variabili nel tempo agiscano simultaneamente, queste saranno eventualmente ridotte da opportuni *coefficienti di combinazione*⁷⁹ per tenere conto che tali azioni non agiranno tutte contemporaneamente al loro massimo valore.⁸⁰

2. **Scelta del modello meccanico della struttura.** La risposta del modello meccanico dipenderà dalle proprietà dei materiali impiegati (per esempio dai moduli di elasticità), proprietà che andranno quindi modellate ed eventualmente ridotte tramite opportuni coefficienti di sicurezza, uno per ogni proprietà.⁸¹

3. **Scelta delle variabili per la valutazione della sicurezza.** Tali variabili andranno valutate sia in corrispondenza delle azioni agenti sulla struttura che in corrispondenza dello stato limite considerato.⁸²

◇ ◇ ◇

Tensioni ammissibili. Le verifiche di sicurezza basate sul concetto di stati limite e sull'uso di più coefficienti di sicurezza rappresentano il superamento del *metodo delle tensioni ammissibili*,⁸³ ormai inadeguato a fornire un quadro concettuale coerente al problema delle verifiche di sicurezza a seguito del notevole progresso tecnico-scientifico registratosi negli ultimi decenni nel campo delle costruzioni in generale e di quelle civili in particolare. Infatti, non solo il metodo delle tensioni ammissibili è nato in un contesto in cui veniva quasi esclusivamente utilizzato

e sovraccarichi per gli edifici), UNI EN 1991-1-3:2015 (*Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture - Parte 1-3: Azioni in generale - Carichi da neve*) e infine UNI EN 1991-1-4:2010 (*Eurocodice 1 - Azioni sulle strutture - Parte 1-4: Azioni in generale - Azioni del vento*).

Le azioni sismiche, data la loro grande importanza, sono oggetto delle norme EN 1998 appositamente dedicate a tale argomento e costituenti l'eurocodice 8, composto di sei norme rese definitive dal 2004 al 2006 (la seconda delle quali aggiornata nel 2009). In particolare, la norma UNI EN 1998-1:2013 (*Eurocodice 8 - Progettazione delle strutture per la resistenza sismica - Parte 1: Regole generali, azioni sismiche e regole per gli edifici*) stabilisce i requisiti fondamentali che devono soddisfare gli edifici e le opere di ingegneria civile in zona sismica e regola la modellizzazione delle azioni sismiche.

⁷⁹Indicati negli eurocodici con la lettera greca ψ .

⁸⁰I valori che così si ottengono sono detti dagli eurocodici *valori di progetto delle azioni*.

⁸¹Si originano in tal modo quelli che gli eurocodici chiamano *valori di progetto delle proprietà dei materiali*. Un analogo discorso riguarda la modellizzazione dei dati geometrici del modello meccanico con la conseguente definizione dei *valori di progetto dei dati geometrici*.

⁸²Gli eurocodici indicano i valori così ottenuti *valori di progetto degli effetti delle azioni* e, rispettivamente, *resistenze di progetto*, e, naturalmente, dispongono di eseguire la verifica di sicurezza confrontando i valori di progetto degli effetti delle azioni con le resistenze di progetto.

⁸³Tensione ammissibile si rende con *admissible load* nella letteratura inglese.

quale modello di risposta del materiale quello elastico-lineare, ma la sua stessa definizione è strettamente connessa a tale tipo di risposta. L'utilizzo, sempre più frequente negli ultimi tempi, di modelli non lineari ha fatto sì che tale metodo dovesse essere di continuo adattato, con interventi ad hoc, al fine della sua applicazione a situazioni che non gli sono proprie, con la conseguenza di farlo apparire sempre più insoddisfacente e arbitrario.

Il metodo delle tensioni ammissibili pone l'accento sul raggiungimento del limite di snervamento, che viene visto come una evenienza da evitarsi al fine del buon funzionamento di una struttura. Uno stato tensionale è giudicato accettabile se appartiene ad un *dominio di ammissibilità*. D'altronde una struttura può giungere a collasso perché l'equilibrio che sussiste sotto l'azione delle forze applicate diventa instabile, quando ancora le tensioni sono ben al disotto del limite di snervamento. Per giudicare la *stabilità dell'equilibrio*⁸⁴ di una struttura non si può prescindere dalle forze applicate e dalla sua geometria. Ancora, se il materiale che compone la struttura è duttile come, per esempio, l'acciaio, imporre al materiale di non fuoriuscire dal dominio elastico può essere molto penalizzante nei confronti delle reali capacità di resistenza della struttura. Non solo, ma esistono casi nei quali cautelarsi nei confronti degli stati tensionali al limite di snervamento può non essere sufficiente a causa di forti non linearità del legame costitutivo che rende non significativo il coefficiente di sicurezza.

È quindi evidente che il metodo di verifica basato sugli stati limite affronta il problema in modo più scientifico, introducendo da una parte il concetto di stato limite, indipendente dalla modellizzazione della risposta del materiale, e dall'altra parte dando il giusto peso a tutto ciò che influenza tale calcolo con un uso coerente di vari coefficienti di sicurezza. Il metodo delle tensioni ammissibili risulta invece limitato dal fatto che rappresenta, dal punto di vista degli stati limite, il solo *stato limite di elasticità*, e dalla circostanza che tutto ciò che interviene nel calcolo viene pesato dall'unico coefficiente di sicurezza che definisce la tensione ammissibile.

◇ ◇ ◇

⁸⁴ *Stability of equilibrium* nella letteratura inglese.

ANALISI DELLA TENSIONE

5.1 Tensore degli sforzi

L'ipotesi di Cauchy¹ assicura che in corrispondenza di un generico punto di un solido la tensione interna è funzione della normale \mathbf{n} alla superficie su cui la tensione stessa si esercita. Se con \mathcal{U} si indica l'insieme dei versori e con \mathcal{V} l'insieme dei vettori, la tensione nell'intorno di un punto è rappresentata da una funzione del tipo:

$$\mathbf{t}: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}, \quad \mathbf{n} \mapsto \mathbf{t}(\mathbf{n}). \tag{5.1}$$

Si noti che ad una generica giacitura nell'intorno di un punto, di area elementare dA e di normale \mathbf{n} , è possibile associare il *vettore area* $d\mathbf{A} = dA \mathbf{n}$ (fig. 5.1).

Ne risulta che l'estensione omogenea di grado uno della funzione (5.1) a tutto lo spazio vettoriale \mathcal{V} può porsi nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}, \quad d\mathbf{A} \mapsto \boldsymbol{\sigma}(d\mathbf{A}) = d\mathbf{A} \mathbf{t}(\mathbf{n}), \tag{5.2}$$

dove al generico vettore area elementare $d\mathbf{A}$ corrisponde la forza elementare $d\mathbf{F} = d\mathbf{A} \mathbf{t}$ che globalmente si esercita sulla giacitura di area dA e di normale \mathbf{n} (fig. 5.1).

¹Cfr. par. 3.2.7 p. 95.

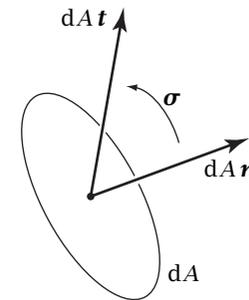


Figura 5.1: Tensore degli sforzi

5.1.1 Esistenza del tensore degli sforzi

Si mostrerà nel seguito che la funzione (5.2) è un tensore doppio che, rappresentando lo sforzo nell'intorno di un punto, viene detto *tensore degli sforzi* oppure *tensore di tensione*.² Poiché il concetto di sforzo è stato introdotto per la prima volta da Cauchy,³ tale tensore è anche universalmente noto come *tensore degli sforzi di Cauchy*.⁴

²*Stress tensor* nella letteratura inglese.

³Il lavoro di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) sull'argomento fu presentato all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1822 ed è riportato nella memoria "De la Pression ou tension dans un corps solide" contenuta alle pp. 60-78 del Vol. 2 dei suoi *Exercices de mathematique*.

⁴*Cauchy stress tensor* nella letteratura inglese.

Per dimostrare che la (5.2) definisce un tensore del secondo ordine occorre mostrare che la funzione σ , già omogenea di grado uno per definizione, è anche additiva ovvero sia che vale la relazione:

$$\sigma(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \sigma(\mathbf{v}_1) + \sigma(\mathbf{v}_2), \quad \text{per ogni } \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}. \quad (5.3)$$

Dimostrazione. A tale scopo si costruisca, nell'intorno del punto P in cui la tensione è rappresentata da σ , un solido prismatico a base triangolare con i lati del triangolo perpendicolari ai due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e alla loro somma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ e di altezza pari alla lunghezza b del lato perpendicolare a \mathbf{v} (fig. 5.2).

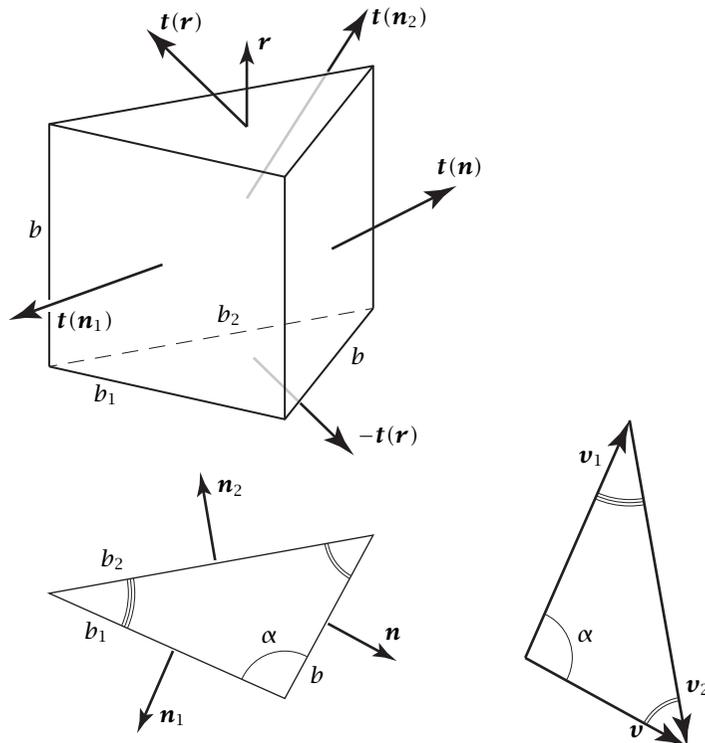


Figura 5.2: Esistenza del tensore degli sforzi

Il triangolo di base del prisma e il triangolo di lati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e \mathbf{v} sono simili

e quindi:

$$\frac{b_1}{b} = \frac{|\mathbf{v}_1|}{|\mathbf{v}|}, \quad \frac{b_2}{b} = \frac{|\mathbf{v}_2|}{|\mathbf{v}|}, \quad (5.4)$$

dove b_1 e b_2 sono le lunghezze dei lati della base del prisma perpendicolari a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 rispettivamente. Inoltre i versori normali \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 e \mathbf{n}_2 uscenti dalle facce laterali del prisma valgono:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}, \quad \mathbf{n}_1 = -\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}, \quad \mathbf{n}_2 = -\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}. \quad (5.5)$$

Supponendo che tutte le funzioni che intervengono siano continue nell'intorno del punto P , il bilancio della quantità di moto del prisma si scrive:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n})b^2 + \mathbf{t}(\mathbf{n}_1)bb_1 + \mathbf{t}(\mathbf{n}_2)bb_2 + o(b^2) = \mathbf{0}, \quad (5.6)$$

dove tutti i valori di tensione sono calcolati nel punto P .⁵

Per dedurre la (5.6) si è tenuto conto che le due facce parallele hanno normale uscente di verso opposto e che quindi la somma dei due valori di tensione valutati entrambi nel punto P è nulla e si è considerato che il volume del prisma, dominio di integrazione per la forza di volume e la derivata della quantità di moto, è dell'ordine di b^3 .

Dividendo il bilancio (5.6) per b^2 , facendo il limite per $b \rightarrow 0$, tenendo conto delle (5.4) e (5.5) e moltiplicando per $|\mathbf{v}|$ si ottiene:

$$\mathbf{t}\left(\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)|\mathbf{v}| + \mathbf{t}\left(-\frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}\right)|\mathbf{v}_1| + \mathbf{t}\left(-\frac{\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_2|}\right)|\mathbf{v}_2| = \mathbf{0}. \quad (5.8)$$

Tenendo infine conto della legge di azione e reazione⁶ e della definizione (5.2) di σ si ottiene la (5.3), come volevasi dimostrare. ■

⁵Per via del teorema della media l'integrale di una funzione continua f su un dominio compatto D soddisfa il seguente sviluppo asintotico:

$$\int_D f \, dD = f(P)D + o(D), \quad \text{per } D \rightarrow P. \quad (5.7)$$

Si ricordi infatti che il teorema della media afferma che l'integrale di una funzione continua in un dominio compatto si esprime come prodotto del valore \bar{f} che la funzione assume in un punto particolare del dominio, detto *valore medio*, moltiplicato per la misura del dominio D . Risulta quindi:

$$\lim_{D \rightarrow P} \frac{1}{D} \left(\int_D f \, dD - f(P)D \right) = \lim_{D \rightarrow P} \frac{1}{D} (\bar{f}D - f(P)D) = \lim_{D \rightarrow P} (\bar{f} - f(P)) = 0,$$

in accordo con la (5.7). Si veda per esempio Gilardi (1996, par. 7, pp. 457-459).

⁶Cfr. la (3.107), p. 95.

Equazione di Cauchy. In virtù di tale risultato, la tensione \mathbf{t} agente sulla giacitura di normale \mathbf{n} è fornita dall'equazione tensoriale:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \tag{5.9}$$

detta *equazione di Cauchy*.

Le componenti normale σ_n e tangenziale τ_n della tensione \mathbf{t} che agisce su una giacitura di normale \mathbf{n} possono quindi mettersi nella forma:⁷

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \sigma_n \mathbf{n}. \tag{5.10}$$

Se poi \mathbf{r} è una direzione orientata sulla giacitura di normale \mathbf{n} e \mathbf{r} è il suo versore equiverso, la componente tangenziale τ_{rn} nella direzione \mathbf{r} vale:

$$\tau_{rn} = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}. \tag{5.11}$$

Condizione al contorno sulle forze. Su una qualunque giacitura tangente al contorno $\partial\mathcal{B}$ del solido agisce la forza esterna per unità di superficie \mathbf{p} ⁸ (fig. 5.3). Il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ che emerge sul contorno $\partial\mathcal{B}$ del solido

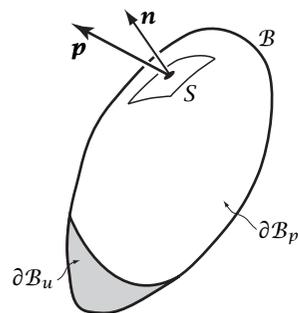


Figura 5.3: Condizione al contorno sulle forze

deve generare la predetta forza, che coinciderà quindi con la tensione \mathbf{t} fornita dalla (5.9) sotto la condizione che \mathbf{n} sia la normale al contorno del solido. Sulla parte di superficie vincolata⁹ $\partial\mathcal{B}_u$ la forza \mathbf{p} rappresenta la

reazione del vincolo incognita, mentre sulla parte restante $\partial\mathcal{B}_p$ del contorno rappresenta in generale una forza nota, che al più dipenderà dalla configurazione del corpo e quindi dal moto se la configurazione varia nel tempo. Sulla parte $\partial\mathcal{B}_p$ del contorno si potrà quindi in generale imporre la seguente *condizione al contorno sulle forze*:¹⁰

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \text{su } \partial\mathcal{B}_p. \tag{5.12}$$

Se $\mathbf{p} = 0$, la condizione al contorno sulle forze è *omogenea*.

◇ ◇ ◇

La relazione (5.12) è a volte citata quale *equazione di equilibrio al contorno*,¹¹ esprimendo il bilancio di un opportuno volume elementare individuato dall'intersezione tra il corpo e un cubo di lato elementare e tale che una delle facce sia tangente al contorno del corpo nel dato punto con normale uscente dal cubo coincidente con la normale uscente dal corpo.¹² Se b è la misura del lato del cubo elementare, a meno di termini dell'ordine di $o(b^2)$ sul contorno del corpo agisce la forza $b^2 \mathbf{p}$, sulla faccia parallela al piano tangente la $-b^2 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$, le coppie interne di facce parallele si fanno equilibrio e le forze di volume e quelle di inerzia sono nulle per cui ne discende immediatamente la (5.12).

◇ ◇ ◇

5.1.2 Semplificazioni dovute alla teoria del primo ordine

Nell'analizzare la tensione nell'intorno di un punto non è finora entrata in gioco in alcun modo l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni. Il tensore degli sforzi è stato definito e le equazioni di bilancio, in forma integrale oppure locale che sia, sono state scritte nella configurazione deformata, cioè nella configurazione che il corpo assume in seguito all'applicazione delle forze esterne, configurazione che è in generale funzione del tempo. Sia che dipenda dal tempo oppure no, come nell'importante caso della statica, la configurazione deformata è in generale una delle incognite dei problemi che si vogliono risolvere nell'ambito della meccanica dei solidi. Ne risulta allora una grande semplificazione se la configurazione deformata può essere confusa con una opportuna configurazione

¹⁰ *Traction boundary condition* nella letteratura inglese.

¹¹ Esprimendo un bilancio di sole forze, la condizione (5.12) è formalmente la stessa sia in statica che in dinamica, il che rende lecito l'uso del termine equilibrio in luogo di bilancio.

¹² Similmente al volume elementare di fig. 3.28, p. 96, utilizzato per dimostrare l'ipotesi Cauchy.

⁷Cfr. par. 3.2.7 p. 96.

⁸Cfr. par. 3.2.5 p. 92.

⁹Cfr. par. 3.1.1 p. 101.

di riferimento indeformata nota a priori. In tal caso il tensore degli sforzi di Cauchy può essere approssimativamente definito, come già la funzione di deformazione oppure il campo degli spostamenti, nella configurazione di riferimento nota. Analogamente le equazioni di bilancio saranno approssimativamente scritte nella stessa configurazione di riferimento e quindi gli integrali riguarderanno volumi e contorni di volumi indeformati così come l'equazione del moto introdotta nel seguito¹³ risulterà approssimativamente una equazione differenziale definita nella configurazione indeformata.

◇ ◇ ◇

Tensori materiali di sforzo. Nei casi in cui non sia accettabile approssimare la configurazione deformata con quella indeformata è ugualmente possibile descrivere la tensione nell'intorno di un punto di un solido tramite un campo tensoriale definito nella configurazione di riferimento, distinto dal tensore degli sforzi di Cauchy. In tal modo tutte le funzioni incognite del problema, compresa la tensione, hanno dominio noto, circostanza che rende più agevole ottenere le soluzioni dei problemi.

Utilizzando la formula di trasformazione delle giaciture dovuta alla deformazione¹⁴ risulta possibile definire, nell'intorno di un punto materiale X , il tensore doppio \mathbf{P} , detto *primo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi*,¹⁵ che alla generica giacitura indeformata $dA_0 N$ nell'intorno del dato punto associa la forza elementare $dA t$ che agisce sulla corrispondente giacitura deformata $dA n$ (fig. 5.4):

$$\mathbf{P} (dA_0 N) = dA t. \quad (5.13)$$

Poiché $dA t = \boldsymbol{\sigma} (dA n) = \boldsymbol{\sigma} (J \mathbf{F}^{-T} (dA_0 N))$, dove \mathbf{F} è il gradiente della deformazione, risulta infine:

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}. \quad (5.14)$$

Se si introduce nel discorso la forza interna t^* per unità di area indeformata, quindi tale che:

$$dA_0 t^* = dA t, \quad (5.15)$$

dalla (5.13) consegue la versione materiale dell'equazione di Cauchy (5.9):

$$\mathbf{P} N = t^*. \quad (5.16)$$

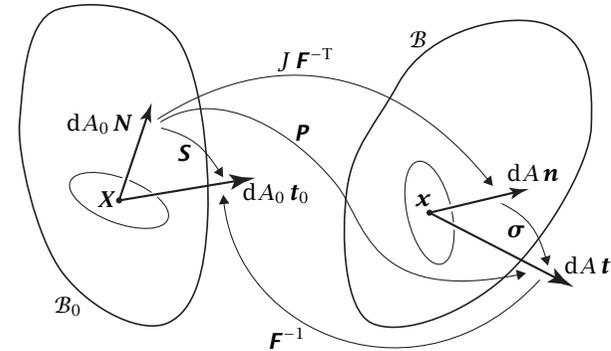


Figura 5.4: Tensori materiali di sforzo

Se poi il vettore spaziale $dA t$ è portato nella configurazione indeformata utilizzando la formula di trasformazione degli elementi di linea¹⁶ risulta definito un *vettore materiale di tensione* t_0 tale che:

$$dA_0 t_0 = \mathbf{F}^{-1} (dA t), \quad t_0 = \mathbf{F}^{-1} t^*. \quad (5.17)$$

È allora possibile definire, ancora nell'intorno di un punto materiale X , il tensore doppio \mathbf{S} , detto *secondo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi*,¹⁷ che alla generica giacitura indeformata $dA_0 N$ nell'intorno del dato punto associa la forza elementare $dA_0 t_0$ definita dalla (5.17). Risulta quindi:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}. \quad (5.18)$$

Si noti che il vettore materiale di tensione definito dalla (5.17), così come il conseguente secondo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi, non ha nessun particolare significato fisico se non quello che deriva dalla sua, arbitraria, definizione. Si noti che al tensore di Cauchy trasposto corrisponde il secondo tensore di Piola-Kirchhoff trasposto:

$$\mathbf{S}^T = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{F}^{-T}, \quad (5.19)$$

per cui alla, eventuale, simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$ corrisponde quella di \mathbf{S} . Poiché per definizione è $\mathbf{S} (dA_0 N) = dA_0 t_0$, la seconda forma materiale dell'equazione di Cauchy risulta essere:

$$\mathbf{S} N = t_0. \quad (5.20)$$

◇ ◇ ◇

¹³cfr. par. 5.2.2, p. 128.

¹⁴Cfr. la (3.19), p. 73.

¹⁵*First Piola-Kirchhoff stress tensor*, a volte detto anche *lagrangian stress tensor*, nella letteratura inglese.

¹⁶Cfr. la (3.10), p. 71.

¹⁷*Second Piola-Kirchhoff stress tensor* nella letteratura inglese.

5.1.3 Componenti del tensore degli sforzi

Dato un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Oxyz$ e la corrispondente base ortonormale \mathbf{e}_i , le componenti σ_{ij} del tensore degli sforzi di Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ risultano:¹⁸

$$\sigma_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_j, \quad (5.21)$$

dove $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_j$ non è altro che la tensione che agisce sulla giacitura di normale \mathbf{e}_j . Ne consegue che le componenti del vettore di tensione che agisce sulla giacitura di normale il j -esimo asse coordinato definiscono la colonna j -esima della matrice delle componenti di $\boldsymbol{\sigma}$. Delle tre componenti di $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_j$ l'una, quella nella direzione dell'asse j -esimo ortogonale alla giacitura, non è altro che la componente normale di tensione σ_j mentre le altre due, nel piano della giacitura di normale \mathbf{e}_j , sono le componenti tangenziali τ_{ij} ($i \neq j$) della stessa tensione.¹⁹ Si noti che il quadrato del modulo della tensione tangenziale totale che agisce sulla giacitura di normale j vale:

$$|\boldsymbol{\tau}_j|^2 = \sum_{i \neq j} \tau_{ij}^2. \quad (5.22)$$

Stante il significato fisico delle componenti ora descritte, ne risulta la seguente rappresentazione algebrica di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}. \quad (5.23)$$

Tutte e nove le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$ sono illustrate in fig. 5.5, dove, nell'intorno del punto P in cui $\boldsymbol{\sigma}$ descrive la tensione, è stato tracciato un cubo avente le facce parallele ai piani coordinati. Come detto, su ogni faccia del cubo agiscono tre componenti di tensione, una normale e due tangenziali. Le componenti di $\boldsymbol{\sigma}$ sono quelle relative alle facce di normali uscenti concordi con i versi degli assi.

Dalla (5.23) segue immediatamente la rappresentazione in componenti dell'equazione di Cauchy (5.9):

$$\begin{cases} t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ t_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z, \\ t_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \end{cases} \quad (5.24)$$

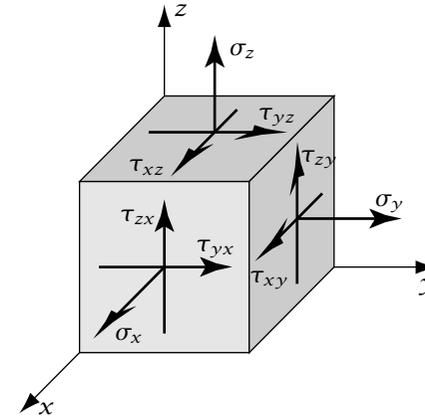


Figura 5.5: Stato di sforzo nell'intorno del punto

dove t_x, t_y e t_z sono le componenti della tensione \mathbf{t}_n agente sulla giacitura di versore normale \mathbf{n} e n_x, n_y e n_z sono le componenti di \mathbf{n} , ovvero sia i coseni direttori dell'asse normale alla giacitura stessa. Si noti che tre facce parallele ai piani coordinati ed una faccia di normale \mathbf{n} individuano nell'intorno del punto P considerato un tetraedro elementare, detto *tetraedro di Cauchy* (fig. 5.6).²⁰

◇ ◇ ◇

Significato fisico delle componenti dell'equazione di Cauchy. Si vuole mostrare nel seguito che le tre equazioni scalari (5.24) si possono interpretare quali componenti scalari della equazione di bilancio della quantità di moto, in direzione degli assi x, y e z rispettivamente, del tetraedro di Cauchy.

Dimostrazione. Sulle tre facce di normali $-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y$ e $-\mathbf{e}_z$ agiscono rispettivamente le tre tensioni $-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_x, -\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_y$ e $-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_z$ di componenti:

$$\{-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_x\} = \begin{Bmatrix} -\sigma_x \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \end{Bmatrix}, \quad \{-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_y\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xy} \\ -\sigma_y \\ -\tau_{zy} \end{Bmatrix}, \quad \{-\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_z\} = \begin{Bmatrix} -\tau_{xz} \\ -\tau_{yz} \\ -\sigma_z \end{Bmatrix}.$$

Inoltre, se A è l'area della faccia di normale \mathbf{n} allora da semplici considerazioni geometriche consegue che le aree A_x, A_y e A_z delle tre facce di normali $-\mathbf{e}_x, -\mathbf{e}_y$

¹⁸Cfr. la (1.80), p. 28.

¹⁹cfr. par. 3.2.7, p. 96.

²⁰Cauchy tetrahedron nella letteratura inglese.

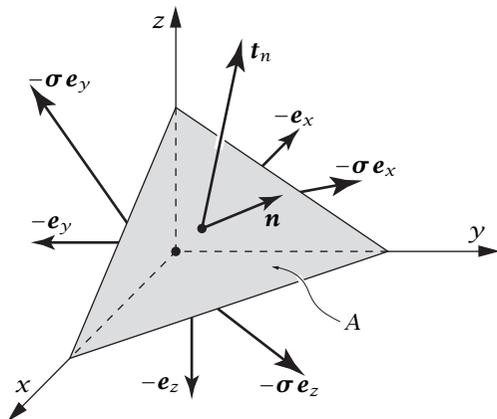


Figura 5.6: Tetraedro di Cauchy

e $-e_z$ rispettivamente valgono:

$$A_x = A n_x, \quad A_y = A n_y, \quad A_z = A n_z.$$

Le tre equazioni scalari di bilancio del tetraedro elementare, a meno di termini dell'ordine di $o(A)$, risultano allora:²¹

$$\begin{cases} t_x A - \sigma_x A_x - \tau_{xy} A_y - \tau_{xz} A_z = 0 \\ t_y A - \tau_{yx} A_x - \sigma_y A_y - \tau_{yz} A_z = 0 \\ t_z A - \tau_{zx} A_x - \tau_{zy} A_y - \sigma_z A_z = 0 \end{cases}$$

Dividendo per A e mandando al limite per $A \rightarrow 0$ si ottengono le (5.24), come volevasi dimostrare. ■

◇ ◇ ◇

5.2 Equazioni di bilancio locali

Le equazioni di bilancio in forma integrale²² devono valere per ogni volume V , sufficientemente regolare, estraibile dalla configurazione deformata \mathcal{B} del corpo, e riguardano quindi parti estese del corpo (fig. 5.7). Nel se-

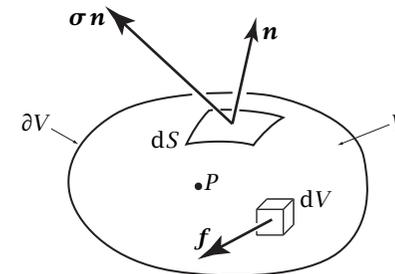


Figura 5.7: Volume intorno di un punto

guito si vogliono scrivere, se possibile, le equazioni di bilancio in forma locale, cioè facendo intervenire al più i valori in un punto sia dei campi che intervengono nel bilancio che eventualmente dei loro incrementi. Nel caso intervengano gli incrementi dei campi le equazioni saranno di tipo differenziale, in caso contrario saranno delle semplici condizioni sui campi stessi. È evidente che le equazioni di bilancio saranno localizzabili solo nel caso in cui i campi siano sufficientemente regolari e in generale più regolari di quanto richiesto dalle equazioni di bilancio integrali, in sintonia col fatto che le condizioni di integrabilità sono meno forti di quelle di derivabilità. In ogni caso la localizzazione richiede almeno la continuità dei campi nel punto e l'esistenza e la continuità degli incrementi che dovessero intervenire. Si noti che comunque resta sempre aperta la possibilità di trattare a parte la presenza di eventuali discontinuità, sia che queste riguardino i campi che i loro incrementi, e in tal caso le equazioni di bilancio locali resteranno valide, salvo che nei punti di discontinuità.

Volendo quindi che i campi siano continui nel punto P oggetto di indagine ed essendo fuori di dubbio che la presenza di una forza concentrata F in un punto P di \mathcal{B} provoca una discontinuità nel campo di sforzo σ , poiché al limite per $V \rightarrow P$ di un volume V intorno del punto la tensione sul contorno dello stesso volume deve diventare infinita, si prescindere dalla presenza di forze concentrate nel punto stesso. Ne consegue che le equazioni di bilancio per un volume V che sia un intorno di P sufficientemente ristretto si possono scrivere nella forma:

$$\int_{\partial V} \sigma n \, dS + \int_V (f - \rho \dot{v}) \, dV = 0, \tag{5.25a}$$

²¹Cfr. la nota 5, p. 122.

²²Cfr. le (3.100) e (3.101) di cui al par. 3.2.6, p. 93.

$$\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS + \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV = \mathbf{0}, \quad (5.25b)$$

avendo inoltre utilizzato l'equazione di Cauchy (5.9).

5.2.1 Divergenza del tensore degli sforzi

Allo scopo di localizzare le equazioni di bilancio, occorre innanzitutto trasformare gli integrali di superficie che compaiono nelle dette equazioni in integrali di volume. Si consideri allora la funzione di dominio $V \rightarrow \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS$ che al generico volume V associa l'integrale del vettore $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ sulla sua superficie di contorno ∂V , integrale che rappresenta la forza totale agente sul contorno ∂V del volume stesso. La forza totale agente sul contorno ∂V di V per unità di volume definisce un campo vettoriale detto *divergenza*²³ di $\boldsymbol{\sigma}$ e indicato con $\text{div } \boldsymbol{\sigma}$:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \lim_{V \rightarrow p} \frac{\int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS}{V}. \quad (5.26)$$

Se la divergenza di $\boldsymbol{\sigma}$ esiste risulta allora:

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS = \int_V \text{div } \boldsymbol{\sigma} \, dV, \quad (5.27)$$

espressione citata in letteratura quale *teorema della divergenza di un campo tensoriale*.²⁴

Esistenza e componenti della divergenza di un campo tensoriale. Si mostrerà nel seguito che $\text{div } \boldsymbol{\sigma}$ esiste e che le sue componenti in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $Oxyz$ valgono:

$$(\text{div } \boldsymbol{\sigma})_i = \sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}, \quad \{\text{div } \boldsymbol{\sigma}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \end{array} \right\}. \quad (5.28)$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione si farà uso della seguente formula,

²³Divergence nella letteratura inglese.

²⁴Divergence theorem of tensor field nella letteratura inglese.

spesso citata in letteratura quale *teorema di Green*.²⁵

$$\int_V \frac{\partial f}{\partial x_i} \, dV = \int_{\partial V} f n_i, \quad (5.29)$$

dove f è un qualunque campo scalare sufficientemente regolare e n_i è la componente i -esima, nella base ortonormale indotta dal sistema $Oxyz$, del versore \mathbf{n} normale alla superficie ∂V di contorno.

Ciò premesso si scriva il primo membro della (5.27) ricostruendo il vettore $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ per il tramite delle sue componenti. Sfruttando la linearità degli operatori somma e integrale si ottiene, come volevasi dimostrare:²⁶

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS &= \int_{\partial V} \sum_{ij} (\sigma_{ij} n_j) \mathbf{e}_i \, dS = \sum_{ij} \left(\int_{\partial V} \sigma_{ij} n_j \, dS \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{ij} \left(\int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \, dV \right) \mathbf{e}_i = \int_V \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \, dV, \end{aligned}$$

dove il teorema di Green è stato utilizzato per trasformare il generico integrale di superficie che compare nella sommatoria di cui al terzo membro della uguaglianza. ■

Si noti che le componenti di $\text{div } \boldsymbol{\sigma}$ non sono altro che le divergenze delle righe della matrice delle componenti di $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_i = \text{div} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{e}_i), \quad (5.30)$$

relazione che definisce implicitamente la divergenza di un campo tensoriale una volta che sia definita quella di un campo vettoriale, dato che la base \mathbf{e}_i è generica.

Divergenza del prodotto di un campo tensoriale trasposto per un campo vettoriale. Dato un qualunque campo vettoriale \mathbf{v} , vale la relazione:

$$\text{div} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) = \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \mathbf{v}, \quad (5.31)$$

dove l'operatore divergenza al primo membro agisce su un campo vettoriale fornendo un campo scalare mentre quello al secondo membro agisce

²⁵Si veda per esempio Gilardi (1996, esercizio 2, p. 576), dove il teorema di Green è citato quale banale conseguenza del *teorema della divergenza di un campo vettoriale*, descritto e dimostrato alle pp. 574-582.

²⁶Cfr. la (1.83), p. 29.

su un campo tensoriale fornendo un campo vettoriale e dove il primo prodotto scalare a secondo membro è un prodotto scalare di vettori mentre il secondo di tensori. Il teorema della divergenza di un campo vettoriale²⁷ permette di scrivere:

$$\int_V \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) \, dV = \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS$$

e ne risulta allora l'importante relazione:

$$\int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, dS = \int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v}) \, dV. \quad (5.32)$$

Dimostrazione della (5.31). Infatti:²⁸

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v})_i = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ji} v_j) \\ &= \sum_{ij} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} v_j + \sum_{ij} \sigma_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \sum_j (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})_j v_j + \sum_{ij} \sigma_{ji} (\operatorname{grad} \mathbf{v})_{ji}, \end{aligned}$$

come volevasi dimostrare. ■

5.2.2 Equazione del moto

Utilizzando il teorema della divergenza (5.27), l'equazione di bilancio della quantità di moto (5.25a) di un generico volume V intorno di un punto regolare P (fig. 5.7, p. 126) si scrive:

$$\int_V (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV = \mathbf{0}. \quad (5.33)$$

²⁷Il teorema della divergenza di un campo vettoriale \mathbf{v} afferma che:

$$\int_{\partial V} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dV.$$

Si veda per esempio Gilardi (1996, p. 575).

²⁸La divergenza di un campo vettoriale \mathbf{v} può essere valutata per il tramite delle componenti relative ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali:

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Si veda per esempio Gilardi (1996, p. 151), dove tale formula è utilizzata per la definizione stessa di divergenza.

Poiché questa relazione deve valere per ogni volume V intorno del punto P , ne consegue l'*equazione del moto di Cauchy*²⁹ in corrispondenza dello stesso punto:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}. \quad (5.34)$$

Si noti che tale equazione richiede che le componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ siano continue con derivate prime continue. Comunque, per un campo di sforzo sufficientemente regolare la (5.34) è equivalente al bilancio della quantità di moto.

Nel caso statico risulta $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ e l'equazione del moto, detta in tal caso *equazione indefinita di equilibrio*,³⁰ diventa:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.35)$$

◇ ◇ ◇

Equazione materiale del moto. Tenendo conto della definizione (5.13) di primo tensore di Piola-Kirchhoff degli sforzi, l'equazione integrale (5.25a) di bilancio della quantità di moto si può scrivere nella seguente forma materiale:

$$\int_{\partial V_0} \mathbf{P} \mathbf{N} \, dS_0 + \int_{V_0} (\mathbf{f}_0 - \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}}) \, dV_0 = \mathbf{0}, \quad (5.36)$$

dove $\mathbf{f}_0 = J \mathbf{f}$ è la forza di volume per unità di volume indeformato, $\rho_0 = J \rho$ è la massa per unità di volume indeformato e tutti i campi sono definiti nella configurazione di riferimento, il che è sottolineato dall'aver espressamente usato il simbolo \mathbf{v}_{ref} che indica appunto il campo materiale delle velocità.³¹

Utilizzando il teorema della divergenza (cfr. par. 5.2.1, p. 127) nella (5.36) e localizzando il risultato si ottiene l'*equazione materiale del moto*:

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}}, \quad (5.37)$$

dove la lettera maiuscola del simbolo Div sottolinea il fatto che le operazioni differenziali sono fatte nella configurazione \mathcal{B}_0 indeformata del corpo. Nel caso statico la (5.37) diventa la seguente *equazione materiale indefinita di equilibrio*:

$$\operatorname{Div} \mathbf{P} + \mathbf{f}_0 = \mathbf{0}. \quad (5.38)$$

Per il principio di conservazione della massa, la massa specifica materiale ρ_0 è costante e risulta quindi:

$$\mathbf{q}_0 = \rho_0 \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}} = \overline{\rho_0 \dot{\mathbf{v}}_{\text{ref}}} = \dot{\mathbf{p}}_0, \quad (5.39)$$

²⁹*Cauchy's equation of motion* nella letteratura inglese.

³⁰*Local equilibrium equation* oppure *local force balance* nella letteratura inglese.

³¹Cfr. la (3.51), p. 83.

dove \mathbf{p}_0 e \mathbf{q}_0 sono le funzioni specifiche per unità di volume indeformato associate rispettivamente alla quantità di moto e alla sua derivata materiale.³² La (5.39) è in accordo col fatto che in generale deve risultare:

$$\mathbf{q}_0 = \lim_{V_0 \rightarrow P} \frac{\dot{\mathbf{P}}(V_0)}{V_0} = \lim_{V_0 \rightarrow P} \frac{\overline{\dot{\int_{V_0} \mathbf{p}_0 dV_0}}}{V_0} = \lim_{V_0 \rightarrow P} \frac{\int_{V_0} \dot{\mathbf{p}}_0 dV_0}{V_0} = \dot{\mathbf{p}}_0, \quad (5.40)$$

poiché il volume materiale V_0 è indipendente dal tempo. La (5.37) può dunque scriversi nella forma:

$$\mathbf{f}_0 = \dot{\mathbf{p}}_0 - \text{Div } \mathbf{P}. \quad (5.41)$$

◇ ◇ ◇

Semplificazioni dovute alla teoria del primo ordine. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni l'equazione di bilancio (5.34), così come quella di equilibrio (5.35), non vengono modificate, ma si suppongono semplicemente scritte approssimativamente nella configurazione indeformata \mathcal{B}_0 del corpo assumendo che i campi di tensione $\boldsymbol{\sigma}$, di forza \mathbf{f} , di velocità \mathbf{v} e di distribuzione di massa ρ siano approssimativamente dei campi materiali.

Per il principio di conservazione della massa, la massa specifica ρ è approssimativamente costante e risulta:

$$\mathbf{q} = \rho \dot{\mathbf{v}} \approx \dot{\rho \mathbf{v}} = \dot{\mathbf{p}}, \quad (5.42)$$

dove \mathbf{p} e \mathbf{q} sono le funzioni specifiche associate rispettivamente alla quantità di moto e alla sua derivata materiale.³³ La (5.42) è in accordo col fatto che in generale deve risultare:

$$\mathbf{q} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\dot{\mathbf{P}}(V)}{V} = \lim_{V \rightarrow P} \frac{\overline{\dot{\int_V \mathbf{p} dV}}}{V} \approx \lim_{V \rightarrow P} \frac{\int_V \dot{\mathbf{p}} dV}{V} = \dot{\mathbf{p}}, \quad (5.43)$$

poiché il volume V è approssimativamente indipendente dal tempo. La (5.34) può dunque scriversi nella forma:

$$\mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}} - \text{div } \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.44)$$

³²Cfr. par. 3.2.3 p. 89.

³³Cfr. par. 3.2.3 p. 89.

5.2.3 Simmetria del tensore degli sforzi

Si vuole dimostrare nel seguito che le equazioni di bilancio (5.25), che devono valere per ogni volume V estraibile dal corpo, sono equivalenti alla equazione del moto (5.34) e alla simmetria del tensore degli sforzi:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}, \quad (5.45)$$

che devono valere per ogni punto P del corpo.

Dimostrazione. Si consideri innanzitutto la condizione:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} dV = 0, \quad (5.46)$$

per ogni volume V estraibile dal corpo e per ogni campo tensoriale emisimmetrico costante \mathbf{W} . La localizzazione di tale condizione in un generico punto P richiede che la tensione $\boldsymbol{\sigma}$ soddisfi, in ogni punto del corpo, la condizione:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} = 0, \quad (5.47)$$

per ogni tensore emisimmetrico \mathbf{W} . Poiché se vale la (5.47) questa deve valere in particolare anche per la parte emisimmetrica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}}$ di $\boldsymbol{\sigma}$, ne consegue che:³⁴

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}} = (\boldsymbol{\sigma}_{\text{sym}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}} = 0,$$

ovverossia che³⁵ $\boldsymbol{\sigma}_{\text{skw}} = \mathbf{0}$. La condizione (5.47) implica quindi la simmetria del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$. Poiché l'implicazione inversa è immediata e la (5.47), come già detto, non è altro che la localizzazione della (5.46), ne risulta infine che la simmetria (5.45) del tensore degli sforzi è equivalente alla condizione (5.46).

Ciò premesso, dato un qualunque campo costante emisimmetrico \mathbf{W} nel volume V se ne consideri l'associato campo vettoriale:

$$\mathbf{v}_W : V \rightarrow \mathcal{V}, \quad P \mapsto \mathbf{v}_W(P) = \mathbf{W} \mathbf{r} = \mathbf{w} \times \mathbf{r}, \quad (5.48)$$

dove \mathbf{r} è il vettore posizione del punto P e \mathbf{w} il vettore assiale di \mathbf{W} .³⁶ Il gradiente di tale campo vettoriale è costante e coincide con \mathbf{W} :

$$\text{grad } \mathbf{v}_W = \mathbf{W}, \quad (5.49)$$

³⁴Cfr. la (1.136), p. 36.

³⁵Cfr. con quanto detto a p. 36.

³⁶Cfr. la (1.88), p. 29.

tenendo conto che l'incremento $\Delta \mathbf{v}_W$ che la funzione \mathbf{v}_W subisce in corrispondenza di un incremento $\Delta \mathbf{P}$ del punto vale:

$$\Delta \mathbf{v}_W = \mathbf{W} (\mathbf{r} + \Delta \mathbf{P}) - \mathbf{W} \mathbf{r} = \mathbf{W} \Delta \mathbf{P}.$$

Utilizzando nell'ordine la (5.49), la trasformazione (5.32), la definizione (5.48) e tenendo infine conto che l'assiale \mathbf{w} del campo tensoriale costante \mathbf{W} è a sua volta un campo vettoriale costante si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} \, dV &= \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \mathbf{v}_W \, dV \\ &= \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v}_W \, dS - \int_V \text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}_W \, dV \\ &= \left(\int_{\partial V} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, dS + \int_V \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV \right) \cdot \mathbf{w} \\ &\quad - \left(\int_V \mathbf{r} \times (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}}) \, dV \right) \cdot \mathbf{w}. \quad (5.50) \end{aligned}$$

Dato che il vettore assiale \mathbf{w} è un generico vettore, essendo la corrispondenza tra vettori e tensori emisimmetrici una biiezione, dalla (5.50) consegue che l'equazione del moto (5.34) implica l'equivalenza tra la simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$, espressa nella forma (5.46), e il bilancio del momento della quantità di moto (5.25b). Il fatto che l'equazione del moto sia equivalente al bilancio (5.25a) della quantità di moto (cfr. par. 5.2.2, p. 128) completa la dimostrazione. ■

Si noti che la sola condizione (5.46), e quindi la simmetria del tensore degli sforzi, non è equivalente al bilancio del momento della quantità di moto. Infatti se vale il bilancio del momento della quantità di moto, ma non l'equazione del moto, l'ultimo membro della (5.50) non si annulla e la simmetria non vale e viceversa, se vale la simmetria ma non l'equazione del moto dalla (5.50) si deduce che non vale il bilancio del momento della quantità di moto.

Teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali.³⁷

Date, nell'intorno di un punto P , due giaciture ortogonali tra loro (fig. 5.8), le componenti tangenziali sulle due giaciture, nelle direzioni ortogonali allo spigolo comune, sono uguali in modulo ed orientate entrambe verso lo spigolo comune oppure nella direzione opposta.

³⁷ Theorem of conjugate shear stresses nella letteratura inglese.

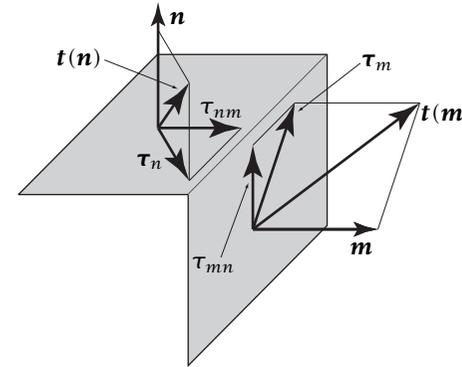


Figura 5.8: Reciprocità delle tensioni tangenziali

Dimostrazione. Siano allora \mathbf{n} e \mathbf{m} i versori normali alle due giaciture. Essendo \mathbf{m} ortogonale a \mathbf{n} , la componente in direzione \mathbf{n} della tensione $\mathbf{t}(\mathbf{m})$ che agisce sulla giacitura di normale \mathbf{m} rappresenta la componente tangenziale τ_{mn} mentre la componente in direzione \mathbf{m} della tensione $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ che agisce sulla giacitura di normale \mathbf{n} rappresenta la componente tangenziale τ_{nm} . Dato che, per la simmetria del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, si ha:

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}(\mathbf{m}) \cdot \mathbf{n}, \quad (5.51)$$

risulta:

$$\tau_{mn} = \tau_{nm}, \quad (5.52)$$

come volevasi dimostrare. ■

Si noti che la (5.51) vale anche se le due giaciture non sono ortogonali tra loro, mentre cade in difetto l'interpretazione (5.52). Infatti, se questo è il caso, le componenti:

$$t_{mn} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}), \quad t_{nm} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{m}), \quad (5.53)$$

non sono interpretabili quali componenti tangenziali e la (5.52) va sostituita con la relazione più generale:

$$t_{mn} = t_{nm}. \quad (5.54)$$

◇ ◇ ◇

Equazioni materiali di simmetria. Tenendo conto delle relazioni (5.18) e (5.14) tra i tensori di sforzo σ di Cauchy e \mathbf{P} e \mathbf{S} di Piola-Kirchhoff, l'equazione di bilancio locale (5.45) che impone la simmetria del tensore degli sforzi di Cauchy si può scrivere nelle seguenti due forme materiali:

$$\mathbf{S}^T = \mathbf{S}, \quad \mathbf{P}\mathbf{F}^T = \mathbf{P}\mathbf{F}^T. \quad (5.55)$$

◇ ◇ ◇

5.2.4 Componenti scalari delle equazioni locali di bilancio

Le componenti scalari dell'equazione del moto (5.34), tenendo conto della relazione (5.28) che fornisce le componenti della divergenza di σ , si scrivono:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x - \rho \dot{v}_x = 0, \quad (5.56a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y - \rho \dot{v}_y = 0, \quad (5.56b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z - \rho \dot{v}_z = 0, \quad (5.56c)$$

dove f_x, f_y, f_z e v_x, v_y, v_z sono le componenti della forza per unità di volume e, rispettivamente, della velocità. Tenendo conto della rappresentazione (5.23) delle componenti del tensore degli sforzi σ , le componenti scalari della condizione di simmetria (5.45) si scrivono invece:³⁸

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yx} = \tau_{xy}. \quad (5.57)$$

◇ ◇ ◇

Significato fisico delle componenti dell'equazione del moto. Si vuole mostrare nel seguito che le tre equazioni scalari del moto (5.56) in un punto P non sono altro che le tre equazioni scalari di bilancio della quantità di moto, in direzione x , y e z rispettivamente, di un cubo elementare intorno del dato punto ed avente le facce parallele ai piani coordinati.

³⁸Cfr. la (1.86a), p. 29.

Dimostrazione. Si consideri per esempio la componente scalare in direzione y del bilancio della quantità di moto. Per le altre due componenti scalari si può poi procedere in modo analogo.

