

Daniele Zaccaria

RACCOLTA DI ESERCIZI

Dispense del Corso di SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

Corsi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Ingegneria Industriale, Ingegneria Navale



Copyright © 2016 Daniele ZACCARIA. All rights reserved.

Questo documento può essere riprodotto e distribuito in tutto o in parte, con ogni mezzo fisico o elettronico, purché questo avviso di copyright sia mantenuto su tutte le copie. La redistribuzione commerciale non è permessa. Ogni traduzione, lavoro derivato o comprendente questo documento deve contenere questo stesso avviso di copyright : per esempio, non si possono produrre lavori derivati da questo documento ed imporre restrizioni aggiuntive sulla sua distribuzione. Per ulteriori informazioni si prega di contattare l'autore all'indirizzo zaccaria@units.it.

This document may be reproduced and distributed in whole or in part, in any medium physical or electronic, as long as this copyright notice is retained on all copies. Commercial redistribution is not allowed. All translations, derivative works, or aggregate works incorporating this document in whole or in part must be covered under this copyright notice. That is, you may not produce a derivative work from this document and impose additional restrictions on its distribution. For further information please contact the author at zaccaria@units.it.

Trieste, 28 agosto 2016

INDICE

Premessa	7		
1 Esercizi di meccanica dei solidi	9		
1.1 Esercizio 1	9		
1.2 Esercizio 2	10		
1.3 Esercizio 3	12		
1.4 Esercizio 4	13		
1.5 Esercizio 5	16		
1.6 Esercizio 6	22		
1.7 Esercizio 7	23		
1.8 Esercizio 8	29		
1.9 Esercizio 9	30		
2 Esercizi sulle sollecitazioni semplici	35		
2.1 Esercizio 10	35		
2.2 Esercizio 11	36		
2.3 Esercizio 12	37		
2.4 Esercizio 13	40		
2.5 Esercizio 14	44		
2.6 Esercizio 15	46		
2.7 Esercizio 16	48		
2.8 Esercizio 17	53		
2.9 Esercizio 18	53		
2.10 Esercizio 19	54		
2.11 Esercizio 20	56		
2.12 Esercizio 21	57		
2.13 Esercizio 22	62		
		2.14 Esercizio 23	65
		2.15 Esercizio 24	67
		2.16 Esercizio 25	68
		2.17 Esercizio 26	73
		2.18 Esercizio 27	74
		2.19 Esercizio 28	75
		2.20 Esercizio 29	77
		2.21 Esercizio 30	78
		2.22 Esercizio 31	80
		3 Esercizi sui centri assoluti e relativi	83
		3.1 Esercizio 32	83
		3.2 Esercizio 33	84
		4 Esercizi su sistemi di travi isostatici	87
		4.1 Esercizio 34	87
		4.2 Esercizio 35	89
		4.3 Esercizio 36	91
		4.4 Esercizio 37	93
		4.5 Esercizio 38	97
		4.6 Esercizio 39	98
		4.7 Esercizio 40	102
		4.8 Esercizio 41	105
		4.9 Esercizio 42	108
		4.10 Esercizio 43	113
		4.11 Esercizio 44	118
		4.12 Esercizio 45	121
		4.13 Esercizio 46	125
		4.14 Esercizio 47	130
		4.15 Esercizio 48	134
		4.16 Esercizio 49	135
		4.17 Esercizio 50	139
		4.18 Esercizio 51	143
		4.19 Esercizio 52	146
		4.20 Esercizio 53	148
		4.21 Esercizio 54	153
		4.22 Esercizio 55	156
		4.23 Esercizio 56	161
		4.24 Esercizio 57	166

4.25 Esercizio 58	169	5.29 Esercizio 94	288
4.26 Esercizio 59	171	5.30 Esercizio 95	290
4.27 Esercizio 60	174		
4.28 Esercizio 61	179	6 Esercizi sul metodo degli spostamenti	291
4.29 Esercizio 62	184	6.1 Esercizio 96	291
4.30 Esercizio 63	189	6.2 Esercizio 97	292
4.31 Esercizio 64	195	6.3 Esercizio 98	296
4.32 Esercizio 65	200	6.4 Esercizio 99	298
		6.5 Esercizio 100	301
5 Esercizi su sistemi di travi iperstatiche	203	6.6 Esercizio 101	305
5.1 Esercizio 66	203	6.7 Esercizio 102	310
5.2 Esercizio 67	205	6.8 Esercizio 103	314
5.3 Esercizio 68	207	6.9 Esercizio 104	318
5.4 Esercizio 69	209	6.10 Esercizio 105	321
5.5 Esercizio 70	210	6.11 Esercizio 106	325
5.6 Esercizio 71	212	6.12 Esercizio 107	328
5.7 Esercizio 72	215		
5.8 Esercizio 73	218	7 Esercizi sui carichi critici	335
5.9 Esercizio 74	222	7.1 Esercizio 108	335
5.10 Esercizio 75	224	7.2 Esercizio 109	337
5.11 Esercizio 76	225	7.3 Esercizio 110	339
5.12 Esercizio 77	228		
5.13 Esercizio 78	231		
5.14 Esercizio 79	239		
5.15 Esercizio 80	242		
5.16 Esercizio 81	250		
5.17 Esercizio 82	253		
5.18 Esercizio 83	256		
5.19 Esercizio 84	262		
5.20 Esercizio 85	269		
5.21 Esercizio 86	271		
5.22 Esercizio 87	274		
5.23 Esercizio 88	277		
5.24 Esercizio 89	280		
5.25 Esercizio 90	281		
5.26 Esercizio 91	283		
5.27 Esercizio 92	285		
5.28 Esercizio 93	287		

PREMESSA

In questa quarta dispensa di *Scienza delle Costruzioni* vengono proposti un consistente numero di esercizi con, salvo eccezioni, la relativa soluzione. La maggioranza di questi esercizi traggono la loro origine dalle prove scritte d'esame che gli allievi civili della vecchia laurea quinquennale hanno dovuto sostenere negli anni che vanno dal 1993 fino al 2005. Alcune di tali prove d'esame sono state utilizzate quali esempi esplicativi nell'ambito delle altre tre parti di queste dispense. Si sono conservati i testi originali degli esercizi così come sono stati proposti nel corso degli esami. Gli esercizi sono stati suddivisi in modo tematico tenendo conto del loro contenuto prevalente.

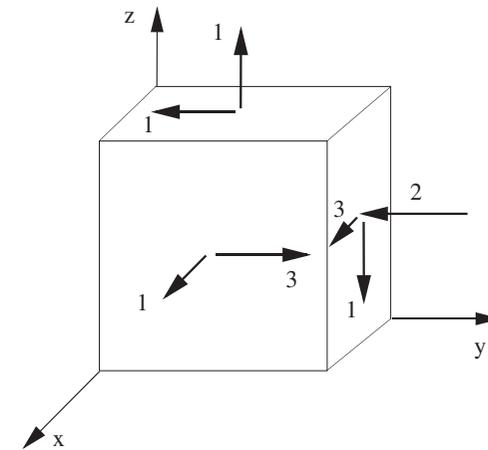
ESERCIZI DI MECCANICA DEI SOLIDI

1.1 Esercizio 1

Nel sistema di riferimento $Oxyz$ il tensore degli sforzi agenti in un punto P di un corpo continuo ha le componenti (esprese in N/mm^2):

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Rappresentare lo stato tensionale sulle facce di un cubo posto nell'intorno del punto P e avente le facce stesse parallele ai piani coordinati;
2. Verificare che le tensioni principali valgono: 3 N/mm^2 , 1 N/mm^2 , -4 N/mm^2 ;
3. Determinare le direzioni principali di tensione.



Equazione caratteristica: $-\lambda^3 + 13\lambda - 12 = 0$

$$\sigma_{\xi} = 3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\eta} = 1 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\zeta} = -4 \text{ N/mm}^2$$

$$[\mathbf{e}_{\xi}] = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{Bmatrix} \pm 3 \\ \pm 2 \\ \mp 1 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{e}_{\eta}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{Bmatrix} \pm 1 \\ 0 \\ \pm 3 \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{e}_{\zeta}] = \frac{1}{\sqrt{35}} \begin{Bmatrix} \mp 3 \\ \pm 5 \\ \pm 1 \end{Bmatrix}$$

1.2 Esercizio 2

Dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = 2kxy + kz^2 \\ v = 2kxy + kz^2 \\ w = -2k(x+y)z \end{cases},$$

determinare le componenti dei tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi.

Nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa determinare le componenti del tensore degli sforzi.

Nel punto (1,1,1) determinare inoltre:

- 1) l'asse e l'entità della rotazione rigida locale;
- 2) le direzioni e i valori principali di tensione;
- 3) la tensione tangenziale massima e la tensione ideale nel caso del criterio di Huber-von Mises.

Infine disegnare i cerchi di Mohr relativi al tensore degli sforzi, sempre nel punto (1,1,1), ed indicare i punti rappresentativi degli assi x e y .

Per risolvere l'esercizio occorre innanzitutto determinare il gradiente degli spostamenti:

$$\text{gradu} = \begin{bmatrix} 2ky & 2kx & 2kz \\ 2ky & 2kx & 2kz \\ -2kz & -2kz & -2k(x+y) \end{bmatrix}.$$

I tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi rappresentano rispettivamente la parte simmetrica e quella emisimmetrica di gradu :

$$\epsilon = \begin{bmatrix} 2ky & k(x+y) & 0 \\ k(x+y) & 2kx & 0 \\ 0 & 0 & -2k(x+y) \end{bmatrix},$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & k(x-y) & 2kz \\ -k(x-y) & 0 & 2kz \\ -2kz & -2kz & 0 \end{bmatrix}.$$

Il tensore degli sforzi si ottiene applicando la legge di Hooke:

$$\sigma = 2G\epsilon + \lambda \text{tr} \epsilon.$$

Poichè $\text{tr} \epsilon = 0$, risulta quindi:

$$\sigma = 2kG \begin{bmatrix} 2y & x+y & 0 \\ x+y & 2x & 0 \\ 0 & 0 & -2(x+y) \end{bmatrix}.$$

Nel punto (1, 1, 1) il tensore di rotazione infinitesimo e quello degli sforzi assumono l'espressione:

$$\omega = 2k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma = 4kG \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Il vettore di rotazione infinitesimo ha quindi le componenti:

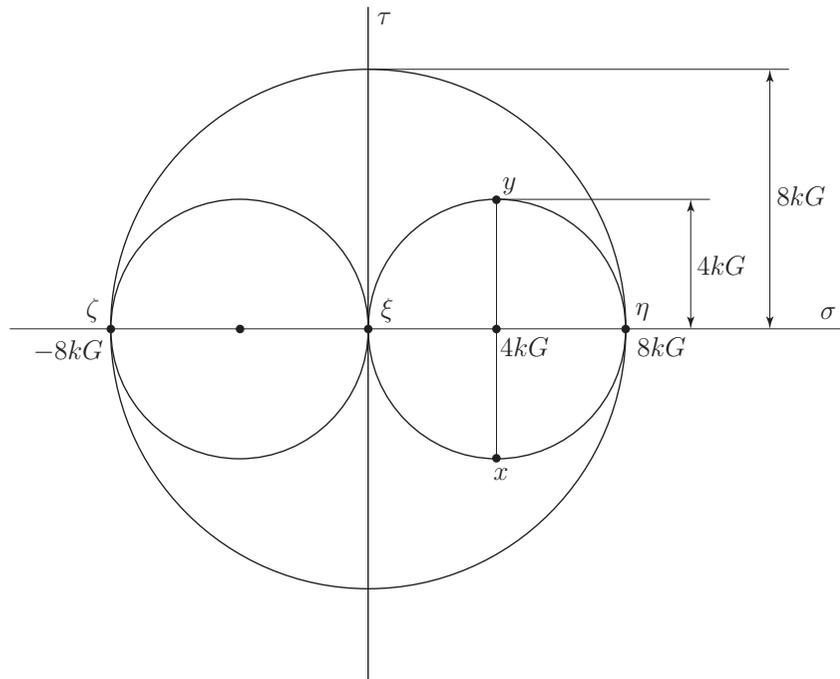
$$\varphi_x = -2k, \quad \varphi_y = 2k, \quad \varphi_z = 0.$$

L'asse della rotazione infinitesima nell'intorno del punto $(1, 1, 1)$ giace nel piano xy e la sua parte positiva coincide con la bisettrice del II quadrante. Il suo modulo vale

$$|\boldsymbol{\varphi}| = 2\sqrt{2}k.$$

L'asse z rappresenta, nell'intorno del punto $(1, 1, 1)$, una direzione principale di tensione a cui corrisponde il valore principale $\sigma_\zeta = -8kG$. Gli altri due valori principali si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica:

$$\det \begin{bmatrix} 4kG - \sigma & 4kG \\ 4kG & 4kG - \sigma \end{bmatrix} = 0.$$



Si ottiene:

$$\sigma^2 - 8kG\sigma = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_\xi = 0 \\ \sigma_\eta = 8kG \end{cases}.$$

I versori delle direzioni principali risultano quindi:

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{Bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\eta = \begin{Bmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{e}_\zeta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

La direzione principale ζ coincide con l'asse z , mentre le direzioni principali ξ e η giacciono sul piano xy e coincidono rispettivamente con le bisettrici del II e del I quadrante.

La tensione tangenziale massima e la tensione ideale del criterio di Huber-von Mises risultano infine:

$$\begin{cases} \tau_{max} = \frac{\sigma_\eta - \sigma_\zeta}{2} = 8kG \\ \sigma_i = 4kG\sqrt{(1+1+4) - (1-2-2) + 3} = 8\sqrt{3}kG \end{cases}.$$

1.3 Esercizio 3

Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = -1.5xy \times 10^{-6} \\ v = 2.5 \{-z^2 + 0.3(x^2 - y^2)\} \times 10^{-6} \\ w = 5yz \times 10^{-6} \end{cases}$$

(coefficienti in mm^{-1}).

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e specializzarli nel punto P di coordinate $x=0$, $y=20$ cm, $z=100$ cm;
2. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
3. Determinare dilatazione e scorrimento massimi (in modulo), sempre nel punto P, e disegnare le circonferenze di Mohr.

$$\text{grad } \underline{u} = \begin{bmatrix} -1.5y & -1.5x & 0 \\ 1.5x & -1.5y & -5z \\ 0 & 5z & 5y \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} -1.5y & 0 & 0 \\ 0 & -1.5y & 0 \\ 0 & 0 & 5y \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

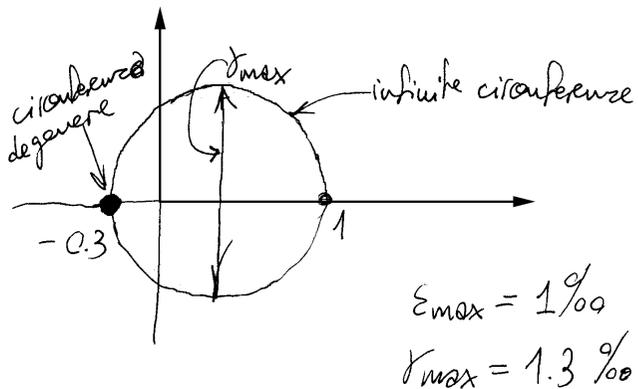
$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} 0 & -1.5x & 0 \\ 1.5x & 0 & -5z \\ 0 & 5z & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-6}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 20 \text{ cm} = 200 \text{ mm} \\ z = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm} \end{cases}$$

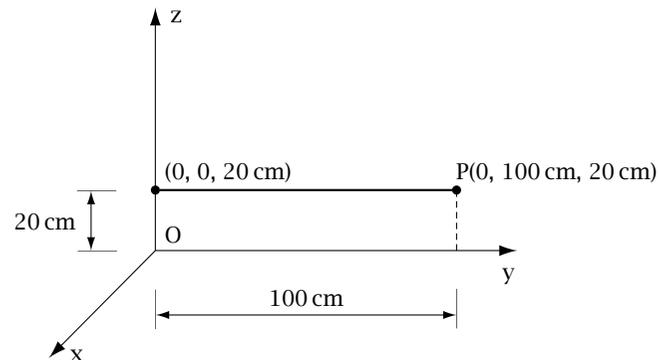
$$\epsilon \equiv \begin{bmatrix} -0.3 & 0 & 0 \\ 0 & -0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Rotazione rigida di asse x e di superficie
 5×10^{-3} radianti (antioraria)



1.4 Esercizio 4



Il campo degli spostamenti dei punti di un corpo continuo, in componenti in un sistema Oxyz cartesiano ortogonale, sia individuato dalle seguenti equazioni scalari:

$$\begin{cases} u = 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} xy \\ v = 2.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \{z^2 - 0.1 \times y^2\} \\ w = 1 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} yz \end{cases}$$

1. Determinare i tensori di deformazione e di rotazione infinitesimi e specializzarli nel punto P di coordinate $x=0, y=100 \text{ cm}, z=20 \text{ cm}$;
2. Determinare, nel punto P, le dilatazioni principali e disegnare le circonferenze di Mohr;
3. Determinare, sempre nel punto P, la dilatazione e lo scorrimento massimi in modulo e dello scorrimento massimo darne il valore in gradi;
4. Individuare asse e ampiezza (in radianti) della rotazione rigida dell'intorno del punto P;
5. Determinare le direzioni principali nel punto P;
6. Calcolare l'allungamento del segmento, illustrato in figura, che unisce i punti di coordinate $(0, 0, 20 \text{ cm})$ e $(0, 100 \text{ cm}, 20 \text{ cm})$;
7. Scrivere le equazioni parametriche della curva in cui si trasforma il segmento del numero precedente.

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} +y & +x & 0 \\ 0 & -y & 10z \\ 0 & 2z & 2y \end{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} y & 0.5x & 0 \\ 0.5x & -y & 6z \\ 0 & 6z & 2y \end{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

$$\underline{\omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0.5x & 0 \\ -0.5x & 0 & 4z \\ 0 & -4z & 0 \end{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1}$$

Nel punto P:

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix} 10^{-4};$$

$$\underline{\omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

Dilatazioni principali

$$\det \begin{bmatrix} -5-\lambda & 6 \\ 6 & 10-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

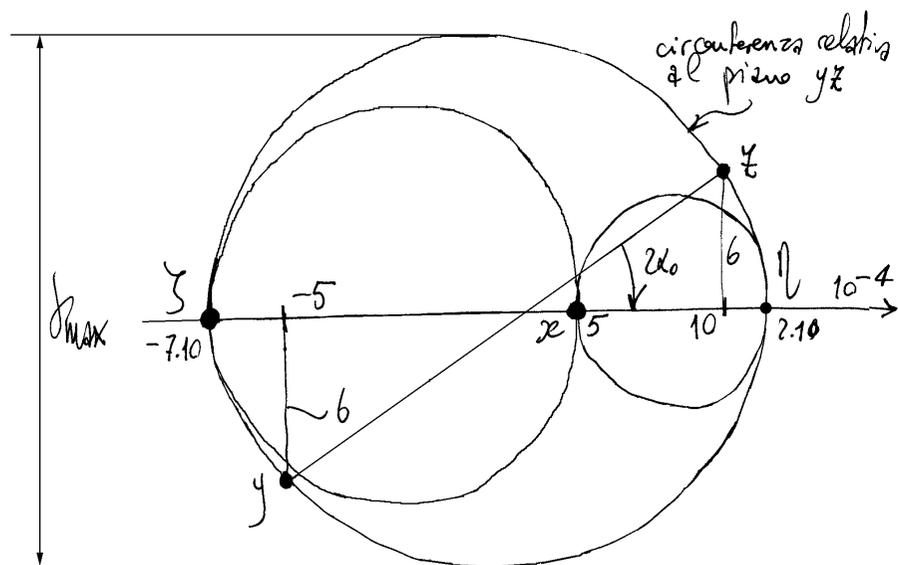
$$(-5-\lambda)(10-\lambda) - 36 = 0$$

$$-50 + 5\lambda - 10\lambda + \lambda^2 - 36 = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 86 = 0$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 4 \times 86}}{2} = \begin{cases} -7.10 \\ 12.10 \end{cases}$$

$$\text{Valori principali} = \begin{cases} -7.10 \times 10^{-4} \\ 5 \times 10^{-4} \\ 12.10 \times 10^{-4} \end{cases}$$



dilatazione massima (in modulo) = 12.10×10^{-4}

serrimento massimo (in modulo) = $19.20 \times 10^{-4} = 0.11 \text{ deg}$

Rotazione rigida attorno all'asse x di superficie

-4×10^{-4} radianti.

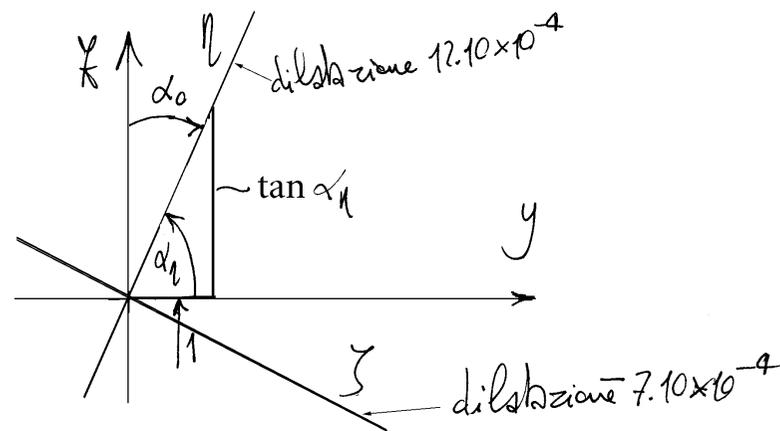
Direzioni principali:

1) asse x

2) Nel piano yz

$$\text{tg } 2\alpha_0 = \frac{6}{10+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \frac{1}{2} \arctan \frac{6}{7.5} = 19.33^\circ$$



$$\begin{bmatrix} -5 - 12.10 & 6 \\ 6 & 10 - 12.10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \tan \alpha_1 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\tan \alpha_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_y}{\epsilon_{yz}} = \frac{12.10 + 5}{6} \Rightarrow \alpha_1 = 70.67^\circ$$

Nel tratto P'P la dilatazione è funzione solo di y e vale (dilatazione nella direzione y)

$$\varepsilon_y = -0.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} y$$

$$\begin{aligned} \text{Allungamento} &= \int_{P'}^P \varepsilon_y dy = -0.5 \times 10^{-6} \int_0^{1000} y dy \\ &= -0.5 \times 10^{-6} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{1000} = -0.25 \text{ mm} \end{aligned}$$

Detta ξ la distanza del generico punto del segmento da P', il generico punto ha coordinate $(0, \xi, 200 \text{ mm})$ e quindi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \xi + 2.5 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \left\{ 200^2 \text{ mm}^2 - 0.1 \xi^2 \right\} \\ \quad = 0.1 \text{ mm} + \xi - 2.5 \times 10^{-7} \text{ mm}^{-1} \xi^2 \\ z = 200 \text{ mm} + 1 \times 10^{-6} \text{ mm}^{-1} \xi \times 200 \text{ mm} \\ \quad = 200 \text{ mm} + 2 \times 10^{-4} \xi \end{cases}$$

1.5 Esercizio 5

In un punto P di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi σ , scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono rappresentate dalla matrice:

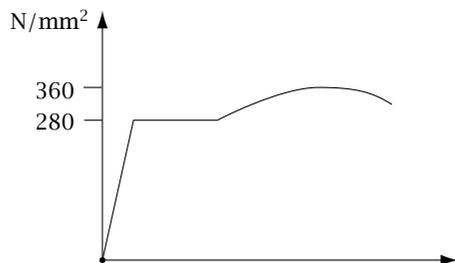
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times 50 \text{ N/mm}^2.$$

1. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e i valori σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
5. Calcolare l'energia elastica *distorcente* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi σ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \sigma)^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

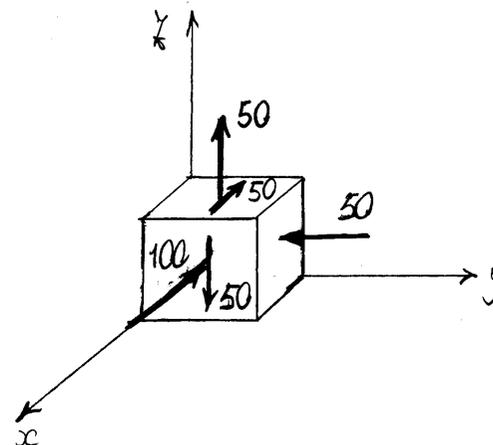
assumendo i valori $E=20000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

6. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il seguente diagramma rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale:



e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $\gamma = 1.6$;

7. Calcolare la tensione t_r su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano zx , dando le componenti t_x, t_y, t_z della tensione nel sistema $Oxyz$, fornendo la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r ed infine individuandone la posizione nel piano di Mohr;
8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:
- Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico;
 - Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
 - Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

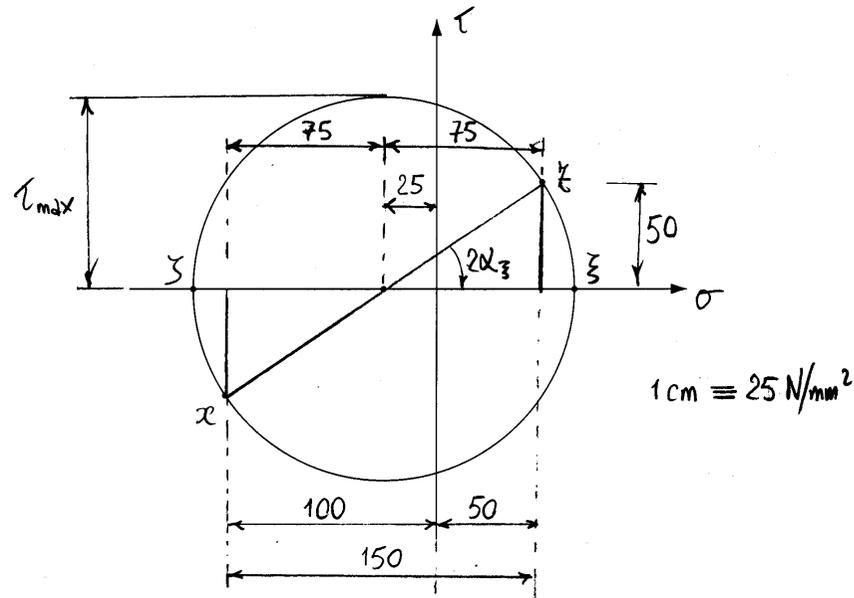
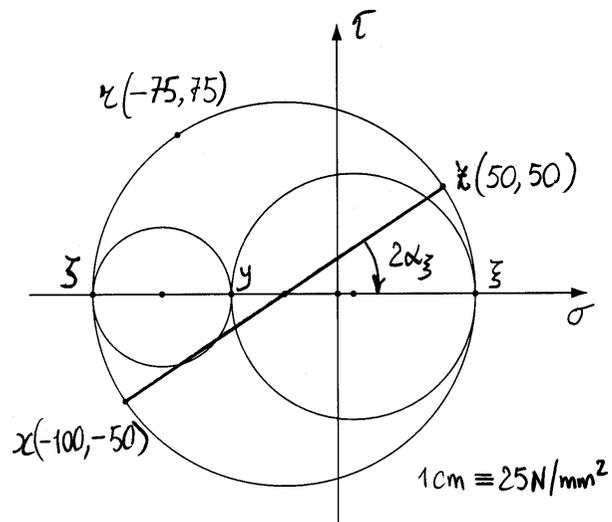


y è direzione principale di tensione
 $\sigma_y = -50 N/mm^2$ è un valore principale di tensione

Determinazione dei valori e delle direzioni principali nel piano zxc (z primo asse).