Sia allora dato un cubo di lato b intorno di un punto P del corpo ed avente le facce parallele ai piani coordinati (fig. 5.9). Per il principio di azione e reazione e

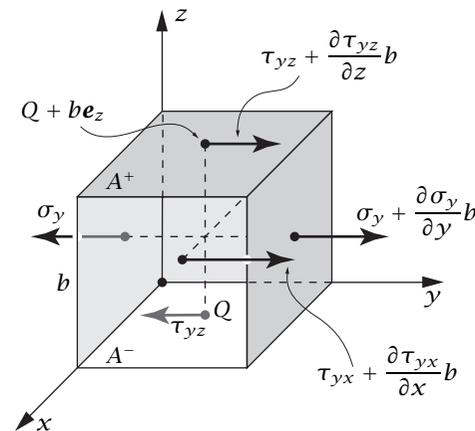


Figura 5.9: Componenti scalari dell'equazione del moto

per il teorema della media due coppie di facce parallele forniscono un contributo complessivo dell'ordine di b^3 .³⁹ Lo stesso, ancora per il teorema della media, si può dire per i termini di volume.

Entrando nei dettagli,⁴⁰ si consideri per esempio la coppia di facce normali all'asse z sulle quali agiscono, in direzione y , le componenti di tensione τ_{yz} sulla faccia di normale uscente e $-\tau_{yz}$ su quella di normale entrante. Detto Q il generico punto della faccia A^- di normale entrante si ha:

$$\begin{aligned} & \int_{A^-} \{ \tau_{yz}(Q + b\mathbf{e}_z) - \tau_{yz}(Q) \} dS \\ &= \int_{A^-} \left\{ \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Big|_Q \right) b + o(b) \right\} dS = \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \Big|_P \right) b^3 + o(b^3). \end{aligned}$$

dove per il primo passaggio si è supposto che la tensione sia derivabile con deri-

³⁹Cfr. la nota 5, p. 122.

⁴⁰Si tenga conto che la situazione tensionale sulle facce del cubo è del tipo di quella di fig. 5.5, p. 125.

vate prime continue mentre nell'ultimo passaggio si è utilizzato il teorema della media.⁴¹

Tenendo infine conto degli analoghi contributi delle altre due coppie di facce parallele e del contributo dei termini di volume è possibile scrivere il bilancio della quantità di moto del cubo nella forma:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} b^3 + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} b^3 + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} b^3 + (f_y - \rho \dot{v}_y) b^3 + o(b^3) = 0,$$

dove è sottinteso che le quantità che intervengono sono valutate nel punto P di cui il cubo è intorno. Infine, dividendo per b^3 e valutando il limite per $b \rightarrow 0$, si ottiene la (5.56b). ■

Significato fisico delle componenti della condizione di simmetria. Si vuole inoltre mostrare che ognuna delle tre equazioni scalari di simmetria (5.57) del tensore degli sforzi non è altro che il bilancio scalare del momento della quantità di moto, valutato rispetto ad uno degli assi x , y e z , ancora di un cubo elementare intorno del dato punto ed avente le facce parallele ai piani coordinati (fig. 5.10).

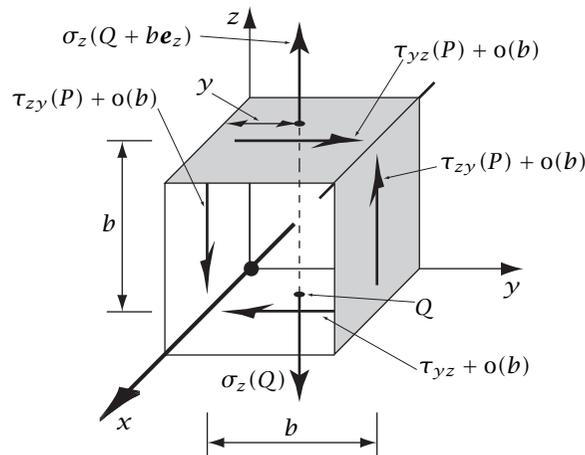


Figura 5.10: Componenti scalari della condizione di simmetria

Dimostrazione. Si consideri per esempio il bilancio del momento della quantità di moto rispetto all'asse x . Per le altre due componenti scalari si può poi procedere in modo analogo.

⁴¹Cfr. la nota 5, p. 122.

Sia allora dato un cubo di lato b , intorno di un punto P del corpo e avente le facce parallele ai piani coordinati. Si facciamo inoltre coincidere per comodità gli assi x , y e z con tre lati del cubo e quindi il centro degli stessi con un vertice (fig. 5.10).

Si consideri ora che:

1. la componente f_x della forza di volume e le componenti di tensione σ_x , τ_{xy} e τ_{xz} sono parallele a x e quindi non danno contributi;
2. le componenti f_y e f_z della forza di volume e le componenti di tensione σ_y , σ_z , τ_{zx} e τ_{yx} danno un contributo del tipo $o(b^3)$. Per esempio, nel caso illustrato nella fig. 5.10 relativo alla σ_z , il contributo vale:

$$\int_{A^-} \{\sigma_z(Q + b\mathbf{e}_z) - \sigma_z(Q)\} y \, dS = [\Delta \sigma_z y]_{\bar{Q}} b^2 = o(b^3),$$

avendo ancora utilizzato il teorema della media nel primo passaggio, con \bar{Q} interno alla faccia A^- del cubo di normale entrante \mathbf{e}_z su cui viene eseguita l'integrazione. Sia l'incremento $\Delta \sigma_z$ nel punto \bar{Q} che la coordinata \bar{y} di \bar{Q} sono infinitesimi per $b \rightarrow 0$ e questo giustifica l'ultimo passaggio;

3. le componenti tangenziale τ_{zy} e τ_{yz} , ancora per il teorema della media, forniscono rispettivamente i contributi $\tau_{zy} b^3 + o(b^3)$ e $-\tau_{yz} b^3 + o(b^3)$ avendo tenuto conto che le componenti che agiscono nelle facce di normali entranti \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z rispettivamente hanno braccio nullo rispetto all'asse x , mentre quelle che agiscono nelle facce di normali uscenti hanno braccio b costante e che il momento generato è rispettivamente positivo e negativo.

Il bilancio scalare del momento della quantità di moto, valutato rispetto all'asse x , diviene quindi:

$$\tau_{zy} b^3 - \tau_{yz} b^3 + o(b^3) = 0,$$

dove al solito è sottinteso che i valori di tensione sono valutati nel punto P di cui il cubo è intorno. Dividendo per b^3 ed eseguendo il limite per $b \rightarrow 0$, si ottiene la prima delle (5.57), come volevasi dimostrare. ■

◇ ◇ ◇

5.3 Direzioni principali di tensione

In ogni punto della configurazione deformata di un corpo continuo è definito un valore particolare del tensore degli sforzi di Cauchy. Per via della simmetria di tale tensore risultano quindi definite in ogni punto almeno tre

direzioni principali ortogonali tra loro,⁴² dette *direzioni principali di tensione*,⁴³ e i cui autovalori sono detti *valori principali di tensione* o *tensioni principali*.⁴⁴

L'equazione determinatrice degli autovalori ed autoversori si scrive:

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n}, \tag{5.58}$$

dove \mathbf{n} è il versore normale di un elemento di superficie nell'intorno del punto in corrispondenza del quale la tensione interna è individuata da $\boldsymbol{\sigma}$. Poiché $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ rappresenta la tensione agente sull'elemento di superficie di versore normale \mathbf{n} , è evidente il significato fisico delle direzioni principali di tensione: *su una giacitura normale ad una direzione principale ζ la tensione è normale alla giacitura stessa ed è quindi nulla la tensione tangenziale* (fig. 5.11). Su tale giacitura principale la tensione normale σ_ζ , per

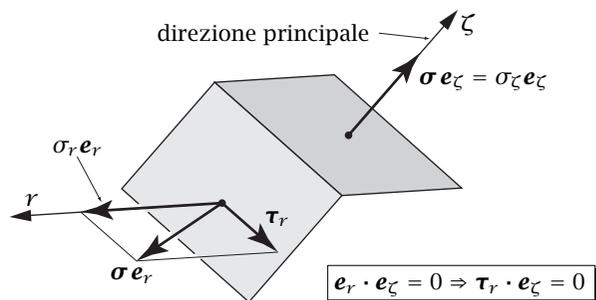


Figura 5.11: Significato fisico delle direzioni principali di tensione

via della prima delle (5.10), coincide con l'associato autovalore.⁴⁵

Inoltre dal fatto che i vettori ortogonali ad una direzione principale ζ si trasformano ancora in vettori ortogonali alla stessa direzione⁴⁶ consegue che su tutte le giaciture del fascio di sostegno la direzione principale ζ la tensione risulta ortogonale alla direzione principale (fig. 5.11). Questo è in accordo con il teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali, di cui alla

p. 130, che richiede che sulle giaciture di sostegno ζ le componenti tangenziali agenti in direzione ζ siano nulle poiché sulla giacitura principale sono nulle le tensioni tangenziali reciproche.

Si ricordi infine che esistono sempre tre direzioni principali mutuamente ortogonali e che quindi è sempre possibile, senza restrizioni, assumere localmente una base ortonormale principale, i cui versori hanno direzioni coincidenti con quelle di tre direzioni principali di tensione. Si noti che in generale la base principale è locale poiché il tensore degli sforzi, e quindi le sue direzioni principali, variano in generale da punto a punto. Se in ogni punto di un solido vi sono tre sole direzioni principali di tensione, quindi ortogonali tra loro, dal loro involuppo si ottengono tre famiglie di curve, pure mutuamente ortogonali, dette *linee isostatiche*.⁴⁷ In particolare, le linee isostatiche hanno la proprietà che una qualunque giacitura ortogonale ad una di tali linee è soggetta solo a tensione normale.

Inoltre vale la rappresentazione:⁴⁸

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\zeta \end{bmatrix}, \tag{5.59a}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_\xi (\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) + \sigma_\eta (\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta) + \sigma_\zeta (\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta). \tag{5.59b}$$

5.4 Rappresentazione di Mohr della tensione

Ad ogni direzione principale di tensione è associata una circonferenza nel piano di Mohr, rappresentativa del problema piano definito dalla direzione principale stessa (fig. 5.12a).⁴⁹ Se ζ è un asse principale, le coordinate nel piano di Mohr del generico asse r ortogonale a ζ valgono:⁵⁰

$$\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r, \quad \tau_{sr} = \mathbf{e}_s \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r, \tag{5.60}$$

dove l'asse s è per convenzione definito dalla rotazione oraria di $\pi/2$ rad dell'asse r sulla faccia positiva del piano ortogonale a ζ , individuata per esempio, ma non obbligatoriamente, dalla stessa orientazione di ζ

⁴²Cfr. par. 1.4 p. 31.

⁴³ *Principal directions of stress* nella letteratura inglese.

⁴⁴ *Principal stresses* nella letteratura inglese.

⁴⁵Cfr. la (1.109), p. 31.

⁴⁶Cfr. proposizione 3 p. 32.

⁴⁷Il concetto di linea isostatica è limitato al solo caso del tensore degli sforzi. *Lines of stress* nella letteratura inglese.

⁴⁸Cfr. la (1.138), p. 36.

⁴⁹Cfr. par. 1.6 p. 46.

⁵⁰Cfr. la (1.197), p. 46.

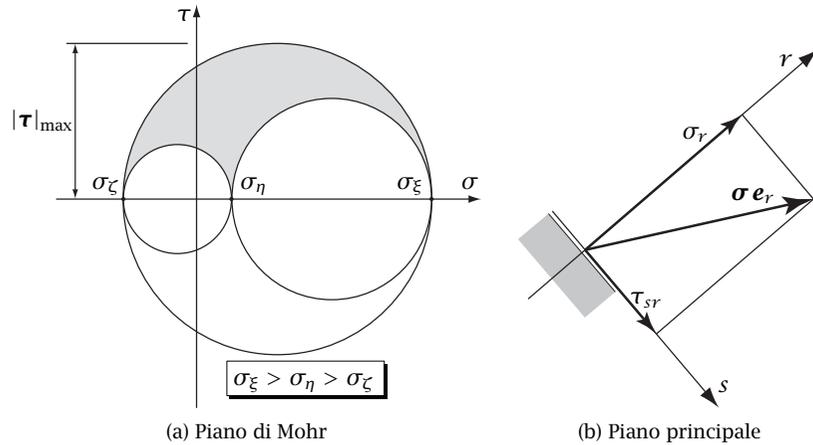


Figura 5.12: Rappresentazione di Mohr della tensione

(fig. 5.12b). Gli assi che definiscono il piano di Mohr rappresentativo della tensione agente nell'intorno di un punto riportano quindi le componenti normali σ in ascissa e quelle tangenziali τ in ordinata. Si noti che se la componente tangenziale τ_{sr} è positiva allora gira in senso orario attorno ad un elemento di volume una cui faccia abbia normale uscente positiva r . Se $Ox\gamma\zeta$ è un sistema locale di coordinate cartesiano ortogonale destro avente terzo asse coincidente con la direzione principale ζ e quindi con gli assi x e y nel piano ortogonale alla direzione principale stessa, la circonferenza di Mohr si può tracciare a partire dai punti rappresentativi di tali assi. Se x e y , in quest'ordine, definiscono una coppia di assi destra sulla faccia positiva del piano ortogonale alla direzione principale ζ , i loro punti rappresentativi hanno coordinate $(\sigma_x, -\tau_{xy})$ e rispettivamente (σ_y, τ_{xy}) .

Il punto rappresentativo di una generica direzione r , in generale non ortogonale ad una direzione principale, giace invece nell'arbelo di Mohr ed è individuato dalle coordinate:⁵¹

$$\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r, \quad |\boldsymbol{\tau}_r| = |\boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r - \sigma_r \mathbf{e}_r|, \quad (5.61)$$

la seconda delle quali coincide con il modulo della tensione tangenziale che agisce sulla giacitura normale alla direzione stessa ed è di conseguenza

⁵¹Cfr. la (1.196), p. 46.

sempre positiva. Si noti che non è possibile in generale dare un segno alla seconda coordinata per il fatto che su una giacitura generica non è nota a priori la direzione della tensione tangenziale.

Dalle proprietà di estremo dei valori principali⁵² risulta poi che il minimo e il massimo valore della generica componente normale di tensione σ_r agente nel piano ortogonale alla generica direzione r nell'intorno di un dato punto coincidono rispettivamente con la minima e la massima tensione principale nell'intorno dello stesso punto e che il massimo modulo della tensione tangenziale $\boldsymbol{\tau}_r$ agente nel piano ortogonale alla generica direzione r coincide con il raggio della circonferenza esterna:

$$\sigma_{\min} = \min \{ \sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta \}, \quad \sigma_{\max} = \max \{ \sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta \}, \quad (5.62a)$$

$$|\boldsymbol{\tau}|_{\max} = \frac{1}{2} \max \left\{ \left| \sigma_\xi - \sigma_\eta \right|, \left| \sigma_\eta - \sigma_\zeta \right|, \left| \sigma_\zeta - \sigma_\xi \right| \right\}. \quad (5.62b)$$

5.5 Stati elementari di tensione

Lo stato di sforzo definito nell'intorno di un punto del dominio di un dato corpo continuo può essere caratterizzato da particolari proprietà, alcune delle quali definiscono i cosiddetti *stati elementari di tensione*⁵³ o *stati particolari di tensione*. Poiché lo stato di sforzo nell'intorno di un punto è rappresentato dal tensore degli sforzi di Cauchy, le particolari proprietà che definiscono gli stati elementari di tensione sono proprietà di tale tensore doppio.

5.5.1 Stato di trazione (o compressione) uniforme

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato di trazione (o compressione) uniforme*⁵⁴ se la tensione in una qualunque giacitura nell'intorno del dato punto agisce ortogonalmente alla giacitura. Questo significa che tutte le direzioni dello spazio devono essere principali di tensione il che è possibile se e solo se l'equazione caratteristica ha una radice tripla.⁵⁵ Il tensore degli sforzi risulta quindi sferico:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{I}, \quad (5.63)$$

⁵²Cfr. par. 1.6.3 p. 51.

⁵³*Types of stress* nella letteratura inglese.

⁵⁴*Purely normal stress* nella letteratura inglese.

⁵⁵Cfr. par. 1.4.5 p. 37.

dove σ è la tensione normale che agisce in una qualunque giacitura. Per tale motivo tale stato di tensione viene anche detto *sferico*. Se la tensione normale è di trazione oppure di compressione lo stato tensionale viene detto di *trazione uniforme* e, rispettivamente, di *compressione uniforme* (fig. 5.13). Tenendo poi conto che la tensione normale è obbligatoriamente

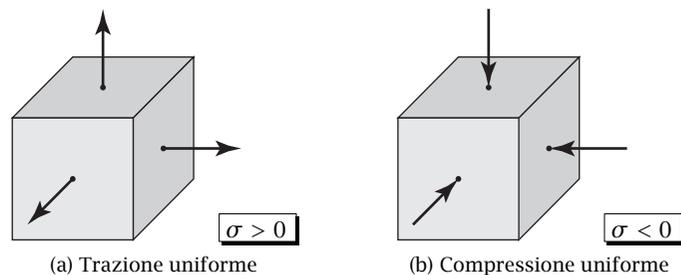


Figura 5.13: Stato di trazione o compressione uniforme

la stessa in ogni giacitura, e quindi invariante con la direzione dello spazio, lo stato di tensione è anche detto *isotropo*. Infine, dato che in ogni punto di un fluido in quiete lo stato tensionale è di compressione uniforme, questi è anche detto *stato di tensione idrostatico*. A tale proposito è bene notare che in un fluido perfetto lo stato tensionale è sempre idrostatico, anche nel caso il fluido sia in moto.

5.5.2 Stato di trazione (o compressione) semplice

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato di trazione (o compressione) semplice*⁵⁶ se in una giacitura la tensione è ortogonale alla giacitura stessa mentre in una qualunque giacitura ortogonale alla precedente la tensione è nulla.⁵⁷ Questo significa che il tensore degli sforzi, avendo un autovalore nullo doppio, è monoassiale. Questo è il motivo per cui tale stato di tensione viene anche detto *monoassiale*. Se si indica con z

⁵⁶Simple tension or pressure nella letteratura inglese.

⁵⁷Cfr. par. 4.2 p. 105.

l'asse principale associato all'autovalore semplice non nullo si ha quindi:⁵⁸

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_o \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \sigma_o (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z), \quad (5.64)$$

dove σ_o è la tensione normale principale che agisce sulla giacitura ortogonale a z . Si noti che l'asse z è anche sostegno delle giaciture in cui la tensione è nulla. Se la tensione normale σ_o è di trazione oppure di compressione lo stato tensionale viene detto di *trazione semplice* e, rispettivamente, di *compressione semplice*. La fig. 5.14a mostra lo stato tensionale nel caso

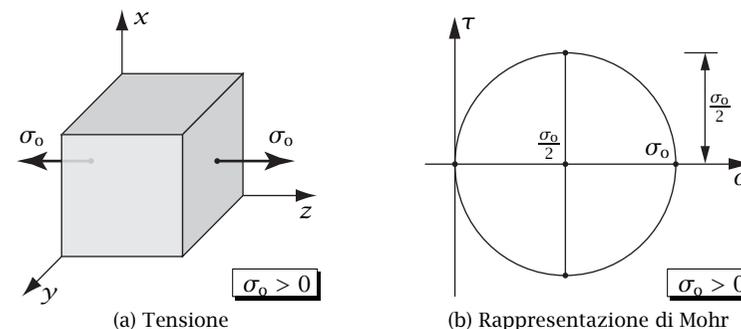


Figura 5.14: Stato di trazione semplice

della trazione. Si noti che in una prova di trazione monoassiale⁵⁹ quello che si vuole ottenere nel provino soggetto a sperimentazione è appunto uno stato omogeneo di trazione semplice.

Dalla rappresentazione (5.64) di uno stato di trazione semplice e dalla rappresentazione (5.59) di uno stato generico di tensione consegue che questi è sempre decomponibile nella somma di tre trazioni semplici aventi quali direzioni di trazione le direzioni principali:⁶⁰

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\zeta \end{bmatrix}, \quad (5.65a)$$

⁵⁸Cfr. la (1.241) p. 52.

⁵⁹Cfr. par. 4.2 p. 104.

⁶⁰Un'analogia proprietà vale per per un qualunque tensore doppio simmetrico.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{\xi} (\mathbf{e}_{\xi} \otimes \mathbf{e}_{\xi}) + \sigma_{\eta} (\mathbf{e}_{\eta} \otimes \mathbf{e}_{\eta}) + \sigma_{\zeta} (\mathbf{e}_{\zeta} \otimes \mathbf{e}_{\zeta}). \quad (5.65b)$$

La rappresentazione nel piano di Mohr dello stato di trazione o compressione semplice è quella di un qualunque tensore monoassiale.⁶¹ Le infinite circonferenze delle infinite direzioni principali associate all'autovalore nullo doppio, di centro $\sigma_0/2$ e di raggio $|\sigma_0|/2$, sono tutte coincidenti mentre quella associata all'autovalore semplice non nullo σ_0 collapsa nel punto origine degli assi, come illustrato nella fig. 5.14b nel caso della trazione. Il massimo modulo $|\sigma|_{\max}$ di tutte le tensioni normali nell'intorno del punto e il massimo modulo $|\boldsymbol{\tau}|_{\max}$ di quelle tangenziali valgono:

$$|\sigma|_{\max} = |\sigma_0|, \quad |\boldsymbol{\tau}|_{\max} = \frac{|\sigma_0|}{2}. \quad (5.66)$$

Si noti infine che non esiste arbelo di Mohr in accordo col fatto che tutte le direzioni dello spazio sono ortogonali ad almeno una direzione principale.

5.5.3 Stato di taglio semplice

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato di taglio semplice*⁶² se in due giaciture ortogonali la tensione ha le sole componenti tangenziali nelle direzioni ortogonali allo spigolo comune alle due giaciture stesse mentre nella giacitura ortogonale alle precedenti la tensione è nulla,⁶³ come illustrato nella fig. 5.15a. Si noti che le due componenti tangenziali devono essere uguali in modulo ed avere verso opportuno per via del teorema di reciprocità delle tensioni tangenziali di cui alla p. 130. D'altronde è proprio in virtù di tale teorema che non può sussistere uno stato tensoriale con la componente tangenziale su una giacitura e tensione nulla su tutte le giaciture ortogonali a questa, diversamente dal caso della tensione normale. Essendo nulla la tensione in una giacitura ed essendo nulle le componenti normali in tre giaciture ortogonali, il tensore degli sforzi ha un autovalore nullo e la traccia nulla e quindi è un tensore piano e deviatorico.⁶⁴ Se la tensione tangenziale agisce sulle giaciture di normale x e y si ha quindi:⁶⁵

$$\boldsymbol{\sigma} = \tau_0 (\mathbf{e}_x \otimes \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_y \otimes \mathbf{e}_x), \quad (5.67)$$

⁶¹Cfr. par. 1.7.1 p. 53.

⁶²*Shearing stress* nella letteratura inglese.

⁶³Cfr. par. 4.3 p. 107.

⁶⁴Cfr. par. 1.7.3 p. 54.

⁶⁵Cfr. la (1.244) p. 54.

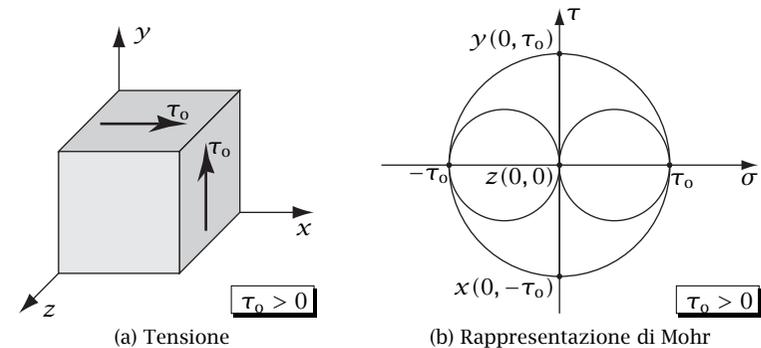


Figura 5.15: Stato di taglio semplice

dove τ_0 rappresenta sia la componente τ_{xy} che quella τ_{yx} , uguali per via della reciprocità delle tensioni tangenziali. In tal caso la rappresentazione algebrica di $\boldsymbol{\sigma}$ risulta:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.68)$$

Si noti che in una prova di torsione di un provino cilindrico cavo di spessore sottile⁶⁶ quello che si vuole ottenere è appunto uno stato omogeneo di taglio semplice.

La rappresentazione nel piano di Mohr dello stato di taglio semplice è quella di un qualunque tensore piano deviatorico, come illustrato nella fig. 5.15b nel caso $\tau_0 > 0$.⁶⁷ La direzione z è principale. La circonferenza di Mohr relativa alle giaciture di sostegno l'asse z è individuata dai punti rappresentativi delle giaciture di normali gli assi x e y , di coordinate rispettivamente $(0, -\tau_0)$ e $(0, \tau_0)$. Il centro della circonferenza ha coordinate $(0, 0)$ e il suo raggio vale $|\tau_0|$. Le tensioni principali valgono $-\tau_0$ e τ_0 , quindi l'una di trazione e l'altra di compressione. Se $\tau_0 > 0$ la direzione principale di trazione coincide con la bisettrice del quadrante positivo nel piano xy (fig. 5.16). Infine il massimo modulo di tutte le tensioni normali nell'intorno del punto e il massimo modulo di quelle tangenziali valgono entrambe $|\tau_0|$.

⁶⁶Cfr. par. 4.3 p. 107.

⁶⁷Cfr. par. 1.7.3 p. 54.

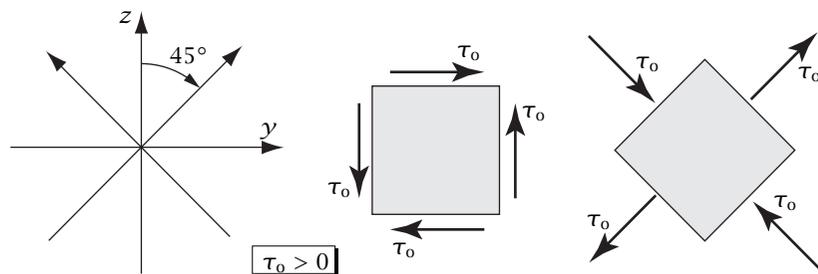


Figura 5.16: Direzioni principali di tensione

5.5.4 Stato piano di tensione

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato piano di tensione*⁶⁸ se il tensore degli sforzi è piano⁶⁹ e quindi se la tensione agente in una qualunque giacitura è parallela ad un piano, detto *piano di tensione*. Se si indica con z l'asse ortogonale a tale piano, lo stato tensionale nelle facce di un cubo intorno del punto avente una coppia di facce ortogonale a z è del tipo di quello illustrato nella fig. 5.17. In un sistema di riferimento $Oxyz$

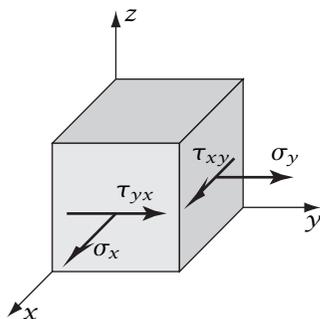


Figura 5.17: Stato piano di tensione

la rappresentazione algebrica di σ risulta inoltre:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.69}$$

Per quel che riguarda la rappresentazione di Mohr, si ricorda che l'unica particolarità è che due delle tre circonferenze di Mohr passano per l'origine degli assi nel piano di Mohr.

Se un corpo è soggetto, in tutti i suoi punti, ad uno stato piano di tensione e se il piano di tensione è lo stesso in tutti i punti si dice che il corpo è soggetto ad uno *stato piano di tensione*. Per essere catalogato come soggetto a stato piano di tensione, non è necessario che in tutti i punti del corpo lo stato di tensione sia piano nel senso di avere un autovalore nullo semplice, ma in qualche punto del corpo lo stato tensionale può anche essere nullo oppure monoassiale, con asse contenuto nel piano di tensione.

La stessa terminologia di stato piano di tensione, nell'intorno di un punto oppure in tutto il corpo, non crea difficoltà dato che nei casi concreti sarà evidente a chi ci si sta riferendo, all'intorno di un punto oppure a tutto il corpo. Si sottolinea il fatto che per essere soggetto a stato piano di tensione un corpo deve non solo essere soggetto a stato piano di tensione in tutti i suoi punti ma in questi deve anche avere lo stesso piano di tensione.

5.6 Esempio numerico di analisi della tensione

Nel seguito, a titolo di esempio, si considera lo stato tensionale nell'intorno di un punto di un corpo continuo rappresentato dalle componenti riportate in fig. 5.18 e relative alla scelta di un dato sistema di assi cartesiani ortogonali $Oxyz$.

L'equazione caratteristica⁷⁰ si ottiene svolgendo il determinante:

$$\det \begin{bmatrix} 10 - \lambda & -10 & 10 \\ -10 & 20 - \lambda & 0 \\ 10 & 0 & 20 - \lambda \end{bmatrix},$$

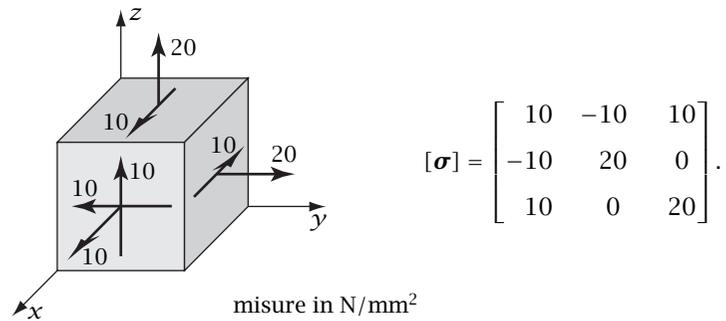
oppure calcolando gli invarianti di tensione e cioè la traccia:

$$\text{tr } \sigma = 10 + 20 + 20 = 50 \text{ N/mm}^2,$$

⁶⁸Plane stress nella letteratura inglese.

⁶⁹Cfr. par. 1.7.2 p. 53.

⁷⁰Cfr. par. 1.4.5 p. 34.

Figura 5.18: Componenti di tensione nel sistema $Oxyz$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

misure in N/mm^2

l'invariante quadratico:

$$\sigma_{II} = \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10 & 10 \\ 10 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{vmatrix} = 600 \text{ N}^2/\text{mm}^4,$$

e infine il determinante:

$$\det \sigma = \det \begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} = 10 \begin{vmatrix} -10 & 20 \\ 10 & 0 \end{vmatrix} + 20 \begin{vmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 20 \end{vmatrix} = 0.$$

Si ottiene:

$$\lambda^3 - 50\lambda^2 + 600\lambda = 0 \quad \text{e quindi} \quad \lambda(\lambda^2 - 50\lambda + 600) = 0.$$

Le radici dell'equazione caratteristica definiscono i valori principali di tensione:

$$\sigma_{\xi} = 0,$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{50 - \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 20 \text{ N/mm}^2,$$

$$\sigma_{\zeta} = \frac{50 + \sqrt{2500 - 2400}}{2} = 30 \text{ N/mm}^2.$$

Dato che il valore principale di tensione associato alla direzione ξ è nullo, lo stato tensionale nell'intorno del punto è piano, con piano di tensione ortogonale alla direzione ξ . Le radici dell'equazione costitutiva sono distintee quindi esistono tre e solo tre direzioni principali di tensione ξ , η e ζ ortogonali tra loro e che si ottengono dalla soluzione dei tre sistemi di tre equazioni lineari omogenee in tre incognite seguenti:

$$\begin{bmatrix} 10 & -10 & 10 \\ -10 & 20 & 0 \\ 10 & 0 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10\xi_x + 20\xi_y = 0 \\ 10\xi_x + 20\xi_z = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} -10 & -10 & 10 \\ -10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10\eta_x - 10\eta_y + 10\eta_z = 0 \\ 10\eta_y = 0 \end{cases},$$

$$\begin{bmatrix} -20 & -10 & 10 \\ -10 & -10 & 0 \\ 10 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -10\zeta_x - 10\zeta_y = 0 \\ 10\zeta_x - 10\zeta_z = 0 \end{cases}.$$

Per ognuno dei tre sistemi sono state conservate due sole equazioni essendo la terza linearmente dipendente. Se si impone alle componenti degli autovettori la condizione che questi siano degli autoversori:

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 = 1, \quad \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = 1, \quad \zeta_x^2 + \zeta_y^2 + \zeta_z^2 = 1,$$

si ottiene:

$$\{\mathbf{e}_{\xi}\} = \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_{\eta}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_{\zeta}\} = \begin{Bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \mp\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Per ogni direzione principale vi sono due autoversori, di verso opposto. La scelta del segno delle componenti è equivalente alla scelta del verso dell'autoversore. Si noti che per ognuno degli autoversori vi sono solo due scelte: o tutti i segni superiori oppure tutti quelli inferiori. La scelta seguente:

$$\{\mathbf{e}_{\xi}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_{\eta}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}, \quad \{\mathbf{e}_{\zeta}\} = \begin{Bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix},$$

rende il sistema principale $O\xi\eta\zeta$ un sistema di riferimento destro. Per verificarlo occorre mostrare che $\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_\zeta$:

$$\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_x - \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_y + \sqrt{\frac{1}{3}}\mathbf{e}_z.$$

Si noti che il versore \mathbf{e}_η ha componente nulla rispetto all'asse x ed uguali componenti, positive, rispetto agli assi y e z . Quindi l'asse η giace nel piano yz e la sua parte positiva biseca il primo quadrante di tale piano. Poichè l'asse x è ortogonale al piano yz contenente η , appartiene al piano principale $\xi\zeta$. Nella fig. 5.19 sono riportate sia la posizione delle direzioni prin-

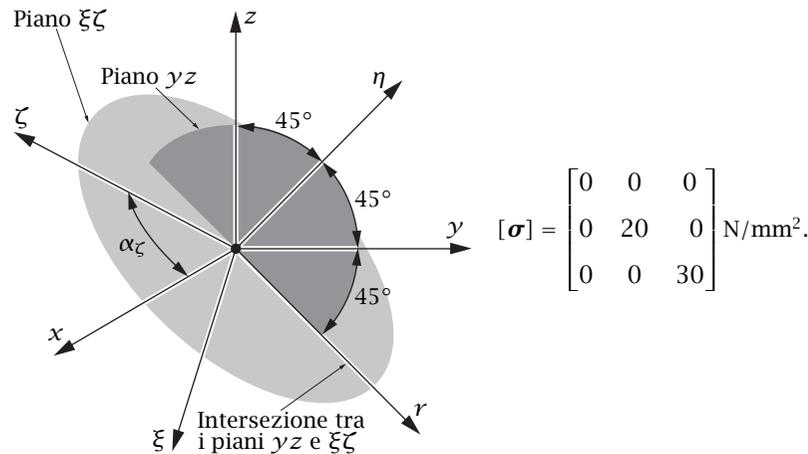


Figura 5.19: Direzioni principali di tensione e rappresentazione principale

cipali rispetto al riferimento $Oxyz$ che la rappresentazione algebrica della tensione nel riferimento principale e si è indicato con r l'asse intersezione dei piani yz e $\xi\zeta$.

Il tensore rotazione \mathbf{R} che ruota il sistema $Oxyz$ nel sistema principale $O\xi\eta\zeta$ soddisfa le condizioni:

$$\mathbf{R}\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_\xi, \quad \mathbf{R}\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{R}\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_\zeta.$$

La matrice delle componenti di \mathbf{R} nel sistema $Oxyz$ ha quindi per colonne

le componenti, nello stesso sistema, dei versori della base principale:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix}.$$

È ora possibile verificare la forma diagonale della rappresentazione principale, di cui alla fig. 5.19, utilizzando la formula di trasformazione delle componenti tensoriali:⁷¹

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\xi\eta\zeta} = [\mathbf{R}]^T [\boldsymbol{\sigma}]_{xyz} [\mathbf{R}].$$

Per sveltire il calcolo si può osservare che la matrice $[\boldsymbol{\sigma}]_{xyz} [\mathbf{R}]$ ha per colonne le componenti degli autovettori moltiplicate ognuna per il corrispondente autovalore:

$$\mathbf{e}_i \cdot (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{R})\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \cdot (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{R}\mathbf{e}_j)) = \mathbf{e}_i \cdot (\lambda_j \mathbf{R}\mathbf{e}_j) = \lambda_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{R}\mathbf{e}_j) = \lambda_j R_{ij}.$$

Quindi risulta:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & -\sqrt{300} \\ 0 & \sqrt{200} & \sqrt{300} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix},$$

come volevasi dimostrare.

Alle tre tensioni principali distinte corrispondono tre circonferenze nel piano di Mohr $\sigma \tau$ (fig. 5.20). I punti rappresentativi degli assi coordinati x , y e z hanno le seguenti coordinate nel piano di Mohr:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 10 \text{ N/mm}^2, & \tau_x &= \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2} = \sqrt{200} \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_y &= 20 \text{ N/mm}^2, & \tau_y &= \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2} = 10 \text{ N/mm}^2, \\ \sigma_z &= 20 \text{ N/mm}^2, & \tau_z &= \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = 10 \text{ N/mm}^2, \end{aligned}$$

Poichè l'asse x giace nel piano ortogonale alla direzione principale η , il corrispondente punto nel piano di Mohr appartiene alla circonferenza esterna,

⁷¹Cfr. la (1.190), p. 45.

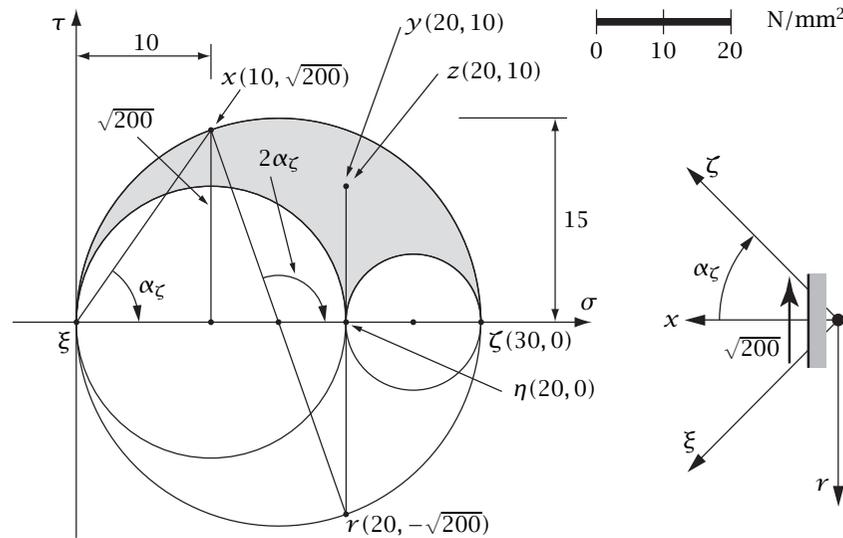


Figura 5.20: Rappresentazione di Mohr

quella che contiene i punti corrispondenti alle direzioni normali a η , mentre i punti corrispondenti agli assi y e z coincidono e appartengono all'arbelo di Mohr. Allo scopo di rendere operativa la circonferenza esterna e di dare quindi un segno alla seconda coordinata τ_x del punto x si scelga quale faccia positiva del piano ortogonale a η quella di asse η uscente positivo e si considerino su tale piano i due assi ortogonali x e r , dove quest'ultimo è individuato dalla intersezione dei piani yz e $\xi\zeta$ e orientato in modo tale che sia (fig. 5.19 nella pagina precedente):

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\eta.$$

Poiché r giace nel piano yz ed è ortogonale a η , l'angolo tra r e y vale 45° e le componenti nel sistema $Oxyz$ del versore \mathbf{e}_r di r sono quindi:

$$\{\mathbf{e}_r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{1}{2}} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{Bmatrix}. \tag{5.70}$$

Ne conseguono le seguenti componenti di tensione nel sistema $Oxr\eta$

(fig. 5.21):

$$\sigma_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sqrt{200} \\ \sqrt{200} \\ -\sqrt{200} \end{Bmatrix} = 20 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_{xr} = \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{e}_r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sqrt{200} \\ \sqrt{200} \\ -\sqrt{200} \end{Bmatrix} = -\sqrt{200} \text{ N/mm}^2,$$

Il punto rappresentativo dell'asse x , primo asse della coppia destra xr ,

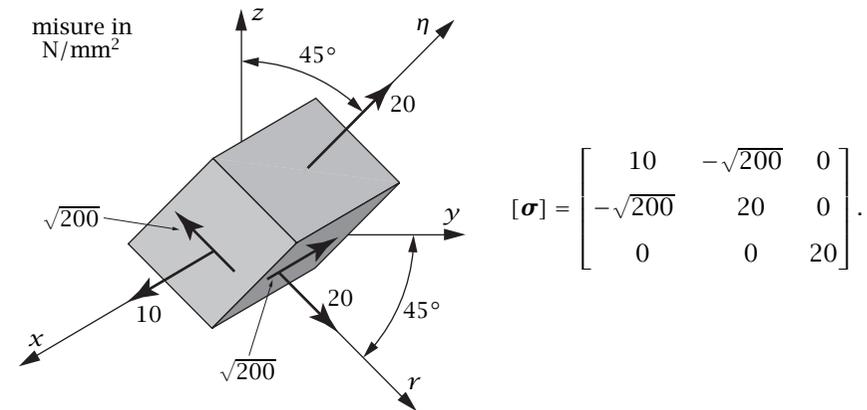


Figura 5.21: Componenti di tensione nel sistema $Oxr\eta$

è dunque $(\sigma_x, -\tau_{xr}) = (10, \sqrt{200})$ e il punto x si trova nella parte superiore della circonferenza esterna (fig. 5.20). Si ricordi che questo risultato dipende dal fatto che il secondo asse del riferimento locale, quello che in tal caso fornisce la componente tangenziale della tensione, si ottiene ruotando il primo asse, e cioè l'asse x , in senso orario sulla faccia positiva del piano xr , faccia di asse η uscente positivo. In altre parole la componente tangenziale da riportare nel piano di Mohr è valutata rispetto all'asse $-r$, avente la direzione di r ma verso opposto. Si noti che se la componente tangenziale è positiva nel riferimento locale allora induce una rotazione oraria ad un elemento di volume avente sul contorno la giacitura su cui agisce la tensione tangenziale stessa (fig. 5.20).

Per ottenere la direzione principale ζ occorre ruotare, sulla faccia del piano xr scelta quale positiva, l'asse x in senso orario di un angolo α_ζ che, come risulta dalla circonferenza di Mohr (fig. 5.20 nella pagina precedente), soddisfa la relazione:

$$\tan |\alpha_\zeta| = \frac{\sqrt{200}}{10} = \sqrt{2}, \quad \Rightarrow \quad \alpha_\zeta = -\arctan \sqrt{2} = -54.74^\circ$$

D'altronde il coseno direttore di ζ rispetto a x vale $\sqrt{1/3}$ e dunque:

$$\widehat{\zeta x} = \arccos \sqrt{\frac{1}{3}} = 54.74^\circ$$

Alternativamente, utilizzando la formula che individua la direzione principale ζ rispetto al primo asse (in tal caso l'asse x) si ottiene:

$$\tan \alpha_\zeta = \frac{\sigma_\zeta - \sigma_x}{\tau_{xr}} = \frac{30 - 10}{-\sqrt{200}} = -\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_\zeta = \arctan(-\sqrt{2}) = -54.74^\circ.$$

Utilizzando invece la formula che individua entrambe le direzioni principali si ottiene:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xr}}{\sigma_x - \sigma_r} = 2 \frac{-\sqrt{200}}{10 - 20} = 2\sqrt{2},$$

e quindi:

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan(2\sqrt{2}) = 35.26^\circ.$$

Si ricordi che l'arcotangente di un angolo è compresa tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ e che quindi applicando tale funzione l'angolo α_0 che si ottiene è compreso tra $-\pi/4$ e $\pi/4$. Essendo l'angolo α_ζ all'infuori del dato intervallo, applicando la funzione arcotangente si ottiene l'angolo complementare che individua, sempre rispetto all'asse x , l'altra direzione principale. Si noti che il valore ottenuto è positivo in accordo col fatto che per ottenere ξ occorre ruotare x in senso antiorario del dato angolo.

5.7 Indeterminazione del moto e della tensione

Si vuole ora analizzare il problema della determinazione del moto e dello stato tensionale dal punto di vista delle sole equazioni di bilancio, eventualmente con le associate condizioni al contorno sulle forze e iniziali sulle

velocità:⁷²

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (5.71a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (5.71b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \text{su } \partial \mathcal{B}, \quad (5.71c)$$

$$\mathcal{B}(t=0) = \mathcal{B}_0, \quad (5.71d)$$

$$\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_0, \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (5.71e)$$

Si suppone che la configurazione \mathcal{B} sia in generale funzione del tempo, la configurazione di riferimento coincida con la configurazione iniziale nota, le forze \mathbf{f} di volume e \mathbf{p} di superficie siano determinate in funzione sia del tempo che della configurazione e il campo delle velocità iniziali \mathbf{v}_0 sia noto.

5.7.1 Indeterminazione statica della tensione, autotensioni e configurazione naturale

Si consideri innanzitutto il caso dell'equilibrio statico di una configurazione \mathcal{B} di un corpo sotto date forze \mathbf{f} di volume e \mathbf{p} di superficie indipendenti dal tempo. Nel caso statico le accelerazioni sono nulle e quindi la (5.71a) diviene l'equazione indefinita di equilibrio:⁷³

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}. \quad (5.72)$$

Le componenti scalari di questa, in direzione x , y e z rispettivamente, si scrivono, analogamente alle (5.56):⁷⁴

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x = 0, \quad (5.73a)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y = 0, \quad (5.73b)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + f_z = 0. \quad (5.73c)$$

⁷²Cfr. la (5.34), p. 128, la (5.45), p. 129, e la (5.12), p. 123.

⁷³Cfr. la (5.35), p. 128.

⁷⁴Le tre equazioni scalari (5.73) rappresentano le tre equazioni di equilibrio alla traslazione, in direzione x , y e z rispettivamente, di un cubetto intorno del generico punto P del corpo (cfr. il par. 5.2.4, p. 131).

Le tre equazioni differenziali (5.73) alle derivate parziali, con la condizione al contorno (5.71c) non sono in generale sufficienti a determinare in modo univoco le nove componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, sei sole componenti indipendenti per via della simmetria (5.71b). Si dice che il problema delle tensioni è *staticamente indeterminato*.⁷⁵ La condizione per l'esistenza di almeno una soluzione è che le forze \mathbf{f} e \mathbf{p} siano globalmente equilibrate, ovvero sia che siano soddisfatte le equazioni di equilibrio sia alla traslazione che alla rotazione attorno a un punto di tutto il corpo \mathcal{B} soggetto a tali forze:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \, dV = \mathbf{0}, \quad (5.74a)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV = \mathbf{0}. \quad (5.74b)$$

In tal caso esistono infinite soluzioni che si ottengono sommando ad una generica soluzione della equazione indefinita di equilibrio (5.72), con la condizione al contorno (5.71c), le infinite soluzioni del problema omogeneo associato, ovvero sia del problema corrispondente a forze di volume e di superficie nulle:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{su } \partial\mathcal{B}. \quad (5.75)$$

Si noti che un sistema di forze nulle è sempre globalmente equilibrato.

Le soluzioni del problema omogeneo (5.75) sono note con il nome di *autotensioni*⁷⁶ poiché tali tensioni interne non hanno bisogno della presenza di forze esterne applicate per essere generate. Questo significa che lungo una qualunque superficie che divide il corpo in due parti la distribuzione delle tensioni interne non è in generale nulla, nonostante siano nulle la risultante e il momento risultante di tale distribuzione (fig. 5.22).

La configurazione che un solido assume quando non è soggetto a forze esterne viene detta *configurazione naturale*⁷⁷ nel caso e solo nel caso in cui il corpo, nella data configurazione, non sia soggetto ad autotensioni.

5.7.2 Indeterminazione dinamica del moto e della tensione

Si analizza ora brevemente il problema del moto, problema che dal punto di vista lagrangiano richiede sia la determinazione delle configurazioni che

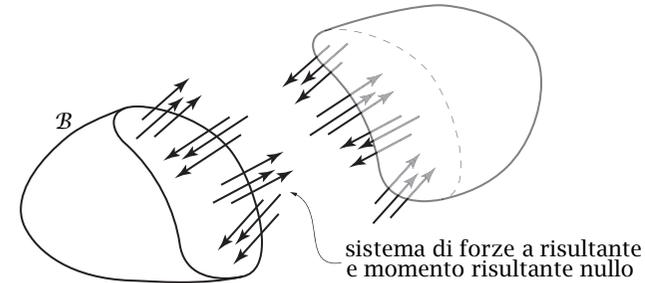


Figura 5.22: Autotensioni

il corpo assume nel corso del tempo che i campi di sforzo che agiscono in tali configurazioni. Come già visto,⁷⁸ una configurazione può per esempio essere individuata, rispetto alla configurazione di riferimento, dal campo degli spostamenti \mathbf{u} , che nel caso del moto è funzione anche del tempo.