La faccia positiva del piano zxc è quella di normale uscente y positivo. Le tensioni tangenziali positive, nella convenzione di Mohr, sono quelle che provocano una rotazione oraria. Punti rappresentativi degli assi z e x :

$$z(50, 50), \quad x(-100, -50).$$



Equazione caratteristica

$$\det \begin{bmatrix} -100 - \lambda & -50 \\ -50 & 50 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

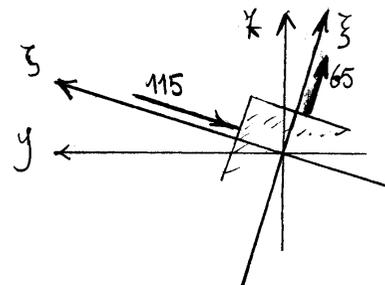
$$\lambda^2 + 50\lambda - 7500 = 0$$

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{25^2 + 7500} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

Dalla circonferenza di Mohr:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\} = -25 \pm \sqrt{50^2 + 75^2} = \begin{cases} 65.14 \text{ N/mm}^2 \\ -115.14 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha_z = \frac{50}{75} \Rightarrow \alpha_z = \begin{cases} 0.2940 \text{ rad} \\ 16.85^\circ \end{cases}$$



Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{|\sigma_x - \sigma_y|}{2} = \frac{65.14 + 115.14}{2} = 90.14 \text{ N/mm}^2$$

Parte sferica di $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3}(\text{tr} \underline{\sigma}) \underline{I}$$

$$\text{tr} \underline{\sigma} = -100 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_s = \begin{bmatrix} -33.33 & 0 & 0 \\ 0 & -33.33 & 0 \\ 0 & 0 & -33.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica di $\underline{\sigma}$

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \Rightarrow \underline{\sigma}_d = \begin{bmatrix} -66.67 & 0 & -50 \\ 0 & -16.67 & 0 \\ -50 & 0 & 83.33 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Energia elastica distortante per unità di volume

$$\text{tr} \underline{\sigma}_d = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{d\xi} = \sigma_x - \sigma_{s\xi} = 65.14 + 33.33 = 98.47 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{d\eta} = \sigma_y - \sigma_{s\eta} = -50 + 33.33 = -16.67 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{d\zeta} = \sigma_z - \sigma_{s\zeta} = -115.14 + 33.33 = -81.81 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

$$\sigma_{dII} = \sigma_{d\xi} \sigma_{d\eta} + \sigma_{d\eta} \sigma_{d\xi} + \sigma_{d\eta} \sigma_{d\zeta} = -8333 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

$$\psi_d = -\frac{1+0.3}{20000} \times (-8333) = 0.5417 \text{ N/mm}$$

Verifiche di resistenza

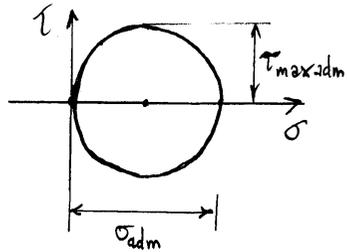
$$\text{tensione di snervamento : } \sigma_s = 280 \text{ N/mm}^2$$

$$\text{tensione ammissibile : } \sigma_{adm} = \frac{280}{1.6} = 175 \text{ N/mm}^2$$

stato di tensione monoassiale ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{adm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 175 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Tensione tangenziale massima ammissibile:



$$\tau_{\max \text{ adm}} = \frac{\sigma_{\text{adm}}}{2} = 87.5 \text{ N/mm}^2$$

Parte deviatorica dello stato di tensione massima ammissibile:

$$\underline{\sigma}_{\text{d adm}} = \underline{\sigma}_{\text{adm}} - \frac{1}{3}(\text{tr } \underline{\sigma}_{\text{adm}}) \mathbf{I}$$

$$\text{tr } \underline{\sigma}_{\text{adm}} = 175 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \underline{\sigma}_{\text{d adm}} = \begin{bmatrix} -58.33 & 0 & 0 \\ 0 & -58.33 & 0 \\ 0 & 0 & 116.67 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{d adm II}} = (-58.33)^2 + 2(116.67)(-58.33) = -10208 \text{ N}^2/\text{mm}^4$$

Energia elastica distortante ammissibile:

$$\Psi_{\text{d adm}} = -\frac{1+0.3}{20000} (-10208) = 0.6635$$

Criterio di Tresca:

$$\tau_{\max} > \tau_{\max \text{ adm}} \Rightarrow \text{Verifica negativa}$$

Criterio di Huber-von Mises:

$$\Psi_{\text{d}} < \Psi_{\text{d adm}} \Rightarrow \text{Verifica positiva}$$

Tensione ideale di Tresca:

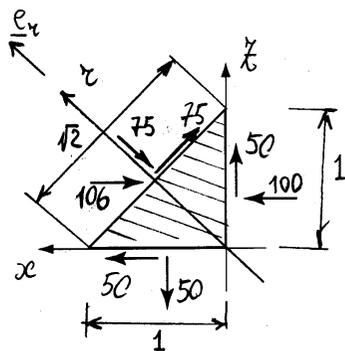
$$\sigma_{\text{id}} = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{\max \text{ adm}}} \sigma_{\text{adm}} = 2 \tau_{\max} = 180.28 \text{ N/mm}^2$$

Tensione ideale Huber-von Mises:

$$\Psi_{\text{d adm}} = K \sigma_{\text{adm}}^2 \text{ e si vuole che } \Psi_{\text{d}} = K \sigma_{\text{id}}^2, \text{ quindi:}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{id}} &= \sqrt{\Psi_{\text{d}} / K} = \sqrt{\frac{\Psi_{\text{d}}}{\Psi_{\text{d adm}}} \sigma_{\text{adm}}^2} \\ &= \sqrt{\frac{0.5417}{0.6635} (175)^2} = 158.12 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Tensione \underline{t}_z



$$t_x = -\frac{150}{\sqrt{2}} = -106.06 \text{ N/mm}^2$$

$$t_y = t_z = 0$$

$$\sigma_z = -t_x/\sqrt{2} = -75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_z = |t_x|/\sqrt{2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

$$\underline{e}_z \equiv \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{t}_z \equiv \begin{bmatrix} -100 & 0 & -50 \\ 0 & -50 & 0 \\ -50 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix}$$

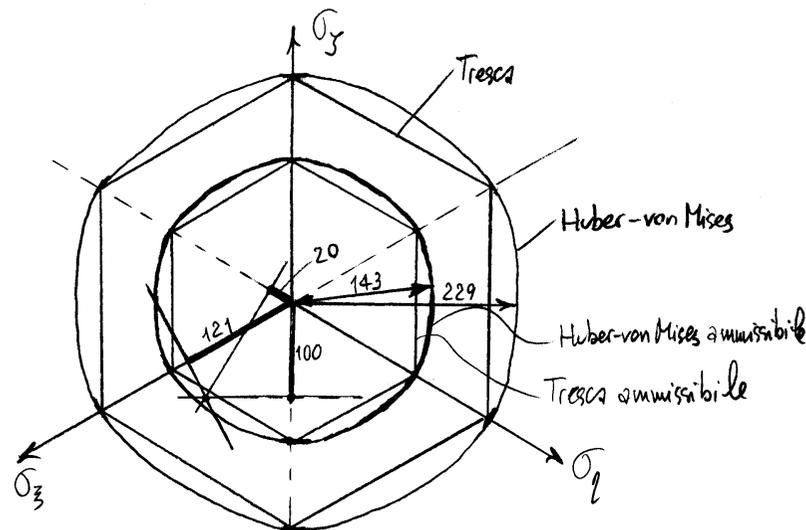
Quindi $\underline{t}_z = \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2$

Componenti normali e tangenziali:

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -106.06 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = -75 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_z = \sqrt{(106.06)^2 - (75)^2} = 75 \text{ N/mm}^2$$

Spazio delle tensioni principali



Raggio circonferenza di Huber-von Mises = $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_s = 228.62 \text{ N/mm}^2$

Raggio circonferenza ammissibile = $\sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{adm} = 142.89 \text{ N/mm}^2$

Distanza su asse idrostatico = $\frac{1}{\sqrt{3}} \text{tr} \underline{\sigma} = -\frac{100}{\sqrt{3}} = -57.74 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\xi = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_3 - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = 120.60 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\eta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_2 - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -20.41 \text{ N/mm}^2$

Coordinata $\zeta = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\sigma_1 - \frac{1}{3} \text{tr} \underline{\sigma} \right) = -100.19 \text{ N/mm}^2$

1.6 Esercizio 6

In un punto P di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$, scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono rappresentate dalla matrice:

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -80 \\ 0 & -80 & 160 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

1. Determinare le direzioni ξ , η , ζ e i valori σ_ξ , σ_η , σ_ζ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Determinare la parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ e la parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$;
5. Relativamente alla tensione t_r agente su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano yz :

(a) Calcolare le componenti t_x^r , t_y^r , t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$;

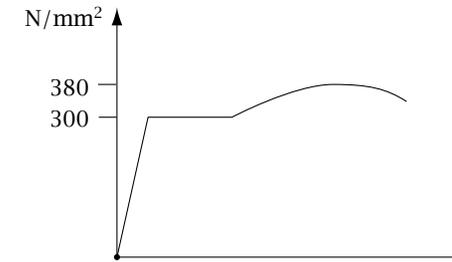
(b) Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di t_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;

6. Calcolare l'energia elastica *distorcenza* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi $\boldsymbol{\sigma}$ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \boldsymbol{\sigma})^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

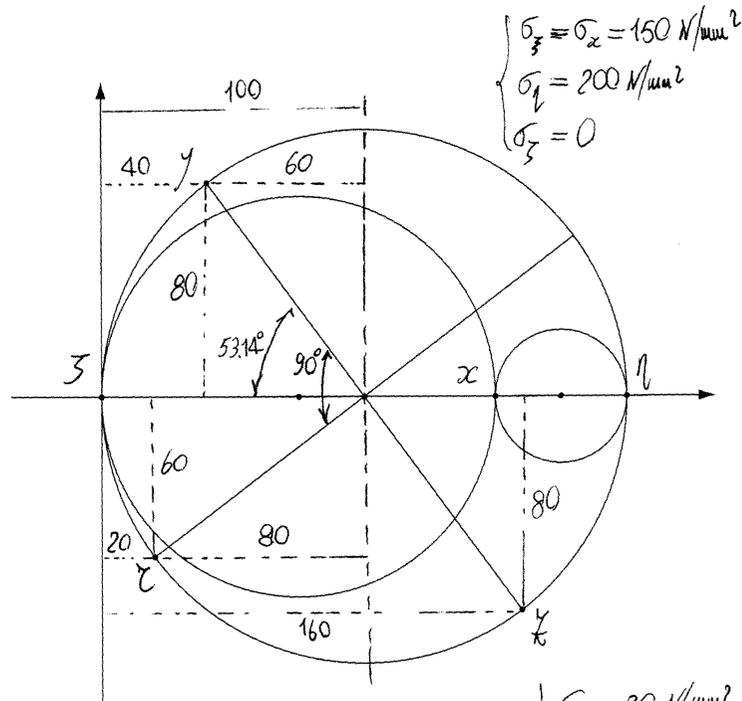
assumendo i valori $E=21000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

7. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il seguente diagramma rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale:



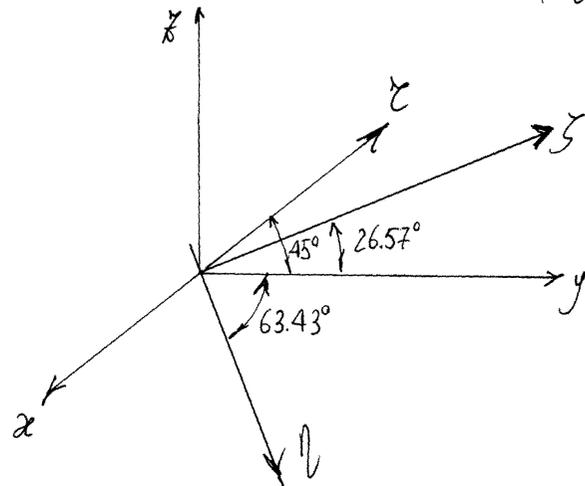
e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $\gamma = 1.6$;

8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:
 - (a) Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico;
 - (b) Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica $\boldsymbol{\sigma}_s$ di $\boldsymbol{\sigma}$;
 - (c) Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica $\boldsymbol{\sigma}_d$ di $\boldsymbol{\sigma}$.



$$\begin{cases} \sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = 150 \text{ N/mm}^2 \\ \sigma_{\zeta} = 200 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{\xi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_{\eta} = 20 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{\eta} = 60 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$



1.7 Esercizio 7

Dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = kxy - kz^2 \\ v = k(y^2 + z^2) \\ w = -2kyz \end{cases}$$

1. Determinare le componenti dei tensori ϵ di deformazione e ω di rotazione;
2. Specializzare ϵ e ω nel punto $(0, 1 \text{ m}, 1 \text{ m})$, assumendo $k = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$;
3. Determinare l'asse e l'entità della rotazione rigida locale.

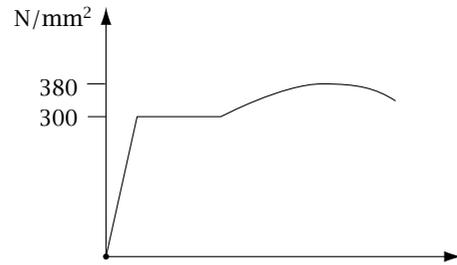
Inoltre, nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa, tenendo conto che:

$$\sigma = 2G \left[\epsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr } \epsilon) \mathbf{I} \right], \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

ed assumendo :

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3,$$

1. Determinare le componenti del tensore degli sforzi;
2. Determinare le direzioni ξ, η, ζ e i valori $\sigma_{\xi}, \sigma_{\eta}, \sigma_{\zeta}$ principali;
3. Disegnare in scala le circonferenze di Mohr;
4. Indicare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
5. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
6. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
7. Eseguire la verifica di resistenza con il criterio di Tresca, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $\gamma = 1.6$.



Si consideri poi la giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano individuato dall'asse y e dall'asse principale di minima tensione normale, orientato concordemente all'asse z . Relativamente alla tensione t_r agente su tale giacitura:

1. Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di t_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;
2. Calcolare le componenti t_x^r, t_y^r, t_z^r di t_r nel sistema $Oxyz$.

Infine, relativamente allo spazio delle tensioni principali:

1. Disegnare e quotare l'intersezione della superficie di snervamento di Tresca con il piano deviatorico;
2. Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
3. Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

Gradiente degli spostamenti

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \begin{bmatrix} k_y & k_x & -2kz \\ 0 & 2ky & 2kz \\ 0 & -2kz & -2ky \end{bmatrix} .$$

Tensore di deformazione infinitesimo

$$\underline{\epsilon} = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + \text{grad } \underline{u}^T) \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} k_y & \frac{1}{2}k_x & -kz \\ \frac{1}{2}k_x & 2ky & 0 \\ -kz & 0 & -2ky \end{bmatrix} .$$

Tensore di rotazione infinitesimo

$$\underline{\omega} \equiv \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} - \text{grad } \underline{u}^T) \equiv$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}k_x & -kz \\ -\frac{1}{2}k_x & 0 & 2kz \\ kz & -2kz & 0 \end{bmatrix}$$

Specializzazione di $\underline{\varepsilon}$ ed $\underline{\omega}$ per $K = 0.25 \times 10^{-3} \text{ m}$
nel punto di coordinate $x=0, y=1 \text{ m}, z=1 \text{ m}$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0.50 & 0 \\ -0.25 & 0 & -0.50 \end{bmatrix} \times 10^{-3},$$

$$\underline{\omega} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0.25 \\ 0 & 0 & 0.50 \\ 0.25 & -0.50 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Rotazione rigida locale

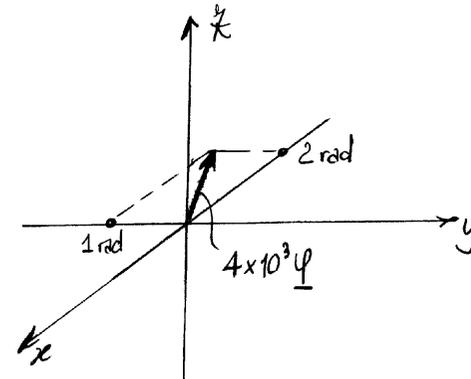
$$\underline{\varphi} \equiv -\frac{1}{4} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

$$|\underline{\varphi}| = \frac{\sqrt{5}}{4} \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.559 \times 10^{-3} \text{ rad} = 0.032^\circ$$

L'asse di rotazione è parallelo al piano xy , la sua inclinazione α rispetto all'asse x vale:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 0.4636 \text{ rad} = 26.57^\circ,$$

e la sua parte positiva si trova nel III quadrante del piano xy .



Tensore degli sforzi

$$2G = \frac{210}{1+0.3} \text{ GPa} = 161.53 \text{ GPa} = 161.53 \times 10^3 \text{ N/mm}^2,$$

$$\frac{\nu}{1-2\nu} = 0.75,$$

$$\text{tr } \underline{\varepsilon} = (0.25 + 0.50 - 0.50) \times 10^{-3} = 0.25 \times 10^{-3},$$

$$2G \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr } \underline{\varepsilon} = 30.29 \text{ N/mm}^2,$$

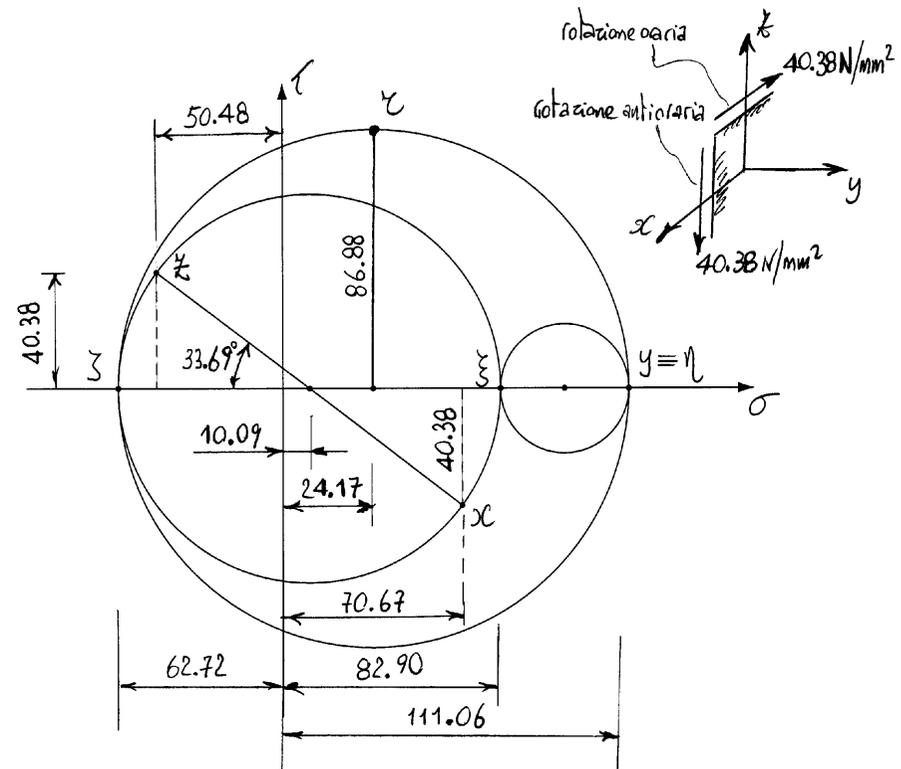
$$\underline{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 70.67 & 0 & -40.38 \\ 0 & 111.06 & 0 \\ -40.38 & 0 & -50.48 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2$$

Direzioni e valori principali di tensione

L'asse y è principale e il valore principale risulta:

$$\sigma_y = 111.06 \text{ N/mm}^2.$$

La circonferenza di Mohr relativa alla direzione principale y contiene i punti rappresentativi degli assi x e z . Considerando z quale primo asse tra i due assi x e z , la faccia positiva del piano zxc è individuata dalla parte positiva di y . Con tale scelta il punto rappresentativo di z ha coordinate $(-50.48 \text{ N/mm}^2, 40.38 \text{ N/mm}^2)$ mentre quello rappresentativo di x ha coordinate $(70.67 \text{ N/mm}^2, -50.48 \text{ N/mm}^2)$.



Centro σ_c e raggio R della circonferenza:

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} = \frac{70.67 - 50.48}{2} \text{ N/mm}^2 = 10.10 \text{ N/mm}^2,$$

$$R = \sqrt{(70.67 - 10.09)^2 + (40.38)^2} \text{ N/mm}^2 = 72.80 \text{ N/mm}^2.$$

Valori principali di tensione:

$$\sigma_{\xi} = \sigma_c + R = 82.90 \text{ N/mm}^2,$$

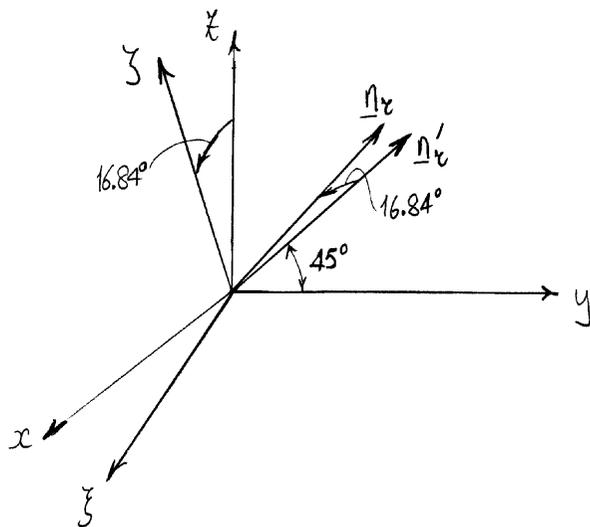
$$\sigma_{\zeta} = \sigma_c - R = -62.71 \text{ N/mm}^2.$$

L'asse principale ξ è individuato ruotando x in senso antiorario di un angolo α tale che:

$$\sin 2\alpha = \frac{|\tau_{xz}|}{R} = \frac{40.38}{72.80},$$

e quindi:

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{40.38}{72.80} \right) = 16.84^\circ.$$



Tensione tangenziale massima

$$\tau_{\max} = \frac{111.06 + 62.72}{2} \text{ N/mm}^2 = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Parti sferica e deviatorica del tensore degli sforzi

$$\text{tr } \underline{\sigma} = (70.67 + 111.06 - 50.48) \text{ N/mm}^2 = 131.25 \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_s = \frac{1}{3} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} \equiv \begin{bmatrix} 43.75 & 0 & 0 \\ 0 & 43.75 & 0 \\ 0 & 0 & 43.75 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2,$$

$$\underline{\sigma}_d = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}_s \equiv \begin{bmatrix} 26.92 & 0 & -40.38 \\ 0 & 67.31 & 0 \\ -40.38 & 0 & -94.23 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifica di resistenza col criterio di Tresca

Tensioni di snervamento e ammissibile:

$$\sigma_s = 300 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_a = \frac{300}{1.6} \text{ N/mm}^2 = 187.5 \text{ N/mm}^2.$$

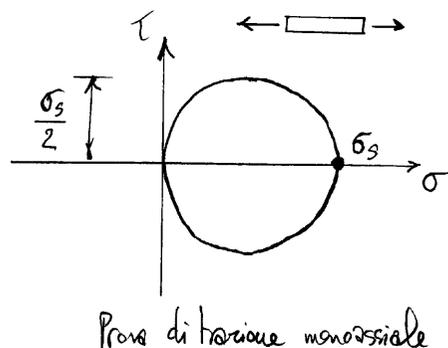
Tensione tangenziale massima ammissibile:

$$\tau_a = \frac{187.5}{2} \text{ N/mm}^2 = 93.75 \text{ N/mm}^2.$$

Poiché:

$$\tau_{\max} < \tau_a$$

la verifica è soddisfatta.



Tensione nella giacitura di normale ζ

Poiché la minima tensione principale è associata all'asse ζ , la retta ζ appartiene al piano $y\zeta$ e il suo punto rappresentativo sta sulla circonferenza esterna individuata da una rotazione antioraria di 90° .

Quindi:

$$\sigma_\zeta = \frac{\sigma_y + \sigma_3}{2} = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_\zeta = \tau_{\max} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Il versore \underline{n}_ζ della direzione ζ si ottiene ruotando di 16.84° attorno all'asse y il versore \underline{n}'_ζ

della bisettrice del primo quadrante del piano $y\zeta$. Il tensor rotazionale vale:

$$\underline{R} \equiv \begin{bmatrix} \cos(16.84^\circ) & 0 & \sin(16.84^\circ) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(16.84^\circ) & 0 & \cos(16.84^\circ) \end{bmatrix},$$

ed inoltre:

$$\underline{n}'_\zeta = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{Bmatrix}.$$

Dunque:

$$\underline{n}_\zeta = \underline{R} \underline{n}'_\zeta = \begin{Bmatrix} 0.2049 \\ 0.7071 \\ 0.6768 \end{Bmatrix},$$

e quindi:

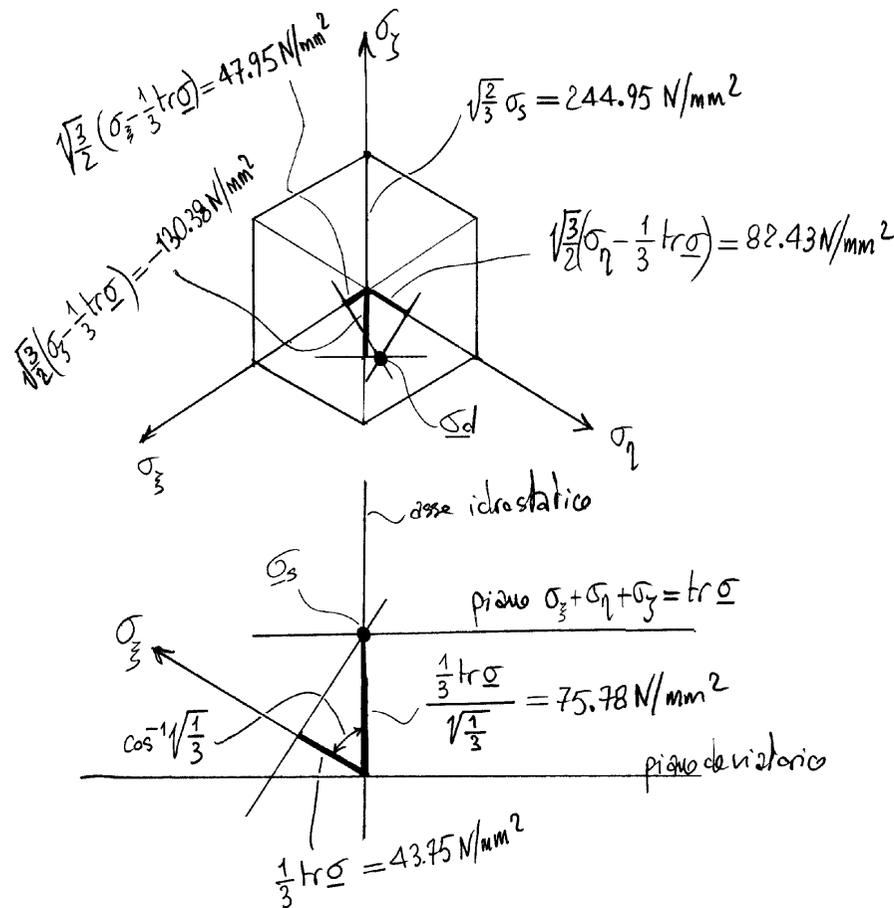
$$\underline{t}_\zeta = \underline{\sigma} \underline{n}_\zeta = \begin{Bmatrix} -12.85 \\ 78.53 \\ -42.44 \end{Bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

Verifichiamo i valori di σ_ζ e di τ_ζ :

$$\sigma_r = \underline{t}_r \cdot \underline{n}_r = 24.17 \text{ N/mm}^2,$$

$$\tau_r = \sqrt{\underline{t}_r \cdot \underline{t}_r - \sigma_r^2} = 86.88 \text{ N/mm}^2.$$

Spazio delle tensioni principali



1.8 Esercizio 8

In un punto P di un corpo continuo le componenti del tensore degli sforzi σ , scritte rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$, sono rappresentate dalla matrice:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 70 & -60 & 0 \\ -60 & 110 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} \text{ N/mm}^2.$$

1. Determinare le direzioni ξ, η, ζ e i valori $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ principali di tensione;
2. Disegnare in scala, precisando le scale, le circonferenze di Mohr, ed individuare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Relativamente alla tensione \underline{t}_r agente su una giacitura di normale la bisettrice r del primo quadrante del piano xy :

(a) Calcolare le componenti t_x^r, t_y^r, t_z^r di \underline{t}_r nel sistema $Oxyz$;

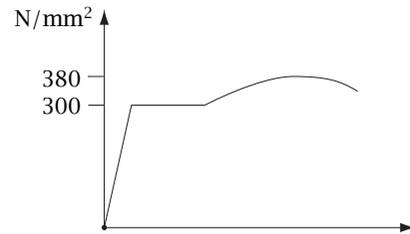
(b) Calcolare la componente normale σ_r e il modulo della componente tangenziale τ_r di \underline{t}_r ed individuarne la posizione nel piano di Mohr;

5. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ ;
6. Calcolare l'energia elastica *distorcente* ψ_d per unità di volume (energia associata alla parte deviatorica), tenendo conto che l'energia elastica per unità di volume associata ad un generico tensore degli sforzi σ vale:

$$\psi = \frac{1}{2E} (\text{tr } \sigma)^2 - \frac{1+\nu}{E} \sigma_{II}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\xi \sigma_\eta + \sigma_\zeta \sigma_\xi + \sigma_\eta \sigma_\zeta,$$

assumendo i valori $E=21000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young e $\nu=0.3$ del modulo di Poisson;

7. Eseguire le verifiche di resistenza con i criteri di Tresca e di Huber-von Mises, supponendo che il materiale sia acciaio per carpenteria metallica, che il diagramma riportato sotto rappresenti il risultato di una prova di trazione semplice per tale materiale e infine assumendo un coefficiente di sicurezza $\gamma = 1.6$;



8. Relativamente allo spazio delle tensioni principali:

- Disegnare e quotare l'intersezione delle superfici di snervamento di Tresca e di Huber-von Mises con il piano deviatorico;
- Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
- Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

1.9 Esercizio 9

Dato il seguente campo di spostamenti:

$$\begin{cases} u = kx^2 + 2kyz \\ v = -2kxy + 2kz^2 \\ w = kx^2 \end{cases},$$

- Determinare le componenti dei tensori ϵ di deformazione e ω di rotazione;
- Specializzare ϵ e ω nel punto $(10 \text{ cm}, 10 \text{ cm}, 10 \text{ cm})$, assumendo $k = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$;
- Determinare l'asse e l'entità della rotazione rigida locale.
- Determinare le direzioni ξ, η, ζ e le dilatazioni $\epsilon_\xi, \epsilon_\eta, \epsilon_\zeta$ principali;
- Disegnare in scala le circonferenze di Mohr;
- Indicare le posizioni dei punti rappresentativi degli assi coordinati sul piano di Mohr;
- Determinare la dilatazione cubica θ ;
- Determinare lo scorrimento massimo γ_{\max} .

Inoltre, nell'ipotesi di elasticità lineare ed isotropa, tenendo conto che:

$$\sigma = 2G \left[\epsilon + \frac{\nu}{1 - 2\nu} (\text{tr } \epsilon) I \right], \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)},$$

ed assumendo :

$$E = 210 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3,$$

- Determinare le componenti del tensore degli sforzi;
- Determinare le tensioni $\sigma_\xi, \sigma_\eta, \sigma_\zeta$ principali, tenendo conto che le direzioni principali di tensione e di deformazione nel caso di elasticità isotropa coincidono;

3. Determinare la tensione tangenziale massima τ_{\max} ;
4. Determinare la parte sferica σ_s e la parte deviatorica σ_d di σ .

Infine, relativamente allo spazio delle tensioni principali:

1. Determinare il punto sull'asse idrostatico corrispondente alla parte sferica σ_s di σ ;
2. Determinare il punto sul piano deviatorico corrispondente alla parte deviatorica σ_d di σ .

$$\text{grad } \underline{u} \equiv \kappa \begin{bmatrix} 2x & 2z & 2y \\ -2y & -2x & 4z \\ 2x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\varepsilon} \equiv \kappa \begin{bmatrix} 2x & z-y & y+z \\ z-y & -2x & 2z \\ y+x & 2z & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\omega} \equiv \kappa \begin{bmatrix} 0 & z+y & y-x \\ -(z+y) & 0 & 2z \\ -y+x & -2z & 0 \end{bmatrix}$$

$$x=y=z$$

$$\underline{\varepsilon} \equiv 2\kappa z \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\omega} = 2\kappa z \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x=y=z = 10 \text{ cm} \quad \kappa = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$$

$$\underline{\varepsilon} = 2 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{\omega} = 2 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\psi} \equiv \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \quad \psi = 2\sqrt{2} \times 10^{-4} = 2.83 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

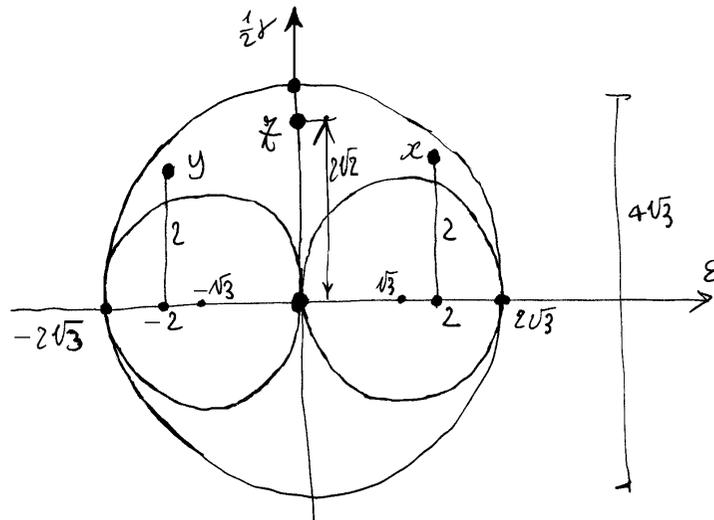
$$\text{tr } \underline{\underline{\varepsilon}} = 0$$

$$\varepsilon_{II} = (-4 - 4 - 4) \times 10^{-8} = -12 \times 10^{-8}$$

$$\det \underline{\underline{\varepsilon}} \equiv 2 \times (-4) + 2(4) = 0$$

$$\lambda^3 - (12 \times 10^{-8})\lambda = 0 \Rightarrow \varepsilon_{III} = 0$$

$$\varepsilon_{1,3} = \begin{cases} 2\sqrt{3} \times 10^{-4} = 3.46 \times 10^{-4} \\ -2\sqrt{3} \times 10^{-4} = -3.46 \times 10^{-4} \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \xi_y = \xi_z \\ \xi_x = \xi_z \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{e}}_3 = \begin{Bmatrix} +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2(1-\sqrt{3}) & 0 & 2 \\ 0 & -2(1+\sqrt{3}) & 2 \\ 2 & 2 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_x \\ \eta_y \\ \eta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \eta_x = +\frac{1}{\sqrt{3}-1} \eta_z \\ \eta_y = \frac{1}{1+\sqrt{3}} \eta_z \end{matrix}$$

$$\left\{ \frac{1}{(1-\sqrt{3})^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{3})^2} + 1 \right\} \eta_z^2 = 1$$

$$\eta_z = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^2}{(1+\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2(1+\sqrt{3})^2}} = \sqrt{\frac{4}{12}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

$$\underline{\underline{e}}_1 = \begin{Bmatrix} +\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \\ +\frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm 0.7887 \\ \pm 0.2113 \\ \pm 0.5774 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2(\sqrt{3}+1) & 0 & 2 \\ 0 & 2(\sqrt{3}-1) & 2 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \zeta_x \\ \zeta_y \\ \zeta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

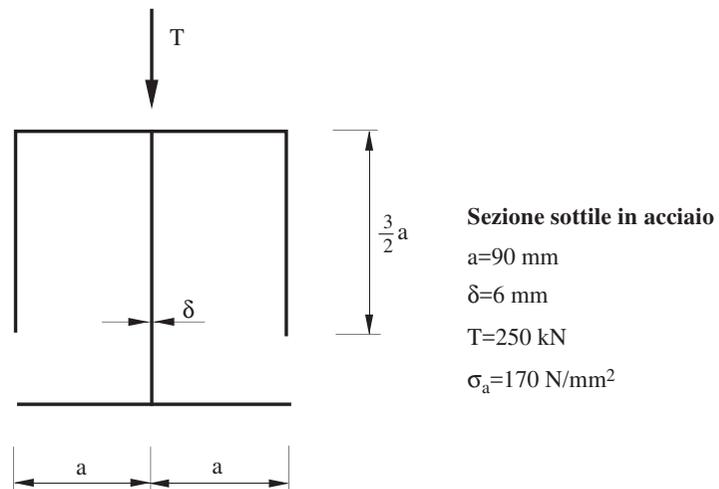
$$\zeta_x = -\frac{1}{\sqrt{3}+1} \zeta_z \quad \zeta_y = -\frac{1}{\sqrt{3}-1} \zeta_z$$

$$\left\{ \frac{1}{(\sqrt{3}+1)^2} + \frac{1}{(\sqrt{3}-1)^2} + 1 \right\} \zeta_z = 1 \Rightarrow \zeta_z = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

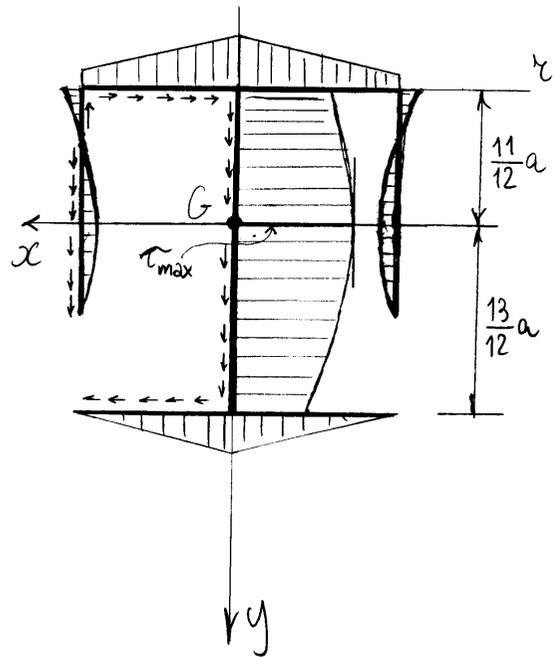
$$\underline{e}_y = \begin{Bmatrix} \mp \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)} \\ \mp \frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} \\ \pm \sqrt{\frac{1}{3}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mp 0.2113 \\ \mp 0.7887 \\ \pm 0.5774 \end{Bmatrix}$$

ESERCIZI SULLE SOLLECITAZIONI SEMPLICI

2.1 Esercizio 10



- Disegnare il diagramma delle tensioni tangenziali
- Eseguire la verifica nel punto maggiormente sollecitato



$$S_z = \frac{33}{4} \delta a^2$$

$$A = 9 \delta a$$

$$J_x = 5.3542 \delta a^3$$

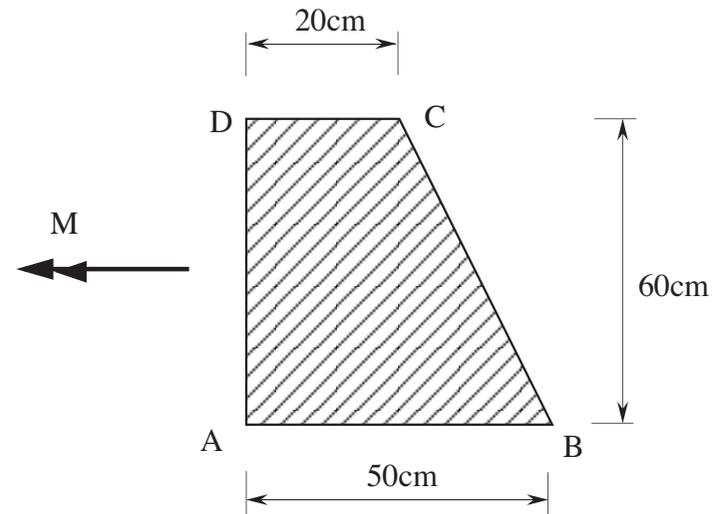
$$S_{x_{max}}^* = 2.7535 \delta a^2$$

$$\tau_{max} = \frac{T S_{x_{max}}^*}{J_x \delta} = 0.5143 \frac{T}{\delta a} = 4.6284 \frac{T}{A}$$

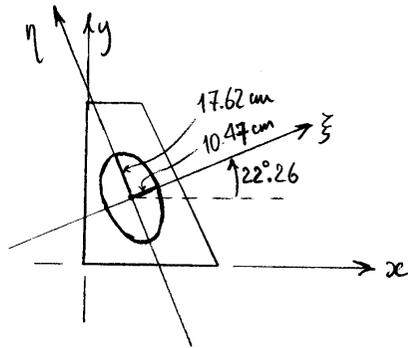
$$\tau_{max} = 0.5143 \frac{2.5 \times 10^5}{6 \times 90} = 95.24 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{max} = 165 \text{ N/mm}^2$$

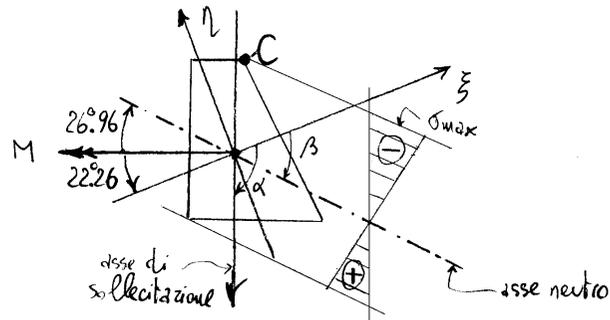
2.2 Esercizio 11



- 1) Determinare il riferimento principale baricentrico
- 2) Determinare l'asse neutro della flessione
- 3) Disegnare il diagramma delle tensioni normali, individuare il punto dove la tensione normale è massima in modulo ed infine scrivere la formula che determina la massima tensione normale



$$\begin{aligned}
 A &= 2100 \text{ cm}^2 \\
 S_x &= 54000 \text{ cm}^3 \\
 S_y &= 39000 \text{ cm}^3 \\
 \left\{ \begin{aligned} x_G &= 18.57 \text{ cm} \\ y_G &= 25.71 \text{ cm} \end{aligned} \right. \\
 \left\{ \begin{aligned} J_{\xi} &= 651948 \text{ cm}^4 \\ J_{\eta} &= 230194 \text{ cm}^4 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

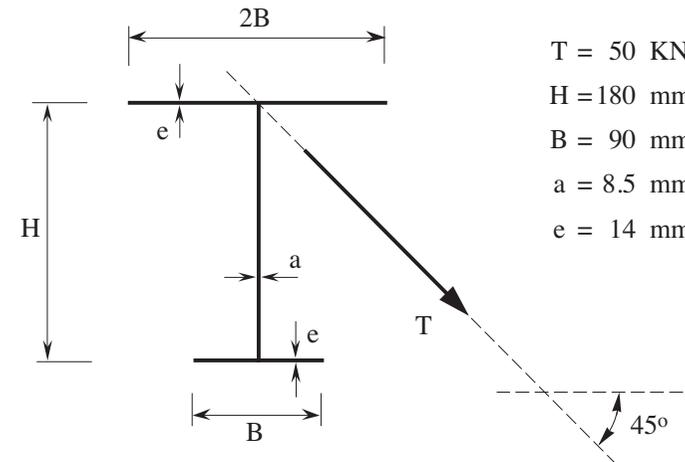


C è il punto più sollecitato (compressione):

$$\sigma_c = -\frac{M \cos(22.26)}{J_{\xi}} \eta_c - \frac{M \sin(22.26)}{J_{\eta}} \xi_c$$

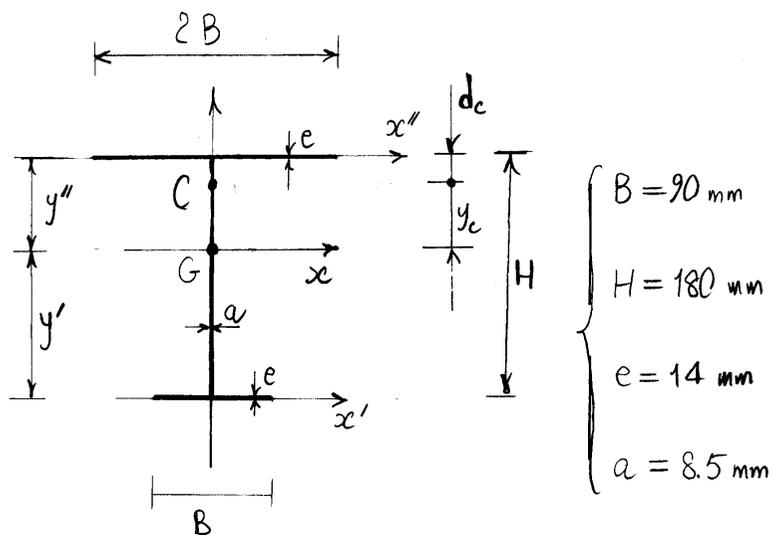
$$\alpha = -112.26 \implies \beta = \tan^{-1} \left\{ -\frac{J_{\xi}}{J_{\eta} \tan \alpha} \right\} = -49.22$$

2.3 Esercizio 12



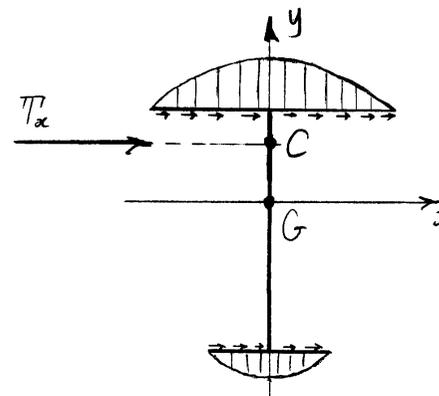
$T = 50 \text{ KN}$
 $H = 180 \text{ mm}$
 $B = 90 \text{ mm}$
 $a = 8.5 \text{ mm}$
 $e = 14 \text{ mm}$

- 1) Determinare la posizione del centro di taglio, facendo uso della soluzione di Jourawski;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 3) Verificare la sezione nel caso il profilato sia realizzato con acciaio tipo Fe360, e determinare la forza tangenziale massima compatibile con la resistenza;
- 4) Impostare il problema della determinazione del centro di taglio utilizzando la funzione di ingobbamento.