Si consideri innanzitutto il sistema di tre equazioni differenziali alle derivate parziali (5.56), componenti scalari dell'equazione del moto, con la condizione al contorno (5.71c), quale sistema definente il problema della determinazione del campo di sforzo $\boldsymbol{\sigma}$ nella configurazione del corpo individuata dal campo \mathbf{u} degli spostamenti ad un dato istante, campo che fornisce anche, via derivazione materiale, il campo delle velocità e quindi il campo delle accelerazioni richiesto dal sistema differenziale stesso. Analogamente al caso statico, tre equazioni differenziali non sono in generale sufficienti a determinare in modo univoco le nove componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, sei sole componenti indipendenti per via della simmetria (5.71b). La condizione per l'esistenza di almeno una soluzione è che le forze \mathbf{f} e \mathbf{p} e la quantità di moto $\rho\mathbf{v}$ soddisfino le equazioni di bilancio globali, sia della quantità di moto che del momento della quantità di moto:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{f} - \rho\dot{\mathbf{v}}) \, dV = \mathbf{0}, \quad (5.76a)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times (\mathbf{f} - \rho\dot{\mathbf{v}}) \, dV = \mathbf{0}. \quad (5.76b)$$

Se il campo degli spostamenti \mathbf{u} definisce un moto possibile allora deve soddisfare il bilancio globale (5.76), e le opportune condizioni al contorno.

⁷⁸cfr. il par. 3.1.1, p. 69.

⁷⁵Statically indeterminate problem nella letteratura inglese.

⁷⁶Self-equilibrated stress nella letteratura inglese.

⁷⁷Natural configuration nella letteratura inglese.

In tal caso esistono quindi in generale infinite soluzioni che si ottengono sommando ad una generica soluzione dell'equazione del moto (5.71a), con la condizione al contorno (5.71c), le infinite soluzioni del problema omogeneo associato, ovvero sia del problema corrispondente a forze di volume e di superficie nulle e ad accelerazioni nulle, che per la generica configurazione nel corso del moto coincide con il problema (5.75) che si ha nel caso statico e che definisce le autotensioni.

A sua volta il bilancio globale (5.76), indipendente dal campo di sforzo, non è in grado di determinare in modo univoco il moto, se non nel caso molto particolare del modello di corpo rigido. Infatti in tal caso il campo degli spostamenti \mathbf{u} è individuato da una traslazione e da una rotazione⁷⁹ che dipendono in totale da sei parametri scalari funzioni solo del tempo, univocamente determinati in generale dalle due equazioni vettoriali (5.76), con le opportune condizioni al contorno, che in componenti divengono sei equazioni differenziali alle derivate totali nei sei parametri scalari del moto.

Se ne può concludere che il moto è in generale indeterminato dalle condizioni di bilancio e che ogni moto possibile, soddisfacente quindi il bilancio globale e le opportune condizioni al contorno, definisce una successione di configurazioni nel tempo in ognuna delle quali lo stato di sforzo è indeterminato. È quindi evidente che anche nel caso in cui l'ipotesi di piccoli spostamenti e piccole deformazioni è soddisfatta, rendendo quindi lecito utilizzare il modello di corpo rigido per determinare la posizione approssimata che il corpo assume nel corso del tempo, resta comunque indeterminato il campo delle tensioni interne. Non si può quindi prescindere dall'analizzare il campo delle deformazioni del corpo e di come queste siano legate al campo di sforzo allo scopo di rendere determinato il campo di sforzo stesso, senza contare il fatto che spesso la conoscenza sia del campo dei piccoli spostamenti a meno di un moto rigido che di quello delle piccole deformazioni è indispensabile di per sé stessa.

⁷⁹Cfr. la (3.36), p. 80.

ANALISI DELLA DEFORMAZIONE

6.1 Tensore di deformazione

Il gradiente della deformazione \mathbf{F} e il suo inverso forniscono la corrispondenza tra gli elementi di linea materiali (indeformati) $d\mathbf{X}$ e quelli spaziali (deformati) $d\mathbf{x}$:¹

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (6.1)$$

fornendo tutte le informazioni che occorrono nella valutazione della deformazione nell'intorno di un punto.

Nel caso e solo nel caso in cui un corpo deformabile è soggetto a un moto rigido la deformazione effettiva del corpo stesso è ovunque nulla. Si ricorda che in in tal caso il campo degli spostamenti risulta somma, in generale, di una traslazione e di una rotazione:²

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_O + (\mathbf{R} - \mathbf{I})(\mathbf{X} - \mathbf{O}), \quad (6.2)$$

dove \mathbf{u}_O è lo spostamento di un punto \mathbf{O} del corpo scelto quale polo, \mathbf{R} il tensore rotazione, \mathbf{I} il tensore identità e \mathbf{X} un generico punto materiale. Differenziando la (6.2) tenendo conto che \mathbf{u}_O e \mathbf{R} sono indipendenti dal punto si ottiene:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R} - \mathbf{I}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{R}, \quad (\text{moto rigido}) \quad (6.3)$$

¹Cfr. la (3.10), p. 71.

²Cfr. la (3.36), p. 80.

dove \mathbf{H} è il gradiente degli spostamenti e \mathbf{F} il gradiente della deformazione.³ Si ricordi ora che se il campo degli spostamenti rigido è piccolo allora il tensore differenza $\mathbf{R} - \mathbf{I}$, e quindi \mathbf{H} , è approssimativamente emisimmetrico.⁴ Ne consegue quindi che nell'ambito di una teoria del primo ordine, in cui è possibile individuare la posizione finale del corpo per il tramite di un campo di spostamenti piccoli a partire da una opportuna configurazione indeformata del corpo stesso, se la deformazione del corpo è nulla ovunque allora il gradiente degli spostamenti è costante e, approssimativamente, emisimmetrico.

6.1.1 Decomposizione additiva del gradiente degli spostamenti

Se invece il corpo si deforma il gradiente degli spostamenti \mathbf{H} sarà in generale variabile da punto a punto e, come qualunque tensore doppio, potrà essere decomposto nella somma di una parte simmetrica $\boldsymbol{\epsilon}$ e di una parte emisimmetrica $\boldsymbol{\omega}$ anch'esse funzioni del punto:⁵

$$\mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}, \quad (6.4)$$

³Cfr. il par. 3.1.2, p. 70.

⁴Cfr. il par. 3.3.6, p. 99.

⁵Cfr. le (1.72), p. 27.

dove:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} - \mathbf{H}^T). \quad (6.5)$$

Dato un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Oxyz$, le definizioni (6.5) si scrivono:⁶

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.6)$$

dove le generiche coordinate dei punti nella configurazione di riferimento del corpo si sono ora indicate con x_i , in luogo di X_i , come si farà anche nel seguito tutte le volte che non sussisterà la necessità di distinguere tra la configurazione di riferimento indeformata e quella deformata, configurazioni che nell'ipotesi di piccoli spostamenti approssimativamente coincidono.

Poiché \mathbf{H} è dello stesso ordine degli spostamenti,⁷ questo è vero anche per le sue parti $\boldsymbol{\epsilon}$ simmetrica e $\boldsymbol{\omega}$ emisimmetrica. Nell'approssimazione lineare vale allora la seguente decomposizione moltiplicativa del gradiente della deformazione:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}). \quad (6.7)$$

Dimostrazione. Infatti, tenendo conto della (6.4), si ha:

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\epsilon},$$

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}.$$

Poiché i termini $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}$ sono del secondo ordine negli spostamenti ne risultano le (6.7), come volevasi dimostrare. Si noti che in generale $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\epsilon} \neq \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{\omega}$ per cui l'ultima uguaglianza della (6.7) vale solo nell'approssimazione lineare. ■

6.1.2 Tensori di deformazione e di rotazione infinitesime

L'azione di \mathbf{F} su un qualunque vettore materiale equivale dunque, nell'approssimazione lineare, all'applicazione successiva di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ e di $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ in

un ordine qualunque. La (6.7) consente di esprimere la relazione tra un elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$ e il corrispondente elemento di linea spaziale nella forma approssimata:⁸

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) (\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}) d\mathbf{X}. \quad (6.8)$$

Poiché $\boldsymbol{\omega}$ è emisimmetrico, la quantità $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta, a meno di infinitesimi di ordine superiore negli spostamenti, una rotazione rigida dell'intorno del punto X in cui $\boldsymbol{\omega}$ è calcolato (è una rotazione rigida dell'intorno di X , non di tutto il corpo, poiché $\boldsymbol{\omega}$ è in generale variabile da punto a punto). Per tale motivo $\boldsymbol{\omega}$ è detto *tensore di rotazione infinitesima*,⁹ dove la dizione "infinitesima" ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare. La rotazione rigida dell'intorno può essere dunque rappresentata da un vettore $\boldsymbol{\varphi}$, detto *vettore di rotazione infinitesima*¹⁰ tale che:

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{a} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{a}, \quad (6.9)$$

per ogni vettore \mathbf{a} . Si ricordi che le relazioni tra le componenti del tensore di rotazione infinitesima e quelle del vettore di rotazione infinitesima sono:¹¹

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{Bmatrix} \omega_{zy} \\ \omega_{xz} \\ \omega_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (6.10)$$

Si ribadisce che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}$ rappresenta una rotazione dell'intorno di un punto del continuo *nell'ipotesi di piccoli spostamenti*. In generale una rotazione è rappresentata da una matrice ortogonale e non, a meno dell'identità, da una matrice emisimmetrica.

Nell'approssimazione lineare l'azione del solo termine $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$, dipendente solo dalla parte simmetrica di \mathbf{H} , genera quindi tutta la deformazione dell'intorno del punto in cui \mathbf{H} è definito, poiché gli spostamenti dell'intorno che così si ottengono sono depurati dal solo moto rigido dell'intorno stesso. Inoltre, la deformazione dell'intorno di un punto è nulla se il moto dell'intorno è rigido, cioè se, nell'approssimazione lineare, \mathbf{H} è emisimmetrico e quindi se la parte simmetrica è nulla. La parte simmetrica

⁸Cfr. la (3.10), p. 71.

⁹*Infinitesimal rotation tensor* nella letteratura inglese.

¹⁰*Infinitesimal rotation vector* nella letteratura inglese.

¹¹Cfr. la seconda delle (1.92), p. 29, e la seconda delle (1.95), p. 30.

⁶Cfr. la seconda delle (3.14), p. 71.

⁷Cfr. il par. 3.3.5, p. 99.

ϵ di \mathbf{H} rappresenta dunque tutta la deformazione nell'intorno di un punto e si annulla se e solo se l'intorno non si deforma. Per tale motivo ϵ è chiamato *tensore di deformazione infinitesima*,¹² dove ancora una volta la dizione "infinitesima" ricorda che ciò è vero solo nell'approssimazione lineare. Inoltre, nell'approssimazione lineare, $\mathbf{I} + \epsilon$ è un tensore simmetrico definito positivo poiché se ϵ è piccolo allora i suoi autovalori ϵ_ξ , ϵ_η e ϵ_ζ sono piccoli e quindi gli autovalori $1 + \epsilon_\xi$, $1 + \epsilon_\eta$ e $1 + \epsilon_\zeta$ di $\mathbf{I} + \epsilon$ sono positivi.¹³

Si noti infine che essendo $\mathbf{I} + \epsilon$ simmetrico, possiede almeno tre direzioni principali ortogonali tra loro, che d'altronde coincidono con le direzioni principali di ϵ . Per effetto dell'applicazione di $\mathbf{I} + \epsilon$ queste tre direzioni principali restano invariate mentre per effetto della successiva applicazione di $\mathbf{I} + \omega$ vengono, approssimativamente, ruotate restando quindi, almeno nell'approssimazione lineare, ortogonali tra loro. Ne risulta che *esistono sempre tre direzioni uscenti da un punto, individuate dalle direzioni principali di ϵ , ortogonali tra loro nella configurazione di riferimento e che restano approssimativamente ortogonali anche nella configurazione deformata*. È evidente che queste tre direzioni variano in generale da punto a punto, così come nello stesso punto variano nel corso del tempo durante un eventuale moto del corpo, variando in generale ϵ da punto a punto e nello stesso punto in funzione del tempo nel corso di un moto.

◇ ◇ ◇

Tensori di Cauchy-Green. Se si vogliono valutare le deformazioni in cinematica finita, quindi senza tener conto di alcuna approssimazione, occorre utilizzare la relazione (6.1) per esprimere la corrispondenza tra gli elementi di linea indeformati $d\mathbf{X}$ e quelli deformati $d\mathbf{x}$.

Se si utilizza la (6.1) per valutare la lunghezza $d\ell$ di un elemento di linea deformato $d\mathbf{x}$ in funzione del corrispondente elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$ si ottiene:

$$d\ell^2 = |d\mathbf{x}|^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F}) d\mathbf{X}.$$

Questa relazione suggerisce di definire il seguente tensore doppio simmetrico:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (6.11)$$

la cui forma quadratica fa corrispondere ad un elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$ la lunghezza $d\ell$ del corrispondente elemento di linea spaziale $d\mathbf{x}$:

$$d\ell^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (6.12)$$

¹²Linearized strain tensor nella letteratura inglese.

¹³Cfr. il par. 1.4.6, p. 38.

Il tensore doppio \mathbf{C} , detto *tensore destro di Cauchy-Green*,¹⁴ è simmetrico, come evidente dalla sua definizione (6.11), e definito positivo dato che la forma quadratica associata (6.12) è definita positiva. Poiché, come espresso dalla (6.12), agisce su elementi di linea materiali è un tensore materiale o lagrangiano, ovverossia un tensore adatto alla descrizione lagrangiana che si utilizza in meccanica dei solidi. Essendo un tensore materiale simmetrico, il tensore destro di Cauchy-Green definisce una base ortonormale di autoversori materiali \mathbf{e}_{0i} . Gli autovalori λ_i di \mathbf{C} non sono altro che i quadrati degli stiramenti degli elementi di linea materiali principali dX_i , come si può dedurre dalla (6.12):¹⁵

$$\lambda_i = \left(\frac{|d\mathbf{x}_i|}{|d\mathbf{X}_i|} \right)^2 = (1 + \epsilon_i)^2, \quad (6.13)$$

dove ϵ_i è la dilatazione dell'elemento di linea principale $d\mathbf{X}_i$.

Analogamente a quanto visto or ora, se si utilizza l'inversa della (6.1) per valutare la lunghezza dL di un elemento di linea indeformato $d\mathbf{X}$ in funzione del corrispondente elemento di linea deformato $d\mathbf{x}$ si ottiene la relazione:

$$dL^2 = |d\mathbf{X}|^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{F}\mathbf{F}^T)^{-1} d\mathbf{x}.$$

Questa suggerisce di definire un secondo tensore doppio simmetrico:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad (6.14)$$

tale che la forma quadratica associata al suo inverso \mathbf{B}^{-1} faccia corrispondere ad un elemento di linea spaziale $d\mathbf{x}$ il quadrato della lunghezza dL del corrispondente elemento di linea materiale $d\mathbf{X}$:

$$dL^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (6.15)$$

Il tensore doppio \mathbf{B} , detto *tensore sinistro di Cauchy-Green*,¹⁶ è simmetrico e definito positivo, analogamente a \mathbf{C} . Che sia simmetrico consegue immediatamente dalla sua definizione (6.14), che sia definito positivo è invece conseguenza del fatto che la forma quadratica (6.15) associata al suo inverso \mathbf{B}^{-1} , noto come *tensore di Finger*,¹⁷ è definita positiva. Poiché \mathbf{B}^{-1} , come espresso dalla (6.15), agisce su elementi di linea spaziali è un tensore spaziale o euleriano, alla stregua del suo inverso \mathbf{B} , ovverossia un tensore adatto alla descrizione euleriana che si utilizza in meccanica dei fluidi. Essendo un tensore euleriano simmetrico, il tensore sinistro

¹⁴Right Cauchy-Green tensor nella letteratura inglese.

¹⁵Cfr. la definizione di stiramento al par. 3.1.3, p. 74.

¹⁶Left Cauchy-Green tensor nella letteratura inglese.

¹⁷Finger's deformation tensor nella letteratura inglese. A volte \mathbf{B}^{-1} viene citato quale *left Cauchy-Green tensor* in luogo di \mathbf{B} , associando in tal caso il nome *Cauchy-Green tensor* alle proprietà espresse dalle corrispondenti forme quadratiche (6.12) e (6.15).

di Cauchy-Green \mathbf{B} definisce quindi una base ortonormale di autoversori spaziali \mathbf{e}_i .

Vale l'importante proprietà: $d\mathbf{X}_i$ è un elemento di linea materiale principale di \mathbf{C} corrispondente all'autovalore λ_i se e solo se $d\mathbf{x}_i = \mathbf{F}d\mathbf{X}_i$ è un elemento di linea spaziale principale di \mathbf{B} corrispondente allo stesso autovalore λ_i , come facilmente deducibile dalla uguaglianza:

$$\mathbf{B}(\mathbf{F}d\mathbf{X}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{C}d\mathbf{X}_i) = \lambda_i(\mathbf{F}d\mathbf{X}_i).$$

Inoltre se $d\mathbf{X}_i$ e $d\mathbf{X}_j$ sono due elementi di linea materiali principali di \mathbf{C} ortogonali tra loro allora $d\mathbf{x}_i = \mathbf{F}d\mathbf{X}_i$ e $d\mathbf{x}_j = \mathbf{F}d\mathbf{X}_j$ sono due elementi di linea spaziali principali di \mathbf{B} pure ortogonali tra loro, come deducibile dalla relazione:

$$(\mathbf{F}d\mathbf{X}_i) \cdot (\mathbf{F}d\mathbf{X}_j) = d\mathbf{X}_i \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}_j) = \lambda_j d\mathbf{X}_i \cdot d\mathbf{X}_j = 0.$$

Ne consegue che gli elementi di linea principali materiali $d\mathbf{X}_i$ di \mathbf{C} , che definiscono la base ortonormale \mathbf{e}_{0i} , a seguito della deformazione si trasformano in tre elementi di linea principali spaziali $d\mathbf{x}_i$ di \mathbf{B} , ortogonali tra loro e che quindi definiscono una base ortonormale di autoversori spaziali \mathbf{e}_i . Si insiste sull'importante fatto che le direzioni materiali individuate dalla base \mathbf{e}_{0i} e quelle spaziali individuate dalla base \mathbf{e}_i si corrispondono nella deformazione per cui se ne può dedurre che *per ogni punto del corpo esistono sempre tre direzioni uscenti dal punto stesso che sono ortogonali prima e dopo la deformazione, individuate dalle direzioni principali di \mathbf{C} nella configurazione di riferimento e da quelle di \mathbf{B} nella configurazione deformata.*

Decomposizione polare del gradiente della deformazione. La relazione (6.7) valida nell'approssimazione lineare corrisponde approssimativamente alla decomposizione del gradiente della deformazione nel prodotto di un tensore simmetrico definito positivo per un tensore rotazione. Nel caso in cui gli spostamenti non sono piccoli, quindi nella cosiddetta cinematica finita, il gradiente della deformazione \mathbf{F} è in effetti decomponibile in modo esatto in due prodotti di tale tipo:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (6.16)$$

dove \mathbf{U} , detto *tensore destro di stiramento*¹⁸ e \mathbf{V} , detto *tensore sinistro di stiramento*,¹⁹ sono simmetrici e definiti positivi mentre \mathbf{R} è un tensore rotazione. La prima delle due decomposizioni (6.16) è detta *decomposizione polare destra*,²⁰ mentre la seconda è detta *decomposizione polare sinistra*.²¹

¹⁸Right stretch tensor nella letteratura inglese.

¹⁹Left stretch tensor nella letteratura inglese.

²⁰Right polar decomposition nella letteratura inglese.

²¹Left polar decomposition nella letteratura inglese.

Dimostrazione. Si noti che affinché valga la prima delle (6.16) deve risultare:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2, \quad (6.17)$$

dato che si è supposto \mathbf{U} simmetrico e che $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$.²² La (6.17) impone quindi che sia:²³

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}. \quad (6.18)$$

D'altronde se si definisce \mathbf{U} tramite la (6.18), affinché valga la prima delle (6.16) deve essere:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}. \quad (6.19)$$

Questa relazione definisce un tensore rotazione poiché:

$$(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1})^T (\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}) = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^2 \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I},$$

e inoltre:

$$\det(\mathbf{F}\mathbf{U}^{-1}) = \det \mathbf{F} / \det \mathbf{U} > 0,$$

dato che sia \mathbf{F} che \mathbf{U} hanno determinante positivo. Resta quindi dimostrata la decomposizione polare destra definita dalla prima delle (6.16), con \mathbf{U} definito dalla (6.18) e \mathbf{R} dalla (6.19).

Assodato che vale la prima delle (6.16) la si sfrutti nella seconda per ottenere:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T. \quad (6.20)$$

Poiché per via della (6.19) risulta:

$$\mathbf{V}^2 = \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{U}\mathbf{R}^T = \mathbf{F}\mathbf{U}^{-1} \mathbf{U}^2 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{F}^T = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{B} \quad (6.21)$$

si ha infine:

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}, \quad (6.22)$$

il che mostra che \mathbf{V} è simmetrico e definito positivo. ■

Nel caso della decomposizione destra il tensore destro di stiramento \mathbf{U} lascia invariate le proprie direzioni principali, che per via della (6.18) coincidono con quelle di \mathbf{C} , e il tensore rotazione \mathbf{R} le ruota poi nella loro posizione finale che come visto al paragrafo precedente coincidono con le direzioni principali di \mathbf{B} , che per via della (6.22) coincidono con quelle di \mathbf{V} . Il tensore rotazione \mathbf{R} ruota quindi la base principale \mathbf{e}_{0i} di \mathbf{C} , e quindi di \mathbf{U} , nella base principale \mathbf{e}_i di \mathbf{B} , e quindi di \mathbf{V} , e resta di conseguenza definito dalla proprietà:

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{R}\mathbf{e}_{0i}. \quad (6.23)$$

²²Cfr. la (1.161), p. 39.

²³Cfr. il par. 1.4.6, p. 38.

Nel caso della decomposizione sinistra il tensore rotazione \mathbf{R} ruota tutte le direzioni, ruotando in particolare le direzioni principali di \mathbf{U} nelle direzioni principali di \mathbf{V} come espresso dalla (6.23), dopodiché interviene il tensore sinistro di stiramento \mathbf{V} che in particolare lascia invariate le proprie direzioni principali. Entrambe le circostanze sono in accordo con il fatto, già dedotto al paragrafo precedente, che per ogni punto del corpo esistono sempre tre direzioni uscenti dal punto stesso che sono ortogonali prima e dopo la deformazione.

Dall'analisi precedente risulta che il problema della decomposizione polare è completamente risolto dalla valutazione sia dei valori principali, come visto nel paragrafo precedente coincidenti, che delle direzioni principali dei tensori destro \mathbf{C} e sinistro \mathbf{B} di Cauchy-Green. Per via della (6.13) e delle definizioni (6.18) e (6.22) i valori principali di \mathbf{U} e \mathbf{V} valgono $1 + \epsilon_i$, e coincidono quindi con gli stiramenti degli elementi di linea principali, circostanza che giustifica la denominazione di tensori di stiramento. La valutazione delle direzioni principali di \mathbf{C} e di \mathbf{B} individuano le due basi ortonormali destre \mathbf{e}_{0i} e \mathbf{e}_i rispettivamente, la prima nella configurazione di riferimento e la seconda nella configurazione deformata.

Confrontando la decomposizione polare (6.16) con quella (6.8), valida nell'approssimazione lineare, ne risultano le approssimazioni lineari di \mathbf{U} , \mathbf{V} e \mathbf{R} :

$$\mathbf{U} \approx \mathbf{V} \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}, \quad \mathbf{R} \approx \mathbf{I} + \boldsymbol{\omega}. \quad (6.24)$$

Dalle (6.17) e (6.21) si hanno poi le approssimazioni lineari di \mathbf{C} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} \approx \mathbf{B} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}, \quad (6.25)$$

poiché $\boldsymbol{\epsilon}^2$ è del secondo ordine nelle deformazioni.

Tensori di Green-Lagrange e di Almansi. Le forme quadratiche (6.12) e (6.15) associate rispettivamente al tensore destro e all'inverso del tensore sinistro di Cauchy-Green forniscono, come visto, i quadrati delle lunghezze degli elementi di linea deformati in funzione di quelli indeformati e viceversa. Togliendo dalla forma quadratica (6.12) la forma quadratica $dL^2 = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{X}$, funzione degli elementi di linea indeformati, e togliendo la seconda forma quadratica (6.15) dalla forma quadratica $d\ell^2 = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{I} d\mathbf{x}$, funzione degli elementi di linea deformati, si ottengono due forme quadratiche, la prima funzione degli elementi di linea indeformati e la seconda degli elementi di linea deformati, associate ai tensori doppi $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ e $\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}$ rispettivamente e che forniscono entrambe la differenza dei quadrati delle lunghezze degli elementi di linea prima e dopo la deformazione:

$$d\ell^2 - dL^2 = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) d\mathbf{x}. \quad (6.26)$$

Tale differenza è nulla per ogni linea se solo se la deformazione nell'intorno del punto è nulla e quindi $\mathbf{C} - \mathbf{I}$ e $\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}$ si annullano se e solo la deformazione nell'intorno del punto è nulla. Ne consegue che questi due tensori doppi si prestano

al ruolo di tensori di deformazione finita, l'uno materiale e l'altro spaziale poiché come visto l'uno agisce su linee materiali (indeformate) e l'altro su linee spaziali (deformate).

Si consideri ora che in virtù della (6.25) si ha, nell'approssimazione lineare:

$$\boldsymbol{\epsilon} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}), \quad (6.27)$$

dato che, sempre nell'approssimazione lineare, l'inversa di $\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}$ è $\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\epsilon}$ poiché $(\mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{I} - 2\boldsymbol{\epsilon}) \approx \mathbf{I}$. Volendo che i tensori di deformazione finita si riducano, nell'approssimazione lineare, al tensore di deformazione infinitesima, occorre quindi tenere conto del coefficiente 1/2. Di conseguenza è tradizionale definire il tensore di deformazione materiale \mathbf{E} , detto *tensore di deformazione di Green-Lagrange*,²⁴ e quello spaziale \mathbf{e} , detto *tensore di Almansi*,²⁵ nel modo seguente:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}). \quad (6.28)$$

La relazione tra il gradiente della deformazione \mathbf{F} e il gradiente materiale degli spostamenti \mathbf{H} ²⁶ permette di porre il tensore destro di Cauchy-Green \mathbf{C} e il tensore di deformazione di Green-Lagrange \mathbf{E} in funzione del gradiente materiale degli spostamenti stesso:

$$\mathbf{C} = (\mathbf{I} + \mathbf{H})^T (\mathbf{I} + \mathbf{H}) = \mathbf{I} + \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \quad (6.29a)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \boldsymbol{\epsilon} + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H}. \quad (6.29b)$$

Per quel che riguarda l'inverso \mathbf{B}^{-1} del tensore sinistro di Cauchy-Green e il tensore di deformazione di Almansi \mathbf{e} , questi si possono mettere in funzione del gradiente spaziale degli spostamenti $\text{grad } \mathbf{u}$. Tenendo conto che i gradienti degli spostamenti, materiale \mathbf{H} e spaziale $\text{grad } \mathbf{u}$, devono fornire lo stesso incremento di spostamento in funzione degli elementi di linea rispettivamente materiali $d\mathbf{X}$ e spaziali $d\mathbf{x}$ che si corrispondono nella deformazione, deve essere:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{H} d\mathbf{X} = \text{grad } \mathbf{u} d\mathbf{x} = \text{grad } \mathbf{u} \mathbf{F} d\mathbf{X}, \quad (6.30)$$

²⁴Introdotta da Green e da Saint-Venant è nota in letteratura anche come *tensore di deformazione di Green* oppure *tensore di deformazione di Green Saint-Venant*. Il riferimento a Lagrange dipende semplicemente dal fatto che tale tensore di deformazione è materiale, quindi lagrangiano. Nella letteratura inglese è citato come *Green-Lagrange strain tensor*, *Green strain tensor* oppure *Green Saint-Venant strain tensor*.

²⁵Introdotta da Almansi e Hamel è nota in letteratura anche come *tensore di deformazione di Almansi-Hamel*. Per il fatto che tale tensore di deformazione è spaziale, quindi euleriano, è anche a volte citato quale *tensore euleriano di deformazione*. Nella letteratura inglese è citato come *Almansi strain tensor* oppure *Almansi-Hamel strain tensor*.

²⁶Cfr. la (3.13), p. 71.

per ogni vettore dX . Si ottiene allora $\text{grad } \mathbf{u}$ in funzione dell'inverso di \mathbf{F} :

$$\text{grad } \mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{F} - \mathbf{I})\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}. \quad (6.31)$$

e viceversa:

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u}. \quad (6.32)$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{-1} &= (\mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u})^T (\mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{I} - \text{grad } \mathbf{u} - \text{grad } \mathbf{u}^T + \text{grad } \mathbf{u}^T \text{grad } \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (6.33a)$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\text{grad } \mathbf{u} + \text{grad } \mathbf{u}^T) - \frac{1}{2} \text{grad } \mathbf{u}^T \text{grad } \mathbf{u}. \quad (6.33b)$$

Si noti che per via delle definizioni (6.28) i valori principali di \mathbf{E} valgono $\frac{1}{2} \{(1 + \epsilon_i)^2 - 1\}$ mentre le sue direzioni principali coincidono con quelle di \mathbf{C} . Analogamente i valori principali di \mathbf{e} , tenendo conto che i valori principali di \mathbf{B}^{-1} sono gli inversi di quelli di \mathbf{B} che coincidono con quelli di \mathbf{C} , valgono $\frac{\{(1 + \epsilon_i)^2 - 1\}}{2(1 + \epsilon_i)^2}$, mentre le sue direzioni principali coincidono con quelle di \mathbf{B} , che sono le stesse di \mathbf{B}^{-1} .

◇ ◇ ◇

6.2 Calcolo delle misure di deformazione

Al fine del calcolo delle misure di deformazione si terrà conto che, per via della (6.8), è possibile depurare gli incrementi degli spostamenti nell'intorno di un punto della quota dovuta alla rotazione rigida e scrivere di conseguenza:

$$d\mathbf{x} \approx (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) d\mathbf{X}, \quad \text{oppure} \quad d\mathbf{u} \approx \boldsymbol{\epsilon} d\mathbf{X}, \quad (6.34)$$

che rappresenta l'effetto di quella che a volte viene chiamata *deformazione pura*.

6.2.1 Calcolo della dilatazione lineare

Si vuole valutare nel seguito la dilatazione lineare in una data direzione \mathbf{r}_0 uscente da un punto materiale X in cui il tensore di deformazione sia $\boldsymbol{\epsilon}$. Un qualunque elemento di linea materiale dX_r di direzione \mathbf{r}_0 può essere messo nella forma (fig. 6.1):

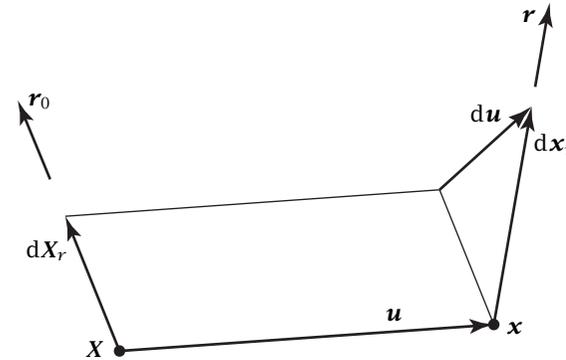


Figura 6.1: Calcolo della dilatazione lineare

$$dX_r = dL_r \mathbf{r}_0, \quad (6.35)$$

se \mathbf{r}_0 e dL_r sono rispettivamente il versore equiverso all'elemento di linea dX_r e la lunghezza dello stesso elemento di linea. All'elemento di linea materiale dX_r , uscente dal punto spaziale X , corrisponde a seguito delle deformazione pura (6.34) l'elemento di linea spaziale dx_r , uscente dal corrispondente punto spaziale x , tale che:

$$d\mathbf{x}_r = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) dX_r = dL_r (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{r}_0. \quad (6.36)$$

La lunghezza $d\ell_r$ di $d\mathbf{x}_r$ risulta quindi:

$$d\ell_r = \sqrt{d\mathbf{x}_r \cdot d\mathbf{x}_r} = dL_r \sqrt{\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \mathbf{r}_0}. \quad (6.37)$$

Tenendo conto che nell'ipotesi di piccoli spostamenti, e quindi di piccole deformazioni, vale l'approssimazione:²⁷

$$(\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 = \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^2 \approx \mathbf{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}, \quad (6.38)$$

e sfruttando inoltre lo sviluppo in serie di MacLaurin:

$$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.39)$$

dalla (6.37) si ottiene allora:

$$d\ell_r \approx dL_r \sqrt{1 + 2\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0} \approx dL_r (1 + \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0). \quad (6.40)$$

²⁷In conformità alla (6.25).

Poiché per definizione la dilatazione lineare ϵ_r della linea uscente da X e avente la direzione di \mathbf{r}_0 vale:²⁸

$$\epsilon_r = \frac{d\ell_r - dL_r}{dL_r}, \quad (6.41)$$

utilizzando la (6.40) si ottiene infine:

$$\epsilon_r \approx \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{r}_0. \quad (6.42)$$

◇ ◇ ◇

Calcolo della dilatazione lineare in cinematica finita. Procedendo come fatto sopra ed utilizzando la (6.12) per il calcolo della lunghezza $d\ell_r$ dell'elemento di linea spaziale $d\mathbf{x}_r$, si ottiene:

$$\epsilon_r = \sqrt{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{r}_0} - 1, \quad (6.43)$$

dove \mathbf{C} è il tensore destro di Cauchy-Green. Si noti che se \mathbf{r}_0 è una direzione principale di \mathbf{C} di autovalore λ_i , dalla (6.43) si riottiene la (6.13).

Alternativamente, utilizzando la (6.15) per il calcolo della lunghezza dL_r dell'elemento di linea materiale dX_r , si ottiene:

$$\epsilon_r = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{r}}} - 1, \quad (6.44)$$

dove \mathbf{B} è il tensore sinistro di Cauchy-Green e \mathbf{r} il versore della linea spaziale r equiverso a $d\mathbf{x}_r$.

◇ ◇ ◇

6.2.2 Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali

Siano \mathbf{r}_0 e \mathbf{s}_0 i versori di due direzioni uscenti dal punto materiale X di un continuo e ortogonali tra loro (fig. 6.2), quindi tali che:

$$\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0. \quad (6.45)$$

Due elementi di linea dX_r ed dX_s uscenti da X ed aventi le direzioni e i versi di \mathbf{r}_0 e \mathbf{s}_0 possono essere messi nella forma:

$$dX_r = dL_r \mathbf{r}_0, \quad dX_s = dL_s \mathbf{s}_0, \quad (6.46)$$

²⁸Cfr. la (3.23), p. 74, tenendo conto che nella (6.41) sono utilizzati i differenziali e quindi non occorre l'esplicita indicazione del limite.

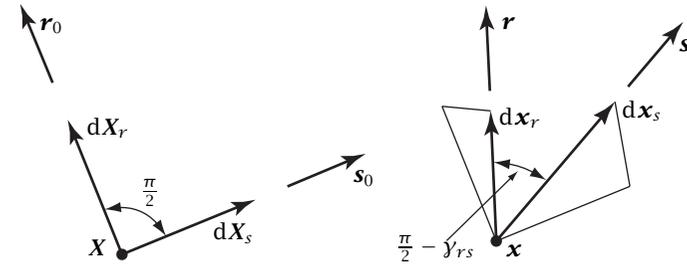


Figura 6.2: Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali

dove dL_r e dL_s sono le lunghezze dei due elementi di linea. Gli elementi di linea $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ corrispondenti nella deformazione ai due elementi di linea materiali dX_r e dX_s valgono:

$$d\mathbf{x}_r = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) dX_r = dL_r (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{r}_0, \quad (6.47a)$$

$$d\mathbf{x}_s = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) dX_s = dL_s (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{s}_0, \quad (6.47b)$$

avendo ancora una volta depurato, in accordo alla (6.34), il contributo dovuto alla rotazione rigida dell'intorno. Se γ_{rs} rappresenta lo scorrimento²⁹ tra gli elementi di linea dX_r e dX_s inizialmente ortogonali, l'angolo tra gli elementi spaziali $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ vale $\pi/2 - \gamma_{rs}$ e quindi risulta:³⁰

$$\sin \gamma_{rs} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \gamma_{rs} \right) = \frac{d\mathbf{x}_r \cdot d\mathbf{x}_s}{d\ell_r d\ell_s}, \quad (6.48)$$

dove $d\ell_r$ e $d\ell_s$ sono le lunghezze di $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ rispettivamente. Si tenga ora conto che tra le lunghezze $d\ell_r$ e $d\ell_s$ degli elementi di linea spaziali e quelle dL_r e dL_s degli elementi di linea materiali valgono le relazioni seguenti:

$$d\ell_r = (1 + \epsilon_r) dL_r, \quad d\ell_s = (1 + \epsilon_s) dL_s, \quad (6.49)$$

dove ϵ_r e ϵ_s sono le dilatazioni degli elementi di linea dX_r e dX_s rispettivamente. Inserendo nella (6.48) le relazioni (6.47) e (6.49) e tenendo conto che $\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon}$ è un tensore simmetrico si ottiene allora:

$$\gamma_{rs} = \arcsin \frac{\mathbf{r}_0 \cdot (\mathbf{I} + \boldsymbol{\epsilon})^2 \mathbf{s}_0}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (6.50)$$

²⁹Cfr. il par. 3.1.3, p. 75.

³⁰Cfr. la (3.28), p. 76.

Tenendo conto che $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{l} \mathbf{s}_0 = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$, per via della relazione di ortogonalità (6.45), ed utilizzando l'approssimazione (6.38) dalla (6.50) si ottiene:

$$\gamma_{rs} \approx \arcsin \frac{2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0)}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}. \quad (6.51)$$

Tenendo poi conto del seguente sviluppo in serie di MacLaurin:

$$(1 + x)^{-1} = 1 - x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.52)$$

risulta, nell'approssimazione lineare:

$$(1 + \epsilon_r)^{-1}(1 + \epsilon_s)^{-1} \approx 1 - \epsilon_r - \epsilon_s. \quad (6.53)$$

La (6.51), sfruttando l'approssimazione (6.53) e lo sviluppo in serie di MacLaurin della funzione arcsin:

$$\arcsin x = x + o(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6.54)$$

fornisce infine il risultato cercato:

$$\gamma_{rs} \approx 2(\mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0). \quad (6.55)$$

◇ ◇ ◇

Calcolo dello scorrimento tra due linee inizialmente ortogonali in cinematica finita. Utilizzando le relazioni (6.46), (6.48) e (6.49), valide senza restrizioni, tenendo conto della (6.1), si ottiene:

$$\sin \gamma_{rs} = \frac{\mathbf{F} d\mathbf{X}_r \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X}_s}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s) dL_r dL_s},$$

e quindi:

$$\sin \gamma_{rs} = \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{C} \mathbf{s}_0}{(1 + \epsilon_r)(1 + \epsilon_s)}, \quad (6.56)$$

dove \mathbf{C} è il tensore destro di Cauchy-Green e $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$.

Alternativamente, dalla (6.48) si ottiene direttamente:

$$\sin \gamma_{rs} = \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}, \quad (6.57)$$

se \mathbf{r} e \mathbf{s} sono rispettivamente i versori delle linee spaziali r e s equiversi a $d\mathbf{x}_r$ e $d\mathbf{x}_s$ corrispondenti di due linee materiali $\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_r$ e $\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}_s$ ortogonali, quindi tali che $\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{s} = 0$.

◇ ◇ ◇

6.2.3 Calcolo dello scorrimento tra una linea e una superficie inizialmente ortogonali

Si noti che il vettore $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ è l'immagine del versore della direzione s_0 dovuta all'azione della trasformazione $\boldsymbol{\epsilon}$. Dato che la dilatazione ϵ_s della linea s_0 vale $\mathbf{s}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$, ne risulta che la componente del vettore $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ nella direzione s_0 vale $\epsilon_s \mathbf{s}_0$ (fig. 6.3). La differenza $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0$ coincide quindi con la proie-

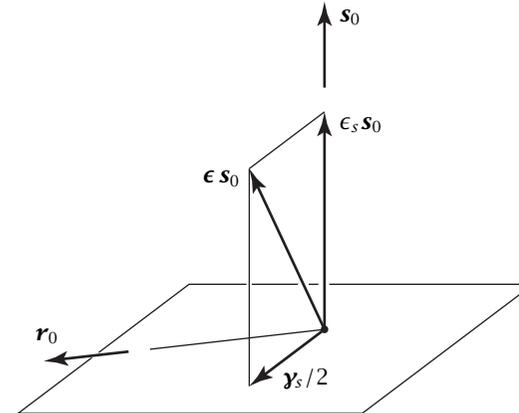


Figura 6.3: Scorrimento tra una linea e una superficie

zione del vettore immagine $\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0$ sul piano perpendicolare a s_0 . Detto \mathbf{r}_0 un generico vettore del piano ortogonale a s_0 , risulta allora:

$$2 \{ \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0 \} \cdot \mathbf{r}_0 = 2 \mathbf{r}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 \approx \gamma_{rs}, \quad (6.58)$$

per via della (6.55) e poiché $\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{s}_0 = 0$. Si tenga ora conto che, per l'ipotesi di piccole deformazioni, gli scorrimenti tra due linee, così come la differenza tra il versore di una linea deformata e quello della corrispondente linea indeformata, sono quantità piccole e che quindi ne consegue:

$$\sin \gamma_{rs} \approx \gamma_{rs}, \quad \mathbf{r} \approx \mathbf{r}_0, \quad \mathbf{s} \approx \mathbf{s}_0. \quad (6.59)$$

La (6.58) afferma allora che il vettore scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_s$ tra la linea s_0 e il piano ortogonale ad essa vale approssimativamente:

$$\boldsymbol{\gamma}_s \approx 2(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \epsilon_s \mathbf{s}_0) = 2(\boldsymbol{\epsilon} - \epsilon_s \mathbf{I}) \mathbf{s}_0. \quad (6.60)$$

e che lo scorrimento tra la linea \mathbf{s}_0 e la linea \mathbf{r}_0 inizialmente ortogonali si ottiene approssimativamente facendo agire \mathbf{y}_s su \mathbf{r}_0 :

$$\gamma_{rs} \approx \mathbf{y}_s \cdot \mathbf{r}_0. \quad (6.61)$$

Se poi x e y sono due assi ortogonali giacenti nel piano ortogonale alla direzione indeformata s_0 ne risulta la seguente scomposizione di \mathbf{y}_s :

$$\mathbf{y}_s \approx \gamma_{xs} \mathbf{e}_x + \gamma_{ys} \mathbf{e}_y. \quad (6.62)$$

Si ribadisce che il vettore scorrimento \mathbf{y}_s tra una linea ed una superficie ortogonale a questa giace nel piano tangente alla superficie deformata ed ha modulo $\sin \gamma_s$, con γ_s scorrimento massimo, mentre il vettore $2(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{s}_0 - \boldsymbol{\epsilon}_s \mathbf{s}_0)$ che l'approssima giace nel piano tangente alla superficie indeformata.

6.2.4 Componenti del tensore di deformazione

Sia dato un sistema di coordinate cartesiano ortogonale $Oxyz$ e siano \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y e \mathbf{e}_z i versori degli assi cartesiani. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, tenendo quindi conto della relazione (6.42), le dilatazioni delle linee uscenti da un punto materiale \mathbf{X} del continuo e parallele agli assi coordinati valgono:

$$\epsilon_x \approx \mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x, \quad \epsilon_y \approx \mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y, \quad \epsilon_z \approx \mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z, \quad (6.63)$$

se $\boldsymbol{\epsilon}$ è il tensore di deformazione infinitesima nell'intorno del punto \mathbf{X} . Analogamente, gli scorrimenti delle stesse linee, ricordando la relazione (6.55), risultano:

$$\begin{aligned} \gamma_{zy} &= \gamma_{yz} \approx 2(\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_y), \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} \approx 2(\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_z), \\ \gamma_{yx} &= \gamma_{xy} \approx 2(\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_x). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Dalle (6.63) e (6.64) consegue quindi la seguente rappresentazione del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon}$ nel dato sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$, valida nell'ipotesi di piccoli spostamenti:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] \approx \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}. \quad (6.65)$$

Tenendo infine conto delle relazioni tra componenti di deformazione e componenti di spostamento riportate nella prima delle (6.6), ne conseguono le seguenti espressioni, valide nell'approssimazione lineare, tra le dilatazioni delle linee coordinate uscenti da un punto e le componenti di spostamento:

$$\epsilon_x \approx \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y \approx \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z \approx \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (6.66)$$

e tra gli scorrimenti delle linee coordinate uscenti da un punto e le componenti di spostamento:

$$\begin{aligned} \gamma_{zy} &\approx \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \gamma_{xz} &\approx \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yx} &\approx \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.67)$$

6.2.5 Coefficiente di dilatazione cubica

Per valutare la variazione di volume nell'intorno di un punto materiale \mathbf{X} si consideri in tale intorno un cubo elementare di lati di lunghezza dL e paralleli agli assi coordinati di un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$ (fig. 6.4). Il volume dV_0 del cubo indeformato vale quindi:

$$dV_0 = dL^3 \quad (6.68)$$

Sempre con riferimento alla fig. 6.4, dove gli assi \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} indicano le direzioni uscenti dal punto spaziale \mathbf{x} corrispondenti nella deformazione alle direzioni degli assi x , y e z uscenti dal punto materiale \mathbf{X} , il volume dV del cubo deformato vale:

$$dV = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) \cos \gamma_{xy} \cos \gamma_z dL^3, \quad (6.69)$$

dove γ_{xy} è lo scorrimento tra gli assi x e y mentre γ_z è il modulo dello scorrimento tra l'asse z e il piano xy . Nell'ipotesi di piccoli spostamenti la (6.69) diventa:

$$dV \approx (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z) dL^3, \quad (6.70)$$

avendo tenuto conto che in tale ipotesi risulta $\cos \gamma_{xy} \approx 1$ e $\cos \gamma_z \approx 1$. Sfruttando i valori dei volumi deformato e indeformato fornito dalle (6.68)

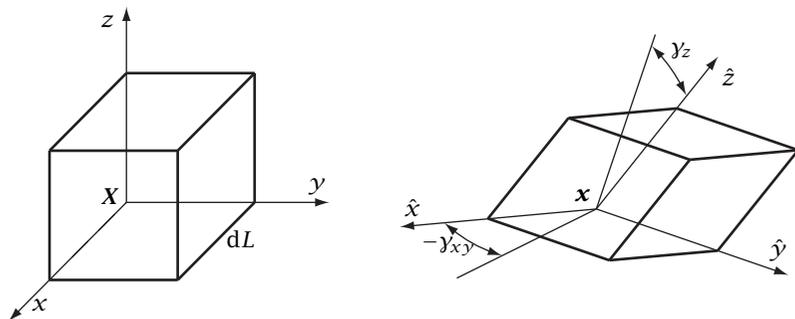


Figura 6.4: Coefficiente di dilatazione cubica

e (6.69) si ottiene il valore, nell'approssimazione lineare, della dilatazione cubica:³¹

$$\theta = \frac{dV - dV_0}{dV_0} \approx \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \tag{6.71}$$

La rappresentazione (6.65) del tensore ϵ di deformazione infinitesima permette di identificare il coefficiente di dilatazione cubica con la somma degli elementi diagonali di tale rappresentazione e quindi con la traccia di ϵ :³²

$$\theta \approx \text{tr } \epsilon. \tag{6.72}$$

Gli elementi diagonali della rappresentazione cartesiana ortogonale del tensore ω di rotazione infinitesima sono nulli, essendo il tensore emisimmetrico. Risulta quindi nulla anche la traccia di ω e si ha quindi:

$$\text{tr } \epsilon = \text{tr} (\text{Grad } \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega}) = \text{tr Grad } \mathbf{u}. \tag{6.73}$$

La rappresentazione del gradiente materiale degli spostamenti e la definizione di *divergenza* di un campo vettoriale³³ permettono di porre la (6.72) nella forma:

$$\theta \approx \text{Div } \mathbf{u}. \tag{6.74}$$

³¹Cfr. il par. 3.1.3, p. 74.

³²Cfr. il par. 1.4.5, p. 35.

³³Per la rappresentazione cartesiana ortogonale della divergenza di un campo vettoriale generico \mathbf{u} si veda la nota 28, p. 128. L'iniziale maiuscola dell'operatore di divergenza nella (6.74) ricorda che si tratta di una operazione differenziale che deve essere eseguita in linea di principio nella configurazione di riferimento.