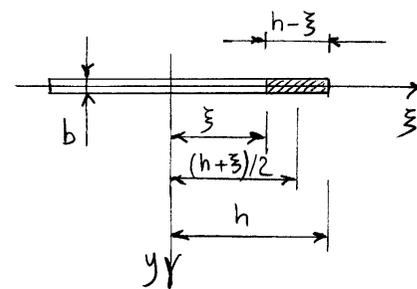


Centro di taglio

Il centro di taglio si trova sull'asse y .



$$\tau = \frac{T_x S^*}{b J_y}$$



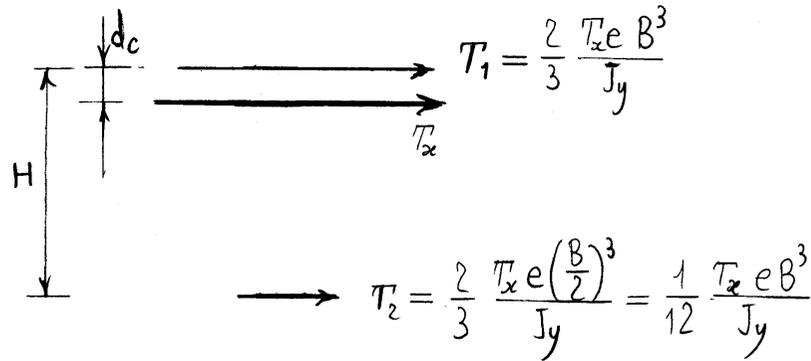
$$\begin{aligned} S_y^*(\xi) &= b(h-\xi) \frac{h+\xi}{2} \\ &= \frac{b}{2} (h^2 - \xi^2) \end{aligned}$$

$$\tau(\xi) = \frac{T_x S_y^*(\xi)}{b J_y} = \frac{T_x}{2 J_y} (h^2 - \xi^2)$$

$$2 \int_0^h \tau(\xi) b d\xi = \frac{T_x}{J_y} \left[h^2 \xi - \frac{\xi^3}{3} \right]_0^h = \frac{2}{3} \frac{T_x b h^3}{J_y}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{x'} = 2eBH + a \frac{H^2}{2} = 591300 \text{ mm}^3 \\ A = 3eB + aH = 5310 \text{ mm}^2 \\ y' = 111.36 \text{ mm}, \quad y'' = H - y' = 68.64 \text{ mm} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} J_x = 2eB y''^2 + eB y''^2 + \frac{aH^3}{12} + aH \left(y' - \frac{H}{2} \right)^2 = 3.23272 \times 10^7 \text{ mm}^4 \\ J_y = \frac{eB^3}{12} + \frac{8eB^3}{12} = \frac{3}{4} eB^3 = 7.6545 \times 10^6 \text{ mm}^4 \\ J_t = \frac{1}{3} (2Be^3 + Be^3 + Ha^3) = Be^3 + \frac{1}{3} Ha^3 = 2.838 \times 10^5 \text{ mm}^4 \end{array} \right.$$



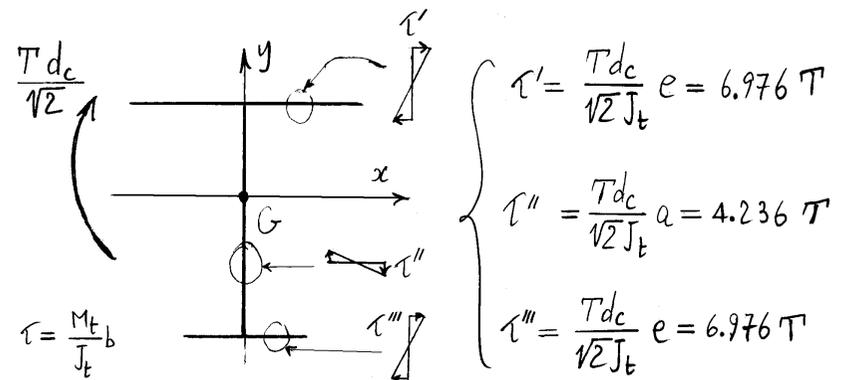
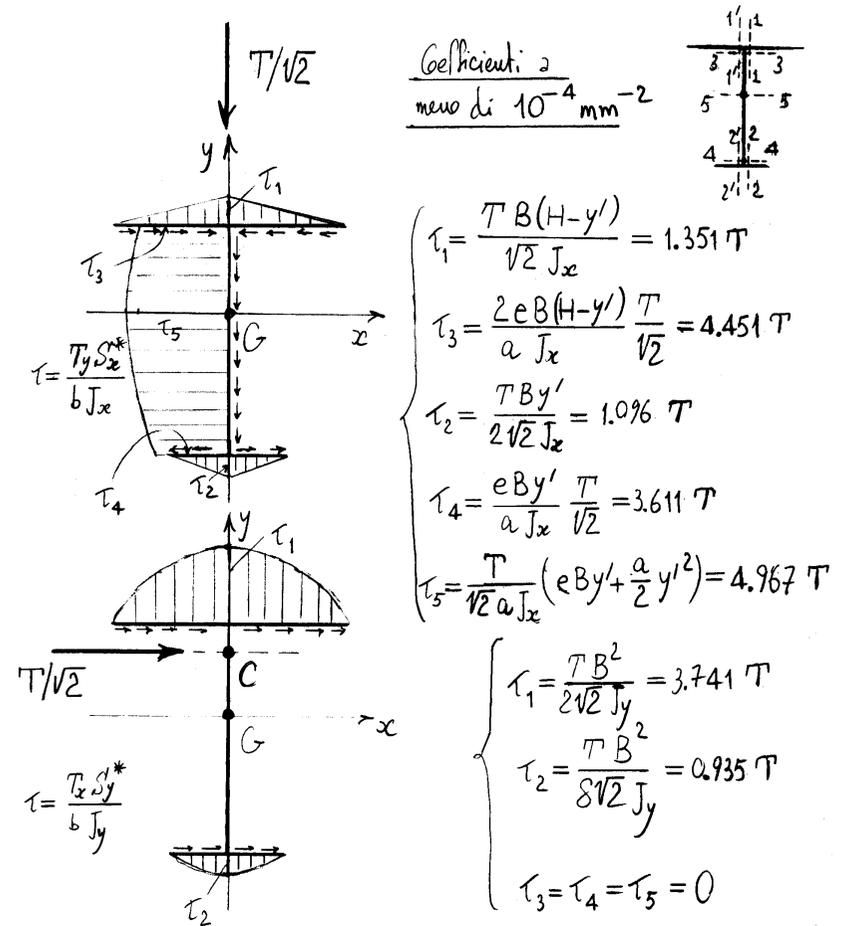
$$T_1 + T_2 = \frac{9}{12} e B^3 \frac{1}{J_y} T_x = T_x$$

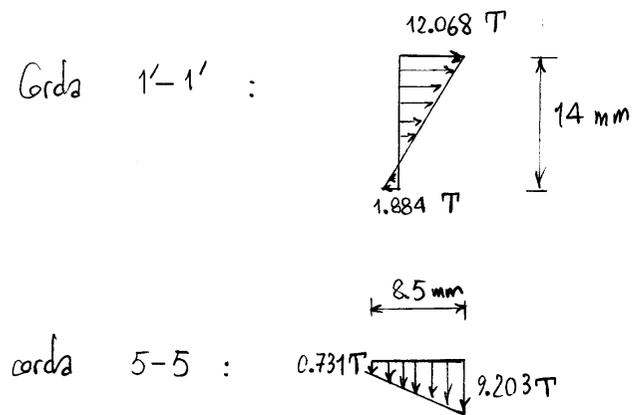
$$T_1 d_c = T_2 (H - d_c) \Rightarrow 8 d_c = H - d_c$$

$$\begin{cases} d_c = \frac{1}{9} H = 20 \text{ mm} \\ y_c = y'' - d_c = 48.64 \text{ mm} \end{cases}$$

Le caratteristiche della sollecitazione relative al centro di taglio risultano dunque:

$$\begin{cases} T_x = T/\sqrt{2} = 35355 \text{ N}, & T_y = -T/\sqrt{2} = -35355 \text{ N} \\ M_c = -T d_c / \sqrt{2} = -707106 \text{ N mm} \end{cases}$$





$$\tau_{max} = 12.068 \times 10^{-4} \times 5 \times 10^4 = 60.34 \text{ N/mm}^2$$

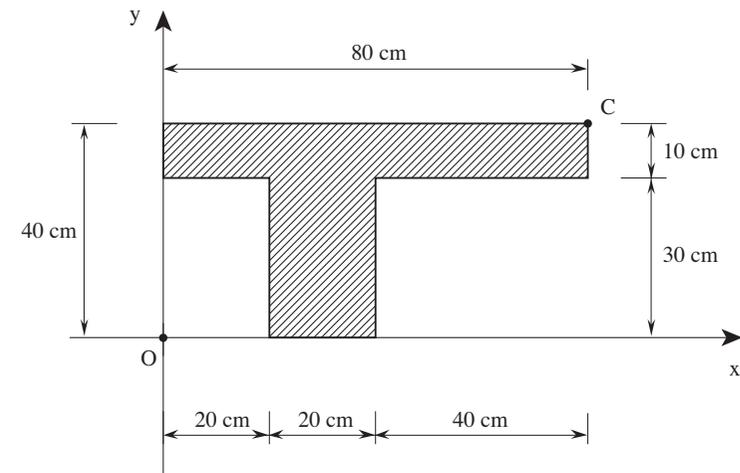
$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_{max} = 105 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{am} = 160 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow \text{verifica soddisfatta}$$

$$12.068 \times 10^{-4} \times \sqrt{3} \tau_{max} = 160$$

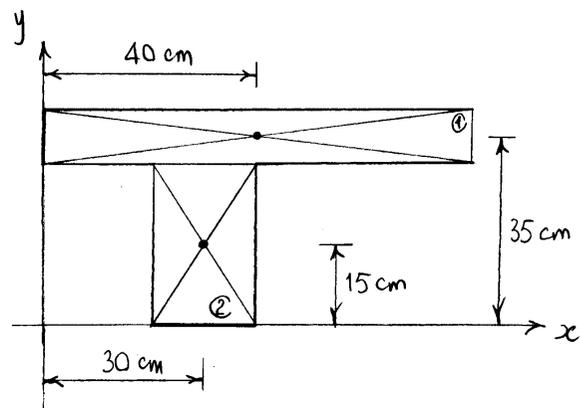
$$\tau_{max} = 76546 \text{ N} \quad \text{oppure} \quad \tau_{max} = 76 \text{ kN}$$

2.4 Esercizio 13



La sezione in figura è soggetta ad uno sforzo normale di compressione di 150 kN, applicato in corrispondenza del punto C.

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_{ξ} e J_{η});
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Oxy e in quello $G\xi\eta$);
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
- 6) Verificare la sezione, supponendo una resistenza di 10 kN/mm² a compressione e di 5 kN/mm² a trazione.



$$A^{\textcircled{1}} = 40 \times 35 = 1400 \text{ cm}^2$$

$$A^{\textcircled{2}} = 30 \times 15 = 450 \text{ cm}^2$$

$$A = 1850 \text{ cm}^2$$

$$S_x^{\textcircled{1}} = A^{\textcircled{1}} \times 17.5 = 24500 \text{ cm}^3$$

$$S_x^{\textcircled{2}} = A^{\textcircled{2}} \times 7.5 = 3375 \text{ cm}^3$$

$$S_x = 27875 \text{ cm}^3$$

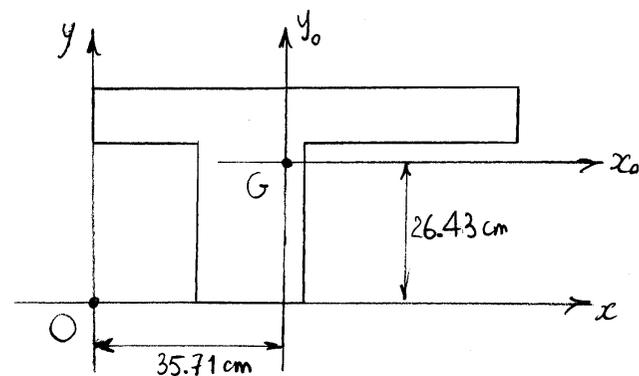
$$S_y^{\textcircled{1}} = A^{\textcircled{1}} \times 20 = 28000 \text{ cm}^3$$

$$S_y^{\textcircled{2}} = A^{\textcircled{2}} \times 15 = 6750 \text{ cm}^3$$

$$S_y = 34750 \text{ cm}^3$$

$$y_G = \frac{S_x}{A} = 15.07 \text{ cm}$$

$$x_G = \frac{S_y}{A} = 18.78 \text{ cm}$$



$$J_{x_0}^{\textcircled{1}} = \frac{40 \times 35^3}{12} + A^{\textcircled{1}} (35 - y_G)^2 = 65442 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0}^{\textcircled{2}} = \frac{30 \times 15^3}{12} + A^{\textcircled{2}} (15 - y_G)^2 = 123367 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0} = 188810 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0}^{\textcircled{1}} = \frac{40 \times 35^3}{12} + A^{\textcircled{1}} (40 - x_G)^2 = 441361 \text{ cm}^4$$

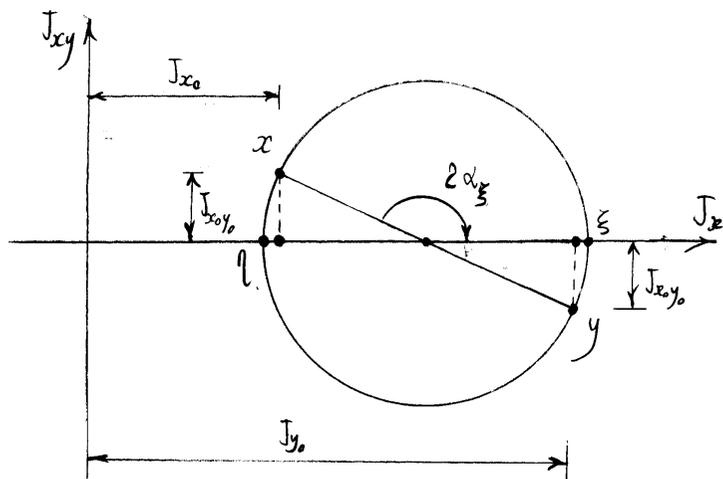
$$J_{y_0}^{\textcircled{2}} = \frac{30 \times 15^3}{12} + A^{\textcircled{2}} (30 - x_G)^2 = 39592 \text{ cm}^4$$

$$J_{y_0} = 480952 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{\textcircled{1}} = A^{\textcircled{1}} (35 - y_G)(40 - x_G) = 29388 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0}^{\textcircled{2}} = A^{\textcircled{2}} (15 - y_G)(30 - x_G) = 39184 \text{ cm}^4$$

$$J_{x_0 y_0} = 68571 \text{ cm}^4$$

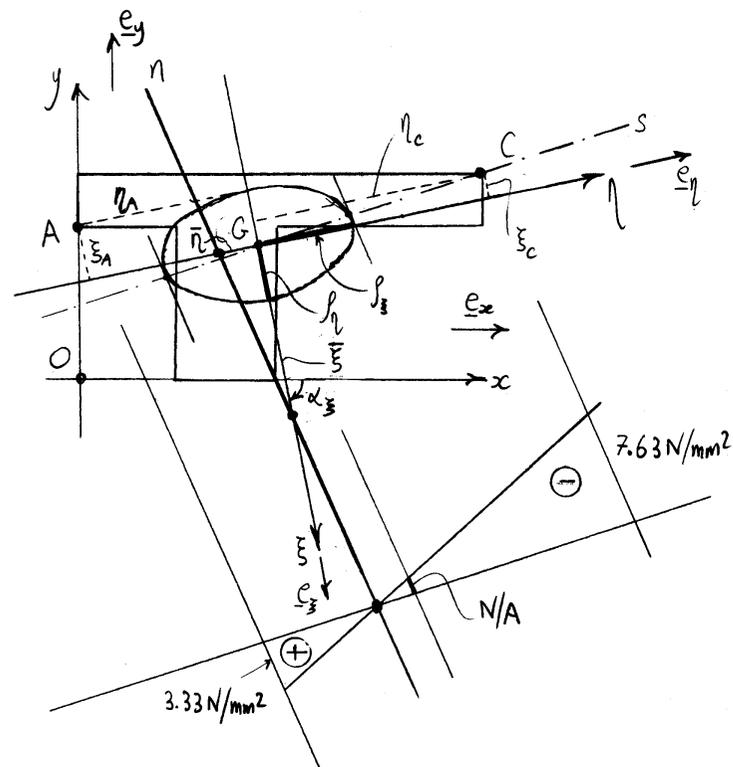


$$\left. \begin{matrix} J_{\xi} \\ J_{\eta} \end{matrix} \right\} = \frac{J_{x_0} + J_{y_0}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_0} - J_{y_0})^2 + 4J_{x_0 y_0}^2}$$

$$= \begin{cases} 496247 \text{ cm}^4 \\ 173515 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} l_{\xi} = \sqrt{J_{\xi}/A} = 18.83 \text{ cm} \\ l_{\eta} = \sqrt{J_{\eta}/A} = 11.13 \text{ cm} \end{matrix} \right.$$

$$\alpha_{\xi} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{J_{x_0} - J_{\xi}}{J_{x_0 y_0}} \right\} = -77.43$$



Coordinate del punto C nel sistema $G\xi\eta$:

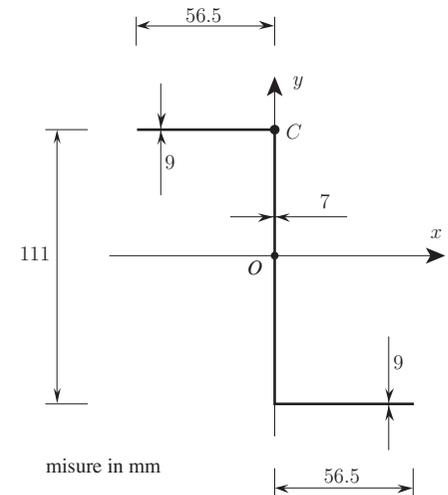
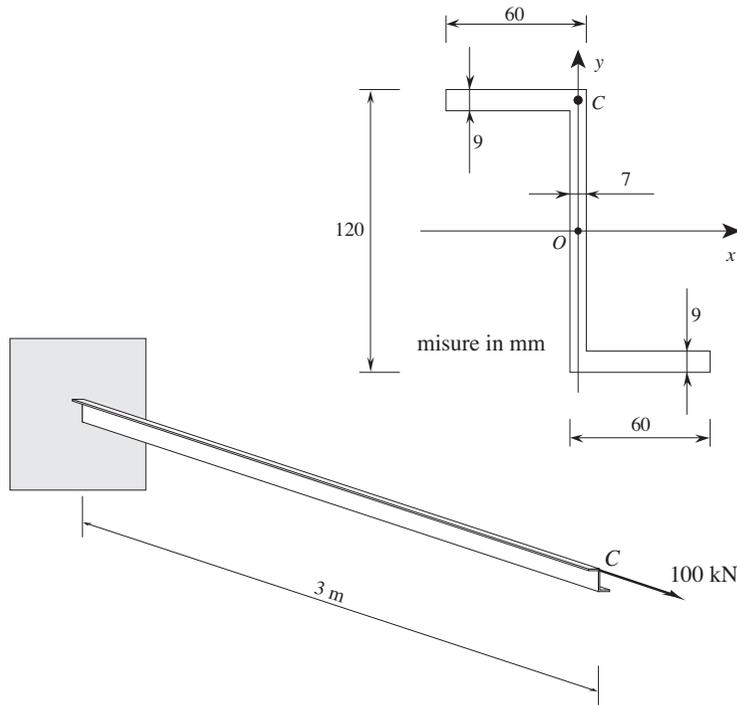
$$\xi_c = (C-G) \cdot \underline{e}_{\xi} = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_{\xi}$$

$$= (x_c - x_G) \cos \alpha_{\xi} + (y_c - y_G) \sin \alpha_{\xi} = -3.61 \text{ cm}$$

$$\eta_c = (C-G) \cdot \underline{e}_{\eta} = \{(x_c - x_G) \underline{e}_x + (y_c - y_G) \underline{e}_y\} \cdot \underline{e}_{\eta}$$

$$= -(x_c - x_G) \sin \alpha_{\xi} + (y_c - y_G) \cos \alpha_{\xi} = 46.18 \text{ cm}$$

2.5 Esercizio 14



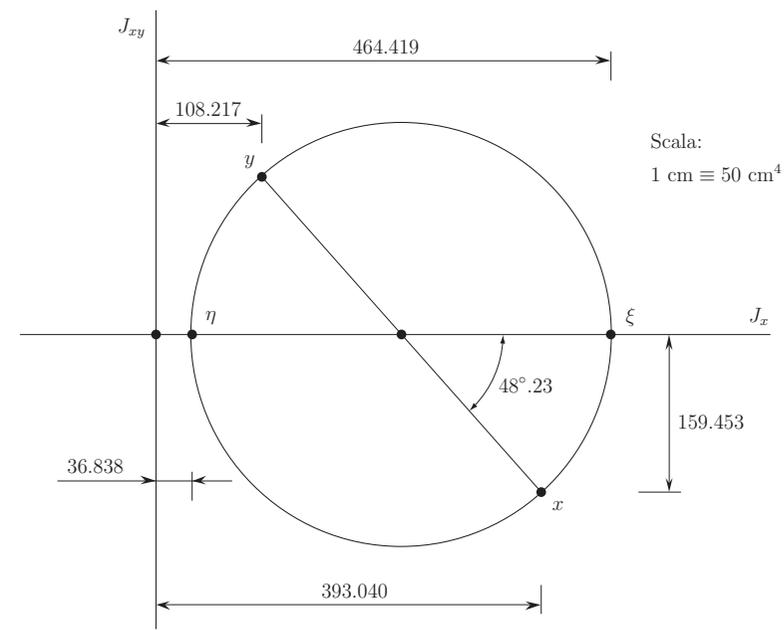
$$A = 17.94 \text{ cm}^2$$

$$\begin{cases} J_x = 393.040 \text{ cm}^4 \\ J_y = 108.217 \text{ cm}^4 \\ J_{xy} = -159.453 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 464.419 \text{ cm}^4 \\ J_\eta = 36.838 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_\xi = 50.88 \text{ mm} \\ \rho_\eta = 14.33 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha_\xi = 48^\circ.23 \\ \alpha_\xi = 24^\circ.12 \end{cases}$$

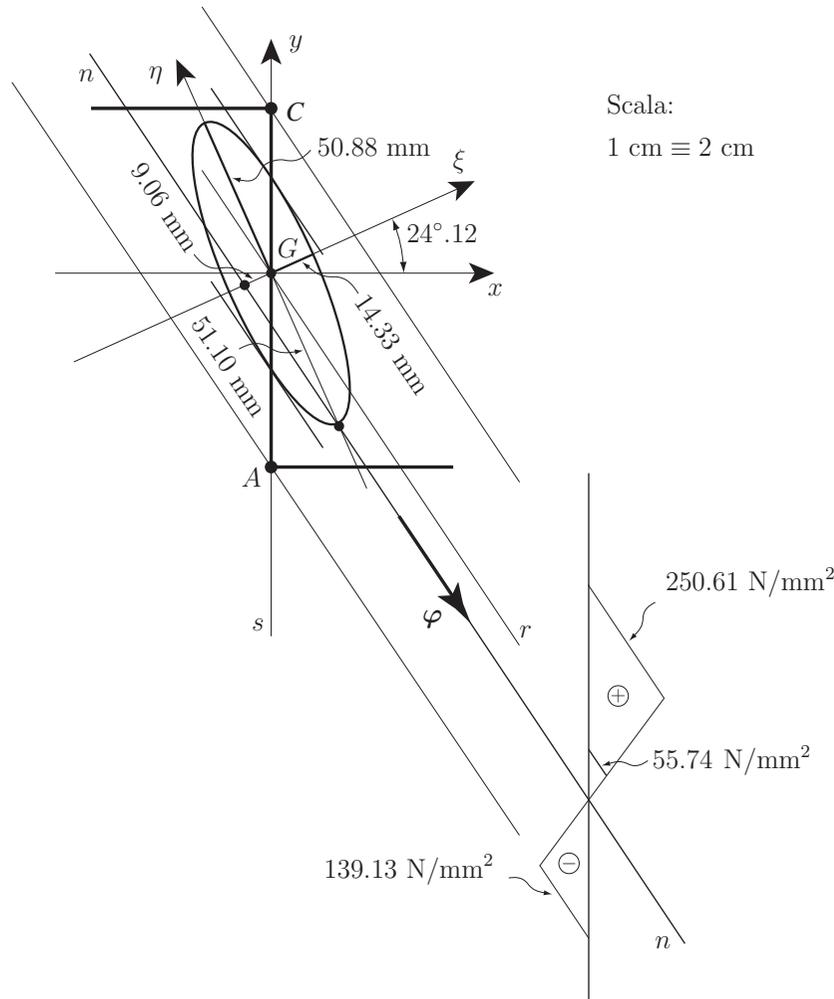


La sezione sottile di figura è soggetta ad uno sforzo normale di trazione di 100 kN, applicato in corrispondenza del punto C:

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
- 2) Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
- 3) Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione;

Data una mensola avente la sezione di figura e caricata all'estremità da una forza normale di trazione ancora di 100 kN ed applicata nel punto C:

- 4) Calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della mensola, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=210\,000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.



Scala:
1 cm ≡ 2 cm

Versori principali:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_\xi = (\cos \alpha_\xi) \mathbf{e}_x + (\sin \alpha_\xi) \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_\eta = -(\sin \alpha_\xi) \mathbf{e}_x + (\cos \alpha_\xi) \mathbf{e}_y \end{cases} \quad (\cos \alpha_\xi = 0.9127, \sin \alpha_\xi = 0.4086)$$

Coordinate del centro di trazione C:

$$\begin{cases} x_C = 0 \\ y_C = 55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_C = y_C \sin \alpha_\xi = 22.68 \text{ mm} \\ \eta_C = y_C \cos \alpha_\xi = 50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Coordinate del punto A:

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = -55.5 \text{ mm} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \xi_A = y_A \sin \alpha_\xi = -22.68 \text{ mm} \\ \eta_A = y_A \cos \alpha_\xi = -50.66 \text{ mm} \end{cases}$$

Intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = -\rho_\eta^2 / \xi_C = -9.06 \text{ mm} \\ \bar{\eta} = -\rho_\xi^2 / \eta_C = -51.10 \text{ mm} \end{cases}$$

Inclinazione dell'asse neutro (angolo minore di 90°):

$$\widehat{\xi n} = \tan^{-1} \frac{\bar{\eta}}{\bar{\xi}} = 79.95 \Rightarrow \begin{cases} \widehat{x n} = 55.84 \\ \widehat{y n} = 34.16 \end{cases}$$

Momento di inerzia rispetto all'asse r baricentrico e parallelo all'asse neutro (distanze valutate nella direzione dell'asse di sollecitazione y):

$$J_r = \frac{J_\xi \cos^2 \widehat{\xi n} + J_\eta \sin^2 \widehat{\xi n}}{\sin^2 \widehat{y n}} = 158.094 \text{ cm}^4$$

Momento flettente:

$$\mathbf{M} = N y_C \mathbf{e}_x = (5550.0 \text{ Nm}) \mathbf{e}_x \Rightarrow \begin{cases} M_\xi = N \eta_C = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = -N \xi_C = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

oppure:

$$\begin{cases} M_\xi = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\xi = N y_C \cos \alpha_\xi = 5065.6 \text{ Nm} \\ M_\eta = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_\eta = -N y_C \sin \alpha_\xi = -2267.6 \text{ Nm} \end{cases}$$

Massima tensione normale di trazione (punto C):

$$\begin{aligned} \sigma_C &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_n} y_C = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_C - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_C \\ &= (55.74 + 55.26 + 139.61) \text{ N/mm}^2 = 250.61 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Massima tensione normale di compressione (punto A):

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{N}{A} + \frac{|\mathbf{M}|}{J_n} y_A = \frac{N}{A} + \frac{M_\xi}{J_\xi} \eta_A - \frac{M_\eta}{J_\eta} \xi_A \\ &= (55.74 - 55.26 - 139.61) \text{ N/mm}^2 = -139.13 \text{ N/mm}^2 \end{aligned}$$

Energia elastica di deformazione:

$$L_d = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{|\mathbf{M}|^2}{EJ_n} \right) \ell = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{EA} + \frac{M_\xi^2}{EJ_\xi} + \frac{M_\eta^2}{EJ_\eta} \right) \ell$$

$$= \frac{1}{2} (26.54 + 26.31 + 66.47) \text{N} \times 3.00 \text{ m} = 178.98 \text{ J}$$

Spostamento orizzontale w_C del punto C (teorema di Clapeyron):

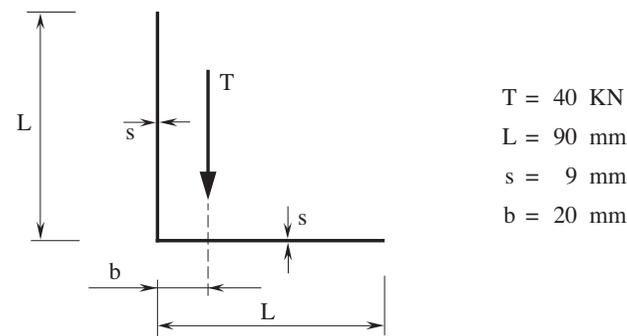
$$L_d = \frac{1}{2} N w_C \Rightarrow w_C = 0.0036 \text{ m} = 3.6 \text{ mm}$$

Rotazione φ della sezione di estremità (attorno all'asse neutro):

$$|\varphi| = \frac{|\mathbf{M}| \ell}{EJ_n \cos \widehat{x\hat{n}}} = \sqrt{\left(\frac{M_\xi \ell}{EJ_\xi} \right)^2 + \left(\frac{M_\eta \ell}{EJ_\eta} \right)^2}$$

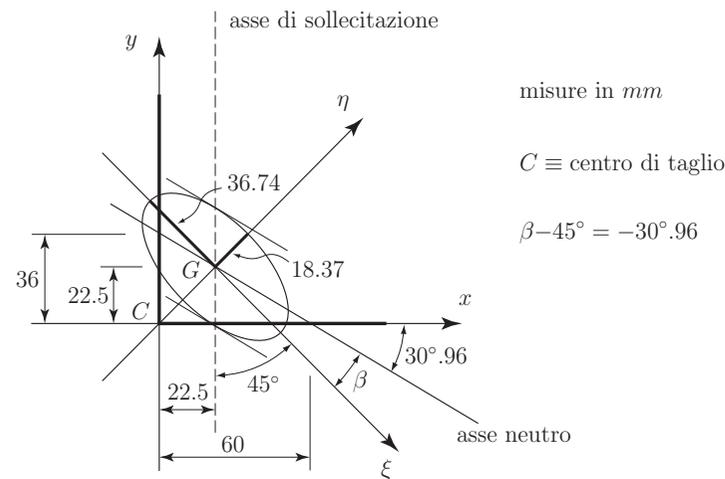
$$= \sqrt{(0.0156)^2 + (0.0879)^2} \text{ rad} = 0.089 \text{ rad} = 5^\circ.12$$

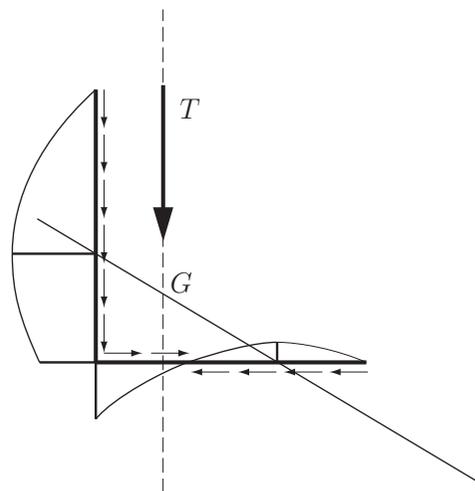
2.6 Esercizio 15



Data la sezione sottile a L, a lati uguali, di figura:

- 1) Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
- 2) Disegnare l'ellisse centrale di inerzia e determinare l'asse neutro della flessione associata a T;
- 3) Utilizzando l'asse neutro della flessione associata a T, disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio passante per il centro di taglio.





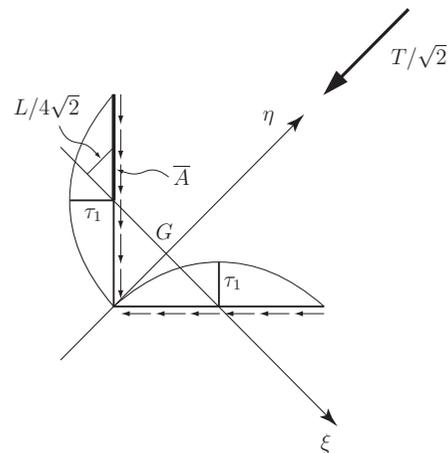
$$\begin{cases} x_G = 22.5 \text{ mm} \\ y_G = 22.5 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_\xi = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{sL^3}{12} \right) = 546\,750 \text{ mm}^4 \\ J_\eta = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{sL^3}{3} \right) = 2\,187\,000 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

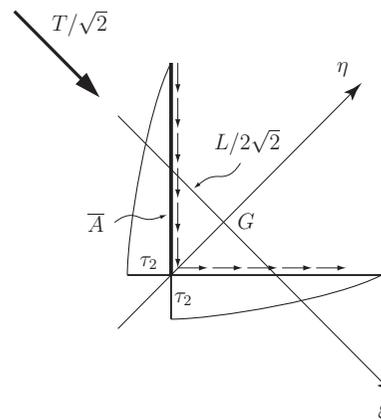
$$\begin{aligned} \tan(\beta) \tan(-\pi/4) &= -J_\xi/J_\eta = -1/4 \\ \Rightarrow \beta &= 14^\circ.04 \Rightarrow \beta - 45^\circ = -30^\circ.96 \end{aligned}$$

Intersezioni dell'asse neutro con l'asse x e con l'asse y :

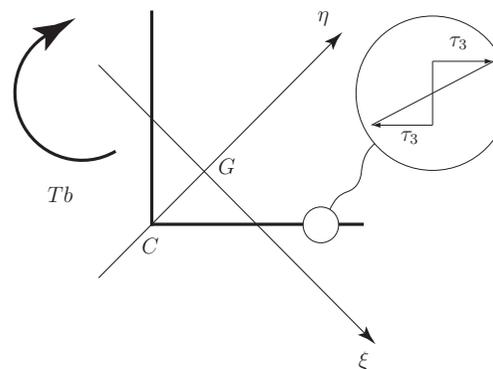
$$\begin{cases} \bar{x} = x_G + y_G \tan(\pi/4 + \beta) = 60 \text{ mm} \\ \bar{y} = y_G + x_G \tan(\pi/4 - \beta) = 36 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\begin{cases} \overline{S_\xi^1} = s \frac{L}{2} \frac{L}{4\sqrt{2}} = 6\,443.5 \text{ mm}^3 \\ \tau_1 = \frac{T \overline{S_\xi^1}}{\sqrt{2} J_\xi s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

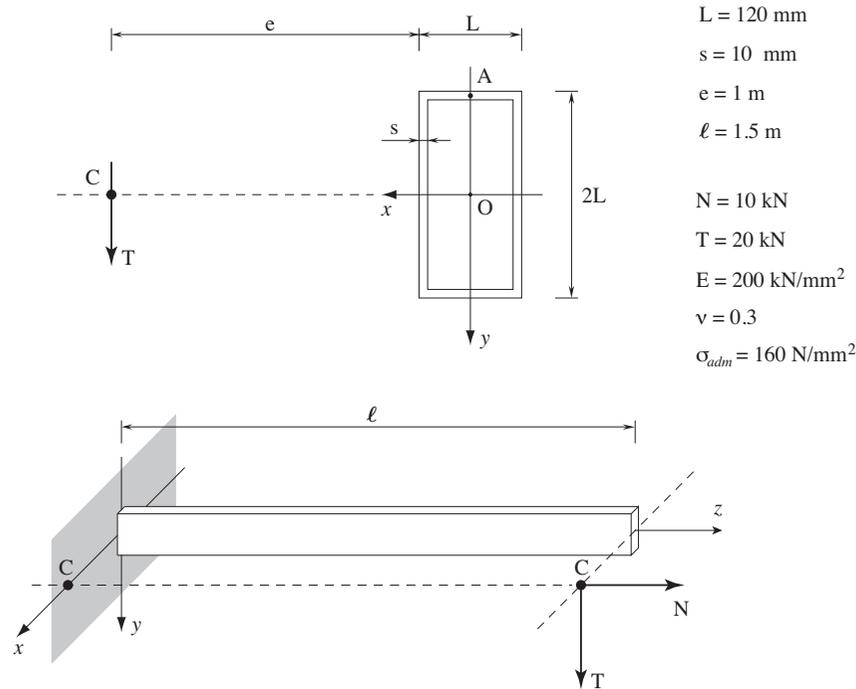


$$\begin{cases} \overline{S_\eta^2} = sL \frac{L}{2\sqrt{2}} = 25\,774 \text{ mm}^3 \\ \tau_2 = \frac{T \overline{S_\eta^2}}{\sqrt{2} J_\eta s} = 37.04 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

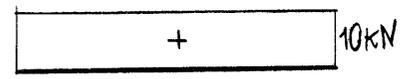


$$\begin{cases} J_t = \frac{2}{3} Ls^3 = 43\,740 \text{ mm}^4 \\ \tau_3 = \frac{Tb}{J_t} s = 164.61 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

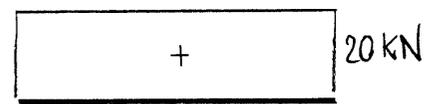
2.7 Esercizio 16



Caratteristiche della sollecitazione



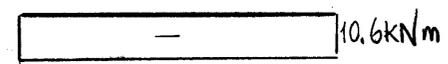
N



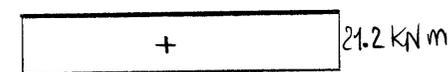
$T_y = T$



$M_x = -T(\ell - z)$



$M_y = -N(e + \frac{L}{2})$



$M_t = T(e + \frac{L}{2})$

Una mensola di sezione rettangolare sottile chiusa è soggetta, nella sezione di estremità, ad un taglio T verticale e ad uno sforzo normale N di trazione applicati in corrispondenza del punto C :

- 1) Disegnare i diagrammi quotati delle caratteristiche della sollecitazione;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali relativi alla sezione di incastro della mensola;
- 3) Eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Huber-von Mises;
- 4) Determinare, nel punto A della sezione di incastro, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr e le direzioni e componenti principali di sforzo;
- 4) Calcolare, trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola, lo spostamento del baricentro e la rotazione della sezione di estremità della mensola;
- 5) Calcolare l'energia elastica di deformazione, sempre trascurando la deformabilità assiale e tagliante della mensola.

Caratteristiche inerziali della sezione

$$s = 10 \text{ mm}$$

$$L - s = 110 \text{ mm}$$

$$2L - s = 230 \text{ mm}$$

$$A = 2 \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} s = 6800 \text{ mm}^2$$

$$J_{xz} = 2 \left\{ \frac{s}{12} (2L-s)^3 + s(L-s) \left(\frac{2L-s}{2} \right)^2 \right\}$$

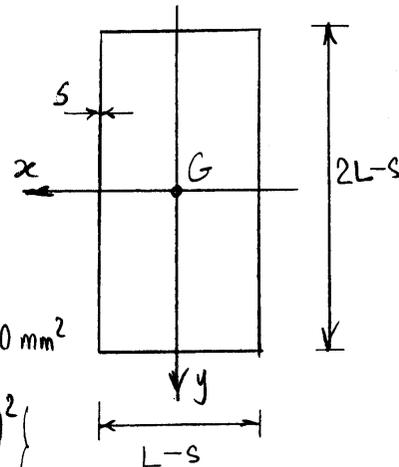
$$= 4.9373 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

$$J_{yz} = 2 \left\{ \frac{s}{12} (L-s)^3 + s(2L-s) \left(\frac{L-s}{2} \right)^2 \right\} = 1.6133 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

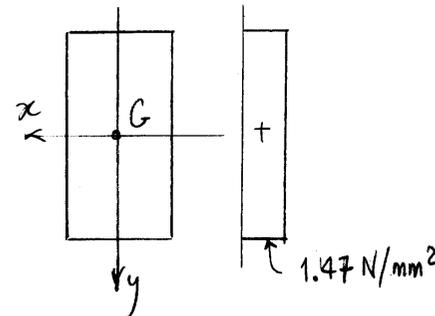
$$\Omega = (L-s)(2L-s) = 25300 \text{ mm}^2$$

$$\oint \frac{ds}{b} = \frac{1}{s} \oint ds = \frac{2}{s} \left\{ (L-s) + (2L-s) \right\} = 68$$

$$J_t = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b}} = 3.7652 \times 10^7 \text{ mm}^4$$

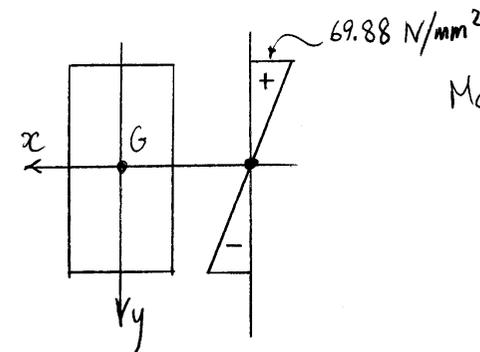


Diagrammi delle tensioni



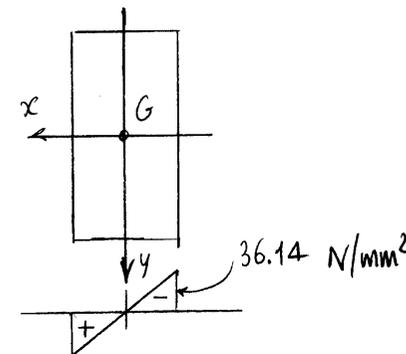
Sforzo normale:

$$\sigma_x = \frac{N}{A}$$



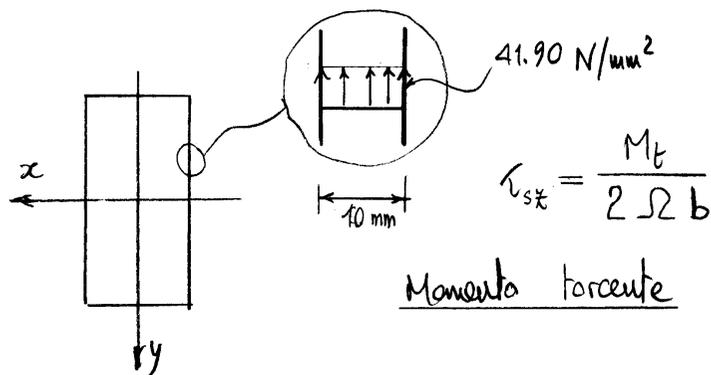
Momento flettente secondo x:

$$\sigma_x = \frac{M_{ix}}{J_{xz}} y$$

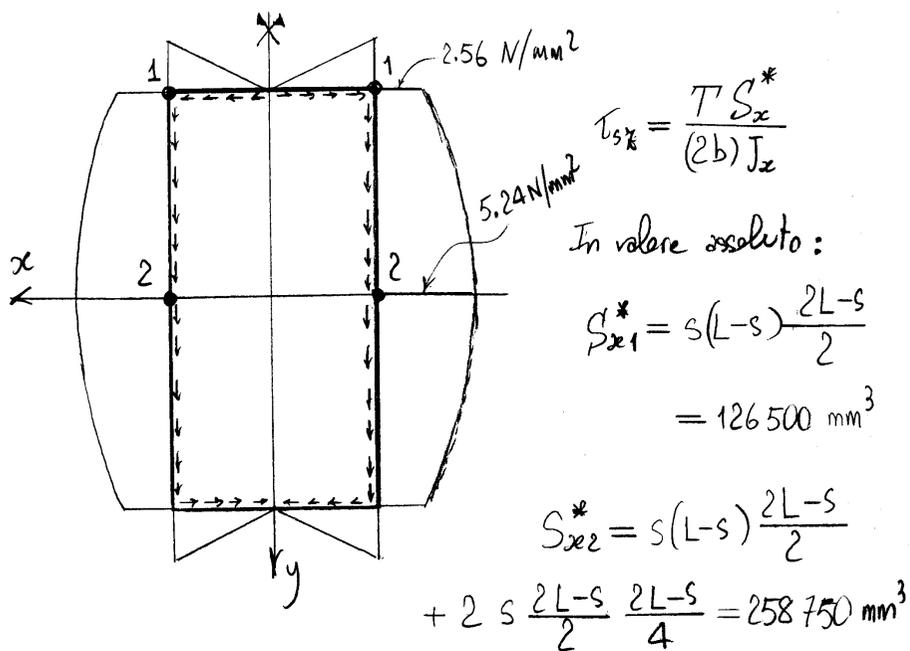


Momento flettente secondo y

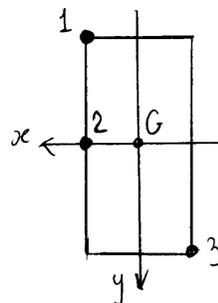
$$\sigma_x = - \frac{M_y}{J_y} x$$



Taglio secondo y



Verifica di resistenza



Il punto più sollecitato è il punto 1 di coordinate $(\frac{L-s}{2}, -\frac{2L-s}{2})$. Infatti

in corrispondenza di tale punto si ha la massima tensione normale di trazione, maggiore, in modulo, a quella massima di compressione che si ha nel punto 3. Inoltre, nel punto 1 le tensioni tangenziali dovute a taglio e momento torcente si sommano mentre nel punto 3 si sottraggono. Nel punto 2, dove si ha la massima tensione tangenziale (concorde con la tensione dovuta al momento torcente) è nulla la tensione normale dovuta a M_x , tensione nettamente prevalente rispetto a quella dovuta al taglio.