Per ottenere quest'ultima formula, si può anche considerare un volume V_0 (fig. 6.5) contenente il punto materiale X in corrispondenza del quale si

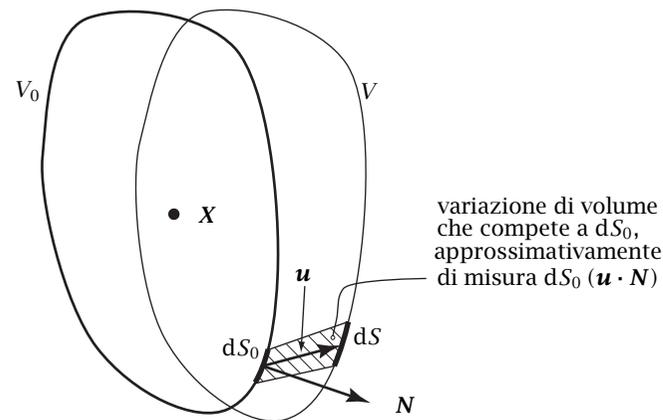


Figura 6.5: Flusso degli spostamenti

vuole calcolare la dilatazione cubica e tenere conto che la variazione del volume uguaglia, a meno di termini di ordine superiore negli spostamenti, il flusso sul contorno ∂V_0 del volume degli stessi spostamenti:

$$V - V_0 \approx \int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0. \tag{6.75}$$

Risulta allora:

$$\theta \approx \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\int_{\partial V_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{N} dS_0}{V_0} = \text{Div } \mathbf{u}. \tag{6.76}$$

◇ ◇ ◇

Dilatazione quadratica e dilatazione cubica in cinematica finita. La dilatazione quadratica è di scarsa importanza nella teoria lineare e per tale motivo è consuetudine, in tale ambito, di non calcolarla. In cinematica finita, tenendo conto del modo di deformarsi di una giacitura generica,³⁴ si ottiene:

$$\left(\frac{dA}{dA_0} \right)^2 = J^2 (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}) = J^2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N},$$

³⁴Cfr. la (3.19) p. 73.

dove \mathbf{N} è il versore normale alla giacitura indeformata, J lo jacobiano della deformazione e \mathbf{C} il tensore destro di Cauchy-Green. La dilatazione quadratica vale quindi:³⁵

$$\zeta = \frac{dA - dA_0}{dA_0} = J\sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}} - 1. \quad (6.77)$$

Per ottenere poi la versione euleriana della dilatazione quadratica, si consideri che si ha:

$$\left(\frac{dA_0}{dA}\right)^2 = \frac{1}{J^2} (\mathbf{F}^T \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F}^T \mathbf{n}) = \frac{1}{J^2} \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n},$$

e quindi:

$$\zeta = \frac{J}{\sqrt{\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} \mathbf{n}}} - 1, \quad (6.78)$$

dove \mathbf{n} è il versore normale alla giacitura deformata e \mathbf{B} il tensore sinistro di Cauchy-Green.

Per quel che riguarda la dilatazione cubica, questa resta immediatamente determinata dal modo di deformarsi di un volume generico:³⁶

$$\theta = J - 1, \quad (6.79)$$

dove J è ancora lo jacobiano della deformazione.³⁷ Se si considera che per via delle definizioni (6.11) e (6.14) dei tensori di Cauchy-Green, destro \mathbf{C} e sinistro \mathbf{B} rispettivamente, si ha $J = \sqrt{\det \mathbf{C}} = \sqrt{\det \mathbf{B}}$, ne risultano le versioni lagrangiana e euleriana della dilatazione cubica:

$$\theta = \sqrt{\det \mathbf{C}} - 1 = \sqrt{\det \mathbf{B}} - 1. \quad (6.80)$$

◇ ◇ ◇

6.3 Direzioni principali di deformazione

In ogni punto della configurazione di riferimento di un corpo continuo è definito un valore particolare del tensore di deformazione che fornisce lo stato di deformazione della configurazione deformata rispetto a quella di riferimento nell'intorno dello stesso punto. Dato che tale tensore è simmetrico risultano quindi definite in ogni punto, analogamente al tensore degli sforzi, almeno tre direzioni principali ortogonali tra loro,³⁸ dette in

tal caso *direzioni principali di deformazione*,³⁹ e i cui autovalori sono detti *valori principali di deformazione*.⁴⁰

Le direzioni e i valori principali di deformazione si ottengono risolvendo il problema agli autovalori e autoversori associati al tensore $\boldsymbol{\epsilon}$ di deformazione:

$$\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_r = \lambda \mathbf{e}_r, \quad (6.81)$$

dove \mathbf{e}_r è il versore di una direzione r ⁴¹ uscente dal punto in corrispondenza del quale la deformazione è individuata da $\boldsymbol{\epsilon}$. Si ricorda⁴² che la dilatazione della linea r vale $\mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_r$. Ne consegue che un autovalore rappresenta la dilatazione della linea uscente dal punto individuata dall'autovettore associato e per tale motivo gli autovalori del tensore di deformazione sono anche detti *dilatazioni principali*. Se r è una direzione principale di $\boldsymbol{\epsilon}$ allora risulta nullo lo scorrimento $\boldsymbol{\gamma}_r$ di tale linea con il piano perpendicolare:⁴³

$$\boldsymbol{\gamma}_r = 2(\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_r - \epsilon_r \mathbf{e}_r) = \mathbf{0}, \quad (6.82)$$

per via della (6.81) e dato che ϵ_r rappresenta l'autovalore associato alla direzione r . Ne risulta allora il significato fisico delle direzioni principali di dilatazione: *una direzione principale di deformazione ha scorrimenti nulli con tutte le rette del piano perpendicolare alla stessa direzione principale*. Inoltre un cubo intorno del punto e di facce parallele ai piani principali si trasforma, per effetto della sola deformazione e quindi a meno della rotazione rigida dell'intorno, in un parallelepipedo avente le facce parallele a quelle del cubo di partenza. In altri termini le coppie di facce parallele del cubo subiscono una semplice traslazione relativa dipendente dalla dilatazione della linea ortogonale a tali facce (fig. 6.6).

Come già per il tensore degli sforzi, anche per il tensore di deformazione esistono sempre tre direzioni principali ortogonali tra loro e quindi è sempre possibile, senza restrizioni, assumere localmente un *sistema principale di coordinate* cartesiano ortogonale. Tale sistema di coordinate ha gli assi coincidenti con tre direzioni principali di deformazione.

Si noti che in generale il sistema di coordinate principale indotto dalla tensione non coinciderà con quello indotto dalla deformazione. Si noti

³⁵Cfr. il par. 3.1.3, p. 74.

³⁶Cfr. la (3.17), p. 72.

³⁷Cfr. la (3.16), p. 72.

³⁸Cfr. par. 1.4 p. 31.

³⁹*Principal directions of strain* nella letteratura inglese.

⁴⁰*Principal strains* nella letteratura inglese.

⁴¹È sottinteso che sia una direzione nella configurazione di riferimento. Comunque si ricordi che nell'ipotesi di piccole deformazioni le configurazioni di riferimento e deformata si confondono, e quindi non ci sono possibilità di equivoci se la simbologia viene semplificata.

⁴²Cfr. la (6.42), p. 151.

⁴³Cfr. la (6.60), p. 152.

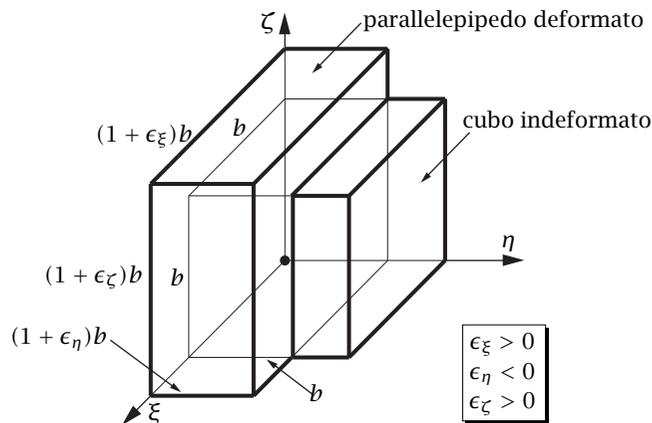


Figura 6.6: Significato fisico delle direzioni principali di deformazione

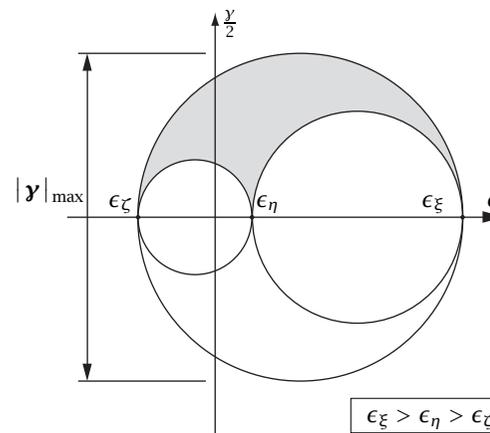


Figura 6.7: Piano di Mohr di deformazione

inoltre che tali sistemi di coordinate sono locali poiché i tensori degli sforzi e di deformazione, e quindi le loro direzioni principali, variano in generale da punto a punto.

Infine vale la rappresentazione:⁴⁴

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\zeta \end{bmatrix}, \tag{6.83a}$$

$$\epsilon = \epsilon_\xi (\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) + \epsilon_\eta (\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta) + \epsilon_\zeta (\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta). \tag{6.83b}$$

6.4 Rappresentazione di Mohr della deformazione

Come già per il tensore degli sforzi, si può disegnare una circonferenza nel piano di Mohr per ogni direzione principale di deformazione, e tale circonferenza è rappresentativa del problema piano definito dalla direzione principale stessa (fig. 6.7).⁴⁵ Le coordinate nel piano di Mohr del generico asse *r* ortogonale ad una direzione principale *ζ* valgono:

$$\epsilon_r = \mathbf{e}_r \cdot \epsilon \mathbf{e}_r, \quad \epsilon_{sr} = \frac{1}{2} \gamma_{sr} = \mathbf{e}_s \cdot \epsilon \mathbf{e}_r, \tag{6.84}$$

dove ancora una volta l'asse *s* è definito, per convenzione, dalla rotazione oraria di $\pi/2$ rad dell'asse *r* sulla faccia positiva del piano ortogonale a *ζ*, individuata per esempio, ma non obbligatoriamente, dalla stessa orientazione di *ζ*. Gli assi che definiscono il piano di Mohr rappresentativo della deformazione dell'intorno di un punto riportano quindi le dilatazioni lineari ϵ in ascissa e la metà degli scorrimenti $\frac{1}{2}\gamma$ in ordinata. Se $Ox\gamma\zeta$ è un sistema locale di coordinate cartesiano ortogonale destro avente terzo asse coincidente con la direzione principale *ζ* e quindi con gli assi *x* e *γ* nel piano ortogonale alla direzione principale stessa, la circonferenza di Mohr si può tracciare a partire dai punti rappresentativi di tali assi. Tali punti hanno quindi, nel caso della deformazione, coordinate $(\epsilon_x, -\frac{1}{2}\gamma_{xy})$ e rispettivamente $(\epsilon_\gamma, \frac{1}{2}\gamma_{xy})$. Naturalmente la circonferenza intersecherà l'asse delle ascisse in corrispondenza degli altri due valori principali di dilatazione ϵ_ξ e ϵ_η e i corrispondenti assi ξ e η saranno individuati, rispetto agli assi *x* e *γ*, tramite metà degli angoli relativi ai punti corrispondenti sulla circonferenza di Mohr.

Il punto rappresentativo di una generica direzione *r*, in generale non ortogonale ad una direzione principale, giace invece nell'arbelo di Mohr ed

⁴⁴Cfr. la (1.138), p. 36.

⁴⁵Cfr. par. 1.6 p. 46.

è individuato dalle coordinate:⁴⁶

$$\epsilon_r = \mathbf{e}_r \cdot \boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_r, \quad \frac{1}{2} |\mathbf{y}_r| = |\boldsymbol{\epsilon} \mathbf{e}_r - \epsilon_r \mathbf{e}_r|, \quad (6.85)$$

la seconda delle quali, sempre positiva, coincide con metà del modulo del vettore scorrimento tra la direzione principale e il suo piano ortogonale. Si ricorda che non è possibile in generale dare un segno alla seconda coordinata per il fatto che non è nota a priori la direzione di tale vettore scorrimento.

Considerando poi le proprietà di estremo dei valori principali,⁴⁷ il minimo e il massimo valore della dilatazione ϵ_r di una generica linea r uscente dal punto coincidono rispettivamente con la minima e la massima dilatazione principale, mentre il massimo modulo del vettore scorrimento \mathbf{y}_r tra il piano ortogonale alla generica direzione r e la direzione stessa coincide con il diametro della circonferenza esterna:

$$\epsilon_{\min} = \min \{ \epsilon_\xi, \epsilon_\eta, \epsilon_\zeta \}, \quad \epsilon_{\max} = \max \{ \epsilon_\xi, \epsilon_\eta, \epsilon_\zeta \}, \quad (6.86a)$$

$$|\mathbf{y}|_{\max} = \frac{1}{2} \max \{ |\epsilon_\xi - \epsilon_\eta|, |\epsilon_\eta - \epsilon_\zeta|, |\epsilon_\zeta - \epsilon_\xi| \}. \quad (6.86b)$$

6.5 Stati elementari di deformazione

Lo stato di deformazione definito nell'intorno di un punto del dominio di un dato corpo continuo può essere caratterizzato da particolari proprietà, alcune delle quali definiscono i cosiddetti *stati elementari di deformazione*⁴⁸ o *stati particolari di deformazione*. Poiché lo stato di deformazione nell'intorno di un punto è rappresentato dal tensore di deformazione, le particolari proprietà che definiscono gli stati elementari di deformazione sono proprietà di tale tensore doppio.

6.5.1 Stato di dilatazione uniforme

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato di dilatazione uniforme*⁴⁹ se la dilatazione è la stessa per una qualunque linea uscente

dal punto. Tutte le linee hanno quindi uguale coordinata ϵ nel piano di Mohr e l'unica possibilità è che le tre circonferenze di Mohr collassino in un punto. Questo significa che tutte le direzioni dello spazio sono principali di deformazione, che l'equazione caratteristica ha una radice tripla e infine che il tensore di deformazione è sferico:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 \mathbf{I}, \quad (6.87)$$

dove ϵ_0 è la dilatazione di una qualunque linea uscente dal punto. Questo è il motivo per cui, come già nel caso del tensore di sforzo, tale stato di deformazione viene anche detto *sferico*. Tenendo poi conto che la dilatazione è la stessa per ogni linea uscente dal punto, e quindi invariante con la direzione dello spazio, lo stato di deformazione è anche detto *isotropo*.

Un qualunque cubo costruito nell'intorno del punto ha le facce parallele a dei piani principali e si deforma quindi come illustrato in fig. 6.6 nel caso generale, ma con la particolarità che le dilatazioni dei lati sono uguali e che quindi il cubo iniziale si deforma diventando un cubo di lato maggiore o minore di quello iniziale a seconda che la dilatazione sia positiva oppure negativa (fig. 6.8).

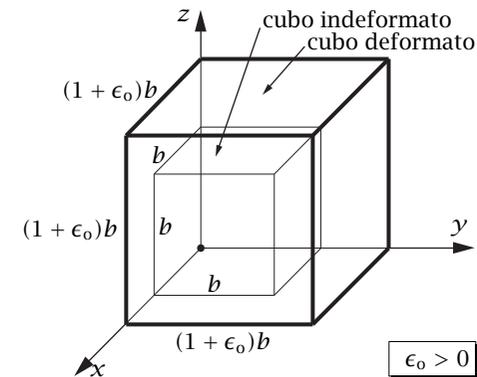


Figura 6.8: Dilatazione uniforme

⁴⁶Cfr. la (1.196), p. 46.

⁴⁷Cfr. par. 1.6.3 p. 51.

⁴⁸Types of strain nella letteratura inglese.

⁴⁹Uniform dilatation nella letteratura inglese.

6.5.2 Stato di dilatazione semplice

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno stato di *dilatazione semplice*⁵⁰ se esiste una direzione z tale che una linea uscente dal punto in direzione z abbia dilatazione non nulla ϵ_0 e scorrimento nullo rispetto al piano ortogonale, mentre le linee ortogonali a z abbiano nulla sia la dilatazione che lo scorrimento. Ne consegue che la direzione z è principale e corrispondente all'autovalore semplice ϵ_0 , mentre le linee ortogonali sono pure principali e corrispondenti all'autovalore nullo doppio. Avendo un autovalore nullo doppio il tensore di deformazione è monoassiale e lo stato di deformazione viene anche detto *monoassiale*. Si ha quindi la rappresentazione:⁵¹

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_0 (\mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z). \quad (6.88)$$

Si consideri ora un qualunque cubo avente una coppia di facce ortogonali a z . Tale cubo si deforma, a differenza di quello mostrato in fig. 6.6 nel caso generale, in modo tale che solo le facce ortogonali a z subiscano una traslazione relativa. Il cubo iniziale diventa quindi un parallelepipedo a base quadrata (fig. 6.9a). Si noti che dalla rappresentazione (6.88) di uno stato di dilatazione semplice e dalla rappresentazione (6.83) di uno stato generico di deformazione ne consegue che uno stato di deformazione generico è sempre decomponibile nella somma di tre dilatazioni semplici aventi quali direzioni di dilatazione le direzioni principali:⁵²

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} \epsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\zeta \end{bmatrix}, \quad (6.89a)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_\xi (\mathbf{e}_\xi \otimes \mathbf{e}_\xi) + \epsilon_\eta (\mathbf{e}_\eta \otimes \mathbf{e}_\eta) + \epsilon_\zeta (\mathbf{e}_\zeta \otimes \mathbf{e}_\zeta). \quad (6.89b)$$

La rappresentazione nel piano di Mohr dello stato di dilatazione semplice è quella di un qualunque tensore monoassiale⁵³ e quindi simile a quella

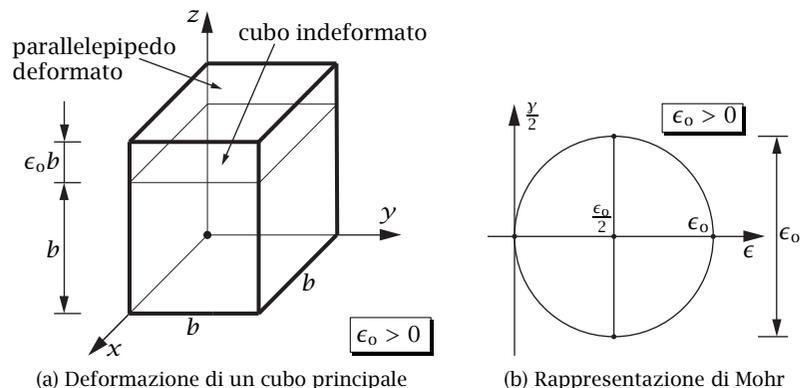


Figura 6.9: Stato di dilatazione semplice

dello stato di trazione semplice (fig. 5.14b). Si hanno quindi infinite circonferenze coincidenti associate all'autovalore nullo doppio, di centro $\epsilon_0/2$ e di raggio $|\epsilon_0|/2$, mentre quella associata all'autovalore semplice non nullo ϵ_0 collapsa nel punto origine degli assi, come illustrato nella fig. 6.9b nel caso la dilatazione sia positiva. Il massimo modulo $|\epsilon|_{\max}$ delle dilatazioni nell'intorno del punto e il massimo modulo $|\boldsymbol{\gamma}|_{\max}$ degli scorrimenti valgono:

$$|\epsilon|_{\max} = |\epsilon_0|, \quad |\boldsymbol{\gamma}|_{\max} = |\epsilon_0|. \quad (6.90)$$

Si ricorda infine che non esiste arbelo di Mohr in accordo col fatto che tutte le direzioni dello spazio sono ortogonali ad almeno una direzione principale.

6.5.3 Stato di scorrimento semplice

Si ha scorrimento semplice se in cubo elementare nell'intorno di un punto una faccia scorre rispetto a quella parallela, ovvero si trasla nel proprio piano (fig. 6.10).

Le componenti, nel sistema di riferimento $Oxyz$ illustrato in figura, del

⁵⁰ Simple extension nella letteratura inglese.

⁵¹ Cfr. la (1.241) p. 52.

⁵² Analogamente al tensore degli sforzi e più in generale a un qualunque tensore doppio simmetrico.

⁵³ Cfr. par. 1.7.1 p. 52.

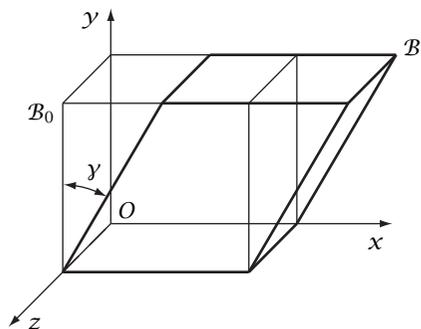


Figura 6.10: Scorrimento semplice

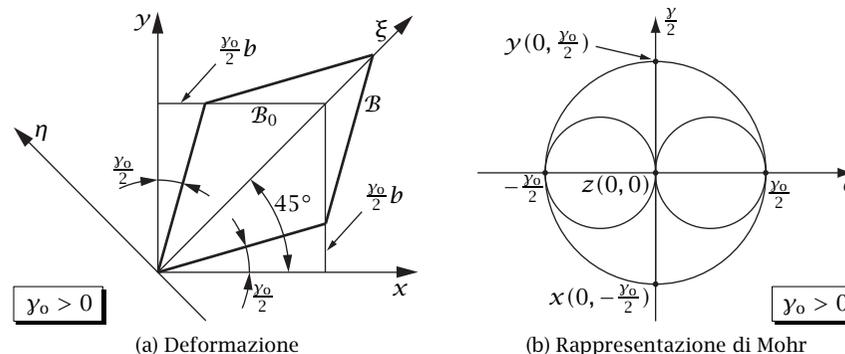


Figura 6.11: Analisi della deformazione nello scorrimento semplice

campo degli spostamenti \mathbf{u} , nell'ipotesi di piccoli spostamenti, risulta:

$$\begin{cases} u = \gamma_0 y, \\ v = 0 \\ w = 0 \end{cases} \quad (6.91)$$

dove γ_0 rappresenta lo scorrimento tra le linee parallele agli assi coordinati x e y . Dal campo materiale degli spostamenti si ottiene il gradiente materiale degli spostamenti $\text{Grad } \mathbf{u}$:

$$[\text{Grad } \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.92)$$

La parte simmetrica e quella emisimmetrica del gradiente materiale degli spostamenti forniscono rispettivamente i tensori di deformazione infinitesima ϵ e di rotazione ω :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_0 & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\omega] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\gamma_0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\gamma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.93)$$

L'effetto della sola deformazione nel piano xy è illustrato nella fig. 6.11a nel caso sia $\gamma_0 > 0$. La rotazione rigida dell'intorno ha ampiezza $\frac{1}{2} |\gamma_0|$ e avviene attorno all'asse x , in senso orario nel caso sia $\gamma_0 > 0$. Essendo nulla una delle dilatazioni principali ed essendo nulle le dilatazioni di tre linee ortogonali, il tensore di deformazione è un tensore piano e deviatorico.

La rappresentazione nel piano di Mohr dello stato di scorrimento semplice, analogamente allo stato di taglio semplice,⁵⁴ è quella di un qualunque tensore piano deviatorico, come illustrato nella fig. 6.11b nel caso $\gamma_0 > 0$.⁵⁵ La circonferenza di Mohr relativa al piano xy , ortogonale alla direzione principale z , è individuata dai punti rappresentativi degli assi x e y , di coordinate rispettivamente $(0, -\frac{\gamma_0}{2})$ e $(0, \frac{\gamma_0}{2})$. Il centro della circonferenza ha coordinate $(0,0)$ e il suo raggio vale $|\frac{\gamma_0}{2}|$. Le dilatazioni principali valgono $-\frac{\gamma_0}{2}$ e $\frac{\gamma_0}{2}$, quindi una linea principale si allunga e l'altra si accorcia. Se $\gamma_0 > 0$ la linea principale che si allunga coincide con la bisettrice del quadrante positivo nel piano xy , come mostrato in fig. 6.11a dove tale linea è stata indicata con ξ mentre la linea ortogonale è stata indicata con η . Si ha poi che il massimo modulo di tutte le dilatazioni delle linee uscenti dal punto vale $|\frac{\gamma_0}{2}|$ mentre il massimo modulo degli scorrimenti vale $|\gamma_0|$.

Si consideri ora un cubo principale, avente quindi le facce ortogonali alle direzioni principali. Tale cubo si deforma, a differenza di quello mostrato in fig. 6.6 p. 156 nel caso generale, in modo tale che solo le facce ortogonali alle direzioni principali ξ e η del piano xy subiscano una traslazione relativa uguale in modulo e opposta in segno (fig. 6.12).

⁵⁴Cfr. il par. 5.5.3, p. 136.

⁵⁵Cfr. par. 1.7.3 p. 54.

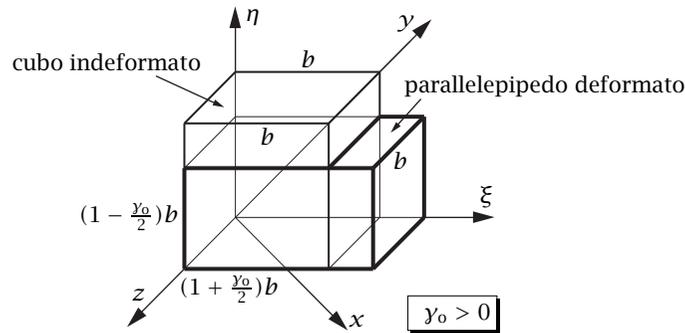


Figura 6.12: Deformazione di un cubo principale

6.5.4 Stato piano di deformazione

Si dice che in un punto di un continuo si ha uno *stato piano di deformazione*⁵⁶ se il tensore di deformazione è piano⁵⁷ e quindi se esiste una linea uscente dal punto avente nulli sia la dilatazione che lo scorrimento rispetto al piano ortogonale, detto *piano di deformazione*. In un sistema di riferimento $Oxyz$, con z ortogonale al piano di deformazione, la rappresentazione algebrica di ϵ risulta quindi:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.94)$$

Inoltre l'unica particolarità della rappresentazione di Mohr è che due delle tre circonferenze di Mohr passano per l'origine degli assi nel piano di Mohr.

Se in tutti i punti di un corpo lo stato di deformazione è piano e se inoltre, ancora in tutti i punti del corpo, il piano di deformazione è lo stesso si dice che lo stato di deformazione del corpo è *piano*. Affinché lo stato di deformazione di un corpo sia considerato piano, non è necessario che in tutti i punti del corpo lo stato di deformazione sia piano nel senso di avere un autovalore nullo semplice, ma in qualche punto lo stato di deformazione può anche essere nullo oppure monoassiale, con asse contenuto

⁵⁶Plane strain nella letteratura inglese.

⁵⁷Cfr. par. 1.7.2 p. 53.

nel piano di deformazione. È evidente che se lo stato di deformazione fosse nullo oppure monoassiale e con asse costante in tutti i punti del corpo lo si catalogherebbe come stato di deformazione nullo oppure, rispettivamente, monoassiale. Se invece fosse monoassiale in tutti i punti del corpo, ma con asse che varia da punto a punto restando parallelo a un piano, si ricadrebbe nello stato piano di deformazione. Si sottolinea il fatto che lo stato di deformazione di un corpo è piano non solo se lo stato di deformazione è piano in tutti i punti del corpo ma anche se in questi il piano di deformazione è lo stesso. Si noti che in generale la deformazione non è omogenea potendo variare da punto a punto sia le direzioni principali nel piano di deformazione che le dilatazioni principali di queste.

6.6 Esempio numerico di analisi della deformazione

Nel seguito, a titolo di esempio, si considera il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo individuato, in componenti in un dato sistema $Oxyz$ cartesiano ortogonale, dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = a_1 x^3 - a_2 y + a_3, \\ v = -b_1 x^2 + b_2 y - b_3, \\ w = -c_1 z^2, \end{cases}$$

dove i coefficienti hanno i seguenti valori numerici:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-2}, & a_2 &= 6 \times 10^{-3}, & a_3 &= 2 \times 10^{-3} \text{ m}, \\ b_1 &= 3 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}, & b_2 &= 3 \times 10^{-3}, & b_3 &= 4 \times 10^{-3} \text{ m}, \\ c_1 &= 2 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}. \end{aligned}$$

Il gradiente degli spostamenti vale:

$$[\text{grad } \mathbf{u}] = \begin{bmatrix} 3a_1 x^2 & -a_2 & 0 \\ -2b_1 x & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_1 z \end{bmatrix},$$

Ne conseguono i seguenti tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi, parti rispettivamente simmetrica ed emisimmetrica del gradiente degli spostamenti:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 3a_1x^2 & -\frac{a_2}{2} - b_1x & 0 \\ -\frac{a_2}{2} - b_1x & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_1z \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_2}{2} + b_1x & 0 \\ \frac{a_2}{2} - b_1x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si supponga ora che il centro degli assi coordinati e il punto A di coordinate:

$$x = 0, \quad y = 75 \text{ cm}, \quad z = 100 \text{ cm}, \quad (6.95)$$

appartengano al corpo così come il segmento OA (fig. 6.13) e sia s l'asse contenente il segmento OA , orientato da O ad A . Ciò premesso, si vogliono

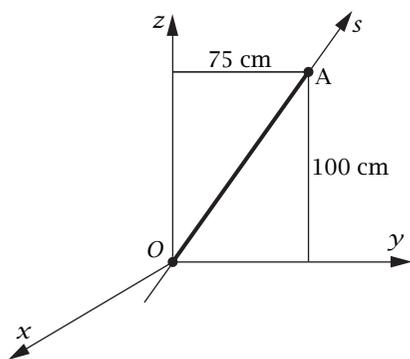


Figura 6.13: Assi di riferimento, punto A e segmento OA

studiare nel seguito la deformazione e la rotazione rigida in corrispondenza del punto A, l'allungamento del segmento OA , lo scorrimento nel punto A tra l'asse s e il piano ortogonale e in particolare lo scorrimento, sempre in A, tra l'asse s e l'asse per A parallelo ad x .

Come prima cosa, si specializzano le matrici precedenti nel punto A ottenendo:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad [\boldsymbol{\omega}] = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}.$$

Il vettore $\boldsymbol{\varphi}$ della rotazione rigida dell'intorno del punto P ha quindi componenti:

$$\{\boldsymbol{\varphi}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix} \times 10^{-3},$$

e ne risulta una rotazione positiva di ampiezza 3×10^{-3} rad attorno all'asse z . L'asse z individua una direzione principale di deformazione, con dilatazione principale $\epsilon_z = -4 \times 10^{-3} = -0.4\%$. La circonferenza di Mohr del problema piano corrispondente all'asse z è individuata dai punti $x(0, 3 \times 10^{-3})$ e $y(3 \times 10^{-3}, -3 \times 10^{-3})$, avendo scelto quale faccia positiva del piano xy quella di normale uscente z positiva (fig. 6.14). La coordinata c del centro e il raggio \mathcal{R} della circonferenza valgono:

$$c = \frac{3}{2} \times 10^{-3}, \quad \mathcal{R} = \left(\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} \right) \times 10^{-3} = \frac{3}{2} \sqrt{5} \times 10^{-3}.$$

per cui ne risultano i seguenti valori principali:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_\xi \\ \epsilon_\eta \end{Bmatrix} = c \pm \mathcal{R} = \frac{3}{2} (1 \pm \sqrt{5}) \times 10^{-3} = \begin{cases} 4.85 \times 10^{-3} = 0.485\% \\ -1.85 \times 10^{-3} = 0.185\% \end{cases}.$$

Allo stesso risultato si sarebbe arrivati risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & -3 \times 10^{-3} \\ -3 \times 10^{-3} & 3 \times 10^{-3} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

ovverossia:

$$\lambda^2 - (3 \times 10^{-3}) \lambda - (3 \times 10^{-3})^2 = 0.$$

Dalla circonferenza di Mohr di fig. 6.14a si deduce inoltre che per ottenere la direzione principale ξ a partire dall'asse y occorre ruotare in senso

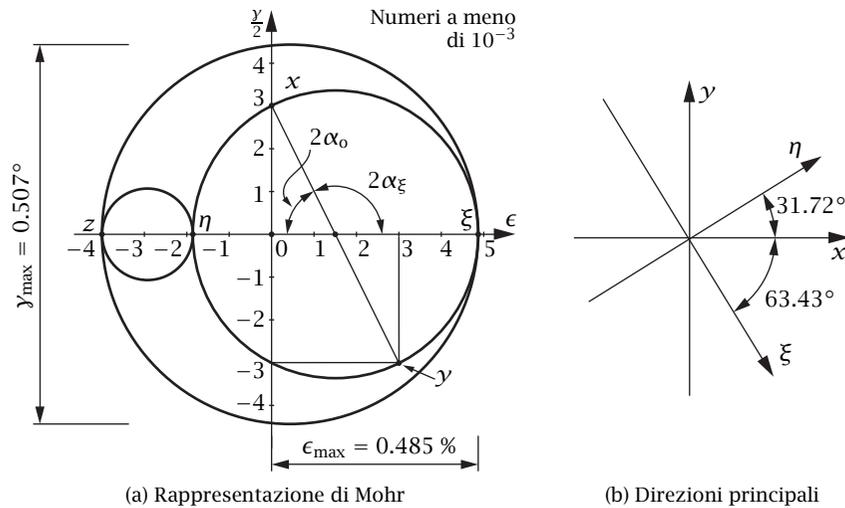


Figura 6.14: Valori e direzioni principali di deformazione

antiorario dell'angolo α_o tale che:

$$\alpha_o = \frac{1}{2} \arctan \frac{3}{3/2} = \frac{1}{2} \arctan 2 = 31.72^\circ$$

Per conferma si utilizza la formula che determina l'angolo α_ξ che individua la direzione principale ξ rispetto all'asse x , primo asse della coppia di assi destra xy :⁵⁸

$$\alpha_\xi = \arctan \frac{\frac{3}{2} (1 + \sqrt{5}) \times 10^{-3}}{-3 \times 10^{-3}} = -\arctan \frac{1}{2} (1 + \sqrt{5}) = -58.28^\circ.$$

Tale angolo risulta negativo, cioè orario, e complementare a 90° dell'angolo precedente, come deve essere. Nella fig. 6.14b sono tracciate le direzioni principali ξ e η nel piano xy .

Allo scopo di valutare l'allungamento $\Delta \ell$ del segmento OA , occorrono sia le equazioni parametriche di tale segmento che le componenti del versore

⁵⁸Cfr. la (1.123), p. 34.

e_s della direzione s (fig. 6.13):

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \times 10^{-1} s \\ z = 8 \times 10^{-1} s \end{cases}, \quad \{e_s\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \times 10^{-1}.$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \epsilon_s(s) &= [0 \quad 6 \quad 8] \begin{bmatrix} 3a_1 x^2(s) & -\frac{a_2}{2} - b_1 x(s) & 0 \\ -\frac{a_2}{2} - b_1 x(s) & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2c_1 z(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \times 10^{-2} \\ &= (360b_2 - 1024c_1 s) \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

Tenendo conto che il segmento OA ha lunghezza $125 \text{ cm} = 125 \times 10^{-2} \text{ m}$ si ha infine:⁵⁹

$$\begin{aligned} \Delta \ell &= \int_0^{125 \times 10^{-2}} \{360(3 \times 10^{-3}) - 1024(2 \times 10^{-3})s\} \times 10^{-3} ds \\ &= (135 - 160) \times 10^{-5} \text{ m} = -25 \times 10^{-5} \text{ m} = -0.25 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Per quel che riguarda poi il calcolo dello scorrimento y_s nel punto A tra l'asse s e il piano ortogonale, si consideri innanzitutto che per quanto precede la dilatazione in A in direzione s vale:

$$\begin{aligned} \epsilon_s(A) &= (360b_2 - 1024c_1 s) \times 10^{-3} \\ &= (1080 - 2560) \times 10^{-6} = -148 \times 10^{-5} = -0.148 \%. \end{aligned}$$

Quindi si ha:⁶⁰

$$\{y_s(A)\} = 2 \begin{bmatrix} 148 & -300 & 0 \\ -300 & 300 + 148 & 0 \\ 0 & 0 & -400 + 148 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \times 10^{-6} = 2 \begin{Bmatrix} -1800 \\ 2688 \\ -2016 \end{Bmatrix} \times 10^{-6}.$$

Dato che l'asse x è ortogonale all'asse s , la componente in direzione x di $y_s(A)$ coincide con lo scorrimento $y_{xs}(A)$ tra le direzioni s e x uscenti da A .⁶¹

$$y_{xs}(A) = -36 \times 10^{-4} \text{ rad} = -0.206^\circ.$$

⁵⁹Cfr. la (3.24), p. 74.

⁶⁰Cfr. la (6.60), p. 152.

⁶¹Cfr. la (6.61), p. 153.

D'altronde, alternativamente si ottiene:⁶²

$$\gamma_{xs}(A) = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} = -36 \times 10^{-4} \text{ rad}.$$

Essendo lo scorrimento negativo, ne consegue che l'angolo tra le parti positive degli assi x e s aumenta.

Con riferimento la fig. 6.15, si indichi infine con r la direzione ortogonale sia a x che a s , orientata in modo tale che x , r e s siano tre assi ortogonali destri in quest'ordine. Risulta di conseguenza:

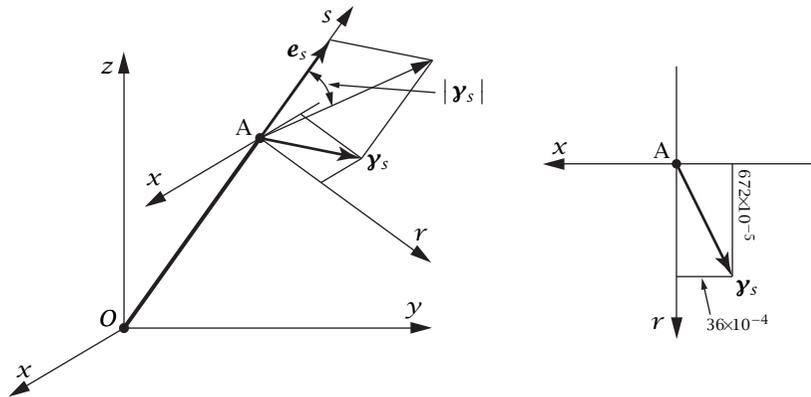


Figura 6.15: Vettore scorrimento

$$\begin{aligned} \gamma_{rs}(A) &= \mathbf{y}_s(A) \cdot \mathbf{e}_r = 2 \begin{bmatrix} -1800 & 2688 & -2016 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{Bmatrix} \times 10^{-7} \\ &= 672 \times 10^{-5} \text{ rad} = 0.385^\circ, \end{aligned}$$

e $\mathbf{y}_s(A)$ può essere espresso in componenti nel piano xr nel modo seguente:

$$\mathbf{y}_s(A) = (-360\mathbf{e}_x + 672\mathbf{e}_r) \times 10^{-5}.$$

⁶²Cfr. la (6.55), p. 152.

6.7 Compatibilità della deformazione

Se è dato, nella configurazione indeformata \mathcal{B}_0 di un corpo, un campo di spostamenti \mathbf{u} sufficientemente regolare esiste sempre un corrispondente campo di deformazioni infinitesime $\boldsymbol{\epsilon}$ fornito dalla prima delle relazioni tensoriali (6.5) oppure in componenti dalla prima delle relazioni scalari (6.6), dette *equazioni di congruenza* oppure *equazioni di compatibilità*,⁶³ e che si riscrivono nel seguito:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T), \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (6.96)$$

dove \mathbf{H} è il gradiente della deformazione. Se invece, inversamente, si suppone che sia dato, ancora nella configurazione indeformata \mathcal{B}_0 del corpo, un generico campo tensoriale simmetrico $\boldsymbol{\epsilon}$, “presunto” campo di deformazioni, non è detto a priori che esista un corrispondente campo di spostamenti \mathbf{u} tale che $\boldsymbol{\epsilon}$ possa essere calcolato con le (6.96) e che quindi renda $\boldsymbol{\epsilon}$ un “effettivo” campo di deformazioni. È intuitivo che questa sia la situazione dato che la seconda delle (6.96) può essere interpretata, per via della simmetria di $\boldsymbol{\epsilon}$, come un sistema di sei equazioni differenziali alle derivate parziali nelle tre funzioni incognite u_i , componenti dello spostamento \mathbf{u} , mentre in generale per determinare tre funzioni incognite sono sufficienti tre equazioni. Ne consegue che affinché esista il campo di spostamenti \mathbf{u} il campo di deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ non può essere generico ma deve soddisfare delle opportune condizioni, che sono delle condizioni di integrabilità per il sistema di equazioni differenziali fornito dalla seconda delle (6.96) e che sono ancora dette *equazioni di congruenza* oppure *equazioni di compatibilità*.⁶⁴

6.7.1 Gradiente della rotazione locale

Allo scopo di determinare le equazioni di congruenza si procede notando innanzitutto che il “presunto” campo di deformazioni infinitesime $\boldsymbol{\epsilon}$ definisce il “presunto” gradiente del campo di rotazioni infinitesime $\boldsymbol{\omega}$. Infatti derivando rispetto alla generica coordinata x_h la generica componente ω_{ij} del tensore di rotazione infinitesima, fornita dalla seconda delle (6.6), dopo

⁶³ *Compatibility equations* nella letteratura inglese.

⁶⁴ A volte, per distinguerle dalle (6.96), citate come *equazioni esplicite di congruenza*, il che poi rende le (6.96) delle *equazioni implicite di congruenza*.

alcune manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_h} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_h \partial x_j} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_i \partial x_j} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_h \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_h}{\partial x_j \partial x_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right) \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right) \right\},\end{aligned}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jh}}{\partial x_i}. \quad (6.97)$$

La (6.97) rappresenta un sistema di 27 equazioni nelle componenti di $\boldsymbol{\omega}$, riducibile a sole 9 equazioni differenziali in tre funzioni scalari incognite per via della emisimmetria di $\boldsymbol{\omega}$ stesso. D'altronde, tenendo conto della relazione (6.10) tra vettore $\boldsymbol{\varphi}$ e tensore $\boldsymbol{\omega}$ di rotazione infinitesima, le componenti del gradiente di $\boldsymbol{\varphi}$ risultano:⁶⁵

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_h} &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{rij} \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{ij} \epsilon_{rij} \left(\frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jh}}{\partial x_i} \right) = \sum_{ij} \epsilon_{rij} \frac{\partial \epsilon_{jh}}{\partial x_i},\end{aligned} \quad (6.98)$$

che per esteso si scrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{zy}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{zh}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yh}}{\partial z} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{xz}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{xh}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zh}}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_z}{\partial x_h} = \frac{\partial \omega_{yx}}{\partial x_h} = \frac{\partial \epsilon_{yh}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xh}}{\partial y} \end{array} \right. . \quad (6.99)$$

Per via della decomposizione (6.4), l'integrazione del sistema (6.96) può dunque essere separato nell'integrazione del sistema (6.98) e nella successiva integrazione del seguente sistema di nove equazioni differenziali nelle

⁶⁵Cfr. la prima delle (1.95), p. 30.

componenti incognite del campo degli spostamenti \mathbf{u} :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}. \quad (6.100)$$

Si noti che entrambi i sistemi (6.98) e (6.100) richiedono di determinare dei campi vettoriali incogniti presumendo noti i loro gradienti.

6.7.2 Potenziale di campi vettoriali e tensoriali

Dato un campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente un campo tensoriale \mathbf{A} , definito in un dominio \mathcal{B}_0 dello spazio euclideo \mathcal{E} si dice che tale campo è integrabile in un campo scalare f , detto *potenziale scalare*⁶⁶ di \mathbf{v} , se:

$$\text{grad } f = \mathbf{v}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i} = v_i, \quad (6.101)$$

rispettivamente in un campo vettoriale \mathbf{u} , detto *potenziale vettoriale*⁶⁷ di \mathbf{A} , se:

$$\text{grad } \mathbf{u} = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = A_{ij}. \quad (6.102)$$

Se vale la (6.101), rispettivamente la (6.102), si dice che il campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente il campo tensoriale \mathbf{A} , è *conservativo*.⁶⁸

Si consideri ora una qualunque curva ℓ contenuta in \mathcal{B}_0 (fig. 6.16) e la si orienti internamente scegliendo uno dei due possibili versi di percorrenza sulla curva stessa. Poiché il gradiente rappresenta la parte lineare dell'incremento della funzione, scalare f o vettoriale \mathbf{u} che sia, il suo integrale lungo la curva ℓ uguaglia l'incremento Δf oppure $\Delta \mathbf{u}$ della funzione associato ai due punti, P_1 e P_2 , di prima e di seconda estremità della curva stessa:

$$\Delta f = f(P_2) - f(P_1) = \int_{\ell} \text{grad } f \cdot dP = \int_{\ell} \text{grad } f \cdot \mathbf{t} \, ds, \quad (6.103a)$$

$$\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(P_2) - \mathbf{u}(P_1) = \int_{\ell} (\text{grad } \mathbf{u}) \, dP = \int_{\ell} (\text{grad } \mathbf{u}) \, \mathbf{t} \, ds, \quad (6.103b)$$

dove \mathbf{t} e s sono rispettivamente il versore tangente alla curva e una coordinata curvilinea lunghezza d'arco equiverse alla orientazione.⁶⁹

⁶⁶ *Scalar potential* nella letteratura inglese.

⁶⁷ *Vectorial potential* nella letteratura inglese.

⁶⁸ *Conservative field* nella letteratura inglese.

⁶⁹ Più in generale s è una qualunque coordinata curvilinea e \mathbf{t} il vettore tangente $\frac{dP}{ds}$.

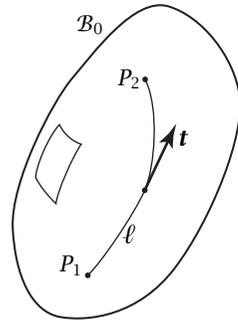


Figura 6.16: Integrale lungo una linea aperta

Ne consegue che se la curva ℓ è chiusa l'incremento non può che essere nullo. Se ne può allora concludere che *condizione necessaria per l'esistenza del potenziale scalare f del campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente del potenziale vettoriale \mathbf{u} del campo tensoriale \mathbf{A} , è che sia:*

$$\oint_{\ell} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0, \tag{6.104}$$

rispettivamente:

$$\oint_{\ell} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0}, \tag{6.105}$$

per ogni curva chiusa ℓ contenuta in \mathcal{B}_0 .

Ma tale condizione si rivela anche sufficiente poiché se vale la (6.104), rispettivamente la (6.105), per ogni curva chiusa ℓ contenuta in \mathcal{B}_0 , la funzione scalare:

$$f(P) = a + \int_{\ell(Q,P)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds, \tag{6.106}$$

rispettivamente quella vettoriale:

$$\mathbf{u}(P) = \mathbf{a} + \int_{\ell(Q,P)} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds, \tag{6.107}$$

sono ben definite e soddisfacenti la (6.101), rispettivamente la (6.102). Nelle (6.106) e (6.107) è sottinteso che a sia un arbitrario numero reale, \mathbf{a} un arbitrario vettore, Q un arbitrario punto di \mathcal{B}_0 e $\ell(Q,P)$ una qualunque linea orientata contenuta in \mathcal{B}_0 ed avente Q e P quali primo e secondo punto di estremità rispettivamente.

Si noti che sia le soluzioni della (6.101) che quelle della (6.102) devono differire al più di una funzione costante e che sommando una funzione costante ad una qualunque soluzione sia della (6.101) che della (6.102) si ottiene ancora una soluzione. Ne consegue che la (6.106) fornisce tutte le soluzioni della (6.101), così come la (6.107) fornisce tutte le soluzioni della (6.102).

6.7.3 Rotore di campi vettoriali e tensoriali

Si consideri ora una qualunque superficie S contenuta in \mathcal{B}_0 , di contorno ∂S ed orientata esternamente dal versore normale \mathbf{n} in un suo punto interno P (fig. 6.17a). Dato un qualunque punto del contorno ∂S di S , si

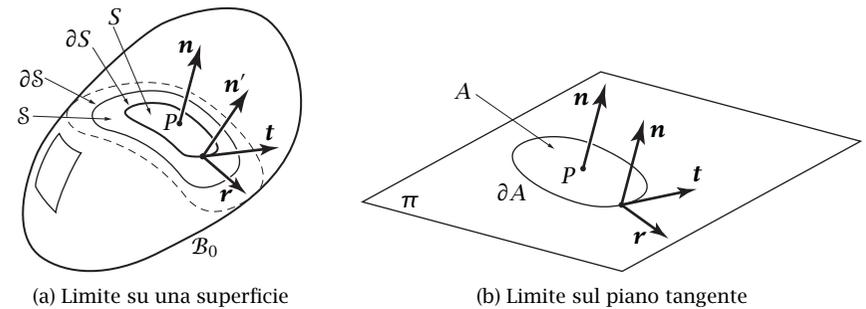


Figura 6.17: Circolazione per unità di superficie

considerino il versore normale \mathbf{n}' a S equiverso a \mathbf{n} , il versore \mathbf{r} , normale sia a \mathbf{n}' che a ∂S , uscente dalla superficie S , e infine il versore tangente \mathbf{t} al contorno S orientato in modo tale che la terna di vettori $\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{t}$, in quest'ordine, sia destra.

Ciò premesso, dati un campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente un campo tensoriale \mathbf{A} , definito in un dominio \mathcal{B}_0 dello spazio euclideo \mathcal{E} resta definita la funzione di superficie scalare:

$$c(S) = \oint_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds, \tag{6.108}$$

rispettivamente vettoriale:

$$\mathbf{c}(S) = \oint_{\partial S} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds, \tag{6.109}$$

detta *circolazione*⁷⁰ del campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente del campo tensoriale \mathbf{A} .