Tensioni nel punto 1 :

$$\sigma = 1.47 + 69.88 + 36.14 = 107.49 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = 41.90 + 2.56 = 44.46 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 132.23 \text{ N/mm}^2$$

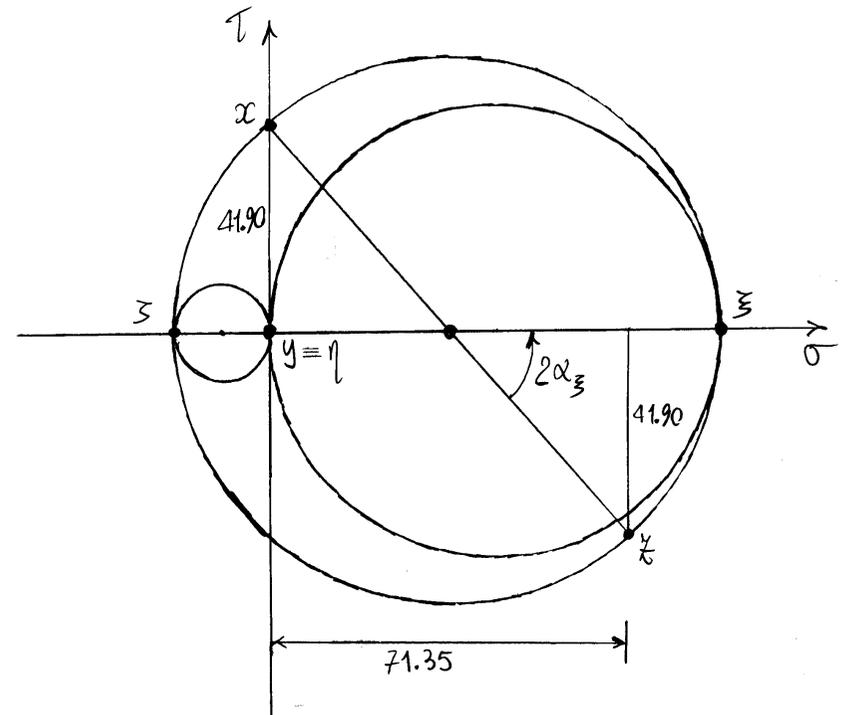
La verifica è soddisfatta

Tensore degli sforzi nel punto A

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = 1.47 + 69.88 = 71.35 \text{ N/mm}^2 \\ \tau_{xz} = 41.90 \text{ N/mm}^2 \end{array} \right.$$

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 41.90 \\ 0 & 0 & 0 \\ 41.90 & 0 & 71.35 \end{bmatrix}$$

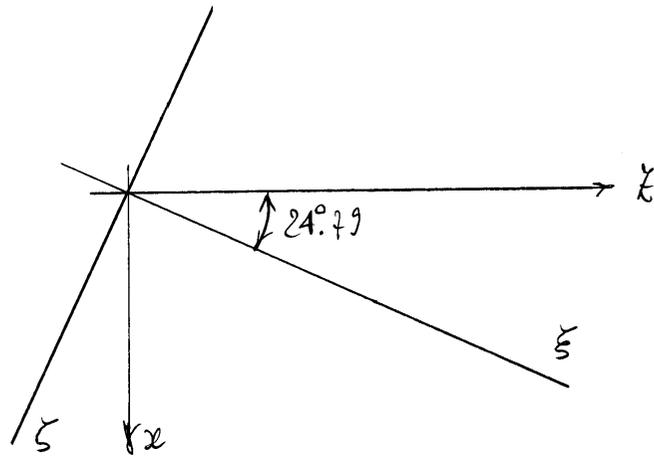
Circonferenze di Mohr



$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_z \end{array} \right\} = \frac{71.35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{71.35}{2}\right)^2 + (41.90)^2} = \begin{cases} 90.70 \text{ N/mm}^2 \\ -19.35 \text{ N/mm}^2 \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_z = \frac{41.90}{71.35/2} = 1.1745 \Rightarrow \alpha_z = 0.4327 = 24.79^\circ$$

L'asse ξ si ottiene ruotando l'asse x nel piano xz attorno all'asse y in senso antiorario nella pagina positiva del piano xz (oppure in senso positivo rispetto all'asse y) di un angolo di 24.79° .



Spostamenti e rotazioni

Spostamento in direzione x :

$$u_G = \frac{M_y l^2}{2 E J_y} = -7.39 \text{ mm}$$

Spostamento in direzione y :

$$v_G = \frac{T l^3}{3 E J_x} = 2.28 \text{ mm}$$

Rotazioni :

$$\varphi_x = -\frac{T l^2}{2 E J_x} = -0.0023 \text{ rad } (-0.13^\circ)$$

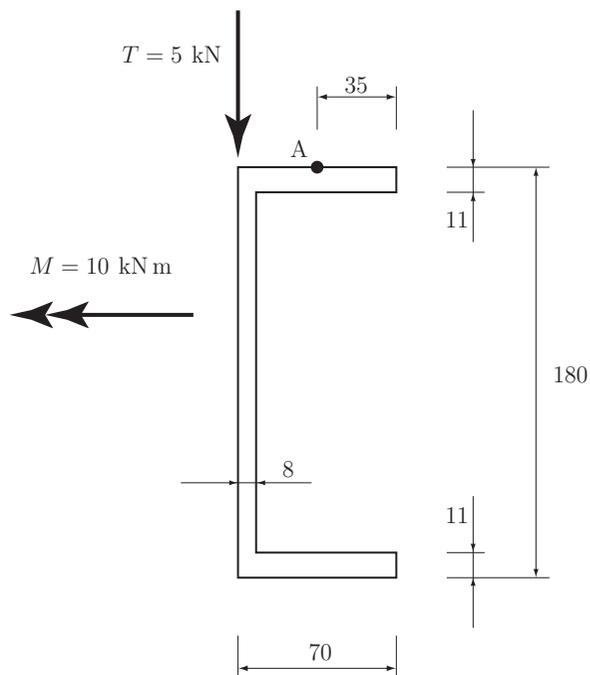
$$\varphi_y = \frac{M_y l}{E J_y} = -0.0049 \text{ rad } (-0.28^\circ)$$

$$\varphi_z = \frac{M_t l}{G J_t} = 0.0110 \text{ rad } (0.63^\circ)$$

Energia elastica di deformazione :

$$L_d = \frac{1}{2} (T v_G + M_y \varphi_y + M_t \varphi_z) = 165.28 \text{ Nm}$$

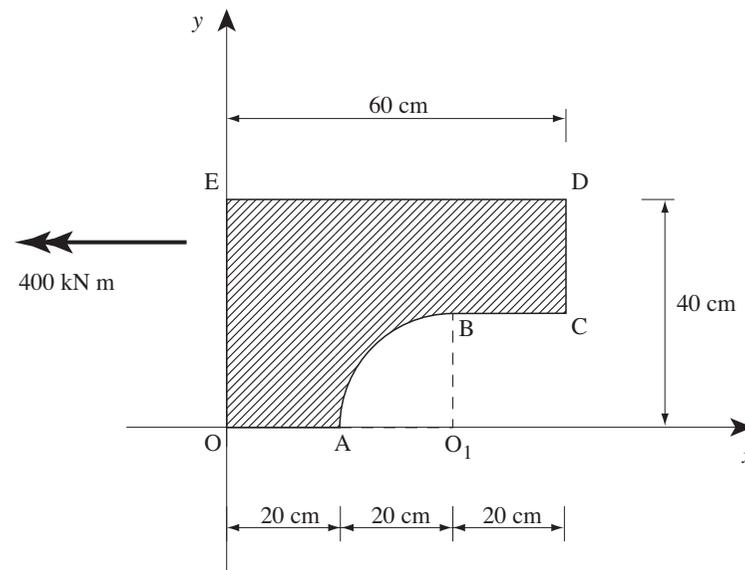
2.8 Esercizio 17



La sezione in figura, le cui misure sono riportate in mm, è soggetta ad un momento flettente di 10 kNm , di asse momento orizzontale, e ad uno sforzo di taglio verticale di 5 kN , agente secondo l'estradosso dell'anima.

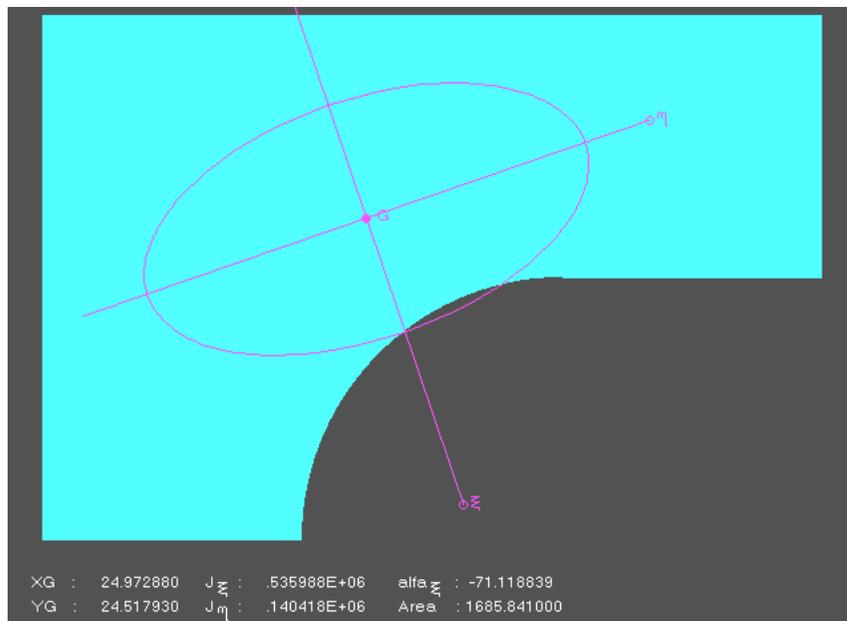
- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, compresi i moduli di resistenza;
- 2) Determinare la posizione del centro di taglio;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati delle tensioni normali e tangenziali;
- 3) Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi, la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr, le direzioni e componenti principali di sforzo, ed infine il valore della tensione ideale.

2.9 Esercizio 18

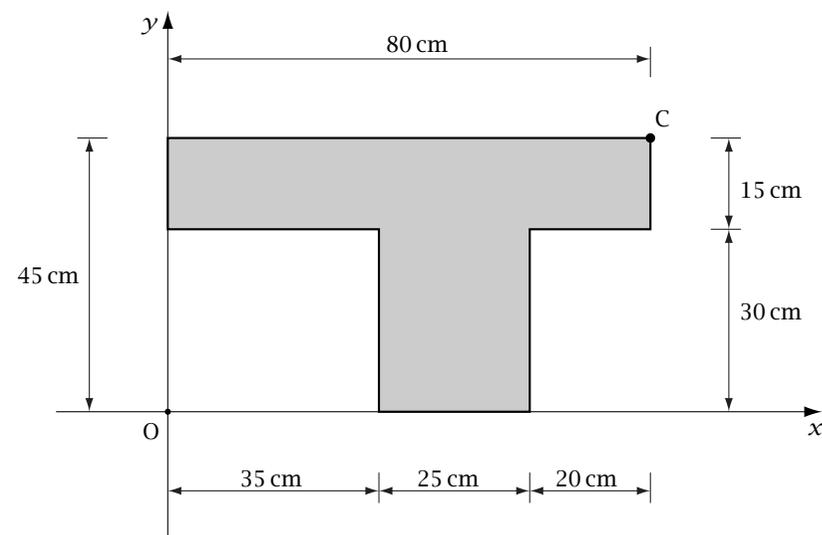


Data la sezione riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 400 kNm , di asse momento orizzontale:

- 1) Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
- 2) Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare graficamente la posizione dell'asse neutro;
- 3) Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
- 4) Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
- 5) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
- 6) Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.

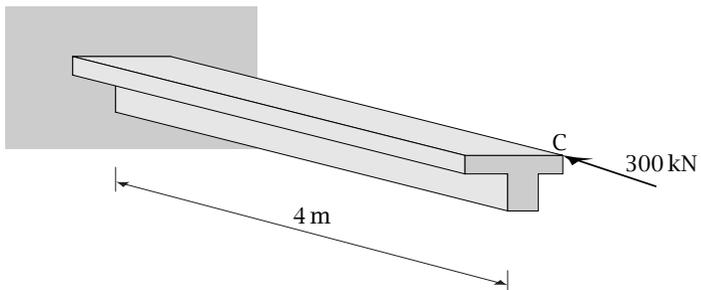


2.10 Esercizio 19

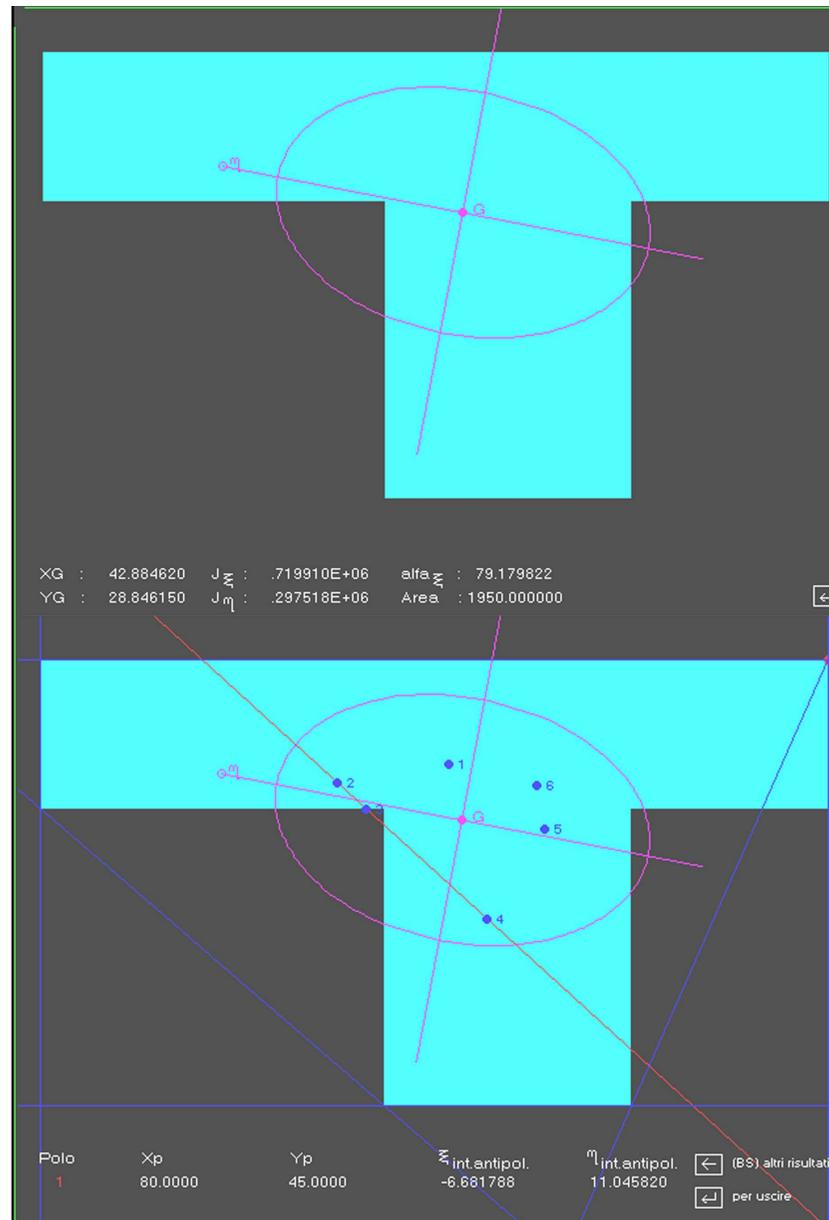
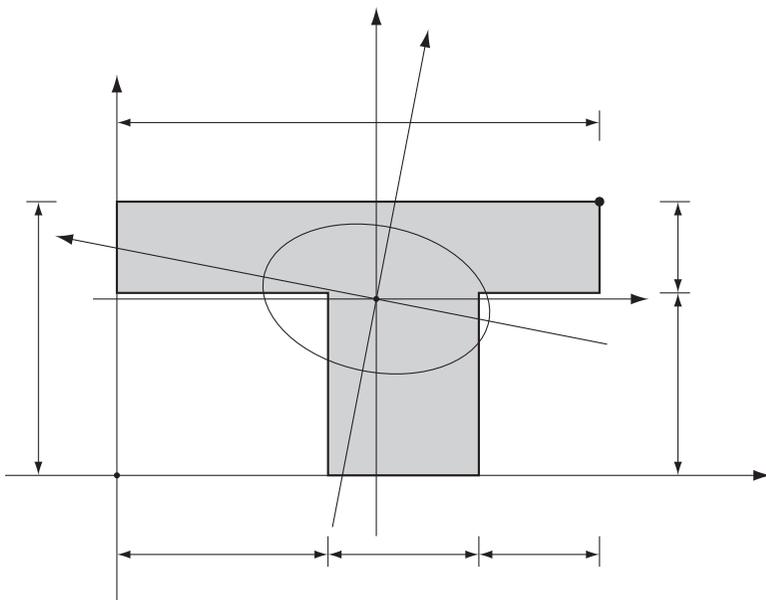


La sezione di figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 300 kN, applicato in corrispondenza del punto C:

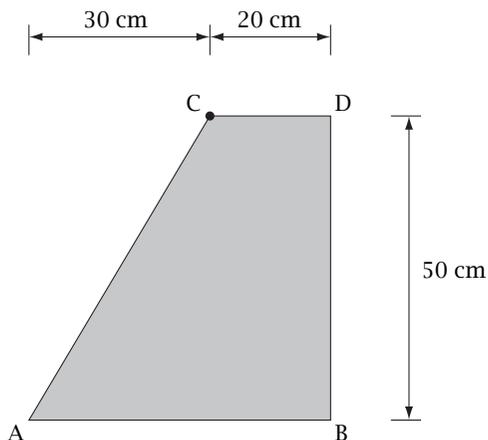
1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Determinare la posizione dell'asse neutro, disegnare il diagramma delle tensioni normali e calcolare le tensioni massime a trazione e compressione.



Data la mensola di figura, avente la sezione riportata più sopra e caricata da una forza normale di compressione ancora di 300 kN ed applicata nel punto C calcolare, mettendo in conto la deformabilità assiale della trave, l'energia elastica di deformazione, lo spostamento orrizzontale del punto C e la rotazione della sezione di estremità della mensola, assumendo il valore $E=20000 \text{ N/mm}^2$ del modulo di Young.

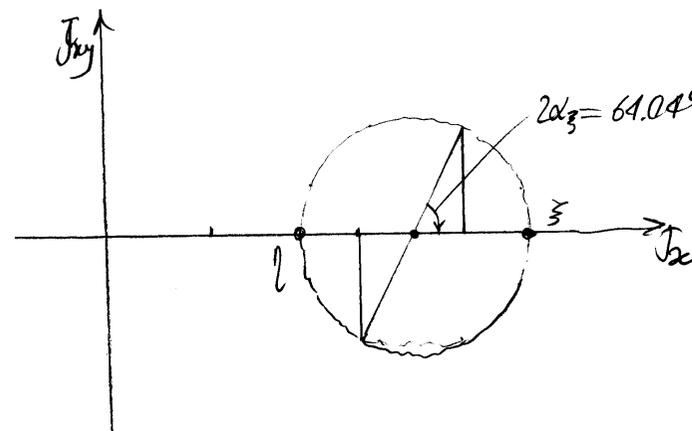
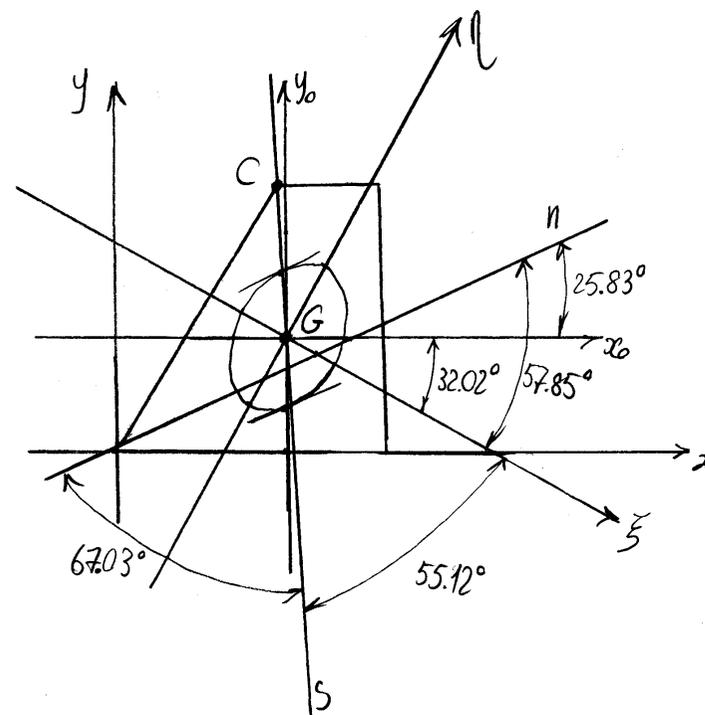


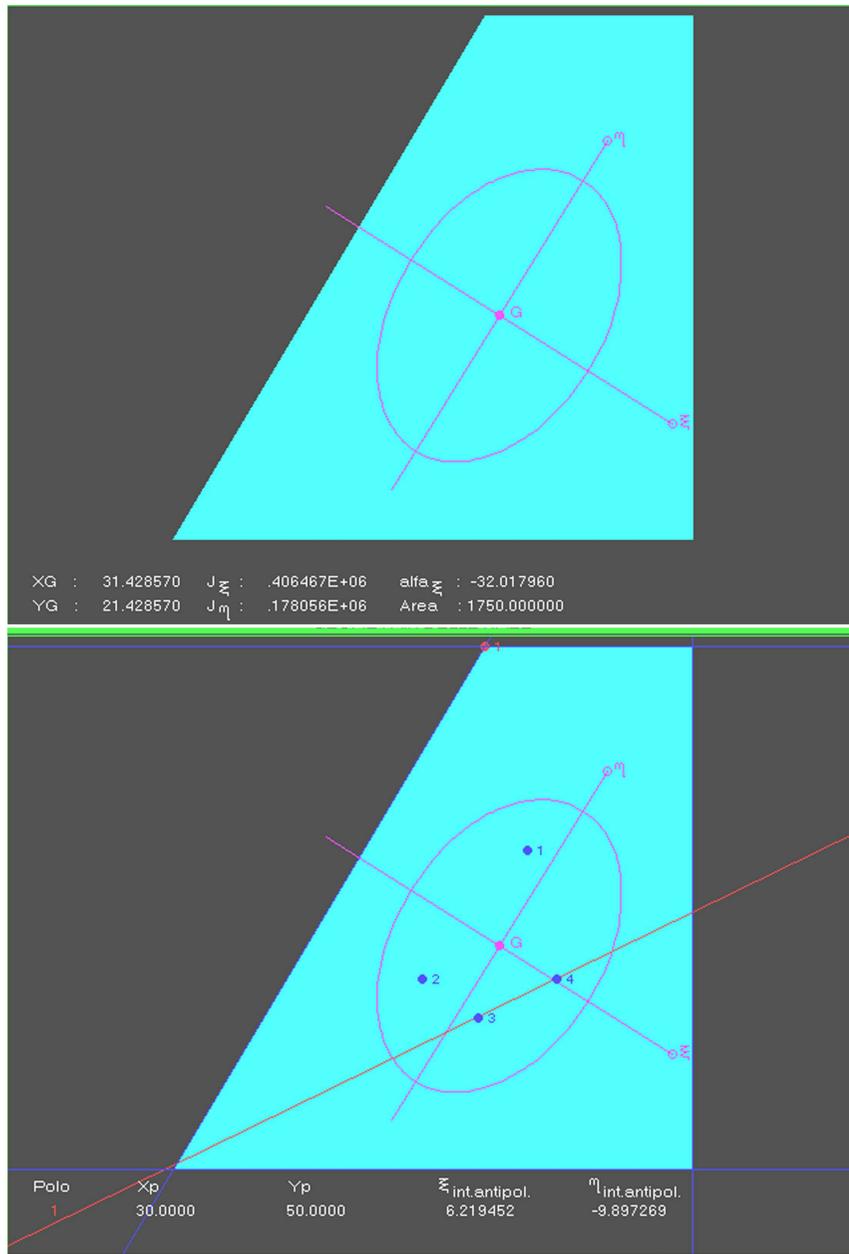
2.11 Esercizio 20



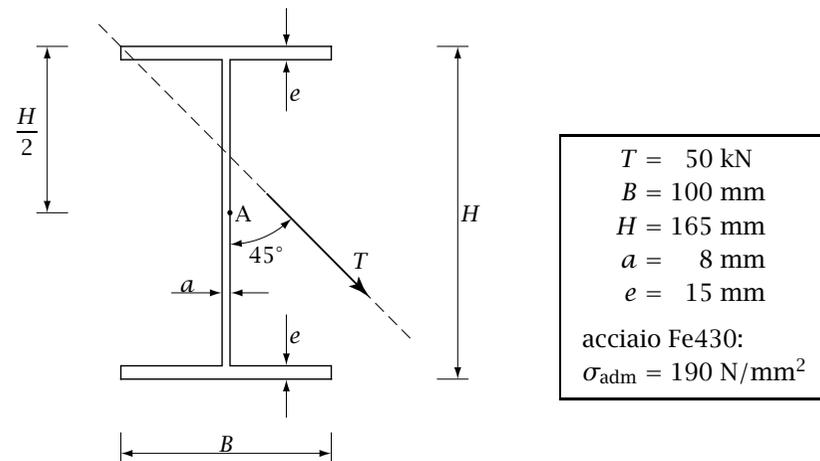
La sezione in figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 200 kN , applicato in corrispondenza del punto C.