Si può allora calcolare, se esiste, la circolazione per unità di superficie. A tale scopo si consideri un generico punto P del dominio \mathcal{B}_0 ed una generica superficie S passante per il dato punto e contenuta in \mathcal{B}_0 , orientata esternamente dal versore normale \mathbf{n} in P alla superficie stessa (fig. 6.17a). La circolazione per unità di superficie associata al punto P ed alla superficie S risulta allora:

$$c(P, S) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \mathcal{B}_0}} \frac{c(S)}{S}, \quad (6.110)$$

rispettivamente:

$$\mathbf{c}(P, S) = \lim_{\substack{S \rightarrow P \\ S \subset \mathcal{B}_0}} \frac{\mathbf{c}(S)}{S}, \quad (6.111)$$

dove S rappresenta una generica superficie intorno del punto P e contenuta in S .

Si noti che poiché al limite la superficie S e quindi il suo contorno appartengono al piano tangente π in P alla superficie stessa, il limite (6.110), rispettivamente (6.111), coincide con quello che si otterrebbe sul predetto piano tangente. Ne consegue che tale limite dipende non tanto dalla superficie su cui viene eseguito, quanto dal piano tangente e quindi dalla sua normale \mathbf{n} . Nel caso che esista, la circolazione per unità di superficie in un punto P rappresenta una funzione del versore normale \mathbf{n} . Se l'estensione omogenea di grado uno di tale funzione allo spazio dei vettori \mathcal{V} è anche additiva e quindi lineare viene detta *rotore*⁷¹ del dato campo vettoriale \mathbf{v} ed indicata con $\text{rot } \mathbf{v}$, rispettivamente del dato campo tensoriale \mathbf{A} ed indicata con $\text{rot } \mathbf{A}$.

Se il rotore esiste, vale dunque la relazione:

$$\int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (6.112)$$

nota in letteratura quale *formula di Stokes*,⁷² rispettivamente:

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \mathbf{n} \, dS. \quad (6.113)$$

⁷⁰Il nome circolazione, detta a volte anche circuitazione, dipende dal significato fisico di circolazione di un fluido che ha la funzione (6.108) nel caso in cui \mathbf{v} coincida con il campo delle velocità del fluido stesso. Nella lingua inglese si usa il termine *circulation*, che d'altronde traduce anche circuitazione.

⁷¹*Curl* nella letteratura inglese.

⁷²Si veda per esempio Gilardi (1996, p. 596).

Esistenza e componenti del rotore di campi vettoriali e tensoriali. Si mostrerà nel seguito che $\text{rot } \mathbf{v}$ esiste e che le sue componenti in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $Oxyz$ valgono:

$$(\text{rot } \mathbf{v})_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}, \quad \{\text{rot } \mathbf{v}\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad (6.114)$$

rispettivamente che $\text{rot } \mathbf{A}$ esiste e che le sue componenti valgono:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_{ij} = \sum_{hk} \varepsilon_{jkh} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h}, \quad (6.115a)$$

$$[\text{rot } \mathbf{A}] = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial A_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{xz}}{\partial x} & \frac{\partial A_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xx}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{yz}}{\partial x} & \frac{\partial A_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} \\ \frac{\partial A_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zz}}{\partial x} & \frac{\partial A_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{zx}}{\partial y} \end{array} \right]. \quad (6.115b)$$

Dimostrazione. Poiché, come detto, il limite (6.110), rispettivamente (6.111), dipende solo dal piano tangente alla superficie S in P , scelto un generico versore \mathbf{n} si consideri quale superficie guida S il piano π di normale \mathbf{n} e sia A un'area contenuta in π e di contorno ∂A (fig. 6.17b). Per le convenzioni fatte sulle orientazioni, vale la relazione $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}$, che in componenti si scrive $t_k = \sum_{ij} \varepsilon_{ijk} n_i r_j = \sum_{jh} \varepsilon_{jkh} n_j r_h$,⁷³ dove, come detto, \mathbf{r} è il versore normale alla curva di contorno ∂A , appartenente a π ed uscente dall'area A .

Ciò premesso risulta, come volevasi dimostrare:

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds &= \int_{\partial A} \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} n_i r_j v_k \, ds = \sum_{ijk} \left(\int_{\partial A} \varepsilon_{ijk} n_i r_j v_k \, ds \right) \\ &= \sum_{ijk} \left(\int_A \varepsilon_{ijk} n_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \, dA \right) = \int_A \sum_i \left\{ n_i \left(\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right) \right\} dA \\ &= \int_A \left(\sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \right) \cdot \mathbf{n} \, dA, \end{aligned}$$

rispettivamente:

⁷³Cfr. la seconda delle (1.48b), p. 24.

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds &= \int_{\partial A} \sum_{ik} A_{ik} t_k \mathbf{e}_i \, ds = \sum_{ijhk} \left(\int_{\partial A} \varepsilon_{jkh} n_j r_h A_{ik} \, ds \right) \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{ijhk} \left(\int_A \varepsilon_{jkh} n_j \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \, dA \right) \mathbf{e}_i = \int_A \sum_{ij} \left\{ \left(\sum_{hk} \varepsilon_{jkh} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \right) n_j \mathbf{e}_i \right\} dA \\ &= \int_A \left\{ \sum_i \left(\sum_{hk} \varepsilon_{jkh} \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_h} \right) \mathbf{e}_i \right\} \mathbf{n} \, dA, \end{aligned}$$

avendo utilizzato il teorema di Green valido nel caso piano⁷⁴ per trasformare il generico integrale di linea che compare nella sommatoria di cui al terzo membro della uguaglianza ed avendo considerato che la normale \mathbf{n} è un campo vettoriale costante nel piano π . ■

Si noti che le righe della matrice delle componenti di $\text{rot } \mathbf{A}$ non sono altro che i rotori delle righe della matrice delle componenti di \mathbf{A} :

$$(\text{rot } \mathbf{A})^T \mathbf{e}_i = \text{rot} (\mathbf{A}^T \mathbf{e}_i), \quad (6.116)$$

relazione che definisce implicitamente il rotore di un campo tensoriale una volta che sia definito il rotore di un campo vettoriale, dato che la base \mathbf{e}_i è generica.

Si noti inoltre che dalla (6.115b) si deduce facilmente che le divergenze delle righe di $\text{rot } \mathbf{A}$ sono tutte nulle, ovvero sia che:

$$\text{div} (\text{rot } \mathbf{A}) = \mathbf{0}. \quad (6.117)$$

Vettore simbolico nabla. Si noti che introducendo il *vettore simbolico* ∇ :⁷⁵

$$\nabla = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad (6.118)$$

detto *nabla* oppure *del*, è possibile ottenere formalmente le componenti (6.115) del rotore di un campo vettoriale \mathbf{v} tramite la seguente

⁷⁴Cfr. la (5.29), p. 127, valida nel caso spaziale.

⁷⁵Introdotta da Hamilton, chiamato *nabla* da Heaviside e *atled* (delta rovesciato) da altri, spesso pronunciato e poi anche chiamato *del*. Si faccia attenzione all'uso che viene fatto in letteratura del simbolo nabla, poiché a volte è utilizzato semplicemente quale sinonimo dell'operatore gradiente grad, e non quale vettore simbolico oggetto di operazioni simboliche.

operazione simbolica:

$$\text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \quad (6.119)$$

Sfruttando la (6.116), dalla (6.119) si ottengono formalmente anche le righe della matrice delle componenti del rotore di un campo tensoriale \mathbf{A} :

$$(\text{rot } \mathbf{A})^T \mathbf{e}_i = \nabla \times \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{ix} & A_{iy} & A_{iz} \end{bmatrix}. \quad (6.120)$$

6.7.4 Condizioni di integrabilità di campi vettoriali e tensoriali

Domini monoconnessi. In un dominio monoconnesso B_0 ogni curva chiusa è sempre contorno di una superficie contenuta nel dominio stesso. Nel seguito si vuole ottenere una condizione necessaria e sufficiente di integrabilità di campi vettoriali, rispettivamente tensoriali, utilizzando la relazione (6.112), rispettivamente la relazione (6.113), relazione che riduce il calcolo della circolazione su una linea chiusa del dato campo all'integrazione del rotore dello stesso campo in una superficie di contorno la data linea chiusa e che per essere valida necessita della orientabilità della detta superficie. Occorre quindi a questo punto citare il fatto che esistono superfici non orientabili delle quali l'esempio tipico è il nastro di Moebius⁷⁶ (fig. 6.18). Senza entrare in dettagli, se una linea chiusa ℓ è contorno di una superficie S non orientabile, questa può sempre essere tagliata lungo una curva ℓ' che le appartiene in modo tale che la superficie stessa non venga separata in due parti (fig. 6.18). La superficie \bar{S} che così si ottiene, il cui contorno $\bar{\ell}$ è composto dalla curva originale ℓ più due volte la curva ℓ' , è necessariamente una superficie orientabile. Orientando la linea ℓ viene anche orientata la linea $\bar{\ell}$ e i due tratti di contorno coincidenti con la curva ℓ' hanno necessariamente orientazione opposta. Ne consegue che la circolazione sulla linea chiusa ℓ uguaglia la circolazione sulla linea chiusa $\bar{\ell}$ che uguaglia l'integrale del rotore sulla superficie \bar{S} . Quindi, in generale,

⁷⁶Le superfici non orientabili e quelle orientabili sono anche dette *ad una faccia* e *a due facce* rispettivamente. Moebius è citato come Möbius nella letteratura inglese.

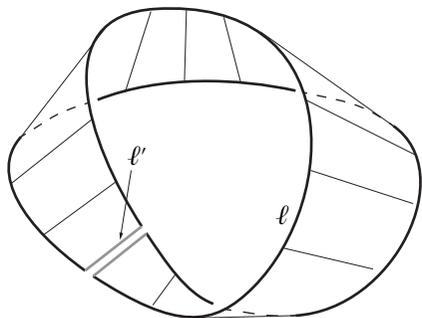


Figura 6.18: Nastro di Moebius

data una qualunque curva chiusa ℓ in un dominio monoconnesso \mathcal{B}_0 esiste sempre una superficie orientabile S contenuta nel dominio stesso tale che:

$$\oint_{\ell} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = \int_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (6.121)$$

rispettivamente:

$$\oint_{\ell} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \int_S (\text{rot } \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (6.122)$$

Per quanto detto sopra non sempre ℓ coincide con il contorno di S .

Per quanto dimostrato nel par. 6.7.2 a p. 165, si può allora affermare che *condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del potenziale scalare f del campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente del potenziale vettoriale \mathbf{u} del campo tensoriale \mathbf{A} , è che sia:*

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (6.123)$$

rispettivamente:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (6.124)$$

in tutto il dominio \mathcal{B}_0 .

Si noti che inserendo la (6.101) nella (6.123) si ottiene:

$$\sum_{jk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{cases}, \quad (6.125)$$

relazione che afferma che le derivate seconde miste del “presunto” campo scalare f devono essere invertibili, in accordo col *teorema di Schwartz*.⁷⁷ Un analogo risultato si ottiene inserendo la (6.102) nella (6.124), ovverossia che le derivate seconde miste delle componenti scalari del “presunto” campo vettoriale \mathbf{u} devono essere invertibili.

Domini multiconnessi. Per quel che riguarda i domini multiconnessi, si consideri innanzitutto che un dominio \mathcal{B}_0 con un numero n_C di connessioni è caratterizzato da $n_C - 1$ sezioni piane A_i , connesse e di contorni ∂A_i connessi, che rendono monoconnesso il dominio stesso (fig. 6.19).

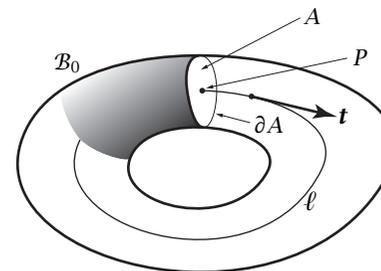


Figura 6.19: Dominio biconnesso

Per ognuna delle sezioni A_i , esiste una curva chiusa ℓ_i , contenuta nel dominio \mathcal{B}_0 , che interseca la detta sezione in un punto e solo in un punto e che non interseca le altre sezioni.

Dimostrazione. Infatti se P_i è un punto di A_i è possibile collegare questo punto pensato appartenente ad una delle due facce di A_i con lo stesso punto pensato appartenente all'altra faccia tramite una curva aperta tutta appartenente al dominio e non intersecante né la sezione A_i né le altre sezioni A_j ($j \neq i$), dato che il corpo è ancora connesso dopo gli $n_C - 1$ sezionamenti. Connettendo infine in P_i la detta curva di ottiene una curva chiusa che interseca A_i in P_i , come volevasi dimostrare. ■

La curva chiusa ℓ_i è concatenata con la curva chiusa ∂A_i di contorno della sezione A_i e solo con questa. Ne consegue che qualunque superfi-

⁷⁷Si veda per esempio Gilardi (1996, p. 166).

cie avente la curva chiusa ℓ_i quale contorno deve necessariamente intersecare il contorno ∂A_i della sezione A_i e che quindi deve necessariamente contenere punti non appartenenti al dominio \mathcal{B}_0 . La condizione (6.123), rispettivamente (6.124), non assicura allora che sia:

$$\oint_{\ell_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0, \tag{6.126}$$

rispettivamente:

$$\oint_{\ell_i} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0}. \tag{6.127}$$

La (6.126), rispettivamente (6.127), va dunque forzatamente imposta per ottenere una condizione di integrabilità che non sia solo necessaria.

A questo punto occorre domandarsi quante sono le condizioni del tipo (6.126), rispettivamente (6.127), che è “necessario” imporre per avere una condizione “sufficiente” ai fini dell’integrabilità. A tale scopo si consideri innanzitutto che di linee chiuse tipo ℓ_i , che intersecano la sezione A_i e solo questa una e una sola volta, ne esistono infinite, poiché innanzitutto il punto P_i può essere collegato a sè stesso in infiniti modi ed inoltre di punti P_i su A_i ce ne sono infiniti. Ad ogni sezione A_i corrisponde quindi un insieme \mathcal{L}_i di infinite curve chiuse ℓ_i concatenate con la curva chiusa ∂A_i di contorno della sezione A_i e solo con questa. Si noti che questi $n_C - 1$ insiemi \mathcal{L}_i non dipendono dalla scelta delle $n_C - 1$ sezioni A_i che rendono monoconnesso il dominio \mathcal{B}_0 . Tutte le curve di \mathcal{L}_i possono essere orientate orientando esternamente la sezione A_i , ovvero sia scegliendo un verso di attraversamento. In tal caso si dice che le curve hanno *orientazione concorde*. Scelto un orientamento, l’insieme delle curve con orientazione concorde verrà indicato con $\tilde{\mathcal{L}}_i$ e quello delle stesse curve con orientazione discorde con $-\tilde{\mathcal{L}}_i$.

Se il rotore è nullo ovunque nel dominio \mathcal{B}_0 allora la circolazione c , scalare o vettoriale che sia, ha un valore costante \tilde{c}_i sull’insieme di curve $\tilde{\mathcal{L}}_i$, aventi quindi orientazione concorde:

$$c(\ell_i) = \tilde{c}_i, \quad \text{per ogni } \ell_i \in \tilde{\mathcal{L}}_i. \tag{6.128}$$

Poiché cambiando orientazione la circolazione cambia di segno dalla (6.128) consegue che $c(\ell_i) = -\tilde{c}_i$ per ogni $\ell_i \in -\tilde{\mathcal{L}}_i$.

Dimostrazione. Siano ℓ'_i e ℓ''_i due curve chiuse dell’insieme \mathcal{L}_i e si consideri che queste possono essere prima sconnesse in corrispondenza dei

due punti intersezione, P'_i e P''_i , delle due curve chiuse con la sezione A_i e poi connesse tra loro in entrambe le facce di tale sezione per il tramite del segmento $P'_i P''_i$, eventualmente nullo se i due punti coincidono, in modo da formare una curva chiusa ℓ_i^* che non interseca nessuna delle $n_C - 1$ sezioni che rendono monoconnesso il dominio \mathcal{B}_0 , compresa la sezione oggetto di discussione, e che quindi è contorno di una superficie tutta contenuta nel dominio stesso (fig. 6.20a). Ne consegue, per l’ipotesi di rotore nullo, che

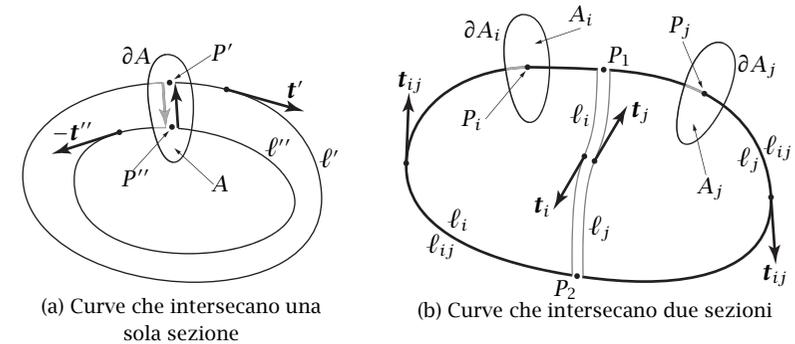


Figura 6.20: Curve chiuse che intersecano una o più sezioni

la circolazione sulla curva ℓ_i^* è nulla. Si tenga ora conto che sulla curva ℓ_i^* i due segmenti $P'_i P''_i$ vengono percorsi l’uno in un verso e l’altro nel verso opposto qualunque sia la convenzione sulla orientazione di ℓ_i^* per cui il loro contributo alla circolazione su ℓ_i^* è nullo. Si orientino poi le linee ℓ'_i e ℓ''_i in modo che la loro orientazione sia concorde e la linea ℓ_i^* in modo che la sua parte coincidente con la curva ℓ'_i abbia, per esempio, verso concorde con questa, e quindi che la sua parte coincidente con l’altra curva, ℓ''_i , abbia verso discorde. Si ha allora:

$$\oint_{\ell'_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}' \, ds - \oint_{\ell''_i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}'' \, ds = 0,$$

rispettivamente:

$$\oint_{\ell'_i} \mathbf{A} \mathbf{t}' \, ds - \oint_{\ell''_i} \mathbf{A} \mathbf{t}'' \, ds = 0,$$

come volevasi dimostrare. ■

Se il dominio \mathcal{B}_0 è almeno triconnesso e quindi se $n_C - 1 \geq 2$ si considerino poi due, A_i e A_j , delle $n_C - 1$ sezioni. Analogamente a quanto visto nel

caso in cui ci si è riferiti ad una sola sezione, esiste un insieme \mathcal{L}_{ij} di infinite curve chiuse ℓ_{ij} appartenenti a \mathcal{B}_0 e che intersecano entrambe le sezioni prescelte una e una sola volta e che non intersecano nessuna delle restanti, come illustrato in fig. 6.20b. Tali curve sono concatenate con entrambi i contorni, ∂A_i e ∂A_j , delle due sezioni, A_i e A_j rispettivamente, e di conseguenza qualunque superficie avente la curva chiusa ℓ_{ij} quale contorno deve necessariamente intersecare sia il contorno ∂A_i della sezione A_i che quello ∂A_j della sezione A_j e deve quindi deve necessariamente contenere punti non appartenenti al dominio \mathcal{B}_0 . Ne consegue che anche in tal caso la condizione (6.123), rispettivamente (6.124), non assicura che sia:

$$\oint_{\ell_{ij}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} \, ds = 0, \quad (6.129)$$

rispettivamente:

$$\oint_{\ell_{ij}} \mathbf{A} \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0}. \quad (6.130)$$

La circolazione c , scalare o vettoriale che sia, su una qualunque curva chiusa $\ell_{ij} \in \mathcal{L}_{ij}$ è pari alla somma delle circolazioni su due curve $\ell_i \in \mathcal{L}_i$ e $\ell_j \in \mathcal{L}_j$:

$$c(\ell_{ij}) = c(\ell_i) + c(\ell_j). \quad (6.131)$$

Dimostrazione. I punti intersezione P_i e P_j di ℓ_{ij} con A_i e A_j rispettivamente dividono la curva ℓ_{ij} in due due parti. Scelti due punti, P_1 e P_2 , della curva chiusa ℓ_{ij} , uno per ognuno dei due tratti di cui sopra, la stessa curva viene suddivisa in due parti ognuna delle quali può essere resa chiusa tramite una curva che congiunga P_1 con P_2 , come illustrato in fig. 6.20b. Scegliendo tale curva in modo tale che non intersechi nessuna delle delle $n_C - 1$ sezioni che rendono monoconnesso \mathcal{B}_0 , i due tratti vengono quindi completati generando sia una curva $\ell_i \in \mathcal{L}_i$ che una curva $\ell_j \in \mathcal{L}_j$. Scegliendo una orientazione per la curva ℓ_{ij} e orientando le curve ℓ_i e ℓ_j in modo che il verso sia concorde nei tratti comuni ne consegue che il tratto di curva che connette i punti P_1 e P_2 ha orientazione opposta sulle due curve ℓ_i e ℓ_j e ne consegue immediatamente quanto volevasi dimostrare. ■

L'iterazione del procedimento precedente di scomporre in due parti una curva permette di affrontare in modo semplice il calcolo della circolazione $c(\ell)$, scalare o vettoriale che sia, di una generica curva chiusa ℓ che intersechi un numero generico di sezioni, ognuna delle quali anche più volte.

Sia $p_i (i = 1, 2, \dots, n_C - 1)$ il numero di intersezioni della curva con la sezione A_i , eventualmente nullo se non vi sono intersezioni con tale sezione. Si orientino sia la curva ℓ che le $n_C - 1$ sezioni. Si noti che se la curva interseca una sezione più di una volta non risulta sempre possibile avere i versi di tutte le intersezioni sulla curva concordi con l'orientazione della sezione. Per quel che interessa nel seguito, l'unica informazione importante per ogni sezione A_i è il numero di intersezioni p_i^+ concordi, da cui discende anche il numero di intersezioni $p_i^- = p_i - p_i^+$ discordi.

Per ogni intersezione con la generica sezione A_i , si considerino due punti sulla curva tali che la curva venga divisa in due parti, una che contenga la sola intersezione oggetto dell'analisi e l'altra tutte le altre intersezioni. Ognuna delle due parti della curva può essere resa chiusa tramite una stessa curva che congiunga i due punti prescelti e che non intersechi nessuna delle sezioni. Una delle curve così generate è del tipo $\ell_i \in \mathcal{L}_i$. Iterando su tutte le intersezioni con la generica sezione A_i si generano p_i curve $\ell_i^j \in \mathcal{L}_i$ ($j = 1, 2, \dots, p_i$), di cui p_i^+ con orientazione concorde con quella della sezione stessa e p_i^- con orientazione discorde. Ne consegue allora che la circolazione $c(\ell)$ sulla data curva, sotto l'ipotesi di validità della (6.123) rispettivamente della (6.124), vale:

$$c(\ell) = \sum_i (p_i^+ - p_i^-) \tilde{c}_i, \quad (6.132)$$

dove $\tilde{c}_i (i = 1, 2, \dots, n_C - 1)$ è la circolazione sulle curve $\ell_i \in \mathcal{L}_i$ equiorientate con la sezione A_i , circolazione che è costante per via della (6.128).

Imporre la condizione (6.126), rispettivamente la condizione (6.127), ad una curva di \mathcal{L}_i significa annullare la circolazione \tilde{c}_i , scalare o vettoriale che sia. Dalla (6.132) consegue allora immediatamente che:

Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza del potenziale scalare f del campo vettoriale \mathbf{v} , rispettivamente del potenziale vettoriale \mathbf{u} del campo tensoriale \mathbf{A} , in un dominio n_C volte connesso è che valga la (6.123), rispettivamente la (6.124), in tutto il dominio \mathcal{B}_0 e che valga la condizione (6.126), rispettivamente la condizione (6.127), per una qualunque scelta di $n_C - 1$ curve chiuse $\ell_i \in \mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n_C - 1$).

Si noti che le condizioni del tipo (6.126), rispettivamente del tipo (6.127), da imporre sono $n_C - 1$. Si noti anche che in virtù della relazione (6.132) invece di imporre le dette condizioni solo su curve chiuse che intersecano una sola sezione una e una sola volta si potrebbero anche imporre, per

esempio, su curve chiuse che intersecano più sezioni una e una sola volta, a patto che le condizioni vengano imposte su $n_C - 1$ curve appartenenti ad insiemi diversi, ognuna delle quali cioè intersechi un numero diverso di sezioni oppure, a parità del numero di sezioni intersecate, che intersechi almeno una sezione diversa da quelle intersecate dalle altre curve.

6.7.5 Equazioni esplicite di congruenza

Confrontando le componenti (6.98) del gradiente del vettore $\boldsymbol{\varphi}$ di rotazione infinitesima con le componenti (6.115a) del rotore di un generico tensore \mathbf{A} e tenendo conto della simmetria del tensore di deformazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon}$, se ne deduce che:

$$\text{grad } \boldsymbol{\varphi} = (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T. \quad (6.133)$$

Si noti anche che, tenendo conto delle (6.115a) e (6.97) e della simmetria del tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$, risulta:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \boldsymbol{\omega})_{ij} &= \sum_{hk} \epsilon_{jkh} \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_h} = \sum_{hk} \epsilon_{jkh} \left(\frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_k} - \frac{\partial \epsilon_{kh}}{\partial x_i} \right) \\ &= - \sum_{hk} \epsilon_{jkh} \frac{\partial \epsilon_{ih}}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{hk} \epsilon_{jkh} \epsilon_{kh} \right) = - (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})_{ij}, \end{aligned}$$

e cioè:

$$\text{rot } \boldsymbol{\omega} = - \text{rot } \boldsymbol{\epsilon}. \quad (6.134)$$

Ciò premesso, si può affermare che: *condizione necessaria, e anche sufficiente se il corpo continuo è monoconnesso, per l'integrazione, nella configurazione indeformata \mathcal{B}_0 del corpo, di un generico campo tensoriale simmetrico $\boldsymbol{\epsilon}$ in un campo di spostamenti \mathbf{u} è che sia:*

$$\text{rot } \{ (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T \} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}_0. \quad (6.135)$$

La relazione (6.135) assume quindi il ruolo di *equazione esplicita di congruenza*.

Dimostrazione. Per via della relazione (6.133) e per quanto mostrato nel par. 6.7.4, p. 167, la (6.135) è condizione necessaria, e anche sufficiente se il corpo continuo è monoconnesso, per l'esistenza del campo vettoriale $\boldsymbol{\varphi}$, e quindi del campo tensoriale $\boldsymbol{\omega}$, delle rotazioni infinitesime. Poiché il

campo tensoriale $\boldsymbol{\omega}$ soddisfa la (6.134) e poiché il rotore è un operatore lineare⁷⁸ ne risulta la condizione:

$$\text{rot } (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}) = \text{rot } \boldsymbol{\epsilon} - \text{rot } \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}, \quad (6.136)$$

necessaria, e anche sufficiente se il corpo continuo è monoconnesso, per l'esistenza del campo vettoriale \mathbf{u} degli spostamenti, come volevasi dimostrare. ■

Tensori di incompatibilità. La (6.135) suggerisce di definire il seguente tensore doppio \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = \text{rot } \{ (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T \}, \quad (6.137)$$

detto *tensore di incompatibilità*. In componenti risulta:

$$\left(\text{rot } \{ (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T \} \right)_{ij} = \sum_{hk} \epsilon_{jkh} \frac{\partial}{\partial x_h} (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})_{ki} = \sum_{hk} \epsilon_{jkh} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\sum_{lm} \epsilon_{ilm} \frac{\partial \epsilon_{km}}{\partial x_l} \right)$$

e quindi:

$$\mathcal{R}_{ij} = \sum_{hklm} \epsilon_{jkh} \epsilon_{ilm} \frac{\partial^2 \epsilon_{km}}{\partial x_h \partial x_l}. \quad (6.138)$$

Per via della simmetria di $\boldsymbol{\epsilon}$ e della invertibilità dell'ordine di derivazione dalla (6.138) si ottiene immediatamente che il campo tensoriale di incompatibilità \mathcal{R} è simmetrico:

$$\mathcal{R}^T = \mathcal{R}. \quad (6.139)$$

Inoltre, sia per il fatto che il tensore di incompatibilità definito dalla (6.137) è il rotore del campo $(\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T$ che per il fatto espresso dalla (6.117) che la divergenza del rotore di un campo tensoriale è sempre nullo, vale la cosiddetta *identità di Bianchi*:

$$\text{div } \mathcal{R} = \mathbf{0}. \quad (6.140)$$

Infine la definizione (6.137) riduce l'equazione di congruenza (6.135) alla richiesta che il campo tensoriale di incompatibilità sia nullo ovunque in \mathcal{B}_0 :

$$\mathcal{R} = \mathbf{0}. \quad (6.141)$$

⁷⁸Quale limite di un operatore lineare, ovvero sia dell'integrale di linea, non può che essere un operatore lineare.

Equazioni di congruenza di Saint-Venant. L'equazione tensoriale (6.141) equivale, per la simmetria di \mathcal{R} , a 6 sole equazioni di congruenza scalari, dette *equazioni di congruenza (o di compatibilità) di Saint-Venant*, che si possono scrivere per esteso utilizzando la (6.138):

$$\mathcal{R}_{xx} = \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial z \partial y} = 0, \quad (6.142a)$$

$$\mathcal{R}_{yy} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = 0, \quad (6.142b)$$

$$\mathcal{R}_{zz} = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial y \partial x} = 0, \quad (6.142c)$$

$$-2\mathcal{R}_{zy} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z \partial x} = 0, \quad (6.142d)$$

$$-2\mathcal{R}_{xz} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{zy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (6.142e)$$

$$-2\mathcal{R}_{yx} = 2 \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \gamma_{yx}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} = 0. \quad (6.142f)$$

Si noti che l'identità di Bianchi equivale a tre condizioni scalari sulle 6 componenti indipendenti del tensore di incompatibilità il che equivale ad affermare che le 6 equazioni di congruenza (6.142) non sono indipendenti tra loro.⁷⁹

◇ ◇ ◇

Deduzione delle equazioni di congruenza dal teorema di Schwartz. Si ricordi che per quanto detto al par. 6.7.4, p. 167, la (6.135) equivale alla invertibilità delle

⁷⁹È stato tuttavia dimostrato che non è sufficiente utilizzare solo tre delle sei condizioni scalari (6.142). Per esempio le tre condizioni:

$$\mathcal{R}_{xx} = 0, \quad \mathcal{R}_{yy} = 0, \quad \mathcal{R}_{zz} = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_0$$

oppure le restanti tre condizioni:

$$\mathcal{R}_{zy} = 0, \quad \mathcal{R}_{xz} = 0, \quad \mathcal{R}_{yx} = 0, \quad \text{in } \mathcal{B}_0$$

da sole non bastano, ma le prime hanno bisogno anche della validità delle seconde sul contorno $\partial \mathcal{B}_0$ del solido, così come le seconde della validità delle prime ancora sul contorno $\partial \mathcal{B}_0$. Dato che l'introduzione di tali condizioni al contorno non è generalmente conveniente nei problemi di meccanica dei solidi, è consuetudine di includere in tali problemi tutte e sei le condizioni (6.142), anche se potenzialmente sono equivalenti a tre sole condizioni. Per maggiori dettagli si veda per esempio Washizu (1982, cap. 1, pp. 14-16 e 28-30).

derivate seconde miste delle componenti di ω :

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_h \partial x_k} - \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k \partial x_h} = 0. \quad (6.143)$$

Poiché dipendono da 4 indici, le (6.143) equivalgono a 81 equazioni, 45 delle quali sono delle semplici identità per via del fatto che le ω_{ij} sono nulle se $i = j$ e del fatto che i due termini che compaiono nelle (6.143) sono uguali se $h = k$. Le 36 equazioni restanti si possono poi dividere in 4 gruppi equivalenti di 9 equazioni ciascuno, poichè per via della emisimmetria di ω invertendo gli indici i e j si ottiene la stessa equazione moltiplicata per -1 mentre per via della invertibilità dell'ordine di derivazione invertendo gli indici h e k i due termini dell'equazione si scambiano di posto e ancora si ottiene la stessa equazione moltiplicata per -1 mentre invertendo entrambe le coppie di indici i, j e h, k si ottiene la stessa equazione, dato che viene moltiplicata due volte per -1 .

Inserendo nelle condizioni (6.143) la relazione (6.97) tra le derivate delle componenti di ω e quelle delle componenti di ϵ si ottengono le equazioni di congruenza nella forma:

$$\left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) = 0. \quad (6.144)$$

Posto:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right), \quad (6.145)$$

le (6.144) possono scriversi:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = 0. \quad (6.146)$$

La (6.145) definisce un tensore \mathbb{R} del quarto ordine, dato che le sue componenti dipendono da 4 indici. Tale tensore non rappresenta altro che il tensore di incompatibilità (6.137) in una forma alternativa. D'altronde, per quanto detto sul numero di equazioni indipendenti espresse dalla (6.143), il tensore \mathbb{R} ha 45 elementi nulli mentre dei rimanenti 36 solo 9 sono indipendenti e coincidono con le componenti di \mathcal{R} . Le proprietà enunciate precedentemente e che riducono da 36 a 9 le equazioni di congruenza significative si scrivono in termini del tensore di incompatibilità \mathbb{R} del quarto ordine nel modo seguente:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = -\mathbb{R}_{jihk} = -\mathbb{R}_{ijkh} = \mathbb{R}_{jikh}. \quad (6.147)$$

Si noti che queste valgono anche nel caso che sia $i = j$ oppure $h = k$, poichè le componenti che compaiono nella (6.147) sono allora tutte nulle e lo zero è l'unico numero opposto di se stesso. Infine, la simmetria (6.139) viene scritta in termini di \mathbb{R} nella forma:

$$\mathbb{R}_{ijhk} = \mathbb{R}_{hkij}. \quad (6.148)$$

◇ ◇ ◇

Equazioni di congruenza in domini multiconnessi. Se il corpo continuo è pluriconnesso, le condizioni di congruenza (6.135) è solo necessaria. Per avere delle condizioni che siano anche sufficienti per l'esistenza del campo tensoriale $\boldsymbol{\omega}$ delle rotazioni infinitesime, alla condizione (6.135) occorre aggiungere le condizioni (6.127) di circolazione per il campo tensoriale $(\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T$:

$$\oint_{\ell_i} (\text{rot } \boldsymbol{\epsilon})^T \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n_C - 1, \quad (6.149)$$

dove le $n_C - 1$ curve chiuse ℓ_i sono scelte dagli $n_C - 1$ insiemi \mathcal{L}_i di infinite curve, una curva da ogni insieme. Per poter poi integrare il campo $\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}$ nel campo \mathbf{u} degli spostamenti è sufficiente che, per le stesse curve chiuse ℓ_i , sia inoltre nulla la circolazione del campo tensoriale $\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}$:

$$\oint_{\ell_i} (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}) \mathbf{t} \, ds = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, n_C - 1. \quad (6.150)$$

Si faccia attenzione al fatto che l'esistenza di $\boldsymbol{\omega}$ non porta con se, a differenza del caso in cui il corpo è monoconnesso, l'esistenza di \mathbf{u} , ovvero sia che le (6.135) e (6.149) non sono in generale sufficienti per l'esistenza del campo \mathbf{u} degli spostamenti.

Dimostrazione. La descrizione di un controesempio è sufficiente per dimostrare tale asserzione. Si consideri a tale scopo il dominio biconnesso illustrato in fig. 6.21, ovvero sia un cilindro di sezione circolare cava di raggio medio R , di spessore $B < 2R$ e di altezza H . Per rendere più agevoli i calcoli si sono scelti due sistemi di coordinate. Il primo è un sistema $Oxyz$ cartesiano ortogonale con l'asse z coincidente con l'asse del cilindro e il centro O degli assi appartenente alla prima base del cilindro, prima base in accordo con l'orientazione di z . Il secondo è un sistema di coordinate cilindriche α, r e z , dove la coordinata α è definita dall'angolo antiorario di cui deve ruotare il piano xz per portarsi sul generico punto P , la coordinata r dalla distanza di P dall'asse z e la coordinata z coincide con l'analoga coordinata del sistema precedente, ossia è definita dalla distanza di P dalla prima base del cilindro. Tenendo conto che un sistema di coordinate deve associare a un qualunque punto del dominio al più un valore della coordinata stessa, nel seguito si limita la coordinata angolare α all'intervallo aperto $(-\pi, \pi)$. Con la scelta fatta tale coordinata non è definita nella sezione longitudinale A individuata dai due valori $\alpha = \pi$ e $\alpha = -\pi$ che limitano l'intervallo aperto prescelto. Valori dei campi espressi per il tramite delle coordinate cilindriche si devono pertanto ottenere, in corrispondenza dei

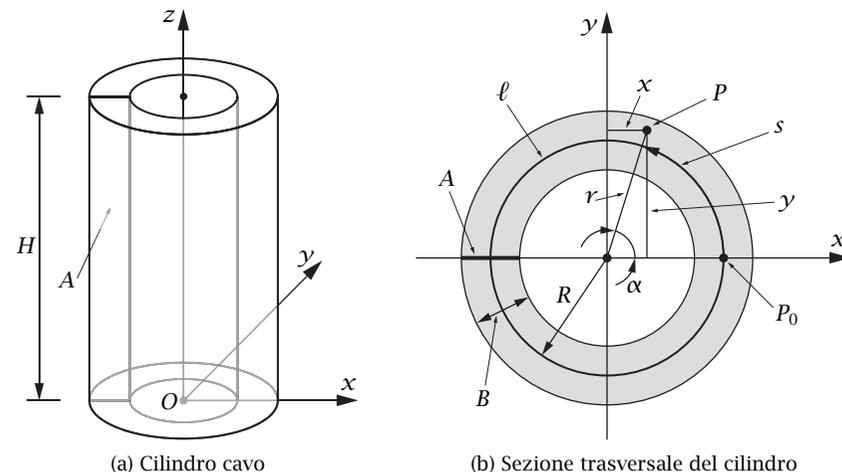


Figura 6.21: Esempio

punti della sezione A , quali valori limite. Si noti che la sezione A predetta rende monoconnesso il cilindro cava biconnesso.

Nel dominio prescelto si consideri il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = a \sin \frac{\alpha}{2} \end{cases}, \quad (6.151)$$

dove le componenti u, v e w dello spostamento \mathbf{u} nel sistema cartesiano ortogonale sono date in funzione delle coordinate cilindriche e dove a è una costante avente le dimensioni di una lunghezza. Si noti che tale campo di spostamenti è continuo nel dominio reso monoconnesso dalla sezione longitudinale A , dominio interamente mappato dalla coordinata α . Ma nel dominio biconnesso la componente w dello spostamento presenta una discontinuità $\Delta w = 2a$ in corrispondenza dei punti della sezione A , dato che $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ e $\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ e che quindi $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} w = a$ e $\lim_{\alpha \rightarrow -\pi} w = -a$. In definitiva la sezione longitudinale A scivola di a nel verso di z dalla parte positiva della coordinata angolare e di a nel verso opposto a quello di z dalla parte negativa della stessa coordinata. Nel caso del dominio biconnesso

il campo (6.151) presenta quindi una perdita di congruenza, tecnicamente lo sviluppo di una frattura, in corrispondenza della sezione A .

Allo scopo del calcolo del gradiente degli spostamenti corrispondente al campo (6.151) si consideri la relazione tra le coordinate cartesiane ortogonali x e y e quelle cilindriche α e r e la corrispondente relazione differenziale:

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} dx = \cos \alpha dr - \sin \alpha (r d\alpha) \\ dy = \sin \alpha dr + \cos \alpha (r d\alpha) \end{cases}. \quad (6.152)$$

Dalla seconda delle (6.152) conseguono le relazioni differenziali inverse:

$$\begin{cases} dr = \cos \alpha dx + \sin \alpha dy \\ r d\alpha = -\sin \alpha dx + \cos \alpha dy \end{cases}, \quad (6.153)$$

che permettono il calcolo delle derivate parziali di α rispetto alle coordinate cartesiane ortogonali:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{1}{r} \sin \alpha, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{1}{r} \cos \alpha. \quad (6.154)$$

necessarie al calcolo delle componenti cartesiane del gradiente del campo (6.151) degli spostamenti, le cui uniche componenti non nulle risultano allora:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{a}{2r} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{a}{2r} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (6.155)$$

Dal fatto che $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\cos \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$ consegue sia che $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ e $\lim_{\alpha \rightarrow -\pi} \frac{\partial w}{\partial x} = 0$, sia che $\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$ e $\lim_{\alpha \rightarrow -\pi} \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Il gradiente degli spostamenti (6.155) è quindi continuo non solo nel dominio reso monoconnesso dalla sezione A , ma anche nel dominio originale biconnesso, e così è, di conseguenza, sia per la sua parte simmetrica, che rappresenta il campo di deformazione e le cui uniche componenti non nulle sono:

$$\gamma_{zx} = 2\epsilon_{zx} = -\frac{a}{2r} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy} = \frac{a}{2r} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (6.156)$$

sia per la sua parte emisimmetrica, che rappresenta il campo della rotazione rigida locale e le cui uniche componenti non nulle sono:

$$\varphi_x = \omega_{zy} = \frac{a}{4r} \cos \alpha \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \varphi_y = \varphi_{xz} = \frac{a}{4r} \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (6.157)$$

Rovesciando il discorso, si supponga ora che sia dato, nel cilindro biconnesso cavo, un campo continuo di deformazione ϵ espresso per il tramite delle sue componenti (6.156). Visto che tale campo è integrabile nel campo continuo (6.157) di rotazione locale, risultano necessariamente soddisfatte sia la condizione (6.135) in tutto il dominio biconnesso che la condizione (6.149), per esempio relativamente alla circonferenza ℓ di raggio medio R sita in una qualunque sezione trasversale del cilindro:

$$\oint_{\ell} (\text{rot } \epsilon)^T \mathbf{t} ds = \mathbf{0}. \quad (6.158)$$

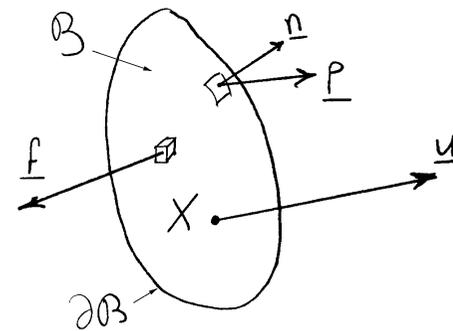
Per via della discontinuità di ampiezza $2a$ dello spostamento w in corrispondenza dei punti della sezione A , deve invece risultare:

$$\oint_{\ell} (\epsilon + \omega) \mathbf{t} ds = 2a\mathbf{e}_z, \quad (6.159)$$

come volevasi dimostrare e in accordo col fatto che il campo di deformazione (6.156) è integrabile nel campo continuo (6.151) di spostamenti solo nel dominio reso monoconnesso dalla sezione longitudinale A . ■

6.8 Principio dei lavori virtuali

Sia data una possibile configurazione \mathcal{B} di un corpo solido, di contorno $\partial\mathcal{B}$, non soggetto a vincoli esterni. Un sistema di forze e tensioni agenti



nella data configurazione \mathcal{B} del corpo è definito una volta che siano date

le forze di volume \mathbf{f} , quelle di superficie \mathbf{p} e il tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ quali campi arbitrari in \mathcal{B} . Il sistema di forze è *equilibrato* se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio globali delle forze e dei momenti rispetto ad un polo qualunque:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \, dV = \mathbf{0}, \quad (6.160a)$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV = \mathbf{0}. \quad (6.160b)$$

Il sistema di forze e tensioni è *equilibrato* se sono soddisfatte le equazioni di equilibrio indefinite e al contorno:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = \mathbf{0}, \quad \text{in } \mathcal{B}, \quad (6.161a)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{p}, \quad \text{su } \partial\mathcal{B}, \quad (6.161b)$$

dove \mathbf{n} è la normale uscente dalla superficie $\partial\mathcal{B}$ del contorno del solido e l'operatore divergenza è definito in \mathcal{B} .

Un *campo di spostamenti rigidi virtuali* del dato corpo nella data configurazione \mathcal{B} è definito una volta che siano dati un campo di spostamenti \mathbf{u} rigidi infinitesimi congruenti. La congruenza richiede che il campo di spostamenti soddisfi sia le ipotesi di continuità e di differenziabilità a suo tempo discusse che l'ipotesi di rigidità, ovvero sia che il campo stesso sia generato, previa scelta di un polo \mathbf{O} , da un vettore traslazione \mathbf{u}_O e da un vettore rotazione $\boldsymbol{\varphi}$, oppure, equivalentemente, da un tensore emisimmetrico $\boldsymbol{\omega}$ di rotazione infinitesima di cui $\boldsymbol{\varphi}$ è l'assiale. Un *campo di spostamenti e deformazioni virtuali* del dato corpo nella data configurazione \mathcal{B} è definito una volta che siano dati un campo di spostamenti \mathbf{u} e un campo di deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ infinitesimi e congruenti. La congruenza richiede che il campo di spostamenti virtuale sia in accordo con le ipotesi di continuità e di differenziabilità a suo tempo discusse e che la deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$ sia quella generata dallo stesso campo di spostamenti virtuali. Le parti prime di un campo di spostamenti e dell'associata deformazione soddisfano, in modo esatto, l'equazione di congruenza linearizzata:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \mathbf{u}^T), \quad (6.162)$$

dove l'operatore gradiente è definito in \mathcal{B} . Si noti che nel caso di un campo di spostamenti rigidi virtuali la deformazione infinitesima $\boldsymbol{\epsilon}$ è nulla. Si

sottolinea il fatto che il termine infinitesimo non è sinonimo di piccolo ma di parte prima: gli spostamenti e le deformazioni virtuali sono la parte prima, negli spostamenti stessi, di spostamenti e di deformazioni finite così come gli spostamenti rigidi virtuali sono la parte prima di spostamenti rigidi finiti. Uno spostamento virtuale non è approssimato dalla parte prima di uno spostamento, *uno spostamento virtuale è la parte prima di uno spostamento*.

Il lavoro L_{ve} del sistema di forze esterne \mathbf{f} e \mathbf{p} per gli spostamenti virtuali \mathbf{u} viene detto *lavoro virtuale esterno*:

$$L_{ve} = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dV. \quad (6.163)$$

Il lavoro L_{vi} del sistema di forze interne $\boldsymbol{\sigma}$ per le deformazioni virtuali $\boldsymbol{\epsilon}$ viene detto *lavoro virtuale interno*:

$$L_{vi} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, dV. \quad (6.164)$$

Per definizione, un sistema di forze esterne applicate ad una data configurazione di un corpo continuo non vincolato soddisfa il *principio dei lavori virtuali* se il lavoro virtuale L_{ve} delle forze esterne è nullo per ogni campo \mathbf{u} di spostamenti rigidi virtuali:

$$L_{ve} = 0. \quad (6.165)$$

Tale forma del principio viene spesso detta *per i corpi rigidi* poiché è l'unica forma che si può applicare ai corpi rigidi. Ciò non esclude comunque che si possa applicare anche ai corpi deformabili in una data configurazione soggetta a date forze esterne, eventualmente la configurazione indeformata nel caso di una teoria del primo ordine. Per definizione, un sistema di forze e tensioni soddisfa il *principio dei lavori virtuali* se il lavoro virtuale L_{ve} delle forze esterne uguaglia il lavoro virtuale L_{vi} delle forze interne per ogni campo di spostamenti \mathbf{u} e deformazioni $\boldsymbol{\epsilon}$ virtuali:

$$L_{ve} = L_{vi}. \quad (6.166)$$

Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio globale delle forze. Il sistema di forze \mathbf{f} e \mathbf{p} è *equilibrato globalmente* se e solo se soddisfa il *principio dei lavori virtuali*.

Dimostrazione. Utilizzando la relazione (3.112), p. 99, nella (6.163) si ottiene:

$$L_{ve} = \left(\int_{\partial B} \mathbf{p} \, dS + \int_B \mathbf{f} \, dV \right) \cdot \mathbf{u}_O + \left(\int_{\partial B} \mathbf{r} \times \mathbf{p} \, dS + \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{f} \, dV \right) \cdot \boldsymbol{\varphi}, \quad (6.167)$$

dove il vettore posizione rispetto al polo O si è indicato con \mathbf{r} . Dalla (6.167) si ha immediatamente che se le forze sono equilibrate, cioè soddisfacenti le (6.160), allora $L_{ve} = 0$ per ogni coppia di vettori $(\mathbf{u}_O, \boldsymbol{\varphi})$. D'altronde se $L_{ve} = 0$ per ogni coppia di vettori $(\mathbf{u}_O, \boldsymbol{\varphi})$ allora, per l'indipendenza dei vettori \mathbf{u}_O e $\boldsymbol{\varphi}$, devono valere le equazioni di equilibrio globali (6.160), come volevasi dimostrare. ■

Si ricordi che le tensioni sono staticamente indeterminate, ovvero che esistono infiniti campi di tensione soddisfacenti le equazioni di equilibrio indefinito. Ne risulta che l'equilibrio globale implica l'equilibrio indefinito, nel senso dell'esistenza di un campo di tensione equilibrato, ma non dice nulla su tale campo. Quindi analogamente il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi implica non solo l'equilibrio globale ma anche l'equilibrio indefinito, tuttavia senza dire nulla sul campo di sforzo.

Equivalenza tra principio dei lavori virtuali ed equilibrio di forze e tensioni. *Il sistema di forze e tensioni \mathbf{f} , \mathbf{p} e $\boldsymbol{\sigma}$ è equilibrato se e solo se soddisfa il principio dei lavori virtuali.*

Dimostrazione. Utilizzando la relazione (5.32), p. 128, tenendo conto che $\boldsymbol{\sigma} \cdot \text{grad } \mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$, poiché $\boldsymbol{\sigma}$ è simmetrico e $\boldsymbol{\omega}$ emisimmetrico,⁸⁰ si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} \, dS &= \int_{\partial V} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, dS + \int_{\partial V} (\mathbf{p} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, dS \\ &= \int_V (\text{div } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \, dV + \int_{\partial V} (\mathbf{p} - \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} \, dS \end{aligned} \quad (6.168)$$

Dalla (6.163) e dalla (6.164) si ottiene allora:

$$L_{ve} = L_{vi} + \int_B (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \, dS. \quad (6.169)$$

Da tale equazione è evidente che se valgono le equazioni di equilibrio (6.161) allora vale la (6.166) per ogni campo \mathbf{u} di spostamenti virtuali.

⁸⁰Cfr. la (1.136), p. 36.

Se poi vale la (6.166) per ogni campo \mathbf{u} di spostamenti virtuali allora dalla (6.169) si ottiene che deve valere l'uguaglianza:

$$\int_B (\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}) \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial B} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u} \, dS = 0. \quad (6.170)$$

per ogni campo \mathbf{u} di spostamenti virtuali, e tale uguaglianza può essere soddisfatta se e solo se le funzioni $\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}$ e $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{p}$, che sotto il segno di integrale sono moltiplicate per il campo degli spostamenti virtuali \mathbf{u} , si annullano in tutti i punti del relativo dominio di definizione.⁸¹ Ne conseguono le equazioni di equilibrio (6.161), come volevasi dimostrare. ■

Si noti che per applicare il principio dei lavori virtuali nella forma testé dimostrata, occorre che il corpo oggetto di considerazione non sia vincolato. Se così non è occorre svincolarlo e considerare le reazioni vincolari parte delle forze esterne.

Si noti inoltre che il principio dei lavori virtuali non è ristretto all'ipotesi di piccoli spostamenti, poiché tale ipotesi non è stata utilizzata nella dimostrazione. Si noti comunque che la configurazione \mathcal{B} è quella nella quale sono definite sia le forze e le tensioni che gli spostamenti e le deformazioni virtuali ed è inoltre la configurazione nella quale si impone sia l'equilibrio delle forze e tensioni che la congruenza degli spostamenti e deformazioni virtuali. Se è data una configurazione \mathcal{B}_0 di riferimento, il campo degli spostamenti finiti che individuano, a partire da questa, la configurazione deformata conseguente all'applicazione sul corpo di certe forze non è un campo di spostamenti virtuali perché tale campo non è linearizzato. Inoltre le date forze non sono equilibrate nella configurazione di riferimento, dominio di definizione del campo di spostamenti finiti di cui si sta parlando, ma nella configurazione deformata.

Nell'ipotesi di piccoli spostamenti la configurazione \mathcal{B} del corpo può essere fatta coincidere con la configurazione indeformata di riferimento \mathcal{B}_0 , che diventa quindi la configurazione nella quale si definiscono approssimativamente sia le forze e le tensioni che gli spostamenti e le deformazioni virtuali e dove si impongono sia l'equilibrio delle forze e tensioni che la congruenza degli spostamenti e deformazioni virtuali. In tal caso un campo di spostamenti reale, cioè conseguente all'applicazione sul corpo di certe forze, può essere assunto quale campo di spostamenti virtuali congruenti,

⁸¹La dimostrazione rigorosa di questo fatto appartiene al *calcolo delle variazioni* ed è a volte citata in letteratura con il nome di *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

poiché nel caso di piccoli spostamenti tale campo deve soddisfare, come un campo di spostamenti virtuali, le equazioni di congruenza linearizzate.

ELASTICITÀ LINEARE

L'analisi della tensione ha mostrato che, di fronte a ben definite forze applicate, le equazioni di equilibrio non sono sufficienti a determinare univocamente lo stato di tensione. D'altronde, la sola proprietà meccanica del materiale componente il corpo continuo di cui si è finora tenuto conto (nel caso dinamico) è quella della sua inerzia, ovvero della sua distribuzione di massa, risultandone un legame costitutivo tra il campo della quantità di moto e il campo delle velocità. Per determinare univocamente lo stato tensionale in un corpo continuo, cioè per rendere determinato il problema della tensione, occorre mettere in conto il comportamento meccanico conseguente all'imposizione di uno stato di deformazione. Le proprietà meccaniche che ne conseguono si esplicano in un legame costitutivo, più o meno complesso, tra lo stato di tensione e quello di deformazione del corpo in esame. Tale legame, a cui normalmente ci si riferisce quando si parla di *legami costitutivi* nell'ambito della meccanica del continuo, risulta dipendente dal tipo di materiale componente il corpo.

Per un corpo rigido, essendo per esso sempre nullo lo stato di deformazione, lo stato di tensione continua ad essere indefinito. Questa circostanza è in accordo col fatto che il *legame di rigidità* non rappresenta un legame costitutivo nel senso sopra introdotto, ma piuttosto rappresenta un *vincolamento interno*, limitante i possibili campi di spostamento che il corpo può subire. Il vincolo di rigidità trasforma le equazioni globali di bilancio in dei legami tra le caratteristiche dinamiche globali (risultante e momento risultante delle forze esterne) e quelle cinematiche globali (velocità di un punto del corpo rigido, per esempio del baricentro, e velocità

angolare) senza bisogno di passare attraverso la definizione di uno stato tensionale, come viceversa è necessario fare nel caso più generale di un corpo deformabile. Il materiale interviene, attraverso le caratteristiche globali della sua distribuzione di massa (per esempio massa totale e tensore di inerzia relativo al baricentro), nelle equazioni globali di bilancio, che acquistano pertanto il ruolo di legami costitutivi del problema.

Una circostanza analoga a quella di un corpo rigido accade nel caso di un *liquido perfetto*. Infatti, un liquido perfetto resta definito imponendo, da una parte, alla sua deformazione di soddisfare al vincolo interno di *incompressibilità* e, dall'altra parte, al suo stato tensionale di essere sferico (quindi individuato dalla sola pressione). La prima di queste due condizioni, assieme al principio di conservazione della massa, impone al moto di essere *irrotazionale* ($\text{div } \mathbf{v} = 0$, se \mathbf{v} è il campo delle velocità nel fluido), proprietà sufficiente a determinare il campo delle velocità. L'equazione del moto permette allora la determinazione univoca del campo della pressione nel liquido. Ancora una volta il materiale interviene esclusivamente, tramite la sua distribuzione di massa, nell'equazione del moto.

7.1 Legami costitutivi

I legami costitutivi si distinguono in *locali* e *non locali*. Nel caso di un legame costitutivo locale, la tensione nell'intorno di un punto dipende solo dalla deformazione agente nello stesso intorno. Il modo più semplice di

ottenere un legame costitutivo locale è quello di descrivere la deformazione e la tensione nell'intorno di un punto tramite i tensori di deformazione ϵ e degli sforzi σ .

In generale ad una storia di deformazione $\epsilon(\tau)$, dipendente dal tempo τ precedente un dato istante t , corrisponderà a quell'istante una ben precisa tensione (*legge di determinismo*):

$$\epsilon(\tau), \quad -\infty < \tau \leq t \quad \Rightarrow \quad \sigma(t). \quad (7.1)$$

Se invece la tensione σ ad un dato istante dipende solo dalla deformazione ϵ allo stesso istante e non dalla precedente storia di deformazione il legame viene detto *elastico*:

$$\sigma = \sigma(\epsilon). \quad (7.2)$$

Il caso più semplice di un legame elastico è quello *lineare*, che nel caso di un solido si scrive:

$$\sigma = \mathbb{E}_{\text{sym}} [\epsilon]. \quad (7.3)$$

dove \mathbb{E}_{sym} è una trasformazione lineare:

$$\mathbb{E}_{\text{sym}} : \text{Sym} \rightarrow \text{Sym}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} [\mathbf{A}], \quad (7.4)$$

definita nello spazio vettoriale Sym dei tensori doppi simmetrici ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$). Tale spazio ha dimensione 6 e quindi \mathbb{E}_{sym} può essere rappresentato da $6 \times 6 = 36$ componenti.

7.2 Tensore di elasticità

È usuale (e conveniente) estendere la trasformazione \mathbb{E}_{sym} che compare nella (7.3) a tutto lo spazio Lin dei tensori doppi ponendo:

$$\mathbb{E} : \text{Lin} \rightarrow \text{Lin}, \quad \mathbf{A} \mapsto \mathbb{E}_{\text{sym}} \left[\frac{1}{2} (\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) \right]. \quad (7.5)$$

Una trasformazione lineare $\text{Lin} \rightarrow \text{Lin}$ è detta *tensore del quarto ordine* e la particolare trasformazione \mathbb{E} definita dalla (7.5) è detta *tensore di elasticità lineare*. Il legame costitutivo elastico lineare si scrive allora:

$$\sigma = \mathbb{E} [\epsilon]. \quad (7.6)$$

Questa si può rappresentare in componenti nella forma:

$$\sigma_{ij} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} \epsilon_{hk}. \quad (7.7)$$

Le componenti \mathbb{E}_{ijhk} di \mathbb{E} soddisfano le condizioni seguenti, dette *simmetrie minori*:

$$\mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{jihk}, \quad \mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{ikhj}. \quad (7.8)$$

La prima delle (7.8) dipende dal fatto che $\mathbb{E}[\epsilon]$ deve essere un tensore doppio simmetrico. La seconda delle (7.8) dipende invece dal fatto che \mathbb{E} trasforma un tensore doppio \mathbf{A} generico allo stesso modo in cui trasforma il suo trasposto:

$$\mathbb{E} [\mathbf{A}] = \mathbb{E} [\mathbf{A}^T], \quad (7.9)$$

avendo \mathbf{A} e \mathbf{A}^T la stessa parte simmetrica. Scrivendo la (7.9) in componenti si ottiene:

$$\sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{hk} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijhk} A_{kh} = \sum_{hk} \mathbb{E}_{ijkh} A_{hk}, \quad (7.10)$$

e poiché \mathbf{A} è generico ne deriva infine la seconda simmetria minore.

Le simmetrie minori (7.8) fanno scendere a 36 componenti indipendenti le $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ componenti \mathbb{E}_{ijkh} del tensore di elasticità lineare.

7.3 Matrice di elasticità

Poiché, per via della simmetria, le componenti indipendenti sia del tensore degli sforzi σ che di quello di deformazione ϵ sono 6, risulta possibile rappresentarli rispettivamente con un *vettore algebrico di tensione* $\{\sigma\}$ e con un *vettore algebrico di deformazione* $\{\epsilon\}$ entrambi di dimensione 6. La proprietà principale che si vuole conservare è il prodotto scalare dei due tensori di sforzo e di deformazione, nel senso che si vuole sia:

$$\sigma \cdot \epsilon = \{\sigma\}^T \{\epsilon\}. \quad (7.11)$$

Tenendo conto della simmetria di σ e ϵ , il prodotto scalare $\sigma \cdot \epsilon$ vale:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \epsilon &= \sum_{i,j} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \left(\frac{1}{2} \sigma_{zy} \gamma_{zy} + \frac{1}{2} \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right) \\ &+ \left(\frac{1}{2} \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \frac{1}{2} \sigma_{zx} \gamma_{zx} \right) + \left(\frac{1}{2} \sigma_{yx} \gamma_{yx} + \frac{1}{2} \sigma_{xy} \gamma_{xy} \right) \\ &= \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \sigma_{zy} \gamma_{zy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yx} \gamma_{yx}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Si ottiene allora lo scopo voluto, cioè la (7.11), se si riportano, come è usuale, le tensioni normali e le tensioni tangenziali relativi ai piani coordinati

nel caso del vettore algebrico di tensione e le dilatazioni e gli scorrimenti relativi alle linee coordinate nel caso del vettore algebrico di deformazione, avendo cura di mettere in posizioni corrispondenti le componenti tensoriali che nella (7.12) sono moltiplicate tra loro:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{zy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix}, \quad \{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} \end{Bmatrix}. \quad (7.13)$$

Sviluppando la somma che compare nella relazione (7.7), tenendo conto della simmetria di ϵ e delle simmetrie (7.8) di \mathbb{E} , si ottiene:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \mathbb{E}_{ijxx}\epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy}\epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz}\epsilon_z + 2\mathbb{E}_{ijzy}\epsilon_{zy} + 2\mathbb{E}_{ijxz}\epsilon_{xz} + 2\mathbb{E}_{ijyx}\epsilon_{yx} \\ &= \mathbb{E}_{ijxx}\epsilon_x + \mathbb{E}_{ijyy}\epsilon_y + \mathbb{E}_{ijzz}\epsilon_z + \mathbb{E}_{ijzy}\gamma_{zy} + \mathbb{E}_{ijxz}\gamma_{xz} + \mathbb{E}_{ijyx}\gamma_{yx}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Tenendo conto che per via della simmetria di σ la coppia di indici (i, j) può essere limitata all'insieme $\{(x, x), (y, y), (z, z), (z, y), (x, z), (y, x)\}$, la (7.14) si può scrivere nella forma matriciale seguente:

$$\{\sigma\} = [\mathbb{E}] \{\epsilon\}. \quad (7.15)$$

Per esteso la matrice di elasticità $[\mathbb{E}]$, espressa in termini di componenti del tensore di elasticità \mathbb{E} del quarto ordine, risulta quindi:

$$[\mathbb{E}] = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{xxxx} & \mathbb{E}_{xxyy} & \mathbb{E}_{xxzz} & \mathbb{E}_{xxzy} & \mathbb{E}_{xxxz} & \mathbb{E}_{xxyx} \\ \mathbb{E}_{yyxx} & \mathbb{E}_{yyyy} & \mathbb{E}_{yyzz} & \mathbb{E}_{yyzy} & \mathbb{E}_{yyxz} & \mathbb{E}_{yyyx} \\ \mathbb{E}_{zzxx} & \mathbb{E}_{zzyy} & \mathbb{E}_{zzzz} & \mathbb{E}_{zzzy} & \mathbb{E}_{zzxz} & \mathbb{E}_{zzyx} \\ \mathbb{E}_{zyxx} & \mathbb{E}_{zyyy} & \mathbb{E}_{zyzz} & \mathbb{E}_{zyzy} & \mathbb{E}_{zyxz} & \mathbb{E}_{zyyx} \\ \mathbb{E}_{zxxx} & \mathbb{E}_{xzyy} & \mathbb{E}_{xzzz} & \mathbb{E}_{xzzy} & \mathbb{E}_{xzxz} & \mathbb{E}_{xzyx} \\ \mathbb{E}_{yxxx} & \mathbb{E}_{yxyy} & \mathbb{E}_{yxzz} & \mathbb{E}_{yxzy} & \mathbb{E}_{yxxz} & \mathbb{E}_{yxyx} \end{bmatrix}. \quad (7.16)$$

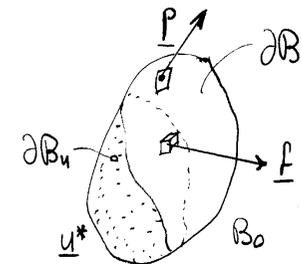
7.4 Problema elastico lineare

7.4.1 Metodo degli spostamenti

Incongnita: il campo degli spostamenti \underline{u}

Termini noti:

- 1) forze di volume \underline{f}
- 2) forze di superficie \underline{p} , limitatamente alla porzione ∂B_p del contorno
- 3) Spostamenti \underline{u}^* limitatamente alla porzione ∂B_u del contorno



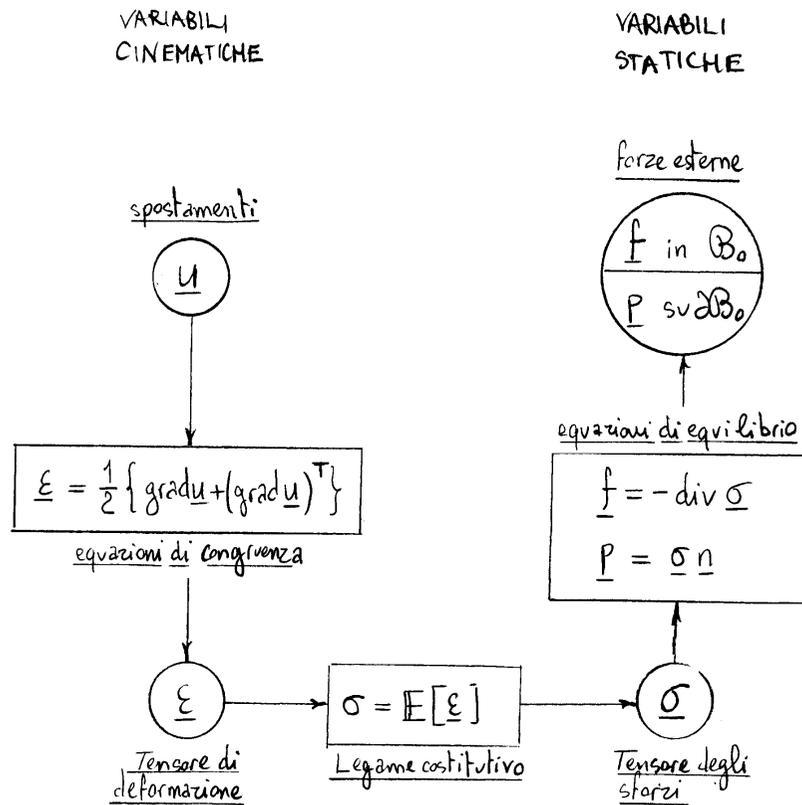
$$\begin{cases} \partial B_u \cup \partial B_p = \partial B_0 \\ \partial B_u \cap \partial B_p = \emptyset \end{cases} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{(Insieme vuoto)} \end{matrix}$$

Equazione fondamentale:

$$\text{div} \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T) \right] \right\} + \underline{f} = \underline{0}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \underline{u} = \underline{u}^* & \text{su } \partial B_u \\ \left\{ \mathbb{E} \left[\frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T) \right] \right\} \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_p \end{cases}$$



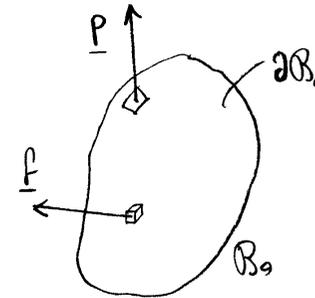
$$\int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot \underline{u} \, dS + \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} \, dV = \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot \underline{\varepsilon} \, dV$$

principio dei lavori virtuali

7.4.2 Metodo delle forze

Incognita: Tensore degli sforzi $\underline{\sigma}^*$ equilibrato con \underline{p} e \underline{f} , cioè tale che:

$$\begin{cases} \text{div} \underline{\sigma}^* + \underline{f} = \underline{0}, & \text{in } B_0 \\ \underline{\sigma}^* \underline{n} = \underline{p} & \text{su } \partial B_0 \end{cases}$$

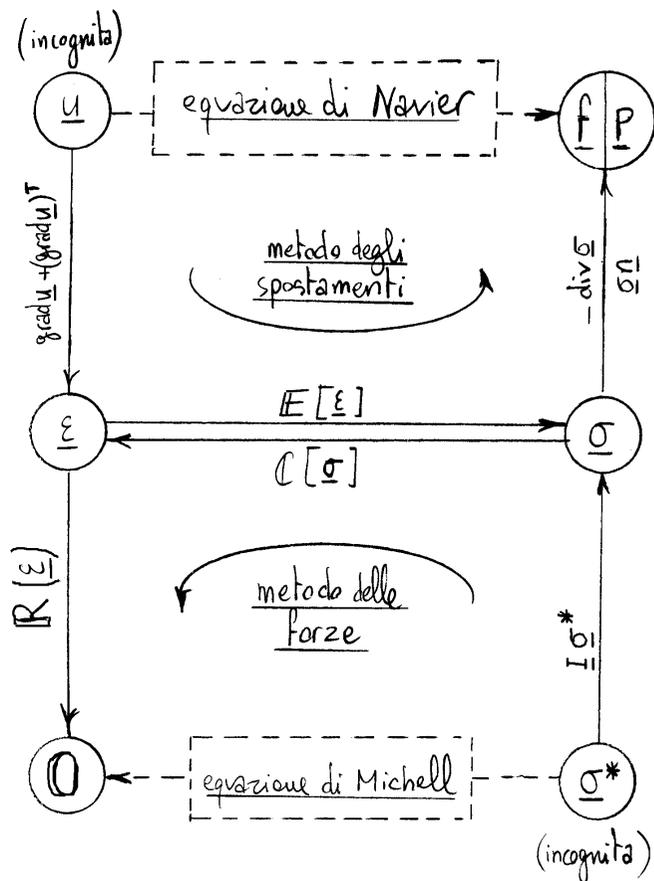


Termini noti: forze di volume \underline{f} e di superficie \underline{p} .

Equazione fondamentale

$$\mathbb{R}^* = \underline{0}$$

dove $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}(\mathbb{C}[\underline{\sigma}^*])$ è il tensore di incompatibilità corrispondente a $\mathbb{C}[\underline{\sigma}^*]$.



$\underline{\sigma}^* \equiv$ Tensore degli sforzi equilibrato con \underline{p} e \underline{f}

$\mathbb{R} \equiv$ Tensore di incompatibilità

$\underline{0} \equiv$ Tensore nullo del quarto ordine

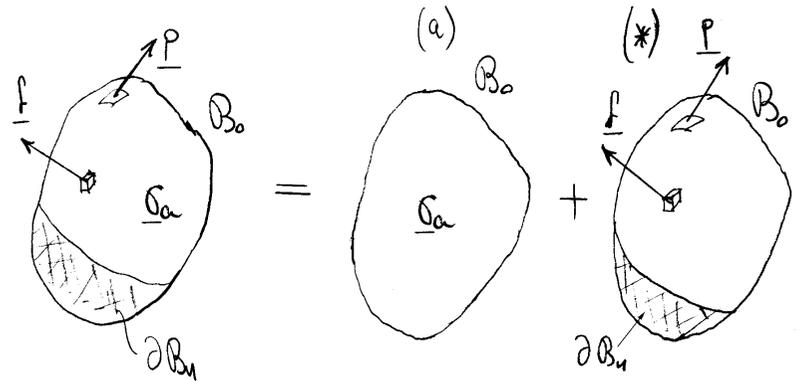
7.5 Autotensioni

Come già detto, un corpo è soggetto ad autotensioni se il tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$ non è nullo nella configurazione scarica, cioè nella configurazione che corrisponde a forze esterne applicate nulle. Si ricordi anche che se le autotensioni sono nulle la configurazione scarica viene detta configurazione naturale.

Il legame costitutivo elastico lineare $\underline{\sigma} = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}]$ è relativo alla configurazione naturale, poiché per $\underline{\varepsilon} = \underline{0}$ fornisce $\underline{\sigma} = \underline{0}$.

Se sono presenti delle autotensioni $\underline{\sigma}_a$, le tensioni globali che si hanno a seguito dell'applicazione di date forze esterne saranno la somma

delle autotensioni più il contributo dovuto alle forze esterne, contributo valutato sulla configurazione scissa priva di autotensioni:



B_0 soggetto alle autotensioni $\underline{\sigma}_a$

B_0 soggetto alle autotensioni $\underline{\sigma}_a$

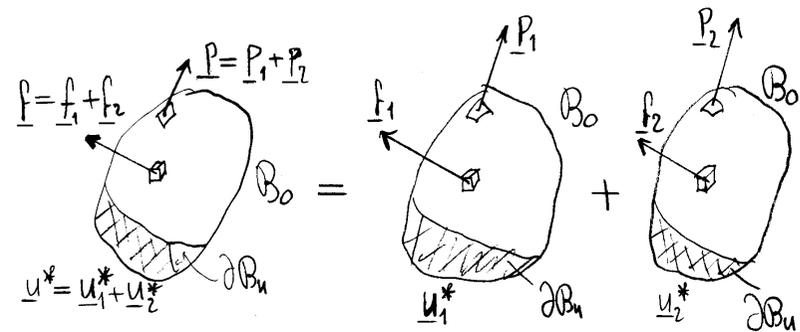
B_0 configurazione naturale

$$\begin{cases} \underline{\sigma} \\ \underline{\varepsilon} \end{cases} = \begin{cases} \underline{\sigma}_a \\ \underline{0} \end{cases} + \begin{cases} \underline{\sigma}^* \\ \underline{\varepsilon}^* \end{cases}$$

$$\underline{\sigma}^* = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*]$$

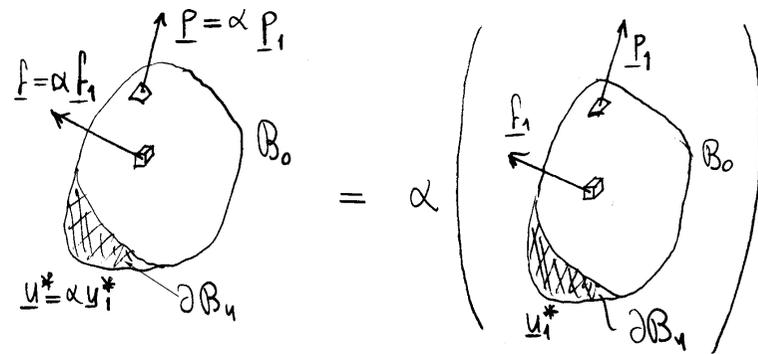
7.6 Sovrapposizione degli effetti

Il problema elastico-lineare è caratterizzato da equazioni lineari definite in uno stesso dominio B_0 , che rappresenta la configurazione naturale del corpo continuo. Vale dunque il principio di sovrapposizione degli effetti. Schematicamente:



$$\begin{cases} \underline{u} \\ \underline{\varepsilon} \\ \underline{\sigma} \end{cases} = \begin{cases} \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma}_1 \end{cases} + \begin{cases} \underline{u}_2 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \underline{\sigma}_2 \end{cases}$$

additività



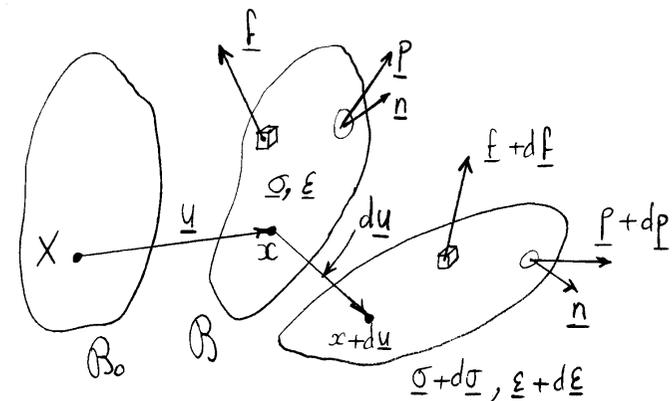
$$\begin{cases} \underline{u} & = & \alpha & \times & \underline{u}_1 \\ \underline{\varepsilon} & = & \alpha & \times & \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\sigma} & = & \alpha & \times & \underline{\sigma}_1 \end{cases}$$

omogeneità di grado 1 ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Notiamo che per la validità di tale principio è indispensabile che tutte le equazioni del problema siano lineari, compreso il legame costitutivo. Se sono presenti delle autotensioni, la linearità vale solo per la quota del tensore degli sforzi dovuta ai carichi esterni.

7.7 Lavoro di deformazione

Siano $\underline{\sigma}$, $\underline{\varepsilon}$, \underline{u} i tensori degli sforzi e della deformazione e gli spostamenti conseguenti all'applicazione di certi carichi \underline{F} nel volume e \underline{p} sulla superficie di un corpo continuo di configurazione naturale B_0 . Siano inoltre $d\underline{u}$ e $d\underline{\varepsilon}$ gli incrementi



degli spostamenti e delle deformazioni dovuti ad un incremento $d\underline{f}$ e $d\underline{p}$ dei carichi esterni.

Ricordiamo che, nell'ambito delle piccole deformazioni, le forze sono considerate sempre applicate alla configurazione indeformata e che l'equilibrio va quindi scritto relativamente a tale configurazione.

L'incremento del lavoro dei carichi esterni (lavoro di deformazione) vale:

$$dL_d = \int_{\partial B_0} \underline{p} \cdot d\underline{u} dS + \int_{B_0} \underline{f} \cdot d\underline{u} dV.$$

Per il principio dei lavori virtuali si ottiene anche:

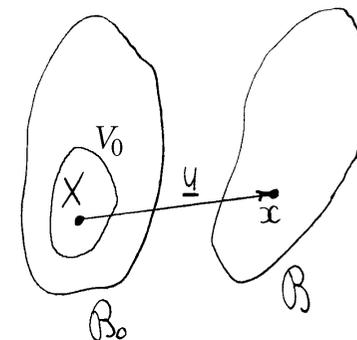
$$dL_d = \int_{B_0} \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon} dV.$$

7.8 Energia elastica di deformazione

La richiesta che il lavoro di deformazione non dipenda dal percorso, ma solo dagli istanti iniziale e finale, conduce in modo diretto alla esistenza, per il solido, di una *energia potenziale elastica* o *energia elastica di deformazione* Φ funzione del solo campo degli spostamenti \underline{u} . Normalmente si assume che l'energia sia nulla in corrispondenza della configurazione naturale:

$$\Phi(\mathbf{0}) = 0. \quad (7.17)$$

Si consideri ora la quota $\Phi(V_0)$ di energia associata al generico volume V_0 del solido e si introduca l'*energia elastica (di deformazione) per unità di*



volume ϕ , definita in ogni punto X del solido:

$$\phi = \lim_{V_0 \rightarrow X} \frac{\Phi(V_0)}{V_0}. \quad (7.18)$$

L'energia associata al generico volume V_0 vale allora:

$$\Phi = \int_{V_0} \phi dV_0. \quad (7.19)$$

Differenziando e tenendo conto del principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$dL_d = d\Phi = \int_{V_0} d\phi dV_0 = \int_{V_0} (\underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon}) dV_0, \quad (7.20)$$

per ogni volume V_0 di B_0 . Risulta allora:

$$d\phi = \underline{\sigma} \cdot d\underline{\epsilon} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij}, \quad (7.21)$$

e ne consegue che l'energia elastica per unità di volume dipende dallo spostamento \mathbf{u} solo attraverso il valore locale (nel punto) del tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\phi = \phi(\boldsymbol{\epsilon}) = \phi(\epsilon_{ij}). \quad (7.22)$$

La forma differenziale dell'energia (7.21) implica:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\epsilon}) = \text{grad}_{\boldsymbol{\epsilon}} \phi, \quad (7.23)$$

e il legame costitutivo è necessariamente elastico lineare. In componenti la (7.23) si scrive:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}}, \quad (7.24)$$

Poiché:

$$\sigma_{ij} = \sum_{h,k} \mathbb{E}_{ijhk} \epsilon_{hk}. \quad (7.25)$$

risulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{hk}} = \mathbb{E}_{ijhk}, \quad (7.26)$$

e ne consegue la simmetria maggiore del tensore di elasticità:

$$\mathbb{E}_{ijhk} = \mathbb{E}_{hki j}. \quad (7.27)$$

Si osservi che per via della (7.16), p. 181, tale simmetria porta con sé la simmetria della matrice quadrata $[\mathbb{E}]$ di elasticità.

Integrando l'incremento $d\phi$ tra gli stati iniziale indeformato e quello finale individuato dal campo di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$ e tenendo conto del legame lineare tra $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$, si ottiene l'energia potenziale elastica per unità di volume corrispondente alla configurazione finale:

$$\phi = \int_0^{\boldsymbol{\epsilon}} \boldsymbol{\sigma}^* \cdot d\boldsymbol{\epsilon}^*, \quad (7.28)$$

dove si sono indicate con $\boldsymbol{\sigma}^*$ e $\boldsymbol{\epsilon}^*$ le tensioni e le deformazioni corrispondenti allo stato generico. Una situazione intermedia tra $\mathbf{0}$ e $\boldsymbol{\epsilon}$ è individuata dalla deformazione $\boldsymbol{\epsilon}^* = \lambda \boldsymbol{\epsilon}$, per un certo scalare λ compreso nell'intervallo $(0, 1)$, a cui corrisponde, per la linearità delle grandezze in gioco, la tensione $\boldsymbol{\sigma}^* = \lambda \boldsymbol{\sigma}$. Tenendo poi conto che per l'incremento di deformazione si ha $d\boldsymbol{\epsilon}^* = d\lambda \boldsymbol{\epsilon}$, dalla (7.28) si ottiene:

$$\phi = \left(\int_1^0 \lambda d\lambda \right) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}, \quad (7.29)$$

e ne consegue la seguente espressione dell'energia potenziale elastica per unità di volume:

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}]. \quad (7.30)$$

Di conseguenza il lavoro di deformazione, ovvero sia l'energia elastica di deformazione di tutto il corpo, vale:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV_0 = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}] dV_0. \quad (7.31)$$

Richiedendo al lavoro di deformazione di essere sempre positivo, o al più nullo se non si ha deformazione, si ottiene la condizione di definitezza positiva del tensore elastico, che quindi è anche invertibile:

$$\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}] > 0 \quad \text{per ogni } \boldsymbol{\epsilon} \neq \mathbf{0}. \quad (7.32)$$

Se si pone:

$$\mathbb{C} = \mathbb{E}^{-1}, \quad (7.33)$$

si ha:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C} [\boldsymbol{\sigma}]. \quad (7.34)$$

7.8.1 Teorema di Clapeyron

Si è visto che il lavoro di deformazione può essere messo nella forma:

$$L_d = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} dV_0. \quad (7.35)$$

Per il principio dei lavori virtuali risulta allora:

$$L_d = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} dS_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV_0 \right). \quad (7.36)$$

Tenendo conto che lo spostamento \mathbf{u} e i carichi \mathbf{p} e \mathbf{f} sono quelli finali, ovvero sia quelli che si hanno al termine del processo deformativo, si è allora ottenuto il:

Teorema di Clapeyron. *Il lavoro di deformazione che le forze applicate compiono a partire da zero fino al loro valore finale è pari alla metà del lavoro che compirebbero per gli stessi spostamenti se fossero costantemente applicate con il loro valore finale.*

7.8.2 Teorema di Betti

Per il lavoro di deformazione non vale il principio di sovrapposizione degli effetti. Infatti ad un primo sistema di forze (a), di superficie $\mathbf{p}^{(a)}$ e di volume $\mathbf{f}^{(a)}$, compete il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(a)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dV_0 \right), \quad (7.37)$$

dove gli spostamenti $\mathbf{u}^{(a)}$ sono quelli provocati dalle forze del sistema (a). Ad un secondo sistema di forze (b), di superficie $\mathbf{p}^{(b)}$ e di volume $\mathbf{f}^{(b)}$, compete invece il lavoro di deformazione:

$$L_d^{(b)} = \frac{1}{2} \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dV_0 \right), \quad (7.38)$$

dove ora gli spostamenti $\mathbf{u}^{(b)}$ sono quelli provocati dal secondo sistema di forze (b). Per la sovrapposizione degli effetti, al sistema di forze (a+b), somma dei due sistemi precedenti, compete infine il lavoro:

$$L_d^{(a+b)} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\partial B_0} (\mathbf{p}^{(a)} + \mathbf{p}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dS_0 + \right. \quad (7.39)$$

$$\left. + \int_{B_0} (\mathbf{f}^{(a)} + \mathbf{f}^{(b)}) \cdot (\mathbf{u}^{(a)} + \mathbf{u}^{(b)}) dV_0 \right\} = \quad (7.40)$$

$$= L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + \frac{1}{2} (L_{ab} + L_{ba}), \quad (7.41)$$

dove:

$$L_{ab} = \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(a)} \cdot \mathbf{u}^{(b)} dV_0 \right), \quad (7.42)$$

$$L_{ba} = \left(\int_{\partial B_0} \mathbf{p}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dS_0 + \int_{B_0} \mathbf{f}^{(b)} \cdot \mathbf{u}^{(a)} dV_0 \right). \quad (7.43)$$

I lavori L_{ab} e L_{ba} rappresentano, rispettivamente, i *lavori mutui* che le forze del sistema (a) compirebbero per effetto degli spostamenti dovuti al sistema di forze (b) se avessero sempre il loro valore finale, e viceversa. Si noti che per il principio dei lavori virtuali può anche scriversi:

$$L_{ab} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)}, \quad L_{ba} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}. \quad (7.44)$$

Vale il:

Teorema di Betti (o del lavoro mutuo). I lavori mutui L_{ab} e L_{ba} dovuti a due sistemi di forze (a) e (b) coincidono:

$$L_{ab} = L_{ba}. \quad (7.45)$$

Dimostrazione. Utilizzando il legame elastico lineare e la simmetria del tensore di elasticità si ha:

$$L_{ab} = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(a)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} = \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(b)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(a)}] = \quad (7.46)$$

$$= \int_{B_0} \boldsymbol{\epsilon}^{(a)} \cdot \mathbb{E} [\boldsymbol{\epsilon}^{(b)}] = \int_{B_0} \boldsymbol{\sigma}^{(b)} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^{(a)}, \quad (7.47)$$

come volevasi dimostrare. ■

Può essere interessante dare una seconda dimostrazione del teorema di Betti, basata sull'osservazione che il lavoro di deformazione $L_d^{(a+b)}$ non dipende dal percorso. Tale lavoro può essere allora calcolato applicando prima le forze del sistema (a) fino al loro valore finale e poi quelle del sistema (b) ancora fino al valore finale. Dopo avere applicato il sistema di forze (a) il lavoro di deformazione vale $L_d^{(a)}$. L'ulteriore applicazione del sistema (b) non solo genera il lavoro di deformazione $L_d^{(b)}$, ma facendo lavorare anche il sistema di forze (a) già presenti al loro lavoro finale genera l'ulteriore termine L_{ab} :

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(a)} + L_d^{(b)} + L_{ab}. \quad (7.48)$$

D'altronde, invertendo l'ordine di applicazione delle forze, cioè applicando prima il sistema di forze (b) fino al valore finale e poi il sistema di forze (a) ancora fino al valore finale si ottiene analogamente:

$$L_d^{(a+b)} = L_d^{(b)} + L_d^{(a)} + L_{ba}, \quad (7.49)$$

e ne risulta quindi:

$$L_{ab} = L_{ba}, \quad (7.50)$$

come volevasi dimostrare.

7.8.3 Energia complementare

Differenziando il prodotto scalare $\sigma \cdot \epsilon$ tra tensione e deformazione si ottiene:

$$d(\sigma \cdot \epsilon) = \sigma \cdot d\epsilon + \epsilon \cdot d\sigma. \quad (7.51)$$

Si noti che $\sigma \cdot d\epsilon$ è un differenziale esatto, rappresentando l'incremento dell'energia elastica per unità di volume:

$$d\phi = \sigma \cdot d\epsilon. \quad (7.52)$$

Ne risulta allora che anche $\epsilon \cdot d\sigma$ è un differenziale esatto:

$$d\psi = \epsilon \cdot d\sigma = d(\sigma \cdot \epsilon - \phi). \quad (7.53)$$

È così dimostrata l'esistenza di una funzione ψ della tensione, detta *energia elastica complementare* (per unità di volume), tale che:

$$\psi(\sigma) = \sigma \cdot C[\sigma] - \phi(C[\sigma]), \quad (7.54)$$

dove, come già detto, il tensore del quarto ordine C è l'inverso del tensore E di elasticità.

La composizione tra la funzione energia elastica di deformazione $\phi(\epsilon) = \frac{1}{2} \sigma \cdot \epsilon$ e il legame costitutivo inverso $\epsilon = C[\sigma]$ fornisce:

$$\phi(C[\sigma]) = \frac{1}{2} \sigma \cdot C[\sigma]. \quad (7.55)$$

Sostituendo nella (7.54) si ottiene allora:

$$\psi(\sigma) = \phi(C[\sigma]) = \frac{1}{2} \sigma \cdot C[\sigma]. \quad (7.56)$$

L'energia complementare coincide quindi, nel caso elastico lineare, con la composizione tra energia elastica di deformazione e legame costitutivo inverso.

L'espressione differenziale (7.53) equivale a scrivere:

$$\epsilon = \text{grad}_\sigma \psi, \quad \text{oppure} \quad \epsilon_{ij} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (7.57)$$

Poiché in componenti il legame costitutivo inverso si scrive:

$$\epsilon_{ij} = \sum_{hk} C_{ijhk} \sigma_{hk}, \quad (7.58)$$

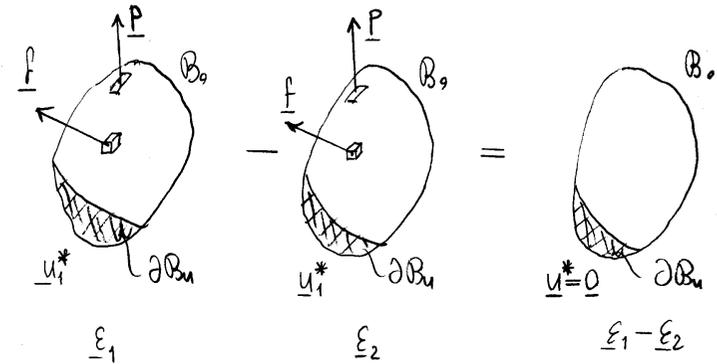
si ottiene:

$$C_{ijhk} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{hk}}. \quad (7.59)$$

7.8.4 Unicità della soluzione

Se la soluzione del problema elastico-lineare esiste, essa è unica (teorema di Kirchhoff).

Infatti, siano $\underline{\epsilon}_1$ ed $\underline{\epsilon}_2$ due deformazioni soluzione dello stesso problema elastico-lineare.



Sotto l'ipotesi che la configurazione B_0 coincida con la configurazione naturale, sottraendo le due soluzioni si ottiene, in virtù del principio di sovrapposizione degli effetti, una soluzione corrispondente a forze applicate nulle e a vincoli rigidi. Quindi il lavoro di

deformazione associato a tale soluzione, per il teorema di Clapeyron, è nullo poiché le forze, al più, sono presenti solo in corrispondenza dei vincoli rigidi. Deve quindi risultare:

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} (\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2] dV = \underline{0},$$

\mathbb{E} è definita positiva e quindi deve essere ovunque:

$$\frac{1}{2} (\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2) \cdot \mathbb{E} [\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2] = \underline{0}.$$

poiché l'integrando è una funzione non negativa. Questo è possibile se e solo se $\underline{\varepsilon}_1 - \underline{\varepsilon}_2 = \underline{0}$ e quindi se e solo se $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{\varepsilon}_2$. Risulta anche:

$$\underline{\sigma}_1 = \mathbb{E} [\underline{\varepsilon}_1] = \mathbb{E} [\underline{\varepsilon}_2] = \underline{\sigma}_2.$$

Infine, \underline{u}_1 e \underline{u}_2 , generando la stessa deformazione non possono che differire di un moto rigido.

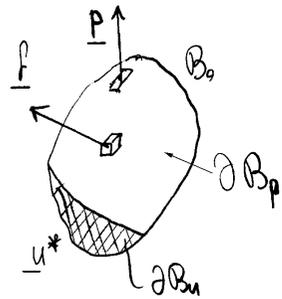
Se le condizioni cinematiche al contorno escludono tale possibilità, anche \underline{u}_1 ed \underline{u}_2 coincidono.

7.9 Energia potenziale totale

Se all'energia elastica di deformazione Φ si somma l'energia potenziale delle forze applicate, nell'ipotesi che tali forze siano conservative, si ottiene l'energia potenziale totale. Se le forze applicate al solido sono indipendenti dagli spostamenti: che la struttura può subire (forze morte, oppure "dead loadings", nella terminologia inglese) allora il potenziale delle forze associate a dati spostamenti, che, con una opportuna scelta dello zero del potenziale, coincide con il lavoro delle forze, risulta:

$$V(\underline{u}) = \int_{\mathcal{B}_0} \underline{f} \cdot \underline{u} dV + \int_{\partial\mathcal{B}_p} \underline{p} \cdot \underline{u} dS,$$

dove l'integrale di superficie è ristretto alla quota ∂B_p sulla quale sono applicati i carichi esterni.



Risulta allora la seguente espressione dell'energia potenziale totale:

$$\pi(\underline{u}) = - \int_{B_0} \underline{f} \cdot \underline{u} dV - \int_{\partial B_p} \underline{p} \cdot \underline{u} dS + \int_{B_0} \phi(\underline{\epsilon}) dV.$$

Notiamo che tale energia rappresenta una funzione scalare degli spostamenti \underline{u} . A loro volta gli spostamenti $\underline{u}(x)$ rappresentano una funzione

vettoriale del punto. Quindi la funzione $\pi(\underline{u})$ rappresenta una funzione di funzione a valori scalari. Un tale tipo di funzione è chiamata funzionale.

7.9.1 Variazione del funzionale energia potenziale totale

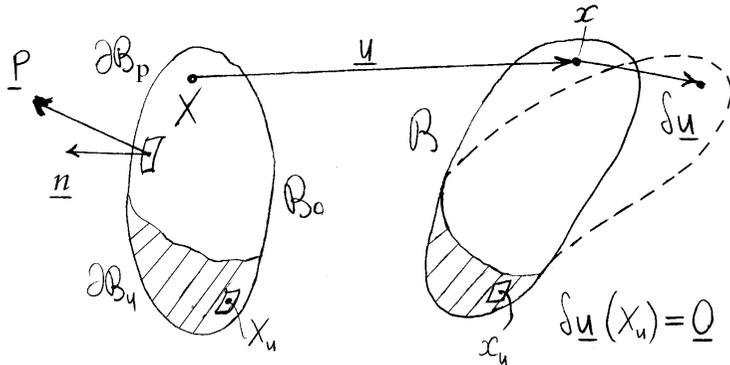
L'incremento di $\pi(\underline{u})$ al passare da una configurazione individuata dagli spostamenti \underline{u}_1 ad un'altra configurazione individuata dagli spostamenti \underline{u}_2 vale:

$$\Delta \pi = \pi(\underline{u}_2) - \pi(\underline{u}_1).$$

Si considerino degli spostamenti $\underline{u}(x)$, che individuano una configurazione deformata congruente con i vincoli.

Si incrementino tali spostamenti tramite una funzione $\delta \underline{u}$. Poiché si vuole che la somma $\underline{u} + \delta \underline{u}$ soddisfi le condizioni geometriche al contorno,

occorre che la *variazione* $\delta \mathbf{u}$ degli spostamenti soddisfi le condizioni geometriche omogenee al contorno, cioè $\delta \mathbf{u} = 0$ sulla quota ∂B_u sulla quale sono imposti gli spostamenti. L'incremento dell'energia potenziale totale



conseguente ad una variazione $\delta \mathbf{u}$ del campo degli spostamenti a partire dalla configurazione individuata dagli spostamenti \mathbf{u} vale:

$$\Delta \pi(\delta \mathbf{u}) = \pi(\mathbf{u} + \delta \mathbf{u}) - \pi(\mathbf{u}).$$

Si considerino ora tutte le variazioni aventi la direzione della variazione $\delta \mathbf{u}$ e quindi della forma $\alpha \delta \mathbf{u}$, dove α è uno scalare indipendente dal punto X . Lungo tale direzione, il funzionale π risulta una funzione della sola variabile reale α :

$$\alpha \mapsto \pi(\mathbf{u} + \alpha \delta \mathbf{u}),$$

e se ne può calcolare, in corrispondenza di \mathbf{u} e cioè per $\alpha = 0$, la parte lineare in α :

$$\alpha \delta \mathbf{u} \mapsto \left(\frac{d\pi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \alpha.$$

L'incremento corrispondente alla variazione $\delta \mathbf{u}$ prescelta del campo degli spostamenti, indicata con $\delta \pi$, viene detta *variazione prima* di π e si ottiene ponendo $\alpha = 1$ nell'espressione precedente:

$$\delta \pi = \frac{d\pi}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0}.$$

Se $F(\mathbf{u})$, $G(\mathbf{u})$ e $H(\mathbf{u})$ sono dei funzionali di \mathbf{u} e se a è un funzionale costante, valgono le seguenti proprietà, conseguenza diretta della definizione di variazione:

$$F(\mathbf{u}) = G(\mathbf{u}) + H(\mathbf{u}) \Rightarrow \delta F = \delta G + \delta H,$$

$$F(\mathbf{u}) = aG(\mathbf{u}) \Rightarrow \delta F = a\delta G,$$

$$\delta \int_{B_0} F(\mathbf{u}) dV_0 = \int_{B_0} \delta F(\mathbf{u}) dV_0.$$

Poiché risulta:

$$\pi = -V + \Phi$$

ne consegue allora:

$$\delta \pi = -\delta V + \delta \Phi.$$

Risulta poi:

$$\delta V = - \int_{B_0} \underline{f} \cdot \delta \underline{u} dV_0 - \int_{\partial B_p} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} dS_0,$$

$$\delta \Phi = \int_{B_0} \delta \phi dV_0,$$

e quindi:

$$\delta\pi = - \int_{\mathcal{B}_0} \underline{f} \cdot \delta \underline{u} \, dV_0 - \int_{\partial\mathcal{B}_p} \underline{p} \cdot \delta \underline{u} \, dS_0 + \int_{\mathcal{B}_0} \delta\phi \, dV_0,$$

dove:

$$\delta\phi = \underline{\sigma} \cdot \delta \underline{\varepsilon} = \delta \underline{\varepsilon} \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}],$$

$$\delta \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left\{ \text{grad } \delta \underline{u} + (\text{grad } \delta \underline{u})^T \right\}.$$

7.9.2 Principi di stazionarietà e di minimo dell'energia potenziale totale

Per il principio dei lavori virtuali, in corrispondenza ad \underline{u}^* soluzione del problema elastico risulta:

$$\delta\pi = 0,$$

poiché in tal caso $\underline{\sigma}^* = \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*]$ e' in equilibrio con le forze \underline{f} e \underline{p} applicate, e le reazioni nella

parte $\partial\mathcal{B}_u$ di contorno vincolato non compiono lavoro poichè $\delta \underline{u} = 0$ sul contorno vincolato.