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Calcolare le tensioni normali massime a trazione e a compressione;
* * * * *
5. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η (per eseguire il calcolo, occorre determinare le coordinate del punto C nel sistema principale, utilizzando le formule di trasformazione tra le coordinate nel sistema Gxy e quelle nel sistema $G\xi\eta$);
6. Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.





2.12 Esercizio 21

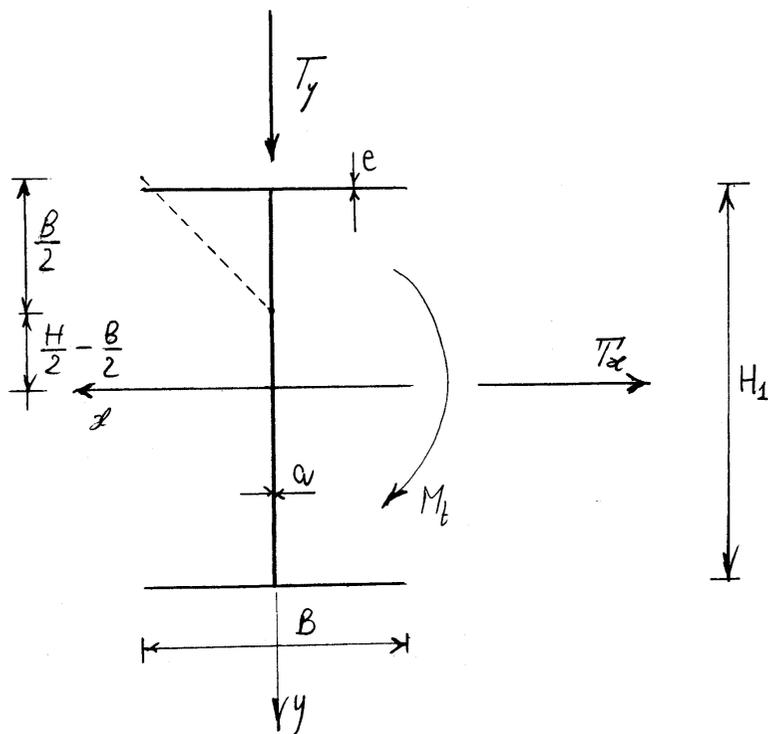


Data la sezione a I di figura, soggetta ad un taglio T :

1. Tracciare i diagrammi quotati delle tensioni tangenziali;
2. Determinare, in corrispondenza del punto A, la matrice delle componenti del tensore degli sforzi;
3. Rappresentare graficamente gli sforzi nel punto A tramite le circonferenze di Mohr e determinare le direzioni e le componenti principali di sforzo;

4. Eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Tresca;
5. Eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Huber-von Mises;
6. Determinare l'asse neutro della flessione associata al taglio T ;
7. Disegnare il diagramma qualitativo complessivo delle tensioni tangenziali dovute al taglio utilizzando la formula di Jourawski monomia.

Caratteristiche della sollecitazione



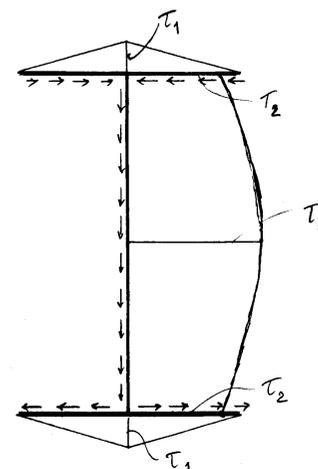
$$H_1 = H - e = 150 \text{ mm}$$

$$T_x = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$T_y = T/\sqrt{2} = 35.36 \text{ kN}$$

$$M_t = T_x \left(\frac{H}{2} - \frac{B}{2} \right) = 1149 \text{ kNmm}$$

Taglia T_y



$$T_y = 35.36 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{T_y S_x^*}{b J_x}$$

$$J_x = \frac{a H_1^3}{12} + 2 e B \left(\frac{H_1}{2} \right)^2 = 1912.5 \text{ cm}^4$$

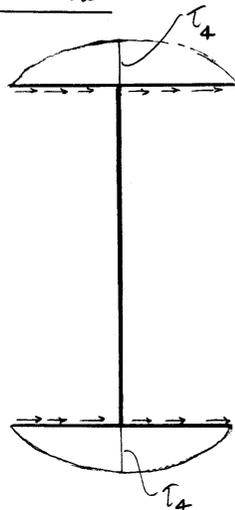
$$S_{x1}^* = e \frac{B}{2} \frac{H}{2} = 56.25 \text{ cm}^3, \quad S_{x2}^* = e B \frac{H}{2} = 112.5 \text{ cm}^3$$

$$S_{x3}^* = e B \frac{H}{2} + a \frac{H}{2} \frac{H}{4} = 135 \text{ cm}^3$$

$$\tau_1 = \frac{T_y S_{x1}^*}{e J_x} = 6.93 \text{ N/mm}^2, \quad \tau_2 = \frac{T_y S_{x2}^*}{a J_x} = 26 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_3 = \frac{T_y S_{x3}^*}{a J_x} = 31.20 \text{ N/mm}^2$$

Taglio T_x



$$T_x = 35.36 \text{ kN}$$

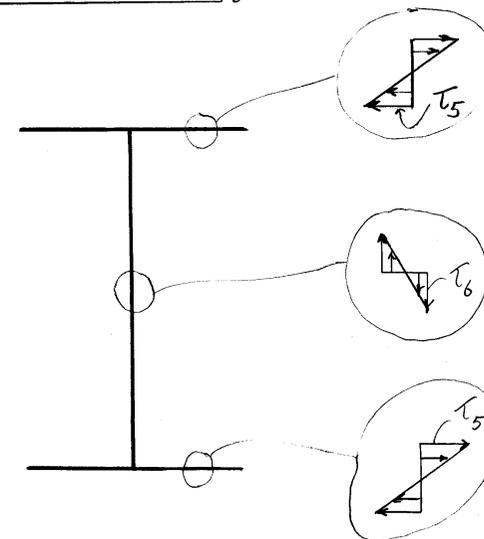
$$\tau = \frac{T_x S_y^*}{b J_y}$$

$$J_y = 2 \frac{e B^3}{12} = 250 \text{ cm}^4$$

$$S_{y4}^* = e \left(\frac{B}{2} \right) \left(\frac{B}{4} \right) = 18.75 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = \frac{T_x S_{y4}^*}{e J_y} = 17.68 \text{ N/mm}^2$$

Momento torcente M_t



$$M_t = 1149 \text{ kN mm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (2 B e^3 + H_1 a^3) = 25.06 \text{ cm}^4$$

$$\tau_5 = \frac{M_t}{J_t} e = 68.78 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \frac{M_t}{J_t} b$$

$$\tau_6 = \frac{M_t}{J_t} a = 36.68 \text{ N/mm}^2$$

Sforzi nel punto A

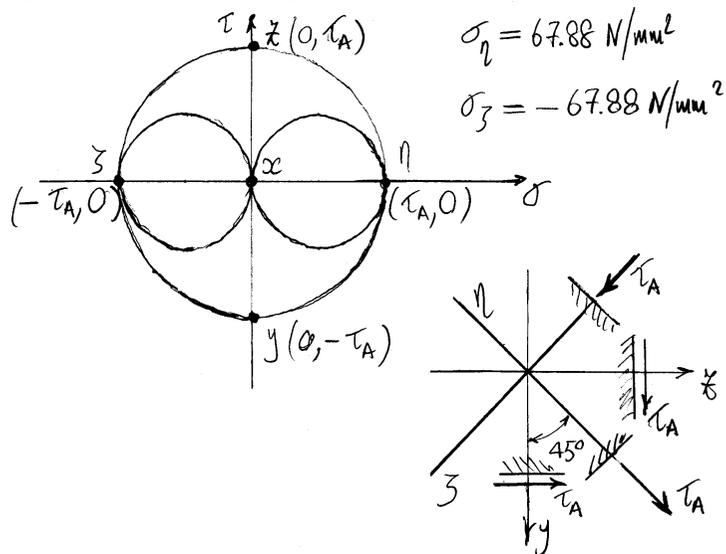
L'unica componente di tensione non nulla è la τ_{yz} .

Posto:

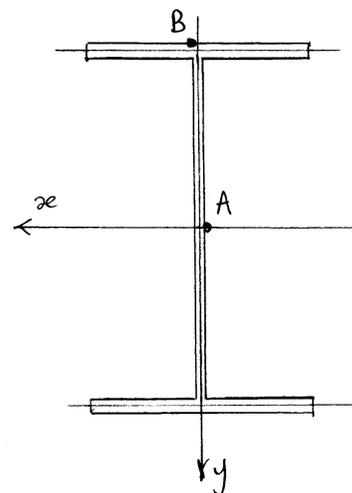
$$\tau_A = \tau_3 + \tau_6 = 67.88 \text{ N/mm}^2, \text{ si ha:}$$

$$\underline{\sigma}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_A \\ 0 & \tau_A & 0 \end{bmatrix}.$$

Circonferenze di Mohr



Verifiche di resistenza



$$\tau_A = \tau_3 + \tau_6 = 67.88 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_B = \tau_1 + \tau_4 + \tau_5 = 93.39 \text{ N/mm}^2$$

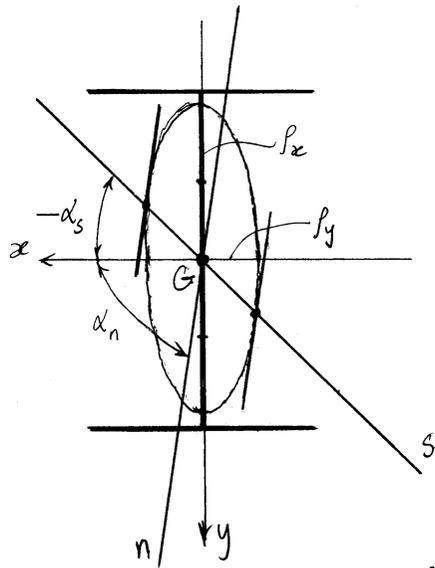
Tresca :

$$\sigma_{id} = 2 \cdot \tau_B = 186.78 \text{ N/mm}^2$$

Huber-von Mises :

$$\sigma_{id} = \sqrt{3} \tau_B = 161.76 \text{ N/mm}^2$$

Asse neutro



$$A = 2eB + aH_1 = 4200 \text{ mm}^2$$

$$r_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}} = 67.48 \text{ mm}$$

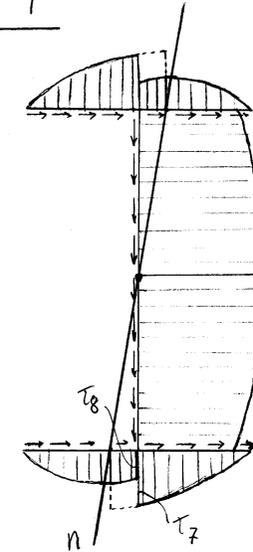
$$r_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}} = 24.40 \text{ mm}$$

$$\alpha_s = -\frac{\pi}{4}$$

$$\tan \alpha_s \tan \alpha_n = -\frac{J_x}{J_y} \Rightarrow \alpha_s = \tan^{-1}\left(-\frac{J_x}{J_y \tan \alpha_n}\right)$$

$$\alpha_s = 82.55^\circ$$

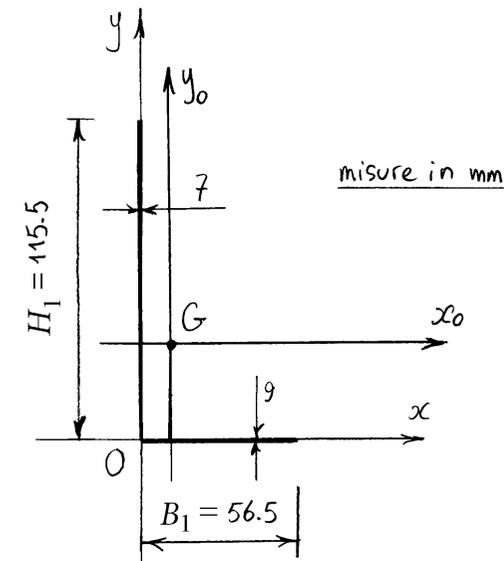
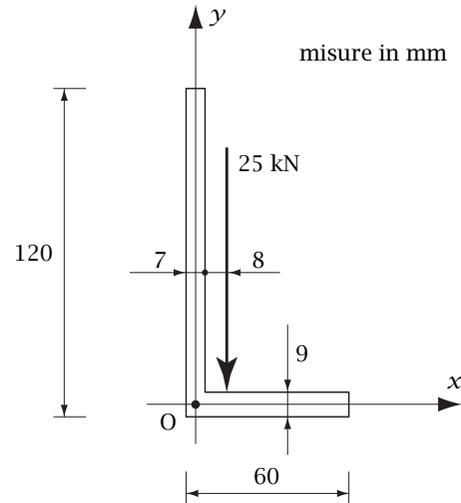
Taglia T



$$\tau_7 = \tau_4 + \tau_1 = 24.61 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_8 = \tau_4 - \tau_1 = 10.75 \text{ N/mm}^2$$

2.13 Esercizio 22

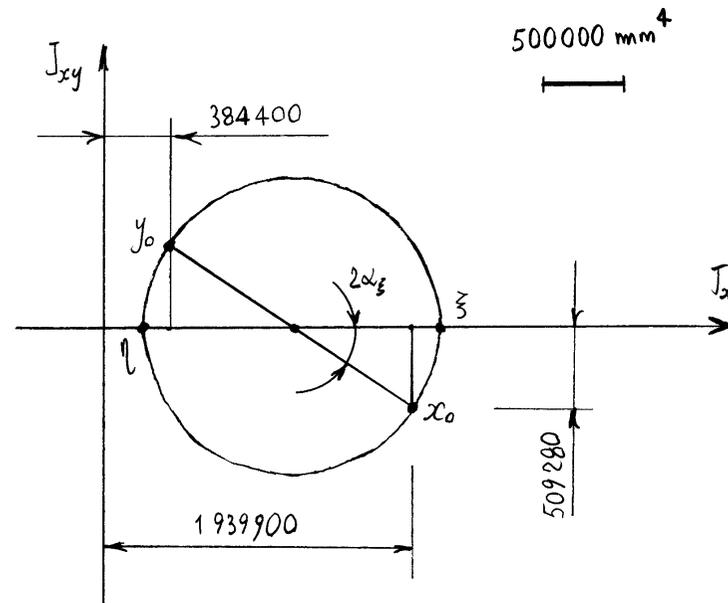
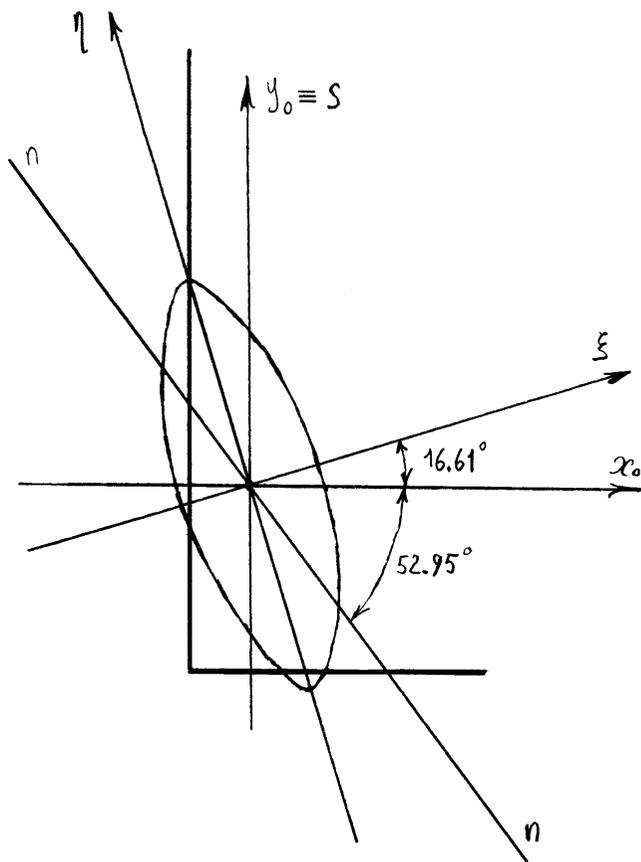


Data la sezione sottile a L di figura:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana, concentrando lo spessore sulla linea media (baricentro G, assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala, precisando le scale, la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia;
3. Tracciare il diagramma quotato delle tensioni tangenziali dovute al momento torcente;
4. Tracciare i diagrammi qualitativi delle tensioni tangenziali dovute alle componenti del taglio rispetto agli assi principali di inerzia;
5. Mettendo in conto la sola torsione, eseguire la verifica di resistenza utilizzando il criterio di Huber-von Mises, adottando una tensione di snervamento $\sigma_{adm} = 190 \text{ N/mm}^2$ (acciaio Fe430);
6. Utilizzando l'asse neutro della flessione associata al taglio, tracciare il diagramma qualitativo delle tensioni tangenziali dovute al taglio complessivo;
7. Quotare i diagrammi relativi ai punti 4 e 6.

$$\begin{cases} x_G = 10.91 \text{ mm} \\ y_G = 35.45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{x_0} = 1\,939\,900 \text{ mm}^4 \\ J_{y_0} = 384\,400 \text{ mm}^4 \\ J_{x_0 y_0} = -509\,280 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



$$\tan 2\alpha_{\xi} = \frac{509280 \times 2}{1939900 - 384400} \implies$$

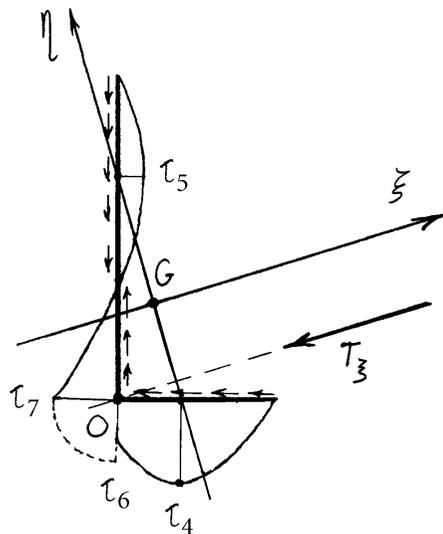
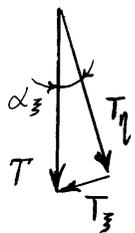
$$\implies \alpha_{\xi} = 16.61^{\circ}$$

$$\begin{cases} J_{\xi} = 2091800 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta} = 232490 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

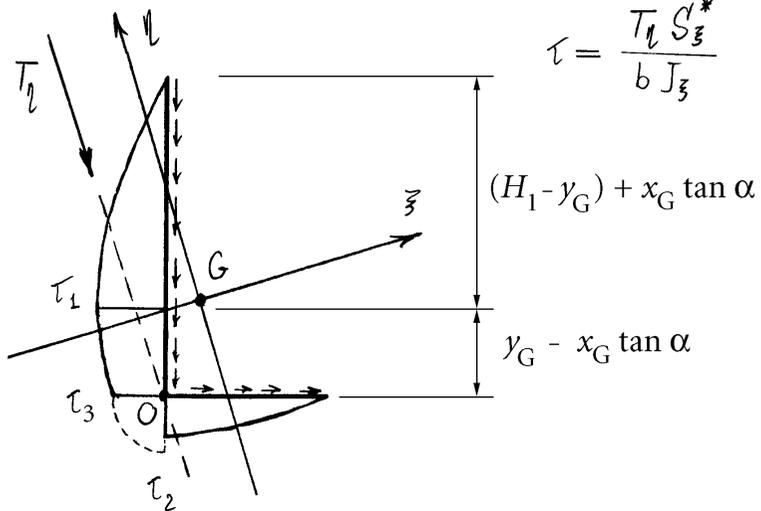
$$\begin{cases} \rho_{\xi} = 39.85 \text{ mm} \\ \rho_{\eta} = 13.29 \text{ mm} \end{cases}$$

$$T_{\xi} = T \sin \alpha_{\xi} = 7 \text{ kN}$$

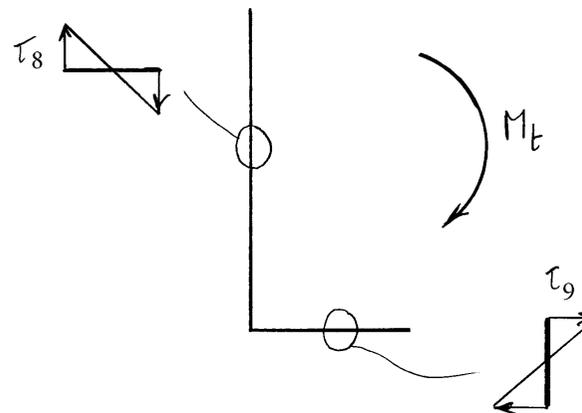
$$T_{\eta} = T \cos \alpha_{\xi} = 24 \text{ kN}$$



$$\tau = \frac{T_{\xi} S_{\eta}^*}{b J_{\eta}}$$



$$\tau = \frac{T_{\eta} S_{\xi}^*}{b J_{\xi}}$$



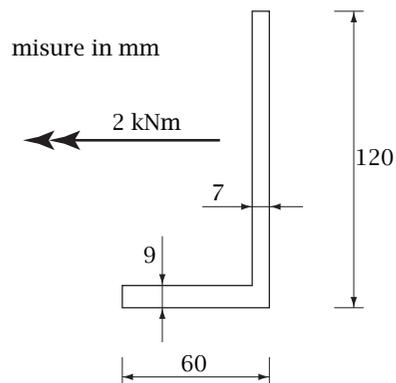
$$M_t = 25 \times 11.5 \text{ kNmm} = 287500 \text{ Nmm}$$

$$J_t = \frac{1}{3} (56.5 \times 9^3 + 115.5 \times 7^3) = 26935 \text{ mm}^4$$

$$\tau_8 = \frac{287500}{26935} \times 7 = 74.72 \text{ N/mm}^2$$

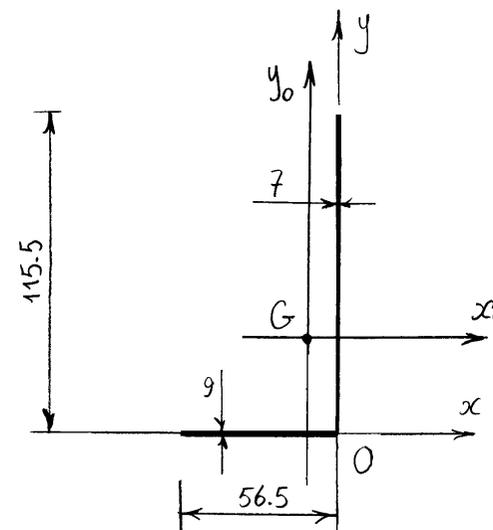
$$\tau_9 = \frac{287500}{26935} \times 9 = 96.06 \text{ N/mm}^2$$

2.14 Esercizio 23



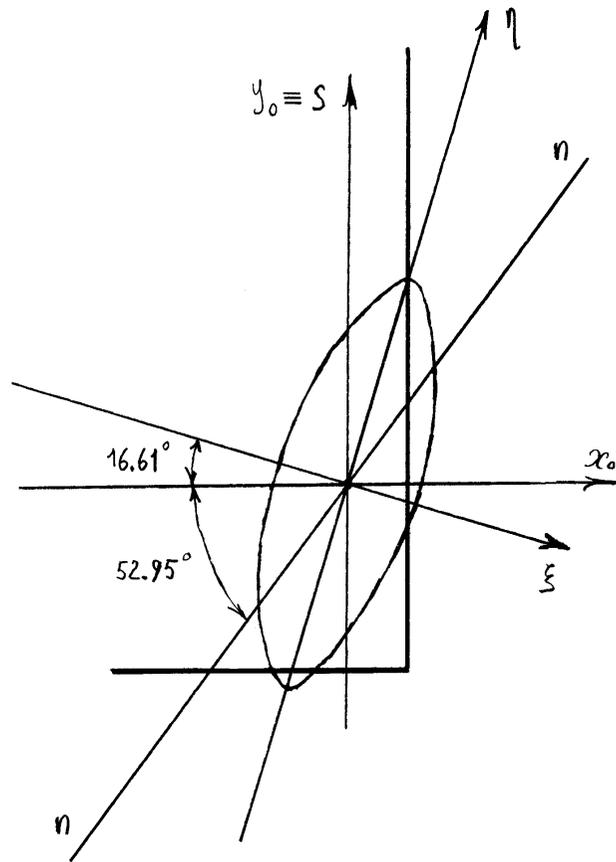
Data la sezione sottile riportata in figura, soggetta ad un momento flettente di 2 kNm, di asse momento orizzontale:

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro, assi principali di inerzia e momenti principali di inerzia);
 2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia, e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
 3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
 4. Impostare il calcolo della tensione normale massima a compressione;
 5. Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto al riferimento principale;
-
6. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula binomia;
 7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia;
 8. Calcolare la curvatura flessionale (rotazione relativa per unità di linea) associata al momento flettente, supponendo che il modulo di Young valga $2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.