Si e' così ottenuto il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale (l'energia potenziale totale e' stazionaria in corrispondenza della soluzione).

Se \underline{u}^* rappresenta la soluzione del problema elastico, si ha inoltre:

$$\begin{aligned} \pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}^*) &= - \int_{\mathcal{B}_0} \underline{f} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) \, dV \\ &\quad - \int_{\partial\mathcal{B}_p} \underline{p} \cdot (\underline{u} - \underline{u}^*) \, dS \\ &\quad + \int_{\mathcal{B}_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon}^*] \, dV + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot \mathbb{E}[\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*] \, dV, \end{aligned}$$

che, per il principio dei lavori virtuali applicato agli spostamenti $\underline{u} - \underline{u}^*$ e deformazioni $\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*$ congruenti e alle forze \underline{f} e \underline{p} e tensioni

$\sigma^* = E[\underline{\varepsilon}^*]$ equilibrate, diventa:

$$\pi(\underline{u}) - \pi(\underline{u}^*) = \frac{1}{2} \int_{B_0} (\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*) \cdot E[\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}^*] dV > 0,$$

se $\underline{\varepsilon} \neq \underline{\varepsilon}^*$, poiché E è definito positivo.

Si è così ottenuto il principio di minimo dell'energia potenziale totale (l'energia potenziale totale è minima in corrispondenza della soluzione).

7.9.3 Esistenza della soluzione

Si noti che il problema elastico lineare richiede, in origine, il soddisfacimento delle equazioni di equilibrio. Poiché esistono due modi non equivalenti di imporre l'equilibrio esistono due tipi di soluzioni. Il primo tipo di soluzione, detta *debole*, si ottiene imponendo l'equilibrio per ogni volume estraibile da un solido, così come richiesto dall'assunzione fondamentale della meccanica del continuo. Ne consegue che soluzione debole è sinonimo di soluzione. Il secondo tipo di soluzione, detta *forte*, si ottiene imponendo la validità delle equazioni indefinite di equilibrio in tutti i punti del solido, il che poi è equivalente ad imporre la validità dell'equazione differenziale fondamentale del problema. Poiché le equazioni indefinite di equilibrio implicano l'equilibrio per ogni volume estraibile da un solido, una soluzione forte è anche soluzione debole del problema e quindi una soluzione tout court. Però non è vero l'inverso, poiché per estrarre le equazioni indefinite di equilibrio dalle equazioni di equilibrio per ogni volume estraibile dal solido occorre aggiungere delle condizioni di regolarità che hanno solo un significato matematico e non fisico per il problema in esame. Quindi esistono problemi che hanno soluzione in senso debole, cioè hanno soluzione, ma che non hanno soluzione in senso forte.

Si noti anche che risolvendo il problema elastico lineare per via variazionale, per esempio imponendo la condizione di minimo al funzionale energia potenziale totale, nel problema entreranno, tramite l'energia elastica di deformazione, le sole derivate prime delle componenti dello spostamento mentre nella equazione fondamentale compaiono le derivate seconde. Non solo, ma le derivate prime delle componenti dello spostamento vengono filtrate attraverso l'integrazione nel dominio del corpo. Questo significa che la ricerca della soluzione attraverso il principio di minimo può essere condotta indebolendo le richieste di regolarità delle funzioni in gioco a quelle che rendono definiti gli integrali che rientrano nell'espressione dell'energia potenziale totale. Si ritorna quindi al concetto di soluzione in senso debole.

Sotto condizioni di regolarità poco restrittive sulla frontiera ∂B_0 del corpo solido, è stato dimostrato un *teorema di esistenza della soluzione debole* del problema elastico lineare. Esistono anche tutta una serie di risultati più ristretti riguardanti le soluzioni forti. In ogni caso, i metodi numerici tipo il metodo delle differenze finite, il metodo degli elementi finiti, il metodo degli elementi di contorno e infine il metodo delle celle approssimano la soluzione in senso debole.

ELASTICITÀ LINEARE ISOTROPA

Nel seguito si vuole determinare la struttura del legame costitutivo elastico lineare nel caso in cui il materiale costituente il corpo sia isotropo. La relazione che così si ottiene passa sotto il nome di *legge di Hooke estesa*, più comunemente citata come *legge di Hooke*, anche se la legge di Hooke vera e propria esprime la semplice proporzionalità tra tensione e deformazione. Si ricordi che un materiale è isotropo in un dato punto se le proprietà meccaniche sono identiche in tutte le direzioni uscenti dal punto considerato.¹ Inoltre un materiale è isotropo, tout court, se è isotropo in tutti i suoi punti.

8.1 Legge di Hooke

8.1.1 Stato di tensione monoassiale

Si vuole ottenere innanzitutto il legame costitutivo inverso $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]$ nel caso in cui la tensione sia monoassiale. Sia per quel che riguarda la tensione che per quel che riguarda il materiale, nell'ipotesi che questi sia isotropo, tutte le direzioni ortogonali all'asse z di tensione sono equivalenti. La linea z non può allora inclinarsi rispetto al piano ortogonale, poiché se così non fosse verrebbe privilegiata la direzione in cui la linea si inclinerebbe tra tutte le possibili direzioni equivalenti. Lo scorrimento tra la linea z e il

piano ortogonale deve quindi essere necessariamente nullo:

$$\boldsymbol{y}_z = \mathbf{0}. \quad (8.1)$$

Per lo stesso motivo le dilatazioni delle linee ortogonali alla linea z devono essere tutte uguali. Dall'ipotesi di elasticità lineare si deduce poi che la dilatazione ϵ della linea z e quella ϵ_ℓ delle linee ortogonali devono dipendere linearmente dalla tensione normale σ . Utilizzando le definizioni di modulo di Young E e di coefficiente di Poisson ν , risulta allora (fig. 8.1):

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_\ell = -\nu \frac{\sigma}{E}. \quad (8.2)$$

Si ricordi che il modulo di Young e il coefficiente di Poisson, quest'ultimo cambiato di segno, sono già stati definiti nell'ambito della prova di trazione semplice, con la quale si cerca appunto di generare uno stato monoassiale di tensione, quali rapporti tra tensione e dilatazione longitudinale e , rispettivamente, tra dilatazione trasversale e dilatazione longitudinale.² Se si assume una base locale $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ con terzo versore \mathbf{e}_z di direzione z , dalle relazioni (8.1) e (8.2) risulta quindi la corrispondenza:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\sigma}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (8.3)$$

via legge di Hooke inversa.

¹Cfr. par. 4.1 p. 104.

²Cfr. par. 4.4.1 p. 109.

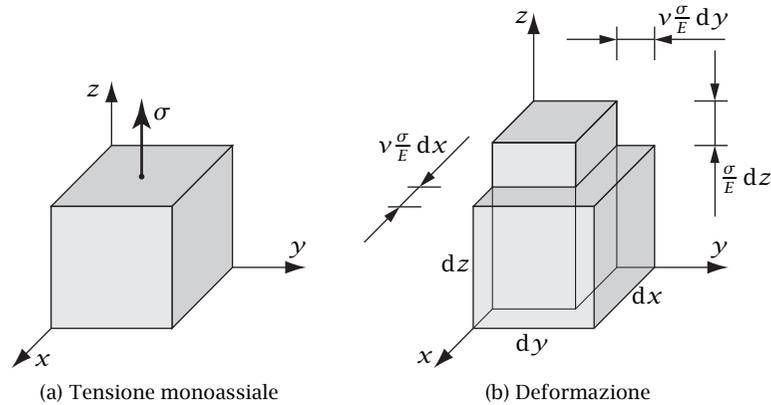


Figura 8.1: Deformazione indotta da una tensione monoassiale

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{10em}}_{[\boldsymbol{\sigma}]} \\
 \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{array} \right] \\
 \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 \frac{\sigma_{\xi}}{E} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{array} \right] + \frac{\sigma_{\eta}}{E} \left[\begin{array}{ccc} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{array} \right] + \frac{\sigma_{\zeta}}{E} \left[\begin{array}{ccc} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{[\boldsymbol{\epsilon}]}
 \end{array}$$

Figura 8.2: Legge di Hooke

8.1.2 Stato di tensione generico

Si vuole ora determinare il legame costitutivo inverso $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbb{C}[\boldsymbol{\sigma}]$ nel caso in cui la tensione sia generica. Sia allora $\boldsymbol{\sigma}$ un generico tensore di tensione agente in un punto P di un corpo solido elastico lineare isotropo e, con riferimento la (o una) base principale $\mathbf{e}_{\xi}\mathbf{e}_{\eta}\mathbf{e}_{\zeta}$ di $\boldsymbol{\sigma}$, lo si scomponga nella somma di tre stati monoassiali di tensione.³ Ad ognuno di tali stati corrisponde uno stato di deformazione analogo a quello riportato nella (8.3), opportunamente rimaneggiato per tener conto della posizione della direzione di tensione nel sistema principale e con i moduli di elasticità indipendenti dalla direzione per via dell'ipotesi di isotropia. Per la sovrapposizione degli effetti sommando i tre stati di deformazione così ottenuti si viene a riprodurre la deformazione totale corrispondente alla data tensione come illustrato nella fig. 8.2.

Raggruppando opportunamente i termini che riproducono la deformazione si ottiene:

$$[\boldsymbol{\epsilon}] = \frac{1}{E} \left((1 + \nu) \left[\begin{array}{ccc} \sigma_{\xi} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\zeta} \end{array} \right] - \nu (\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} + \sigma_{\zeta}) \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \right), \quad (8.4)$$

e, per l'isomorfismo tra i tensori doppi e la loro rappresentazione

³Cfr. la (5.65), p. 135.

matriciale,⁴ si ha infine la *legge di Hooke inversa* in forma tensoriale:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{E} \left((1 + \nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} \right). \quad (8.5)$$

8.1.3 Stato di deformazione generico

Applicando l'operatore traccia a destra e a sinistra della legge (8.5), tenendo conto che $\text{tr}\mathbf{I} = 3$, si ottiene la relazione tra la traccia di un generico tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ e quella del corrispondente tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$:

$$\text{tr}\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1 - 2\nu}{E} \text{tr}\boldsymbol{\sigma}, \quad (8.6)$$

relazione banalmente invertibile:

$$\text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1 - 2\nu} \text{tr}\boldsymbol{\epsilon}. \quad (8.7)$$

La (8.7) ha di per sè una notevole interpretazione fisica. Infatti, tenendo conto da una parte che $\text{tr}\boldsymbol{\epsilon}$ uguaglia la dilatazione volumetrica θ e dall'altra parte che $-\frac{1}{3}\text{tr}\boldsymbol{\sigma}$ uguaglia la pressione p associata alla parte sferica del

⁴Cfr. par. 1.3.2 p. 28.

tensore degli sforzi, quantità che si presta ad essere definita quale *pressione media* nell'intorno di un punto, dalla (8.7) si ottiene la *relazione di stato tra variazione di volume e pressione*:

$$p = -K\theta, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (8.8)$$

Il coefficiente di proporzionalità K è noto quale *modulo di elasticità volumetrica*.⁵

Inoltre la (8.7) può essere utilizzata per invertire la relazione (8.5). Infatti sostituendo la (8.7) nella legge di Hooke inversa (8.5) si ottiene:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{E} \left((1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu E}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right). \quad (8.9)$$

e da questa, ricavando $\boldsymbol{\sigma}$, si si ha infine la *legge di Hooke*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right). \quad (8.10)$$

È usuale in letteratura scrivere la legge di Hooke anche nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\epsilon} + \lambda (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I}, \quad (8.11)$$

dove i coefficienti λ e μ sono noti come *costanti di Lamé*. Confrontando la (8.10) con la (8.11) si ha immediatamente:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (8.12)$$

8.1.4 Stati sferici e deviatorici

La struttura della legge (8.10) contenente un termine proporzionale alla deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$ e un termine sferico proporzionale alla traccia $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$ della deformazione, implica che nei casi di deformazione sferica, in cui $(\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = 3\boldsymbol{\epsilon}$ e di deformazione deviatorica, in cui $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0$, il legame si riduce a una semplice proporzionalità:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1-2\nu} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{se } (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} = 3\boldsymbol{\epsilon}, \quad (8.13)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon}, \quad \text{se } \text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0, \quad (8.14)$$

⁵Bulk modulus nella letteratura inglese.

per cui ad uno stato di deformazione sferico corrisponde uno stato di tensione sferico e ad uno stato di deformazione deviatorico corrisponde uno stato di tensione deviatorico, e viceversa:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1-2\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{se } (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{I} = 3\boldsymbol{\sigma}, \quad (8.15)$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{se } \text{tr } \boldsymbol{\sigma} = 0. \quad (8.16)$$

La proporzionalità significa anche che i tensori sferici e quelli deviatorici individuano le direzioni principali di elasticità associate agli autovalori $\frac{E}{1-2\nu}$ e $\frac{E}{1+\nu}$ rispettivamente, nel senso che soddisfano la condizione $\mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = \lambda\boldsymbol{\epsilon}$ che definisce $\boldsymbol{\epsilon}$ quale autovettore e λ quale autovalore associato.⁶

Se si scompone il tensore di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$ nella somma delle sue parti sferica $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{sph}}$ e deviatorica $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}}$ a cui corrispondono, via legge di Hooke, le parti sferica e deviatorica del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ la somma dei quali uguaglia il tensore degli sforzi stesso, si ottiene la legge di Hooke scritta in funzione delle parti sferica e deviatorica del tensore di deformazione:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}} + \frac{E}{1-2\nu} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{sph}}. \quad (8.17)$$

In modo analogo si ottiene la legge di Hooke inversa scritta in funzione delle parti sferica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}}$ e deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}}$ del tensore degli sforzi:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} + \frac{1-2\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}}. \quad (8.18)$$

8.1.5 Stati di scorrimento e di taglio semplice

Tenuto conto che gli stati di scorrimento e di taglio semplice sono particolari stati deviatorici, è in tal caso applicabile la (8.14) dalla quale consegue che ad uno stato di scorrimento semplice corrisponde, tramite il coefficiente $\frac{E}{1+\nu}$, uno stato di taglio semplice, in accordo con quanto ipotizzato nella prova di torsione. Se la tensione tangenziale τ associata al taglio semplice agisce nelle giaciture di normale y e z , si ha, in componenti:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma & 0 \end{bmatrix}, \quad \tau = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma, \quad (8.19)$$

⁶Attenzione a non confondere λ quale autovalore e λ quale costante di Lamé.

dove γ è lo scorrimento associato al corrispondente stato di scorrimento semplice, solo metà del quale uguaglia la componente tensoriale. Poiché nell'ambito della prova di torsione si è definito il modulo di elasticità tangenziale G quale rapporto tra tensione tangenziale e scorrimento⁷ ne consegue la seguente relazione tra i tre moduli tecnici:

$$2G = \frac{E}{1 + \nu}, \quad (8.20)$$

che quindi nell'ambito della elasticità lineare isotropa non sono indipendenti. Tenendo conto della (8.20), la legge di Hooke (8.10) si può anche scrivere nella forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left(\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right), \quad (8.21)$$

mentre le due costanti di Lamé (8.12) risultano:

$$\lambda = 2G \frac{\nu}{1 - 2\nu}, \quad \mu = G. \quad (8.22)$$

8.2 Matrici di elasticità isotropa

In componenti in una generica base $\mathbf{e}_x \mathbf{e}_y \mathbf{e}_z$ si ha:

$$\sigma_{ij} = 2G \left(\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left(\sum_h \epsilon_{hh} \right) \delta_{ij} \right), \quad (8.23)$$

per la legge di Hooke (8.21), e:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left((1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \left(\sum_h \sigma_{hh} \right) \delta_{ij} \right), \quad (8.24)$$

per la legge di Hooke inversa (8.5). Le (8.23) scritte per esteso conducono, per via della simmetria di $\boldsymbol{\sigma}$, a 6 equazioni indipendenti:

$$\sigma_x = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left((1 - \nu) \epsilon_x + \nu (\epsilon_y + \epsilon_z) \right), \quad (8.25a)$$

$$\sigma_y = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left((1 - \nu) \epsilon_y + \nu (\epsilon_z + \epsilon_x) \right), \quad (8.25b)$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{1 - 2\nu} \left((1 - \nu) \epsilon_z + \nu (\epsilon_x + \epsilon_y) \right), \quad (8.25c)$$

$$\tau_{zy} = G \gamma_{zy}, \quad (8.25d)$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad (8.25e)$$

$$\tau_{yx} = G \gamma_{yx}, \quad (8.25f)$$

avendo tenuto conto che $\gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy}$, $\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz}$ e infine $\gamma_{yx} = 2\epsilon_{yx}$. La matrice di elasticità $[\mathbb{E}]$ di dimensione 6×6 , che compare nel legame elastico lineare in forma algebrica (7.15), risulta quindi:

$$[\mathbb{E}] = 2G \begin{bmatrix} \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{\nu}{1-2\nu} & \frac{1-\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad (8.26)$$

Analogamente le (8.24) scritte per esteso conducono, per via della simmetria di $\boldsymbol{\epsilon}$, a 6 equazioni indipendenti:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left(\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right), \quad (8.27a)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left(\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right), \quad (8.27b)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right), \quad (8.27c)$$

$$\gamma_{zy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{zy}, \quad (8.27d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xz}, \quad (8.27e)$$

$$\gamma_{yx} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{yx}. \quad (8.27f)$$

avendo ancora tenuto conto che $\gamma_{zy} = 2\epsilon_{zy}$, $\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz}$ e $\gamma_{yx} = 2\epsilon_{yx}$. La matrice di elasticità inversa $[\mathbb{C}]$ di dimensione 6×6 , che compare nel

⁷Cfr. par. 4.4.1 p. 109.

legame elastico lineare in forma algebrica (7.34), risulta quindi:

$$[\mathbf{C}] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (8.28)$$

8.3 Energia di deformazione elastica isotropa

Utilizzando la legge di Hooke (8.21) nella espressione (7.30) dell'energia potenziale elastica ϕ per unità di volume e analogamente utilizzando la legge di Hooke inversa (8.5) nella espressione (7.56) dell'energia complementare ψ per unità di volume, si ottiene:

$$\phi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbb{E}[\boldsymbol{\epsilon}] = G \left(\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon})^2 \right), \quad (8.29)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}[\boldsymbol{\sigma}] = \frac{1}{2E} \left((1+\nu) \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 \right), \quad (8.30)$$

avendo tenuto conto che $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{I} = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}$.

Analogamente, ma utilizzando invece la legge di Hooke e quella inversa date nella forma (8.17) e (8.18) rispettivamente, si ottiene:

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{E}{1+\nu} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}} + \frac{E}{1-2\nu} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{sph}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{sph}} \right), \quad (8.31)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} + \frac{1-2\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} \right), \quad (8.32)$$

avendo tenuto conto che $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{sph}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\text{dev}} = 0$ e $\boldsymbol{\sigma}_{\text{sph}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = 0$.

Un'altra forma dell'energia di deformazione e di quella complementare la si ottiene osservando che:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= \epsilon_{\xi}^2 + \epsilon_{\eta}^2 + \epsilon_{\zeta}^2 \\ &= (\epsilon_{\xi} + \epsilon_{\eta} + \epsilon_{\zeta})^2 - 2(\epsilon_{\zeta}\epsilon_{\eta} + \epsilon_{\xi}\epsilon_{\zeta} + \epsilon_{\eta}\epsilon_{\xi}) \\ &= (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon})^2 - 2\epsilon_{\text{II}}, \end{aligned} \quad (8.33)$$

e, analogamente:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - 2\sigma_{\text{II}}, \quad (8.34)$$

dove ϵ_{II} e σ_{II} sono gli invarianti quadratici di deformazione e sforzo rispettivamente. Sostituendo le (8.33) e (8.34) nelle (8.29) e (8.30) rispettivamente si ottengono le espressioni dell'energia elastica di deformazione in funzione degli invarianti di deformazione e dell'energia complementare in funzione di quelli di tensione:

$$\phi = G \left(\frac{1-\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon})^2 - 2\epsilon_{\text{II}} \right), \quad (8.35)$$

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1}{2G} \sigma_{\text{II}}. \quad (8.36)$$

Si noti che il terzo invariante, il determinante, non può comparire in queste espressioni, dovendo queste essere delle forme quadratiche quale conseguenza della linearizzazione del problema elastico.

Vediamo di esprimere tali relazioni in componenti:

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \cdot \underline{\boldsymbol{\epsilon}} &= \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + (\epsilon_{xy}^2 + \epsilon_{yz}^2) + (\epsilon_{xz}^2 + \epsilon_{zx}^2) + (\epsilon_{yx}^2 + \epsilon_{xy}^2) \\ &= \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yz}^2) \end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\boldsymbol{\epsilon}})^2 = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 + 2(\epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_x),$$

$$\begin{aligned} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yx}^2 + \tau_{xy}^2) \\ &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{xy}^2), \end{aligned}$$

$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 2(\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z).$$

Risulta quindi:

$$\begin{aligned} \phi &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \\ &\quad \left. + (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2) + (\varepsilon_{xz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + (\varepsilon_{yx}^2 + \varepsilon_{xy}^2) \right\} \\ &= G \left\{ \frac{1-\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) \right. \\ &\quad + \frac{2\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_x \varepsilon_z + \varepsilon_y \varepsilon_z) \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\delta_{xy}^2 + \delta_{xz}^2 + \delta_{yx}^2) \right\}. \end{aligned}$$

La relazione

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij}},$$

vale per ϕ scritta nella prima forma, dove compaiono tutte e 9 le componenti di $\underline{\varepsilon}$. La seconda forma deve

essere utilizzata se si considerano $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$ quali vettori di 6 componenti:

$$\{\underline{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}, \quad \{\underline{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \delta_{xy} \\ \delta_{xz} \\ \delta_{yz} \end{Bmatrix}.$$

In tal caso:

$$\sigma_i = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_i}.$$

L'energia complementare risulta poi:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_x \sigma_z + \sigma_y \sigma_z) \\ &\quad + \frac{1}{4G} \left\{ (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2) + (\tau_{xz}^2 + \tau_{zx}^2) + (\tau_{yx}^2 + \tau_{xy}^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z + \sigma_x \sigma_y) \\ &\quad + \frac{1}{2G} (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2). \end{aligned}$$

8.4 Limitazioni delle costanti elastiche

I moduli tecnici E , ν e G , e analogamente le costanti di Lamé λ e μ , sono soggette a delle limitazioni che discendono dalla richiesta che l'energia elastica di deformazione per unità di volume sia positiva per ogni deformazione non nulla e quindi anche che l'energia complementare elastica sia positiva per ogni stato di sforzo non nullo.

Si consideri innanzitutto uno stato di sforzo σ caratterizzato dalla condizione $\sigma_{II} = 0$, per esempio uno stato di sforzo monossiale. Per via della (8.36) l'energia complementare associata è positiva se e solo se:

$$E > 0. \quad (8.37)$$

Si è così ottenuta una limitazione sul modulo di Young.

Si consideri ora una deformazione generica ϵ . Per via della (8.31) e tenendo conto della (8.37), l'energia di deformazione associata è positiva se e solo se

$$1 + \nu > 0 \quad \text{e} \quad 1 - 2\nu > 0, \quad (8.38)$$

ovverossia se e solo se:

$$-1 < \nu < \frac{1}{2}. \quad (8.39)$$

Gli usuali materiali utilizzati nella pratica tecnica hanno valori positivi del coefficiente di Poisson, almeno finché si comportano in modo elastico lineare. Tuttavia recentemente sono stati prodotti dei materiali porosi, sia polimerici che metallici, che ben si adattano ad essere descritti dalla teoria dell'elasticità lineare e che presentano valori negativi del modulo di Poisson (anche fino a -0.7 per i materiali porosi polimerici e -0.8 per quelli porosi metallici).

La prima delle condizioni (8.38) insieme alla (8.37) impone poi che sia:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0. \quad (8.40)$$

Si noti che essendo E e ν indipendenti e potendo E assumere qualunque valore positivo allora anche G può assumere qualunque valore positivo.

Per quel che riguarda le costanti di Lamé, innanzitutto μ coincide con G e quindi soddisfa la stessa condizione (8.40). Si tenga poi conto che per la (8.22) risulta $\lambda \leq 0$ per $\nu \in (-1, 0]$ e in particolare $\lambda = 0$ per $\nu = 0$. Non solo, ma la quantità $\frac{\nu}{1-2\nu}$ che compare nella (8.22) è strettamente decrescente per ν che varia da 0 a -1 . Poiché è anche $\lim_{\nu \rightarrow -1} \lambda = -\frac{2}{3}\mu$

ne risulta che a valori di ν nel dato intervallo corrispondono valori di λ nell'intervallo $(-\frac{2}{3}\mu, 0]$. Infine se ν appartiene all'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ allora λ può assumere qualunque valore positivo poichè così è per μ . In definitiva la condizione su λ risulta:

$$\lambda > -\frac{2}{3}\mu. \quad (8.41)$$

8.5 Esercizio su un campo di spostamenti

Sia dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = 2kxy + kz^2 \\ v = 2kxy + kz^2 \\ w = -2k(x+y)z \end{cases}.$$

1. Determinare le componenti dei tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi.
2. Nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa determinare le componenti del tensore degli sforzi.
3. Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ determinare inoltre:
 - (a) L'asse e l'entità della rotazione rigida locale;
 - (b) Le direzioni e i valori principali di tensione;
 - (c) La tensione tangenziale massima.
4. Infine disegnare i cerchi di Mohr relativi al tensore degli sforzi, sempre nei punti del piano di equazione $x - y = 0$, ed indicare i punti rappresentativi degli assi x e y .

Per risolvere l'esercizio occorre innanzitutto determinare il gradiente degli spostamenti:

$$\text{gradu} = \begin{bmatrix} 2ky & 2kx & 2kz \\ 2ky & 2kx & 2kz \\ -2kz & -2kz & -2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

I tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi rappresentano poi rispettivamente la parte simmetrica e quella emisimmetrica di grad \mathbf{u} :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 2ky & k(x+y) & 0 \\ k(x+y) & 2kx & 0 \\ 0 & 0 & -2k(x+y) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & k(x-y) & 2kz \\ -k(x-y) & 0 & 2kz \\ -2kz & -2kz & 0 \end{bmatrix}.$$

Il tensore degli sforzi si ottiene applicando la legge di Hooke:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left\{ \boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{I} \right\}.$$

Poiché $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0$, risulta quindi:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2kG \begin{bmatrix} 2y & x+y & 0 \\ x+y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -2(x+y) \end{bmatrix}.$$

Nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ il tensore di rotazione infinitesimo e quello degli sforzi assumono l'espressione:

$$\boldsymbol{\omega} = 2kz \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = 4kGx \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di rotazione infinitesimo ha quindi le componenti:

$$\varphi_x = -2kz, \quad \varphi_y = 2kz, \quad \varphi_z = 0.$$

L'asse della rotazione infinitesima nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ giace nel piano xy e la sua parte positiva coincide con la bisettrice del II quadrante. Il suo modulo vale:

$$|\boldsymbol{\varphi}| = 2\sqrt{2}kz.$$

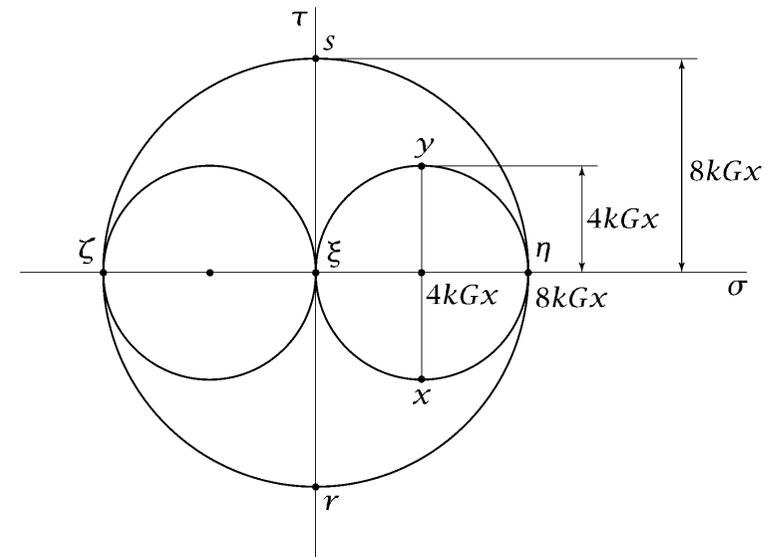
L'asse z rappresenta una direzione principale di tensione a cui corrisponde il valore principale $\sigma_\zeta = -8kGx$. Gli altri due valori principali si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 4kGx - \sigma & 4kGx \\ 4kGx & 4kGx - \sigma \end{bmatrix} = 0.$$

Si ottiene:

$$\sigma^2 - 8kGx\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\xi = 0 \\ \sigma_\eta = 8kGx \end{cases}.$$

I versori delle direzioni principali risultano quindi:



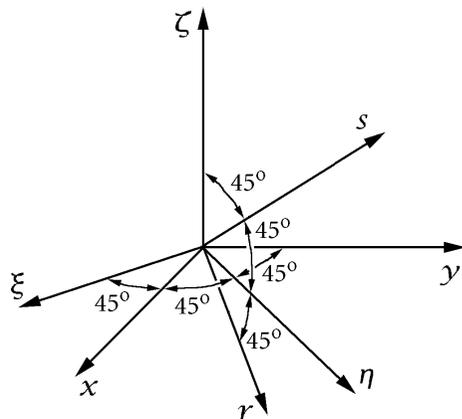
$$\mathbf{e}_\xi = \begin{Bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{Bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\zeta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

La direzione principale ζ coincide con l'asse z , mentre le direzioni principali ξ e η giacciono sul piano xy e coincidono rispettivamente con le bisettrici del II e del I quadrante.

La tensione tangenziale massima risulta infine:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\eta} - \sigma_{\zeta}}{2} = 8kGx.$$

Si noti che lo stato tensionale nei punti del piano di equazione $x - y = 0$ è uno stato di taglio semplice. Infatti, si considerino gli assi r e s nel piano $\eta\zeta$ che si ottengono ruotando l'asse η di -45° e di 45° rispettivamente. Nel riferimento $O\xi r s$ le componenti del tensore degli sforzi valgono allora:



$$\sigma = 8kGx \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

8.6 Equazioni di Beltrami

Rappresentano le equazioni di congruenza scritte in funzione del tensore degli sforzi, nell'ipotesi di forze di volume nulle ($\underline{f} = \underline{0}$).

Equazioni di congruenza:

$$(1) \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \epsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) = 0.$$

Legge costitutivo elastico lineare isotropo:

$$(2) \epsilon_{ij} = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \text{tr} \sigma \right\}.$$

Si ottiene:

$$(3) (1+\nu) \left\{ \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\frac{\partial^2 \sigma_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 \sigma_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} \right) \right\} = \\ = \nu \left\{ \left(\delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr} \sigma}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{jh} \frac{\partial^2 \text{tr} \sigma}{\partial x_i \partial x_k} \right) - \left(\delta_{ik} \frac{\partial^2 \text{tr} \sigma}{\partial x_j \partial x_h} - \delta_{jk} \frac{\partial^2 \text{tr} \sigma}{\partial x_i \partial x_h} \right) \right\}.$$

Se si fanno variare gli indici i, j, h, k su tutti i possibili valori x, y, z si ottengono 81 equazioni. Affinchè tali equazioni siano significative occorre che sia $i \neq j$ e $h \neq k$. In corrispondenza delle scelte

$$(i, j), (h, k) \equiv (z, y), (x, z), (y, x),$$

si generano le 9 equazioni su cui ci siamo basati in precedenza per definire il tensore di incompatibilità R . Invertendo prima i valori di i e j , poi i valori di h e k ed infine sia i valori di i e j che di h e k si ottengono 3 gruppi di 9 equazioni coincidenti con le precedenti. Tutte le possibili combinazioni con $i=j$ oppure $h=k$ generano 45 equazioni identicamente soddisfatte.

Vogliamo sostituire le equazioni del tipo (3) con delle equazioni equivalenti ottenute combinando linearmente le equazioni (3). A tale scopo, si sommano tra loro, per ogni scelta degli indici i e h , le 3 equazioni corrispondenti ad uguali valori degli indici j e k :

$$(4) \quad (1+\nu) \sum_j \left\{ \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x_j \partial x_h} + \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial x_i \partial x_h} \right\} \\ = \nu \sum_j \left\{ \delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_j} - \delta_{jh} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} - \delta_{ij} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_h} + \delta_{ji} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\}.$$

Se $i \neq h$, le coppie (i, j) e (h, k) rientrano tra i valori significativi solo per quel valore, unico, di $j=k$ che è contemporaneamente diverso sia da i che da h . Questo significa che la (4) in tal caso è equivalente ad un'unica equazione significativa del tipo (3). Invertendo i valori di i e di h , la situazione non cambia, poiché in tal caso l'unica equazione significativa è la simmetrica della precedente. Se, per esempio, $i \equiv x$, $h \equiv y$ allora le coppie significative diventano $(i, j) \equiv (z, z)$ e $(h, k) \equiv (y, z)$, e queste generano la stessa equazione generata dalla scelta $(i, j) \equiv (x, z)$ e $(h, k) \equiv (z, y)$.

Se poi $i \equiv y$ e $h \equiv x$, allora le coppie significative sono $(i,j) \equiv (y,z)$ e $(h,k) \equiv (x,z)$, che forniscono la stessa equazione generata dalla scelta $(i,j) \equiv (z,y)$ e $(h,k) \equiv (x,z)$, simmetrica della scelta precedente.

Se invece $i=h$ allora le coppie (i,j) ed (h,k) hanno due valori significativi, quelli in cui $j=k$ acquista i due valori diversi da $i=h$. Le coppie (i,j) ed (h,k) sono uguali. L'equazione (4) equivale in tal caso ad una combinazione di due equazioni significative del tipo (3) corrispondenti alle due possibili scelte $(i,j) \equiv (h,k)$. In corrispondenza delle tre possibili scelte $i \equiv h \equiv x$, $i \equiv h \equiv y$, $i \equiv h \equiv z$, le tre equazioni generate dalle coppie $(i,j) \equiv (h,k) \equiv (z,y)$, $(i,j) \equiv (h,k) \equiv (x,z)$ e infine $(i,j) \equiv (h,k) \equiv (y,x)$ vengono quindi combinate tra loro in tutti i modi possibili.

Si ottengono così 3 equazioni equivalenti. Le (4) sono dunque equivalenti alle (3).

Risulta:

$$\sum_j \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{ih}}{\partial z^2} = \nabla^2 \sigma_{ih},$$

dove ∇^2 rappresenta il Laplaciano. Inoltre:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_j \frac{\partial \sigma_{jh}}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\text{div. } \underline{\sigma})_h = - \frac{\partial f_h}{\partial x_i} = 0,$$

e analogamente:

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j \partial x_h} = - \frac{\partial f_i}{\partial x_h} = 0.$$

Infine:

$$\sum_j \frac{\partial^2 \sigma_{jj}}{\partial x_i \partial x_h} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_h} \left(\sum_j \sigma_{jj} \right) = \frac{\partial^2 \text{tr } \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h},$$

$$\sum_j \delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr } \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_j} = \delta_{ih} (\nabla^2 \text{tr } \underline{\sigma}),$$

$$\sum_j \delta_{ih} \frac{\partial^2 \text{tr } \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \text{tr } \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h},$$

$$\sum_j \delta_{ij} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_j \partial x_h} = \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} ,$$

$$\sum_j \delta_{jj} \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = 3 \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} .$$

La (4) diventa allora:

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\} = \nu \left\{ \delta_{ih} \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} \right\} ,$$

ad anche:

$$(5) \quad (1+\nu) \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = \nu \delta_{ih} \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} .$$

Vogliamo ora mostrare che, sempre sotto l'ipotesi

$\underline{f}=0$, risulta:

$$\nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} = 0 .$$

A questo scopo si sommano le equazioni (5) sugli indici i e h , il che equivale a sommare tra loro 3

equazioni del tipo (5):

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 (\sum_h \sigma_{hh}) + \sum_h \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_h^2} \right\} \\ = \nu \left\{ (\sum_h \delta_{hh}) \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \sum_h \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_h^2} \right\}$$

Questa diventa:

$$(1+\nu) \left\{ \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} \right\} \\ = \nu \left\{ 3 \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} + \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} \right\} ,$$

e si ottiene:

$$2(1-\nu) \nabla^2 \text{tr} \underline{\sigma} = 0 .$$

Infine, poiché $\nu < 1$, si ottiene quanto volevasi dimostrare. Utilizzando tale risultato nella (5) si ottengono infine le equazioni di Beltrami:

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_{ih} + \frac{\partial^2 \text{tr} \underline{\sigma}}{\partial x_i \partial x_h} = 0, \quad (i, h \equiv x, y, z).$$

CRITERI DI SNERVAMENTO

9.1 Superficie di snervamento

La superficie di snervamento o di plasticizzazione, detta anche superficie di danneggiamento nel caso dei materiali fragili, definita nello spazio delle tensioni, rappresenta quella superficie che contiene gli stati tensionali ai quali corrisponde un comportamento elastico del materiale. Tale superficie sarà individuata da una equazione del tipo:

$$f(\underline{\sigma}) = 0,$$

e per l'appartenenza al dominio elastico si richiederà la

condizione:

$$f(\underline{\sigma}) < 0.$$

La funzione f è detta funzione di snervamento. Il punto $\underline{\sigma} = \underline{0}$, origine dello spazio delle tensioni, rappresenta lo stato naturale. A tale punto si richiede di appartenere al dominio elastico. Un'altra ipotesi comunemente accettata richiede che la superficie di snervamento sia convessa.

9.1.1 Snervamento isotropo

È normalmente accettata l'ipotesi che i materiali abbiano un comportamento isotropo rispetto al raggiungimento del limite di elasticità.

Questo fatto comporta che la funzione di snervamento dipende da $\underline{\sigma}$ solo attraverso i suoi valori principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, poiché, per l'ipotesi di isotropia, il materiale è insensibile ad una rotazione delle direzioni principali. La funzione di snervamento diventa quindi una funzione di tre variabili ed è possibile descrivere la superficie di snervamento nello spazio (tridimensionale) delle tensioni principali, detto anche spazio di Haigh-Westergaard:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0.$$

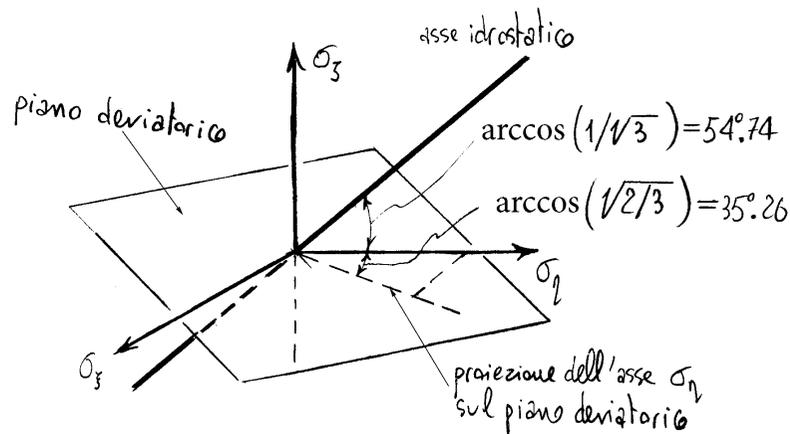
Si noti che è sempre possibile ruotare tre assi ortogonali non orientati su altri tre assi ortogonali qualunque sia la corrispondenza prescelta fra le due terne di assi. Una conseguenza di tale fatto è che non può avere importanza l'ordine in cui i valori principali sono dati. La f deve dunque essere invariante se si permutano i valori principali tra loro. Questo equivale anche a dire che un tensore degli sforzi, e gli infiniti tensori degli sforzi che hanno gli stessi valori principali di questo, sono rappresentati nello spazio delle tensioni principali da più di un punto, 6 punti se i valori principali sono tutti diversi tra loro (pari alle 6 permutazioni delle tre componenti principali), 3 punti se due valori principali sono uguali, 1 punto se lo stato tensionale è sferico.

9.1.2 Asse idrostatico e piano deviatorico

Gli stati tensionali sferici o isotropi hanno i tre valori principali coincidenti e sono quindi individuati nello spazio delle tensioni principali dalla retta:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3,$$

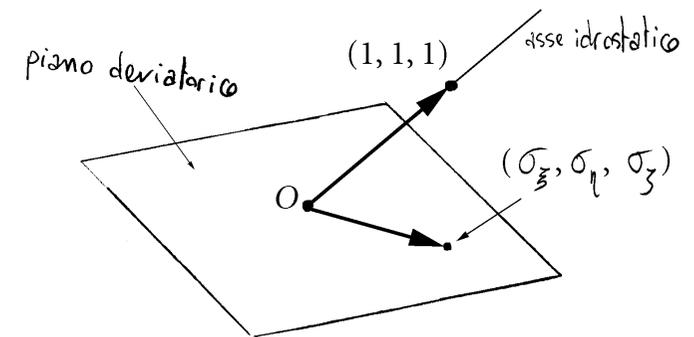
retta passante per l'origine degli assi e coincidente con l'asse dell'ottante positivo dello spazio. Tale retta



è detta asse idrostatico o ottaedrico ed ha uguale inclinazione rispetto ai tre assi di riferimento. I suoi coseni direttori valgono dunque $1/\sqrt{3}$, e di conseguenza il coseno direttore tra un asse e la sua proiezione sul piano ortogonale all'asse idrostatico vale $\sqrt{2}/3$.

Il piano passante per l'origine ed ortogonale all'asse idrostatico ha equazione:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0.$$



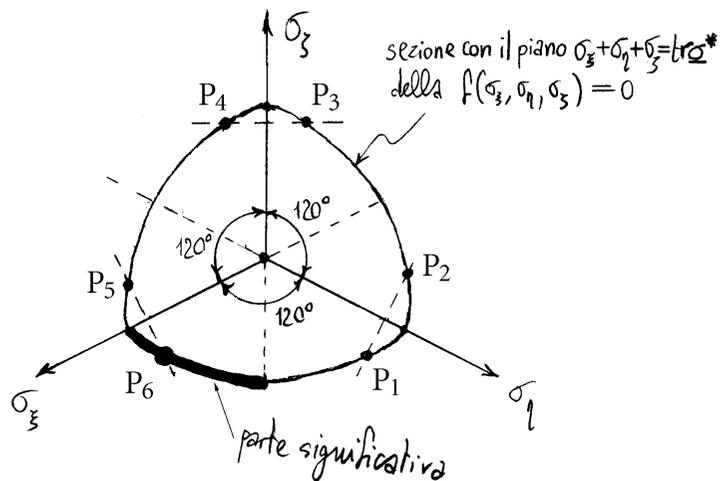
Tale piano rappresenta dunque gli stati tensionali a traccia nulla o deviatorici. Per tale motivo è detto piano deviatorico.

Si noti che le proiezioni degli assi di riferimento sul piano deviatorico formano tra loro angoli di 120° .

Un tensore sferico è rappresentato da un punto dell'asse idrostatico. Un qualunque altro tensore $\underline{\sigma}^*$ è rappresentato da 6 punti (oppure 3 se due valori principali sono uguali) che individuano un piano, parallelo al piano deviatorico, di equazione:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{tr} \underline{\sigma}^*.$$

Poiché l'asse idrostatico, perpendicolare a tale piano, è ugualmente inclinato rispetto ai tre assi coordinati,



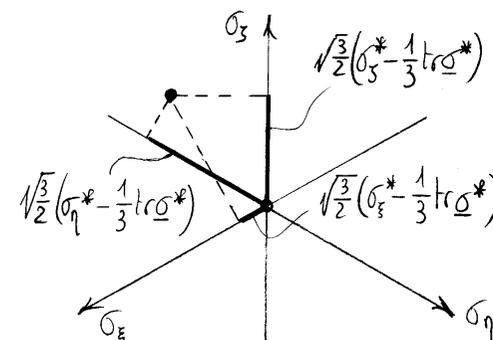
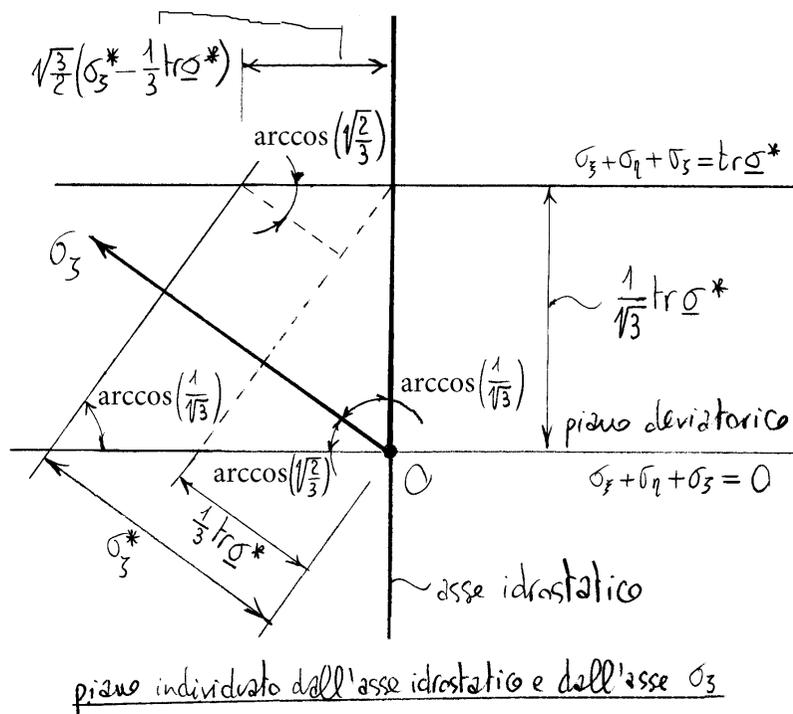
c'è simmetria rispetto al piano passante per un asse coordinato e per l'asse idrostatico. Ne consegue che

i 6 punti devono trovarsi 2 a 2 in posizione simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi (sulle proiezioni degli assi se due valori principali sono uguali), ed inoltre devono sovrapporsi gli uni agli altri per rotazioni di 120° del piano attorno all'asse idrostatico.

Ne consegue che la sezione della superficie di snervamento con un qualunque piano parallelo al piano deviatorico è simmetrica rispetto alle proiezioni degli assi sul piano ed invariante per rotazioni di 120° attorno all'asse idrostatico. Il che poi equivale a dire che solo un sesto della superficie di snervamento è veramente significativa, approssimando le parti restanti gli stessi stati tensionali.

9.1.3 Coordinate sul piano deviatorico

Un punto rappresentativo di uno stato tensionale $\underline{\sigma}^*$ può essere individuato, sul piano parallelo a quello deviatorico e passante per esso, dalle distanze che esso ha dall'asse idrostatico, misurate, con segno, lungo le proiezioni degli assi. Per valutare tali distanze si noti che un piano passante per il punto ed ortogonale ad un asse di riferimento interseca



il piano contenente il punto in una retta ortogonale alla proiezione dell'asse. Ricordando che il coseno dell'angolo tra un asse coordinato e il piano deviatorico vale $\frac{1}{\sqrt{3}}$ si ottengono le distanze cercate:

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_3^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*), \\ \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_1^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*), \\ \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_2^* - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma}^*). \end{cases}$$

Si noti che tali distanze individuano sul piano deviatorico i punti rappresentativi della parte deviatorica di $\underline{\sigma}^*$. Stati tensionali aventi la stessa parte deviatorica sono rappresentati quindi da punti che stanno su una retta parallela all'asse idrostatico.

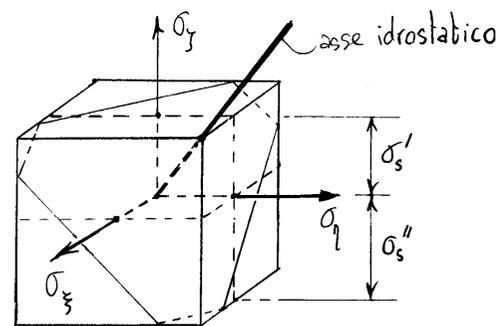
9.2 Criterio di Rankine o della massima tensione normale

Si assume che lo snervamento venga raggiunto quando la massima tensione normale a trazione (o compressione) uguaglia la tensione di snervamento a trazione (o compressione). Se σ_x, σ_y e σ_z sono le tensioni principali associate ad un generico tensore degli sforzi $\underline{\sigma}$, il criterio equivale ad assumere la seguente superficie di snervamento:

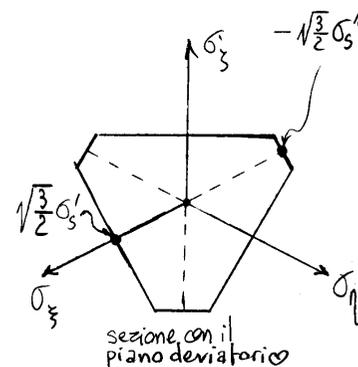
$$\begin{cases} \max \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} = \sigma_s' \\ \min \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} = -\sigma_s'' \end{cases}$$

dove σ_s' e σ_s'' sono le tensioni di snervamento a trazione e a compressione rispettivamente.

La superficie di snervamento si rappresenta dunque come un cubo di lato $\sigma_s' + \sigma_s''$ avente le facce parallele agli assi coordinati e distanti dal centro



degli assi di σ_s' nel verso positivo e di σ_s'' nel verso negativo. La sezione deviatorica è rappresentata invece da un esagono a lati diseguali (uguali solo se $\sigma_s' = \sigma_s''$) oppure da un triangolo equilatero nel caso il modulo $|\sigma_s' - \sigma_s''|$ sia superiore ad una certa soglia.



Il criterio di snervamento di Rankine, uno dei primi proposti, viene utilizzato nella modellizzazione dei materiali fragili e in particolare delle murature. Viene anche utilizzato, in congiunzione con altri criteri di snervamento, per limitare le tensioni di trazione in materiali che presentano una scarsa resistenza a trazione. In tal caso si impone la sola condizione sulle tensioni di trazione, mentre il comportamento sotto tensioni di compressione è retto da un secondo criterio di snervamento.

9.3 Criterio di Grashof o della massima dilatazione

Il criterio di Grashof ha un'importanza esclusivamente storica. Rappresenta il criterio duale di quello di Rankine, assumendo che lo snervamento venga raggiunto quando la massima dilatazione principale (oppure la minima) uguaglia la massima dilatazione a trazione (oppure quella a compressione) che si ha nella prova monoassiale. Dette $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_\zeta$ le dilatazioni principali associate alle tensioni principali $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$, si ha:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \text{tr} \underline{\sigma} \right\} \quad i = \xi, \eta, \zeta.$$

Poiché le massime dilatazioni a trazione e compressione valgono:

$$\begin{cases} \varepsilon'_s = \frac{1}{E} \sigma'_s \\ \varepsilon''_s = \frac{1}{E} \sigma''_s \end{cases},$$

la superficie di snervamento ha equazione:

$$\begin{cases} \max_{i=3,1,3} \left\{ (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = \sigma'_s \\ \min_{i=3,1,3} \left\{ (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\} = -\sigma''_s \end{cases}.$$

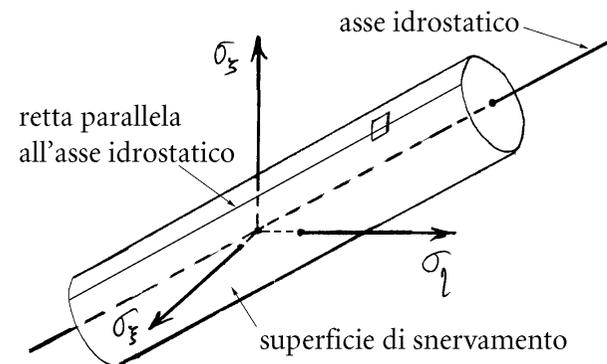
Le equazioni:

$$\begin{cases} (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = \sigma'_s \\ (1+\nu) \sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} = -\sigma''_s \end{cases}, \quad i=3,1,3,$$

definiscono 3 coppie di piani paralleli, non ortogonali tra loro se $\nu \neq 0$. Infatti le componenti delle normali a tali piani sono proporzionali alle tre terne di valori $(1, -\nu, -\nu)$, $(-\nu, 1, -\nu)$, $(-\nu, -\nu, 1)$ ed il prodotto scalare tra due di tali normali è dunque proporzionale a $-\nu(2-\nu)$.

9.4 Criteri di snervamento per i materiali metallici

Nel caso dei materiali metallici, le prove sperimentali mostrano che, con buona approssimazione, il limite di snervamento non viene modificato dalla sovrapposizione di un moderato stato sferico di tensione. Si assume allora che il limite di snervamento sia indipendente dalla parte sferica dello sforzo, oppure, in altri termini, che dipenda solo dalla parte deviatorica.¹ Poiché gli sforzi su rette parallele all'asse idrostatico hanno uguale parte deviatorica, ne consegue che se un punto appartiene alla superficie di snervamento allora anche la retta parallela all'asse idrostatico per il punto appartiene alla superficie. La superficie di snervamento può allora essere generata da una retta parallela all'asse idrostatico che si muove usando quale direttrice l'intersezione della superficie con il piano deviatorico. Si può quindi affermare che la superficie di snervamento è rappresentata da un cilindro con asse coincidente con l'asse idrostatico e che è quindi completamente determinata dalla sua intersezione col piano deviatorico o con un qualunque piano parallelo a questo. Inoltre, dato che ai fini dello sner-



vamento conta solo la parte deviatorica della tensione, un tensore degli

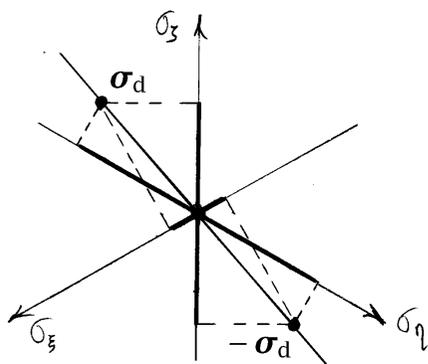
¹In realtà uno stato di trazione uniforme di grandezza adeguata porterà necessariamente alla rottura dei legami interatomici, per cui la parte infinita del cilindro dalla parte delle trazioni è priva di significato fisico. D'altronde stati di trazione uniforme, soprattutto di valore elevato, sono inusuali e difficili, se non impossibili, da ottenere. Ne risulta che la parte del cilindro priva di significato è praticamente irraggiungibile e dunque priva di effetti collaterali. Le prove sperimentali citate hanno riguardato solo stati di compressione uniformi, fino al notevole valore di 2500 N/mm^2 .

sforzi si troverà sulla superficie di snervamento se la sua parte deviatorica si trova sull'intersezione della superficie con il piano deviatorico.

I materiali metallici sono in genere anche caratterizzati da un ugual comportamento a trazione e a compressione, ovvero da un uguale valore per i limiti di snervamento a trazione σ_s^+ e a compressione σ_s^- :

$$\sigma_s^+ = \sigma_s^- = \sigma_s.$$

Tale proprietà equivale a dire che per uno stato di tensione monoassiale il cambiamento di segno della tensione non influenza lo snervamento. Estendendo tale proprietà, si richiede, più in generale, che la superficie di snervamento sia invariante sotto un cambiamento di segno della tensione, ovvero che se una tensione σ appartiene alla superficie di snervamento allora gli appartiene anche la tensione opposta $-\sigma$. Si consideri allora l'intersezione della superficie di snervamento col piano deviatorico. Se una tensione σ sta sulla superficie di snervamento allora la sua parte deviatorica σ_d appartiene all'intersezione col piano deviatorico, così come $-\sigma_d$, parte deviatorica di $-\sigma$. Le parti deviatoriche σ_d e $-\sigma_d$ sono polarsimmetriche rispetto all'intersezione dell'asse idrostatico col piano deviatorico, cioè si ottengono l'una dall'altra tramite una rotazione di 180° attorno a tale intersezione. Ne consegue che la superficie di snervamento è invarian-



te per rotazioni di 180° attorno all'asse idrostatico. Essendo già invariante per rotazioni di 120° , se ne deduce infine, combinando due rotazioni di 120° con una di 180° , che è invariante anche per rotazioni di 60° .

Si consideri ora che la superficie di snervamento deve passare per i 6 punti rappresentanti lo snervamento a trazione e compressione. Si ricordi che la parte deviatorica σ_d di un tensore degli sforzi σ vale:

$$\sigma_d = \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr } \sigma)\mathbf{I},$$

e che i suoi valori principali sono:

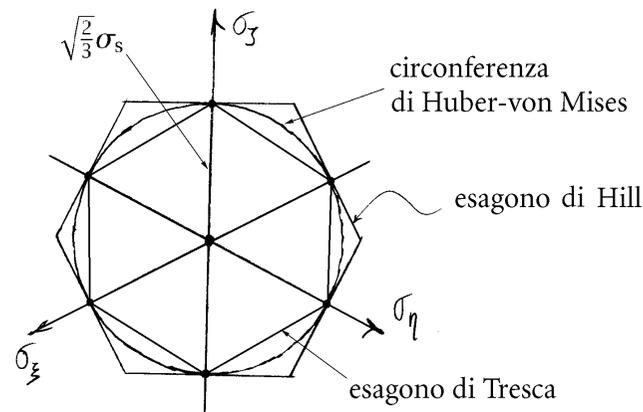
$$\sigma_\xi^d = \sigma_\xi - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_\eta^d = \sigma_\eta - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma, \quad \sigma_\zeta^d = \sigma_\zeta - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma.$$

Per quel che riguarda lo snervamento a trazione, un valore principale vale σ_s e gli altri due sono nulli. La traccia coincide quindi con σ_s e un valore principale deviatorico vale $\frac{2}{3}\sigma_s$ mentre gli altri due valgono $-\frac{1}{3}\sigma_s$. I tre punti corrispondenti sono dunque posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione positiva, alla distanza $\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{3}\sigma_s\right) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico. Stessa considerazione per quel che riguarda lo snervamento a compressione, per cui i tre punti corrispondenti sono posti sulle proiezioni degli assi di riferimento, nella direzione negativa, alla distanza $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ dall'asse deviatorico.

Si noti che esistono due esagoni regolari passanti per i 6 punti corrispondenti allo snervamento monoassiale, uno dei quali contiene l'altro, e che soddisfano tutte le condizioni richieste per la superficie di snervamento. Il criterio di snervamento associato all'esagono interno prende il nome di *criterio di snervamento di Tresca*, mentre quello associato all'esagono esterno prende il nome di *criterio di snervamento di Hill*. Si noti poi che, sotto l'ipotesi di convessità della superficie di snervamento, un qualunque criterio di snervamento accettabile deve essere rappresentato da un dominio di elasticità che contiene il dominio di Tresca e che è contenuto nel dominio di Hill. Una tra le superfici di snervamento intermedie è quella che interseca il piano deviatorico in una circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$. L'esagono di Tresca risulta essere inscritto a tale circonferenza mentre l'esagono di Hill risulta essere circoscritto. Il criterio di snervamento associato alla circonferenza prende il nome di *criterio di snervamento di Huber-von Mises* e rappresenta il più semplice criterio di snervamento per i materiali metallici.

I risultati delle prove sperimentali eseguite su materiali metallici risultano a favore del criterio di Tresca.² D'altra parte, i tre criteri (di Huber-von

² Tale criterio fu infatti proposto da Tresca nel 1864 per interpretare una serie di dati sperimentali.



Mises, di Tresca e di Hill) differiscono di quantità che da un punto di vista ingegneristico possono a volte essere trascurabili. Ne consegue che la decisione di quale criterio applicare può a volte dipendere anche da ragioni di convenienza, e, come già detto, in molti casi il criterio di Huber-von Mises è senz'altro il più semplice da un punto di vista analitico, soprattutto se si deve studiare l'evoluzione del flusso plastico susseguente lo snervamento.

9.4.1 Criterio di snervamento di Huber-von Mises

Si vuole innanzitutto ricavare l'equazione della superficie di snervamento individuata dalla circonferenza del criterio di Huber von Mises. Se la parte deviatorica σ_d della tensione sta, nel piano deviatorico, sulla circonferenza di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_s$ e centro l'origine degli assi deve risultare:

$$\left(\sigma_\xi - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma\right)^2 + \left(\sigma_\eta - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma\right)^2 + \left(\sigma_\zeta - \frac{1}{3} \text{tr } \sigma\right)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

Sviluppando si ottiene:

$$\sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 - \frac{2}{3} (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta) \text{tr } \sigma + \frac{3}{9} (\text{tr } \sigma)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2,$$

cioè:

$$\sigma \cdot \sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma)^2 = \frac{2}{3} \sigma_s^2.$$

Si tenga ora conto che il secondo invariante di tensione σ_{II} vale:

$$\sigma_{II} = \sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi,$$

e che quindi:

$$\begin{aligned} \sigma \cdot \sigma &= \sigma_\xi^2 + \sigma_\eta^2 + \sigma_\zeta^2 \\ &= (\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta)^2 - 2 (\sigma_\zeta \sigma_\eta + \sigma_\xi \sigma_\zeta + \sigma_\eta \sigma_\xi) \\ &= (\text{tr } \sigma)^2 - 2 \sigma_{II}. \end{aligned}$$

Ne consegue la seguente equazione della superficie di snervamento del criterio di Huber-von Mises:

$$(\text{tr } \sigma)^2 - 3 \sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

Il criterio di Huber-von Mises ha una interpretazione particolare, dovuta a Hencky³ e riportata nel seguito.

Criterio dell'energia di deformazione distortore (Hencky). *Lo snervamento viene attinto quando l'energia di deformazione distortore per unità di volume associata alla tensione uguaglia l'energia di deformazione distortore per unità di volume che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.*

L'energia di deformazione distortore rappresenta l'energia di deformazione associata alla sola parte deviatorica σ_{dev} dello sforzo:

$$\sigma_{\text{dev}} = \sigma - \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}. \quad (9.1)$$

In tal modo lo snervamento viene reso indipendente dalla parte sferica dello sforzo:

$$\sigma_{\text{sph}} = \frac{1}{3} (\text{tr } \sigma) \mathbf{I}. \quad (9.2)$$

³Per tale motivo il criterio è a volte citato quale criterio di Huber-von Mises-Hencky. Esso fu introdotto da Huber nel 1904 per le sole tensioni principali negative e nella forma completa da von Mises nel 1913. L'interpretazione di Hencky risale al 1924.

Il criterio di Huber-von Mises, nella formulazione energetica sopra esposta, rappresenta una variante di un criterio dovuto a Beltrami, nel quale si richiede a tutta l'energia elastica associata allo sforzo di uguagliare tutta l'energia elastica che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale. Il criterio di Beltrami non trova modernamente alcuna applicazione, salvo l'utilizzo per i materiali metallici porosi (che presentano diverse resistenze a trazione e compressione), per il conglomerato di cemento e per le terre di superfici di snervamento simili a quella che si ottiene dal criterio di Beltrami.

Per esplicitare la formulazione energetica del criterio ricordiamo che l'energia di deformazione nella forma complementare si scrive:

$$\begin{aligned}\Psi &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II} \\ &= \frac{1}{2E} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - \frac{1}{2G} \sigma_{II},\end{aligned}$$

in termini di invarianti dello sforzo.

Ricordando che la traccia della parte deviatorica dello sforzo è nulla:

$$\text{tr } \underline{\sigma}_d = 0,$$

l'energia distortante associata ad un generico sforzo $\underline{\sigma}$ risulta:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = -\frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}^d,$$

dove σ_{II}^d è il secondo invariante della parte deviatorica dello sforzo:

$$\begin{aligned}\sigma_{II}^d &= (\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma})(\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}) + \\ &\quad + (\sigma_y - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma})(\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}) + \\ &\quad + (\sigma_z - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma})(\sigma_x - \frac{1}{3} \text{tr } \underline{\sigma}) \\ &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \\ &\quad - \frac{2}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \text{tr } \underline{\sigma} + \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2 \\ &= \sigma_{II} - \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma})^2.\end{aligned}$$

Si ottiene quindi:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \frac{1+\nu}{3E} \left\{ (\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} \right\}.$$

Il valore Ψ_s dell'energia allo snervamento Ψ_s si ottiene da tale espressione tenendo conto che all'atto dello snervamento nella prova monoassiale risulta $\text{tr } \underline{\sigma} = \sigma_s$ e $\sigma_{II} = 0$:

$$\Psi_s = \frac{1+\nu}{3E} \sigma_s^2.$$

La condizione:

$$\Psi(\underline{\sigma}_d) = \Psi_s$$

riciuduce quindi all'espressione:

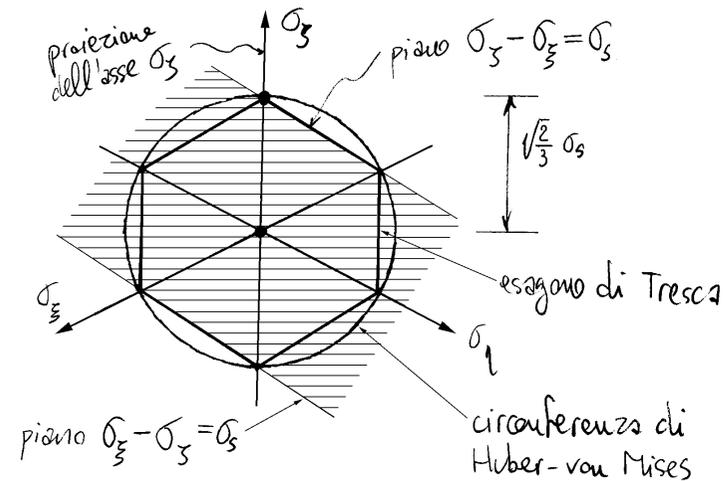
$$(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II} = \sigma_s^2.$$

Si noti che il termine $(\text{tr } \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II}$ è sempre positivo, rappresentando l'energia di deformazione a meno del coefficiente positivo $(1+\nu)/3E$.

9.4.2 Criterio di snervamento di Tresca

Per ricavare l'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Tresca si consideri la coppia di piani paralleli con-

tenenti due facce della superficie, l'uno passante per i punti $(0, 0, \sigma_s)$ e $(-\sigma_s, 0, 0)$ e l'altro per i punti opposti $(0, 0, -\sigma_s)$ e $(\sigma_s, 0, 0)$. I due pia-



ni sono ortogonali al piano deviatorico $\sigma_\xi + \sigma_\eta + \sigma_\zeta = 0$ e hanno quindi equazione:

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = -\sigma_s,$$

$$\sigma_\xi - \sigma_\zeta = \sigma_s.$$

Infatti tali piani passano per i punti predetti come può facilmente essere verificato. Inoltre, dato che il vettore di componenti $(1, 0, -1)$ è ortogonale alla coppia di piani e il vettore di componenti $(1, 1, 1)$ al piano deviatorico risulta verificata l'ortogonalità tra la coppia di piani e il piano deviatorico. Affinché la tensione σ si trovi nella striscia individuata dai due piani deve quindi risultare:

$$|\sigma_\xi - \sigma_\zeta| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, si ottengono le seguenti relazioni:

$$|\sigma_\zeta - \sigma_\eta| \leq \sigma_s,$$

$$|\sigma_\eta - \sigma_\xi| \leq \sigma_s.$$

Ne risulta la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} \leq \sigma_s,$$

e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

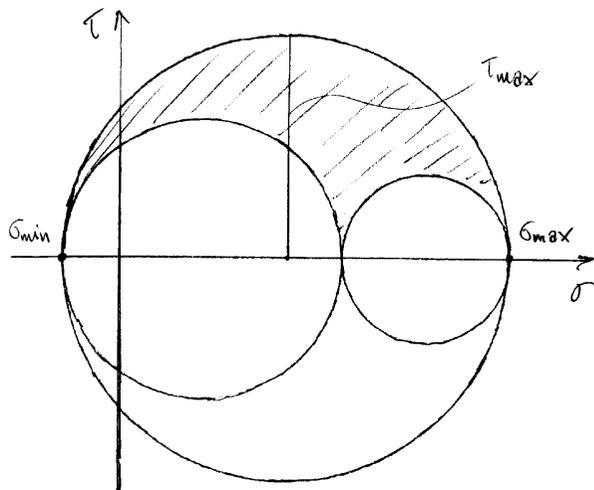
$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} = \sigma_s,$$

Si vuole ora mostrare che il criterio descritto sopra coincide con il

Criterio della massima tensione tangenziale. *Lo snervamento viene raggiunto quando la massima tensione tangenziale associata al dato stato tensionale uguaglia la massima tensione tangenziale che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale.*

Ricordiamo che la massima tensione tangenziale uguaglia il raggio della più grande circonferenza di Mohr:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

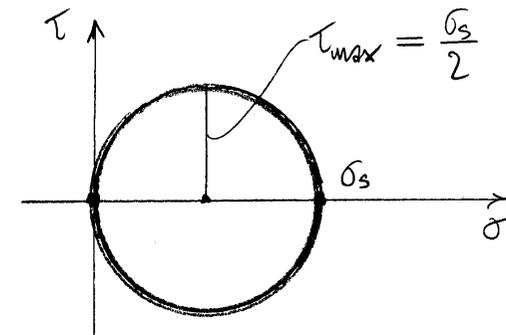


e quindi:

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \}.$$

La tensione tangenziale massima τ_s che si ha all'atto dello snervamento nella prova monoassiale vale invece :

$$\tau_s = \frac{\sigma_s}{2}.$$



circonferenza di Mohr relativa alla prova monoassiale

Il criterio di snervamento di Tresca :

$$\tau_{max} = \tau_s,$$

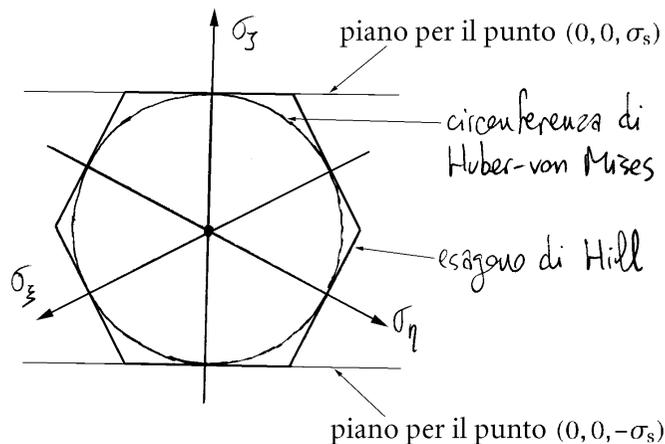
conduce quindi alla seguente superficie di snervamento :

$$\max \{ |\sigma_\zeta - \sigma_\eta|, |\sigma_\xi - \sigma_\zeta|, |\sigma_\eta - \sigma_\xi| \} = \sigma_s,$$

in accordo con quanto già ottenuto.

9.4.3 Criterio di snervamento di Hill

L'equazione della superficie di snervamento associata all'esagono del criterio di Hill può essere ottenuta in modo analogo a quanto fatto per il criterio di Tresca. Si consideri allora la coppia di piani paralleli ortogonali al piano deviatorico e contenenti due facce della superficie, l'uno passante per il punto $(0, 0, \sigma_s)$ e l'altro per il punto opposto $(0, 0, -\sigma_s)$. Tali piani



devono avere versore normale \mathbf{n} con componente $\sqrt{\frac{2}{3}}$ rispetto all'asse σ_ζ e uguale componente rispetto agli assi σ_ξ e σ_η . Poiché \mathbf{n} deve anche essere ortogonale al vettore di componenti $(1, 1, 1)$ (vettore che è ortogonale al piano deviatorico) si ha:

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{Bmatrix}.$$

Le equazioni dei due piani possono quindi essere messe nella forma:

$$\begin{aligned} \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= \sigma_s, \\ \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) &= -\sigma_s. \end{aligned}$$

Affinché la tensione σ si trovi nella striscia individuata dai due piani deve quindi risultare:

$$\left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \leq \sigma_s.$$

Procedendo in modo analogo per le altre due coppie di piani paralleli, ne risulta infine la seguente condizione di appartenenza al dominio elastico:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} \leq \sigma_s,$$

e la seguente equazione per la superficie di snervamento:

$$\max \left\{ \left| \sigma_\xi - \frac{1}{2}(\sigma_\zeta + \sigma_\eta) \right|, \left| \sigma_\eta - \frac{1}{2}(\sigma_\xi + \sigma_\zeta) \right|, \left| \sigma_\zeta - \frac{1}{2}(\sigma_\eta + \sigma_\xi) \right| \right\} = \sigma_s.$$

9.5 Criteri di snervamento per i materiali non metallici

I materiali non metallici tipo i conglomerati cementizi, le rocce, i mezzi granulari e le terre sono caratterizzati da vuoti e da microfessurazioni che rendono il comportamento del materiale fortemente dipendente dalla componente sferica dello sforzo. Nel seguito saranno descritti i due criteri di snervamento di Drucker-Prager e di Mohr-Coulomb, dei quali il più aderente ai dati sperimentali è il secondo, anche se da un punto di vista pratico i due criteri sono equivalenti.

9.5.1 Criterio di snervamento di Drucker-Prager

Il criterio di snervamento di Drucker-Prager rappresenta una generalizzazione del criterio di Huber-von Mises. Con tale criterio si aggiunge alla funzione di snervamento di Huber-von Mises un termine dipendente linearmente dalla componente sferica dello sforzo ottenendo:

$$\alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} + \sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_s \quad .$$

In tale espressione, α rappresenta un parametro costitutivo positivo adimensionale. Notando che su un piano parallelo al piano deviatorico $\operatorname{tr} \underline{\sigma}$ è costante, ne risulta che l'intersezione della superficie di snervamento definita da tale criterio con un piano parallelo a quello deviatorico coincide con una circonferenza di raggio f :

$$f = \sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha \operatorname{tr} \underline{\sigma} \} \quad .$$

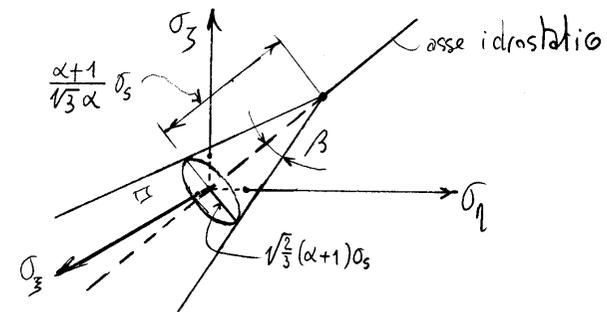
Questo perché se $a = \operatorname{tr} \underline{\sigma}$, l'equazione:

$$\sqrt{(\operatorname{tr} \underline{\sigma})^2 - 3 \sigma_{II}} = (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha a \quad ,$$

con a considerato costante anche al di fuori del piano considerato, rappresenta, come già visto, l'equazione di un cilindro di raggio $\sqrt{\frac{2}{3}} \{ (\alpha + 1) \sigma_s - \alpha a \}$.

All'aumentare di $\operatorname{tr} \underline{\sigma}$, il raggio del cerchio diminuisce. La superficie di snervamento è dunque rappresentata da un cono con vertice in corrispondenza del punto posto sull'asse idrostatico individuato dalla condizione $f=0$:

$$\operatorname{tr} \underline{\sigma} = \frac{\alpha + 1}{\alpha} \sigma_s \quad .$$



Tale punto ha coordinate

$$\sigma_{\underline{1}} = \sigma_{\underline{2}} = \sigma_{\underline{3}} = \frac{\alpha + 1}{3\alpha} \sigma_s \quad ,$$

e dista dal centro degli assi della quantità:

$$d = \frac{\alpha + 1}{\sqrt{3}\alpha} \sigma_s \quad .$$

Poiché il raggio della circonferenza sul piano deviatorico vale:

$$r_d = \sqrt{\frac{2}{3}} (\alpha + 1) \sigma_s,$$

se ne deduce che la semiapertura β del cono soddisfa la relazione:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r_d}{d} = \sqrt{2} \alpha.$$

9.5.2 Criterio di snervamento di Mohr-Coulomb

Si assume che lo snervamento del materiale si sviluppi quando la tensione tangenziale raggiunge in almeno una giacitura un valore limite dipendente linearmente dalla tensione normale alla giacitura:

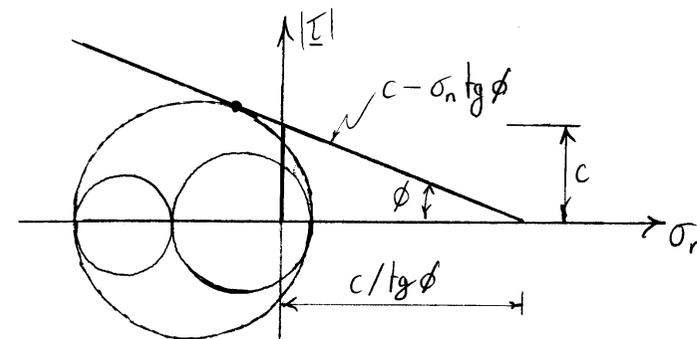
$$|\underline{\tau}_n| = c - \sigma_n \operatorname{tg} \phi.$$

Il coefficiente di σ_n è messo nella forma $-\operatorname{tg} \phi$ e ϕ è detto angolo di attrito interno. La costante c è detta coesione ed ha le dimensioni di una

tensione. Su una giacitura di normale \underline{n} risulta:

$$\begin{cases} \sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \underline{n} \\ |\underline{\tau}_n|^2 = (\underline{\sigma} \underline{n}) \cdot (\underline{\sigma} \underline{n}) - \sigma_n^2 \end{cases}.$$

Il criterio si presta ad essere rappresentato efficacemente nel piano di Mohr. Infatti in tale piano l'equazione limite rappresenta una retta inclinata dell'angolo ϕ , detta retta limite.



Gli stati tensionali limite, quindi appartenenti alla superficie di snervamento, devono avere la circonferenza di Mohr più esterna tangente alla retta limite.

9.6 Tensione ideale di snervamento

Dato un tensore degli sforzi generico:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix},$$

lo si vuole trasformare in un tensore degli sforzi monoassiale "equivalente" secondo un qualche "criterio di snervamento":

$$[\underline{\sigma}_{eq}] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{id} \end{bmatrix},$$

dove σ_{id} indica la cosiddetta tensione normale ideale o, semplicemente, "tensione ideale".

Il criterio di Rankine rappresenta uno dei primi criteri di resistenza proposti e viene ancora utilizzato per la verifica di resistenza di materiali fragili.

In accordo con la superficie di snervamento già descritta, la tensione ideale vale:

$$\sigma'_{id} = \max \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a trazione}),$$

$$\sigma''_{id} = \min \{ \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z \} \quad (\text{a compressione}).$$

Nel caso del criterio di Grashof risulta invece:

$$\sigma'_{id} = \max_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\},$$

$$\sigma''_{id} = \min_{i=x,y,z} \left\{ (1+\nu)\sigma_i - \nu \operatorname{tr} \underline{\sigma} \right\}.$$

Il criterio di Huber-von Mises equivale poi a porre la σ_{id} nella seguente forma:

$$\sigma_{id} = \sqrt{(\text{tr} \underline{\sigma})^2 - 3\sigma_{II}}.$$

Scritta in componenti in un generico sistema di riferimento ortogonale, la σ_{id} diventa:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_x \sigma_z - \sigma_y \sigma_z + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Il criterio di snervamento di Tresca conduce invece alla seguente tensione ideale:

$$\sigma_{id} = \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3| \}.$$

Bibliografia

- Arri, E. e Sartori, S. (1984) *Le Misure di Grandezze Fisiche. Manuale di Metrologia*. Paravia, Torino.
- Barenblatt, G. I. (1987) *Dimensional Analysis*. Gordon and Breach, New York.
- Bell, J. F. (1973) The experimental foundations of solid mechanics. In *Encyclopedia of Physics, Volume VIa/1: Mechanics of Solids I* (A cura di C. Truesdell). Springer-Verlag, Berlin.
- Bowen, R. M. e Wang, C. C. (1976) *Introduction to Vectors and Tensors, Volume 1: Linear and Multilinear Algebra*. Plenum Press, New York.
- Carpinteri, A., a cura di (1992) *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora, Bologna.
- Colombo, G. (1975) *Manuale dell'Ingegnere*. Hoepli, Milano, 80a edizione.
- Courtney, T. H. (1990) *Mechanical Behavior of Materials*. Materials Sciences and Engineering. McGraw-Hill, New York.
- do Carmo, M. P. (1976) *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
- Gilardi, G. (1994) *Analisi Tre*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano.
- Gilardi, G. (1995) *Analisi Uno*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.
- Gilardi, G. (1996) *Analisi Due*. Collana di Istruzione Scientifica, Serie di Matematica. McGraw-Hill Libri Italia, Milano, seconda edizione.
- Gordon, J. E. (1976) *La Scienza dei Materiali Resistenti ovvero perchè non sprofondiamo nel pavimento*. Mondadori, Milano.
- Gordon, J. E. (1979) *Strutture ovvero perchè le cose stanno in piedi*. Mondadori, Milano.
- Gurtin, M. E. (1981) *An Introduction to Continuum Mechanics*, vol. 158 di *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, San Diego, California.
- Kittel, C., Knight, W. D. e Ruderman, M. A. (1970) *La Fisica di Berkeley 1, Meccanica*. Zanichelli, Bologna.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J.-L. (1990) *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Levi-Civita, T. e Amaldi, U. (1949) *Lezioni di Meccanica Razionale, Volume Primo: Cinematica - Principi e Statica*. Zanichelli, Bologna.
- Lipschutz, S. (1975) *Algebra Lineare*. Etas, Milano.
- Love, A. E. H. (1944) *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*. Dover, New York.
- Nadai, A. (1950) *Theory of Flow and Fracture of Solids, Volume 1*. McGraw-Hill, New York, seconda edizione.

- Sartori, S., a cura di (1979) *Le Misure nella Scienza, nella Tecnica, nella Società. Manuale di Metrologia*. Paravia, Torino.
- Sedov, L. I. (1971) *A Course in Continuum Mechanics Volume I: Basic Equations and Analytical Techniques*. Wolters-Noordhoff, Groningen.
- Taylor, B. N. (1995) Guide for the use of the international system of units (SI). Special Publication 811, NIST National Institute of Standards and Technology.
- Tricomi, F. G. (1970) *Istituzioni di Analisi Superiore, Metodi Matematici della Fisica*. Cedam, Padova, seconda edizione.
- Truesdell, C. e Toupin, R. (1960) The classical field theories. In *Encyclopedia of Physics, Volume III/1: Principles of Classical Mechanics and Field Theory* (A cura di S. Flügge), pp. 226–793. Springer-Verlag, Berlin.
- Truesdell, III, C. A. (1991) *A First Course in Rational Continuum Mechanics, Volume 1: General Concepts*. Academic Press, Boston, seconda edizione.
- Wang, C. C. e Truesdell, C. (1973) *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff, Leyden.
- Washizu, K. (1982) *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*. Pergamon, Oxford, terza edizione.

Indice analitico

Saint-Venant
equazioni di congruenza di, **172**

accelerazione, **83**

alberi, 62n

allungamento, **73**
per unità di linea, *vedi* dilatazione, lineare

Almansi
tensore di deformazione, **149**

alternatore, *vedi* permutazione, simbolo di

anelli, 62n

angoli
di Eulero, **44**

arbelo di Mohr, **50**

archi, 62n

asse
del tempo, **82**

aste, 62n

autospazio
di un tensore doppio, **32**

autotensioni, **142**

autovalore
di un tensore doppio, **31**

autoversori
di un tensore doppio, **31**

autovettore
di un tensore doppio, **31**

azione
a distanza, **90**
di contatto, **90**

azione e reazione
principio, **94**

base
di tensori doppi, **28**
ortonormale, **22**

bilancio
del momento della quantità di moto, **87**
della quantità di moto, **87**
della quantità di moto, **86**
prima equazione di, **87**
seconda equazione di, **87**

binormale, **60**

calcestruzzo, 115, 116

campo conservativo, **164**

capacità portante, **55**

carichi, 56

Cauchy
equazione di, **123**
ipotesi di, **95**
tensore degli sforzi di, **121**
tetraedro di, **125**

Cauchy-Green

- tensori di, **147**
- cavo, *vedi* filo
- cedimenti dei vincoli, **101**
- circolazione, **166**
- circonferenza di Mohr, **47**
- circonferenza osculatrice, **61**
- coefficiente
 - di contrazione trasversale, *vedi* coefficiente di Poisson
 - di Poisson, **109**
 - di sicurezza, **118**
- coefficienti
 - di combinazione, **118**
 - parziali, 118n
- colonne, 62n
- componente fisica, 20n
- componenti
 - di vettori, **23**
- compressione
 - prova di, **115**
- condizione al contorno
 - omogenea, **102**
 - sugli spostamenti, **101**
 - sulle forze, **123**
- configurazione
 - attuale, **57**
 - deformata, **58**
 - di riferimento, **58**
 - di un corpo continuo, **57**
 - euleriana, *vedi* configurazione spaziale
 - lagrangiana, *vedi* configurazione materiale
 - naturale, **142**
- congruenza
 - equazioni di, **163**
- conservativo
 - campo, **164**
- contorno
 - condizione sugli spostamenti, **101**
 - condizione sulle forze, **123**
- coordinata
 - curvilinea, **60**, **65**
- corda, *vedi* filo
- corpo continuo, **56**
- Corpo rigido, **97**
- costruzioni, **55**
 - dighe di ritenuta, **56**
 - muri di sostegno, **56**
 - reali, **56**
- covettore, **22**
- criterio di snervamento, **111**
- cupole, 67n
- curva
 - curvatura di una, **61**
 - normale ad una, **60**
- curvatura
 - di una curva, **61**
 - raggio di, **61**
- curve sghembe, **59**
- danneggiamento
 - meccanismi di, **116**
- decomposizione polare, **148**
- Definitezza positiva, **21**, **38**
- deformazione
 - continuità, **77**
 - direzioni principali di, **155**
 - funzione di, **70**
 - gradiente della, **71**
 - infinitesima
 - tensore di, **147**
 - iniettività, **77**
 - giacobiano della, **72**
 - localizzazione della, **114**
 - stati elementari di, **157**
 - valori principali di, **155**
- deformazione pura, **150**
- del, **167**

- delaminazione, **116**
- delta di Dirac, 88n, 93n
- densità, **88**
- derivazione
 - materiale, **83**
- determinante, 23
 - di un tensore doppio, **35**
 - di una matrice quadrata, 35
 - giacobiano, *vedi* giacobiano
- deviatorico
 - tensore, 35
- dilatazione
 - cubica, **74**, 154, 155
 - lineare, **74**, 150
 - logaritmica, **105**
 - nominale, **105**
 - quadratica, **74**
 - trasversale, **105**
 - vera, **105**
- dilatazione lineare
 - in cinematica finita, 151
- dilatazioni principali, **155**
- dimensione, **17**
 - di una grandezza, **16**
- Dirac
 - delta di, 88n
- direzione orientata, **19**
- direzione principale
 - di un tensore doppio, **31**
- direzioni principali
 - di deformazione, **155**
 - di tensione, **133**
- dislocazioni, **116**
- distribuzione, 88n
- divergenza, **127**
 - di un campo vettoriale, **128**, 154
- dominio
 - di ammissibilità, **119**
 - di linearità, **111**
 - elastico, **111**
- duttilità, **116**
- elastica
 - isteresi, **112**
- elasticità, **108**
 - lineare, **109**
 - ritardata, **113**
- elastico
 - dominio, **111**
- elastoplasticità, **111**
- elastoplastico
 - comportamento, **111**
- energia
 - di frattura, **117**
- equazione
 - di Cauchy, **123**
- equazione caratteristica, 33, 35
- equazione del moto
 - di Cauchy, **128**
- equazione di equilibrio
 - indefinita materiale, 128
- equazione materiale
 - del moto, **128**
- equazioni
 - di congruenza, **163**
 - di congruenza di Saint-Venant, **172**
- equazioni (solidi)
 - indefinite di equilibrio, **128**
- equazioni parametriche, **60**, **65**
- equilibrio
 - alla rotazione, **88**
 - alla traslazione, **88**
 - dei momenti delle forze, **88**
 - delle forze, **88**
 - equazioni di, **88**
 - stabilità dell', **119**

- equilibrio (solidi)
 - equazioni indefinite di , 128
- Eulero
 - angoli di, 44
- fatica , 112
- filo, 62
- Finger
 - tensore di, 147
- flesso
 - punto di, 61
- fluidi, 58
- fluido
 - viscoso, 112
- forma
 - lineare, 24
 - quadratica, 38
- forma lineare, 22
- formula
 - di Stokes, 166
- forza, 87
 - di superficie, 91
 - di taglio, *vedi* taglio
 - di volume, 91
 - per unità di volume, 92
- forza , 86
- forza esterna per unità disuperficie, 92
- forze
 - condizione al contorno sulle, 123
 - equilibrio delle, 88
- fragilità, 116
- funzione
 - del moto, 82
 - di dominio, 88
- giacitura, 95
- gradiente
 - degli spostamenti, 71
 - della deformazione, 71
 - funzione scalare, 25
 - funzione vettoriale, 28
- grandezza
 - dimensione di una, 16
 - misura di una, 14
 - particolare, 13
- grandezza fisica, 13
- grandezze
 - adimensionali, 19
 - grandezze della stessa specie, 14
 - grandezze derivate, 16
 - grandezze vettoriali, 19
- Green
 - teorema di, 127
- Green-Lagrange
 - tensore di deformazione, 149
- gruppo commutativo, 21
- gusci, 67n
- Hooke
 - legge di, 109
- imbozzamento, 68
- impulso, 86
- incompatibilità
 - tensore di, 171
- incrudimento, 111
 - negativo, 111
- instabilità
 - locale, 68
- invarianti
 - di un tensore doppio, 35
- isotropia, 104
- isotropo
 - tensore, 35
- isteresi elastica, 112
- giacobiana
 - matrice, 72

- equilibrio dei, **88**
- momento
 - angolare, **87**
 - delle forze, **86, 87**
 - di superficie, **91**
 - di volume, **91**
 - esterno per unità di superficie, **93**
 - interno per unità di superficie, **93**
 - per unità di volume, **93**
- momento della quantità di moto, **87**
- montante, 62n
- moto
 - descrizione
 - euleriana, *vedi* moto, descrizione spaziale
 - lagrangiana, *vedi* moto, descrizione materiale
 - materiale, **58**
 - spaziale, **58**
 - funzione del, **82**
- nabla, **167**
- naturale
 - configurazione, **142**
- Newton
 - leggi di, **85**
- normale ad una curva, **60**
- numeri puri, **19**
- o piccolo, **25, 28**
- omogeneità, **103**
- orientazione
 - esterna di una superficie, **91**
- ortogonale
 - tensore, **39**
- pelo libero, **58**
- permutazione
 - simbolo di, **23**
- piano di Mohr, **46**
- piano osculatore, **60**
- piastre, 67n
- pilastrini, 62n
- Piola-Kirchhoff
 - primo tensore degli sforzi di, **124**
 - secondo tensore degli sforzi di, **124**
- plasticità, **108**
 - perfetta, **111**
- Poisson
 - coefficiente di, **109**
- polare
 - decomposizione, **148**
- posizione
 - vettore, **85**
- potenziale scalare, **164**
- potenziale vettoriale, **164**
- principio
 - di azione e reazione, **94**
- Prodotto scalare
 - di due tensori doppi, **36**
- proiezione, **27**
- proporzionalità
 - limite di, **110**
- prova
 - di compressione, **115**
 - di torsione, **107, 115**
 - di trazione, **104, 113**
- provino, **103**
- punti materiali, **58**
- punto di flesso, **61**
- Quantità di moto
 - per unità di volume, **89**
- quantità di moto, **86**
- quasi statica
 - evoluzione, **104**
- radiante, **19, 75**
- raggio di curvatura, **61**
- reazioni vincolari, **101**

- regione di controllo, **58**
- resistenza
 - caratteristica, **116**
 - Classi di, **116**
- resistenze di progetto, **118n**
- retta tangente, **60**
- Reynolds
 - teorema di, **89**
- rilassamento, **113**
- ritardata
 - elasticità, **113**
- rocce, **116**
- rotazione
 - infinitesima
 - tensore di, **146**
 - tensore, **40**
 - vettore, **41, 146**
- rotore, **166**
- rottura
 - tensione di, **114**
- SaintVenant
 - problema, **64**
- scalare, **21**
- scorrimento, **75, 151**
 - in cinematica finita, **152**
 - linea-superficie, **76**
- sferico
 - tensore, **35**
- Sforzi
 - tensore degli, **121**
- sforzo
 - di taglio semplice, **107**
 - trazione semplice, **105**
- sicurezza
 - coefficiente di, **118**
 - verifiche di, **117**
- simbolo di permutazione, **23**
- sistema di unità
 - coerente, **16**
- sistemi
 - anolonomi, **100**
 - anolonomi propri, **100**
 - olonomi, **100**
- snervamento
 - criterio di, **111**
 - inferiore, **114**
 - superficie di, **111**
 - superiore, **114**
 - tensione di, **111**
- Solidi
 - equazioni indefinite di equilibrio, **128**
- solidi, **58**
 - spostamento, **70**
- solido
 - viscoelastico, **112**
- Spazi vettoriali, **21**
- spazio euclideo, **19, 57**
- spostamenti
 - condizione al contorno, **101**
 - gradiente degli, **71**
- spostamento
 - totalmente impedito, **101**
- stabilità
 - dell'equilibrio, **119**
- stati elementari di deformazione, **157**
- stati elementari di tensione, **134**
- stati limite
 - ultimi, **117**
- statica
 - evoluzione quasi, **104**
- staticamente indeterminato
 - problema delle tensioni, **142**
- stato di deformazione
 - monoassiale, **158**
 - sferico, **157**

- Stato di dilatazione
 - uniforme, 157
- stato di dilatazione semplice, 158
- stato di taglio semplice, 136
- stato di tensione
 - idrostatico, 135
 - monoassiale, 135
 - sferico, 135
- stato di trazione o compressione
 - uniforme, 134
- stato di trazione o compressione semplice, 135
- Stato limite, 117
- stato limite
 - di esercizio, 118
 - di servizio, 118
- stato piano di deformazione, 160, 160
- stato piano di tensione, 137, 137
- stiramento, 74, 147
 - tensori di, 148
- Stokes
 - formula di, 166
- strizione, 114
- struttura, 55
 - portante, 56, 56
- superficie
 - di snervamento, 111
 - elemento di, 95
- taglio
 - semplice, 107
- tangente
 - retta, 60
- tempo
 - asse del, 82
- tensione, 92
 - di rottura, 114
 - direzioni principali di, 133
 - nominale, 105
 - stati elementari di, 134
 - valori principali di, 133
 - vera, 105
- tensioni
 - ammissibili, 118
 - principali, 133
 - problema staticamente indeterminato, 142
- Tensori
 - definito positivo, 38
- tensore
 - degli sforzi, 121
 - deviatorico, 35
 - di deformazione infinitesima, 147
 - di Finger, 147
 - di incompatibilità, 171
 - di rotazione infinitesima, 146
 - emisimmetrico, 27
 - identità, 26
 - inverso, 27
 - isotropo, 35
 - nullo, 26
 - opposto, 26
 - ortogonale, 39
 - prodotto, 26
 - rotazione, 40
 - sferico, 35
 - simmetrico, 27
 - somma, 26
 - trasposto, 26
- tensore degli sforzi
 - di Cauchy, 121
 - primo di Piola-Kirchhoff, 124
 - secondo di Piola-Kirchhoff, 124
- tensore del secondo ordine, 22
- tensore di deformazione
 - di Almansi, 149
 - di Green-Lagrange, 149
- tensore doppio, 22, 26

- autoversori , 31
- autospazio, 32
- autovalore, 31
- autovettore, 31
- direzione principale, 31
- valore principale, 31
- tensori
 - di Cauchy-Green, 147
 - di stiramento, 148
 - rappresentazione algebrica, 28, 29
- teorema
 - del trasporto, 89
 - della media, 122n
 - di Green, 127
 - di Reynolds, 89
- terreno, 58
- tetraedro di
 - Cauchy, 125
- torsione
 - di una curva, 62
 - prova di, 107, 115
- traccia
 - di un tensore doppio, 35
 - di una matrice quadrata, 35
- traiettoria, 82
- trasformazione
 - ortogonale, 78
 - rigida, 78
- trasformazioni
 - lineari, 22, 24
- trasporto
 - teorema del, 89
- trave, 62
 - asse, 62
 - di sezione sottile, 63, 68
 - aperta, 64
 - chiusa, 64
 - in parete sottile, *vedi* trave di sezione sottile
 - sezione retta, 62
 - tronco di, 63
- travi parete, 67n
- trazione
 - prova di, 104, 113
 - semplice, 105
- tronco di trave, 63
- tubi, 67n
- Unità
 - Sistema Internazionale di, 17
- unità
 - fondamentali, 16, 17
 - joule, 91n
 - newton, 91
- valore principale
 - di un tensore doppio, 31
- valori di progetto
 - degli effetti delle azioni, 118n
 - dei dati geometrici, 118n
 - delle azioni, 118n
- valori principali
 - di deformazione, 155
 - di tensione, 133
- velocità, 82, 85
 - angolare, 84
- vento, 56
- verifiche di sicurezza, 117
- versore, 20
- vettore, 19
 - assiale, 30
 - di tensione, *vedi* tensione
 - forza, 20
 - geometrico, 19
 - nullo, 20
 - opposto, 20
 - ordinario, 19
 - posizione, 20, 57, 85

- rotazione, **41, 146**
- somma, **20**
- spostamento, **20**
- unitario, *vedi* versore
- vettori
 - componenti, **23**
 - prodotto esterno, *vedi* vettori, prodotto vettoriale
 - prodotto interno, *vedi* vettori, prodotto scalare
 - prodotto scalare, **20**
 - prodotto tensoriale, **27**
 - prodotto vettoriale, **20**
 - rappresentazione matriciale, **23**
 - spazio, **24**
- vincoli
 - anonomi, **100**
 - anonomi propri, **100**
 - bilaterali, **100**
 - cedimenti dei, **101**
 - di mobilità, **100**
 - di mobilità propri, **100**
 - di posizione, **100**
 - dipendenza dal tempo, **100**
 - monolaterali, **100**
 - olonomi, **100**
 - reazioni dei, **101**
 - rigidi o perfetti, **101**
- vincolo, **100**
 - privo di attrito, **101**
- viscoelastico
 - solido, **112**
- viscosità, **108**
- viscoso
 - fluido, **112**
- volte, 67n
- Young
 - modulo di, **109**