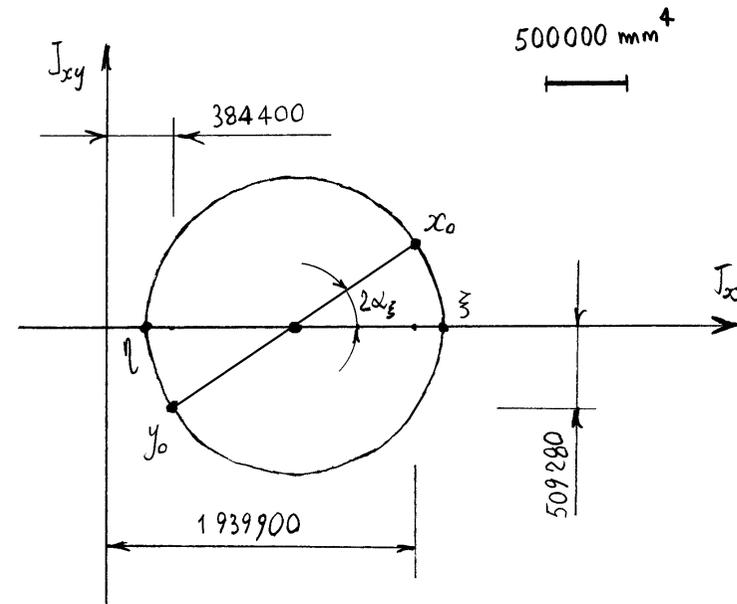
$$\begin{cases} x_G = -10.91 \text{ mm} \\ y_G = 35.45 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{x_0} = 1\,939\,900 \text{ mm}^4 \\ J_{y_0} = 384\,400 \text{ mm}^4 \\ J_{x_0 y_0} = 509\,280 \text{ mm}^4 \end{cases}$$



$$\begin{cases} J_{\xi} = 2091800 \text{ mm}^4 \\ J_{\eta} = 232490 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

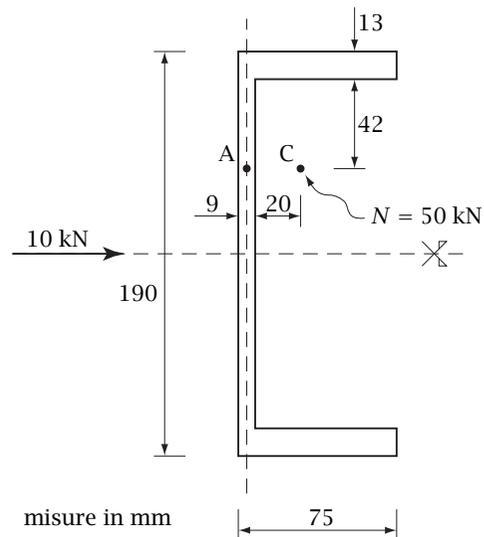
$$\begin{cases} \rho_{\xi} = 39.85 \text{ mm} \\ \rho_{\eta} = 13.29 \text{ mm} \end{cases}$$



$$\tan 2\alpha_{\xi} = \frac{509280 \times 2}{1939900 - 384400} \implies$$

$$\implies \alpha_{\xi} = 16.61^{\circ}$$

2.15 Esercizio 24



Data la sezione di figura, soggetta ad uno sforzo normale eccentrico di trazione in corrispondenza del punto C e ad uno sforzo di taglio orizzontale agente lungo l'asse di simmetria:

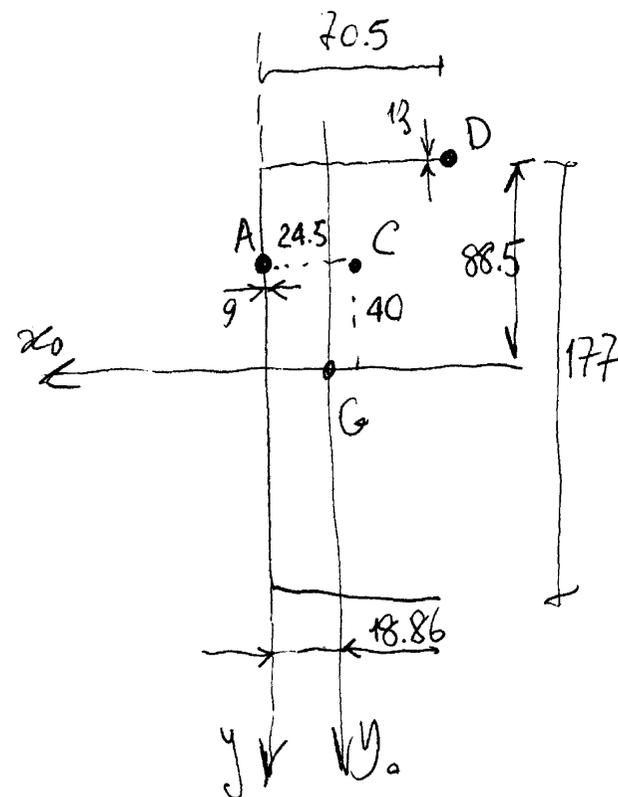
1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana;
2. Disegnare in scala l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare i diagrammi qualitativi delle tensioni normali e delle tensioni tangenziali;
4. Calcolare la tensione normale e la tensione tangenziale in corrispondenza del punto A;
5. Determinare, in corrispondenza del punto A:

(a) La matrice delle componenti del tensore degli sforzi e la sua rappresentazione grafica tramite le circonferenze di Mohr;

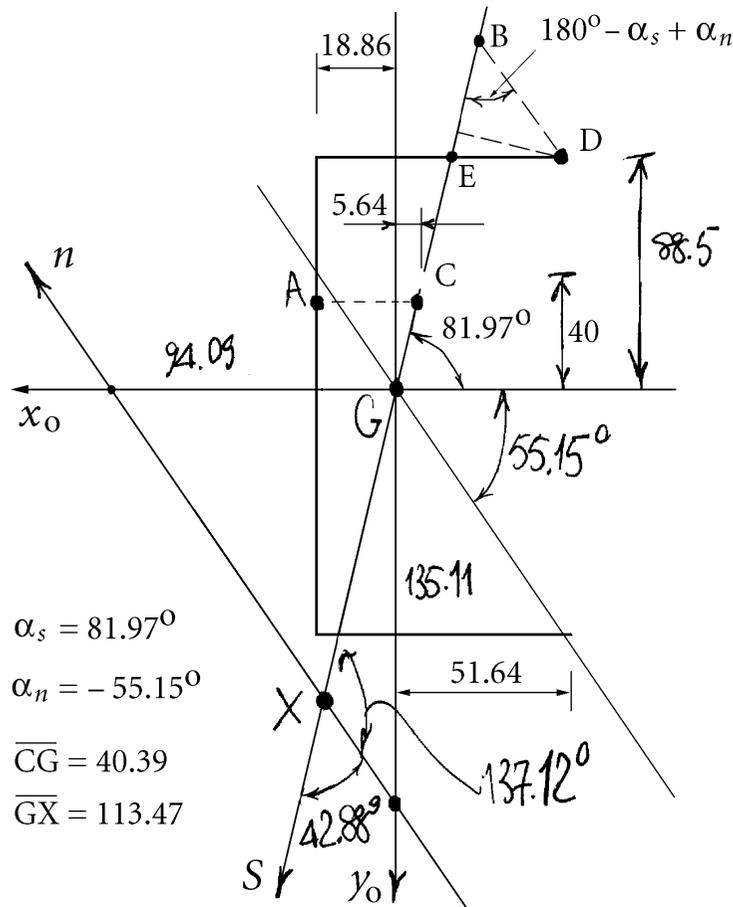
(b) Le direzioni e le componenti principali di sforzo;

(c) Il valore della tensione ideale utilizzando sia il criterio di Tresca che il criterio di Huber-von Mises;

6. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali di inerzia;
7. Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
8. Calcolare la tensione normale nel punto A utilizzando la formula monomia.



2.16 Esercizio 25



$$\alpha_s = 81.97^\circ$$

$$\alpha_n = -55.15^\circ$$

$$\overline{CG} = 40.39$$

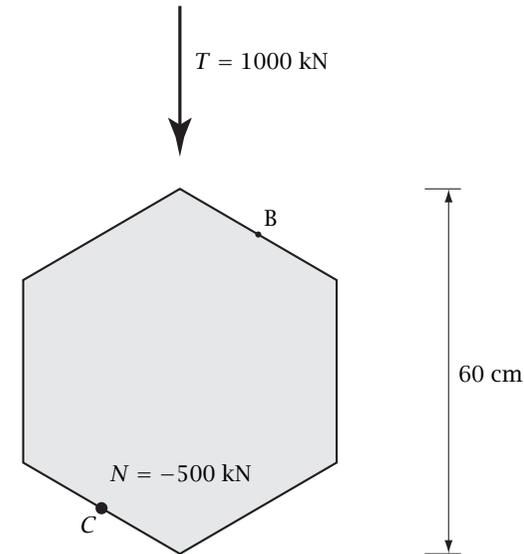
$$\overline{GX} = 113.47$$

$$\overline{HD} = -x_D \quad \overline{HE} = \overline{HG} / \tan \alpha_s$$

$$\overline{HG} = -y_D \quad \overline{GE} = \overline{HG} / \cos \alpha_s$$

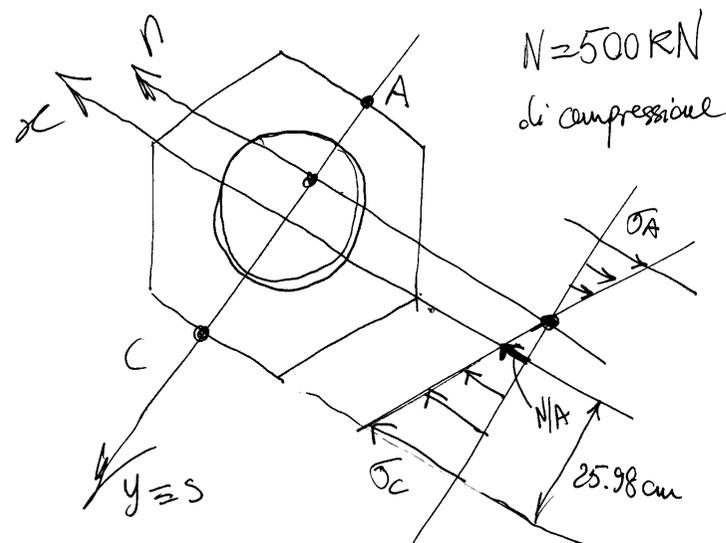
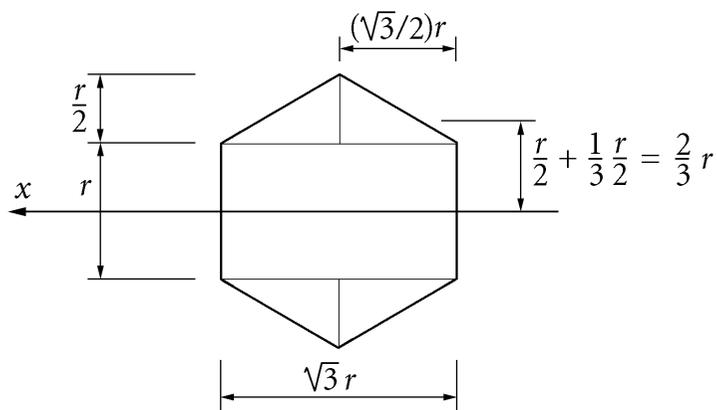
$$\overline{ED} = \overline{HD} - \overline{HE} \quad s_D = -(\overline{XG} + \overline{GE} + \overline{EB})$$

$$\overline{EB} = \overline{ED} \cos \alpha_s + \overline{ED} \sin \alpha_s / \tan (180 - \alpha_s + \alpha_n)$$



La sezione illustrata, in forma di un esagono regolare, è soggetta ad uno sforzo normale N di compressione di 500 kN agente nel punto C di mezzeria di un lato e di uno sforzo di taglio T verticale di 1000 kN la cui retta d'azione passa per due vertici dell'esagono:

1. Determinare i raggi di inerzia della sezione e disegnare l'ellisse centrale di inerzia;
2. Individuare l'asse neutro dello sforzo normale eccentrico e disegnare il diagramma delle tensioni normali;
3. Calcolare le tensioni normali σ_C e σ_B agenti rispettivamente nel centro di pressione C e nel punto B ;
4. Calcolare la tensione tangenziale nel punto C utilizzando la formula di Jourawski e assumendo, nello spirito delle sezioni compatte simmetriche, una corda orizzontale;
5. Scrivere le componenti del tensore degli sforzi nel punto C ;



$$J_x = \frac{\sqrt{3} r^4}{12} + 4 \left\{ \frac{\sqrt{3} r \left(\frac{r}{2}\right)^3}{36} + \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} r\right) \left(\frac{r}{2}\right) \left(\frac{2}{3} r\right)^2 \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} r^4 + 4 \left\{ \frac{\sqrt{3} r^4}{18 \times 32} + \frac{\sqrt{3}}{18} r^4 \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} r^4 + 4 \frac{\sqrt{3}}{18 \times 32} r^4 \left\{ 1 + 32 \right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} r^4 + \frac{132}{18 \times 32} \sqrt{3} r^4$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12} r^4 + \frac{11}{6 \times 8} \sqrt{3} r^4 = \frac{\sqrt{3}}{48} (4 + 11) r^4$$

$$= \frac{15}{48} \sqrt{3} r^4 = \frac{5}{16} \sqrt{3} r^4$$

$$J_x = \frac{5}{16} \sqrt{3} r^4 = 438,425 \text{ cm}^4$$

$$M_z = 500 \times 25.98 = 12990 \text{ kNcm}$$

$$\sigma_c = - \frac{500 \times 10^3}{2338 \times 10^2} - \frac{12990 \times 10^4}{438425 \times 10^4} 25.98 = -9.84 \text{ N/mm}^2$$

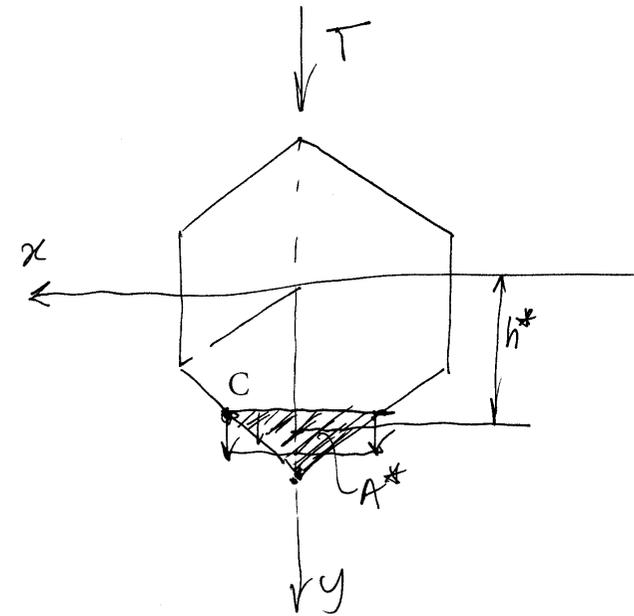
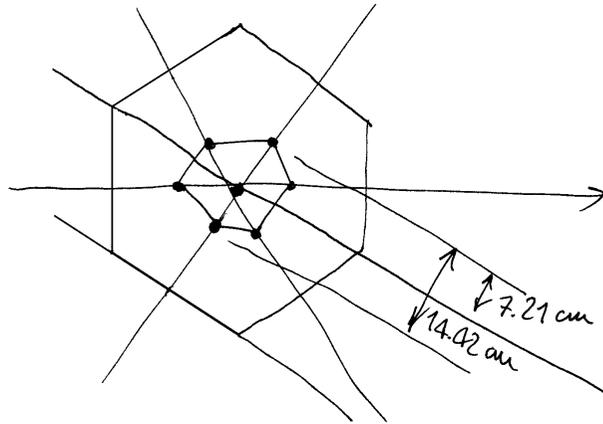
$$\sigma_A = - \frac{500 \times 10^3}{2338 \times 10^2} + \frac{12990 \times 10^4}{438425 \times 10^4} 25.98 = 5.74 \text{ N/mm}^2$$

$$s_c = 25.98 + 7.21 = 33.19 \text{ cm}$$

$$S_n = 2338 \times (7.21) = 16857 \text{ cm}^3$$

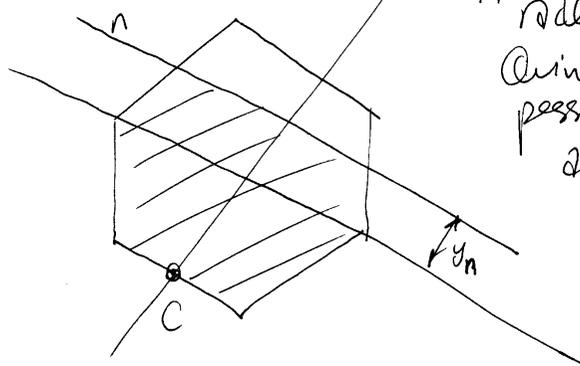
$$\sigma_c = \frac{N}{S_n} s_c = - \frac{500 \times 10^3}{16857 \times 10^3} 331.9 = -9.84 \text{ N/mm}^2$$

nucleo centrale di inerzia



Sezione non resistente a trazione

C deve dare sul contorno del nucleo che è interno all'intersezione delle rette nodali:



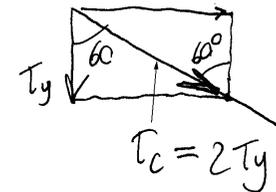
Quindi non c'è possibilità di assorbire la sollecitazione con sole tensioni di compressione.

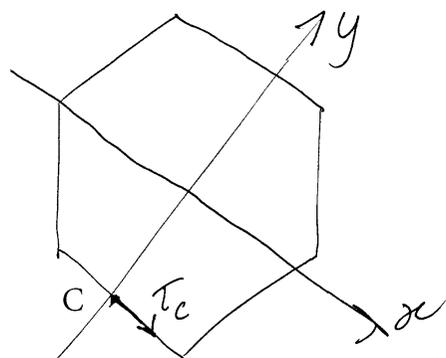
$$S_x^* = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} 30 \right) \left(\frac{15}{2} \right) \right\} \left(30 - \frac{2}{3} \frac{15}{2} \right)$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2} 30$$

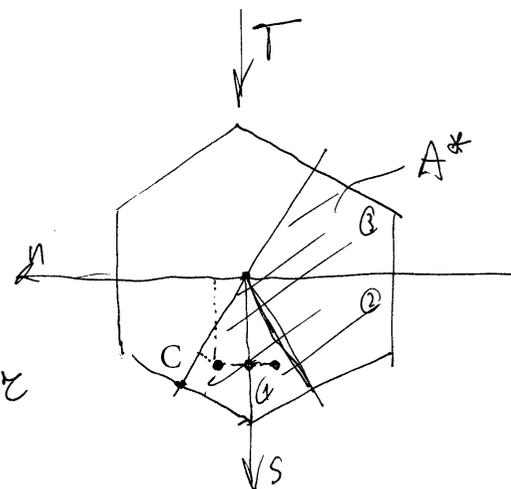
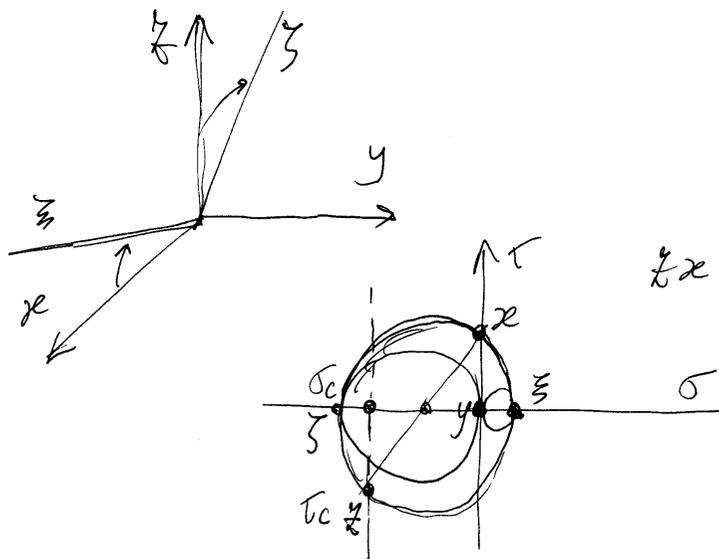
$$\tau_y = \frac{T S_x^*}{b J_x}$$

$$\tau_c = 2 \frac{T S_x^*}{b J_x}$$



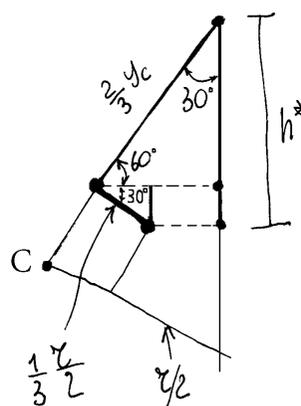


$$\sigma_c \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_c \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_c & 0 & \sigma_c \end{bmatrix}$$



$$y_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \tau$$

$$\begin{aligned} S_n^* &= S^A + S^B + S^C = S^A = 2 \times \left(\frac{1}{2} \tau y_c \right) \left(\frac{y_c}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \tau \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \tau^2 \right) \frac{7}{12} \tau = \frac{7\sqrt{3}}{48} \tau^3 = 6.81995 \times 10^6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} h^* &= \frac{2}{3} y_c \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{6} \tau \frac{1}{2} \\ &= \frac{\tau}{2} + \frac{1}{12} \tau = \frac{7}{12} \tau = 17.50 \text{ cm} \end{aligned}$$

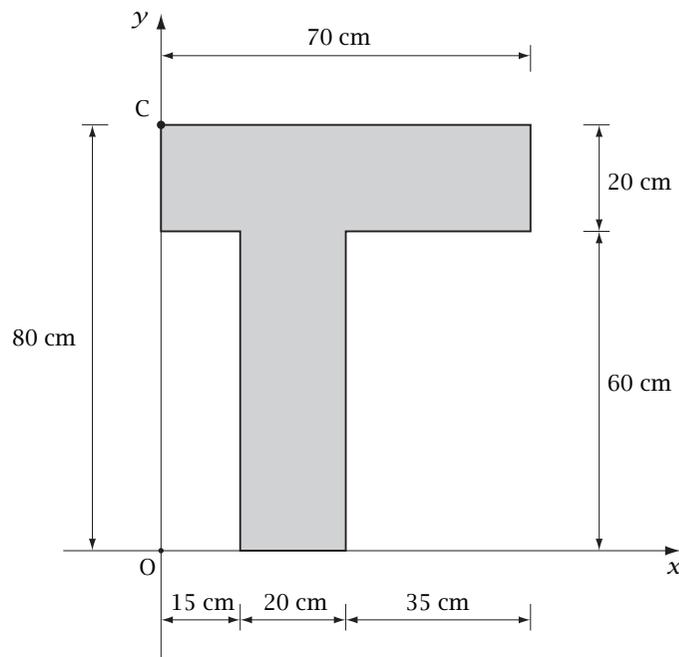
$$T = 1 \times 10^6 \text{ N}$$

$$b = 2y_c = 5.196 \times 10^2 \text{ mm}$$

$$J = 4.38425 \times 10^9 \text{ mm}^4$$

$$\tau = 2.99 \text{ N/mm}^2$$

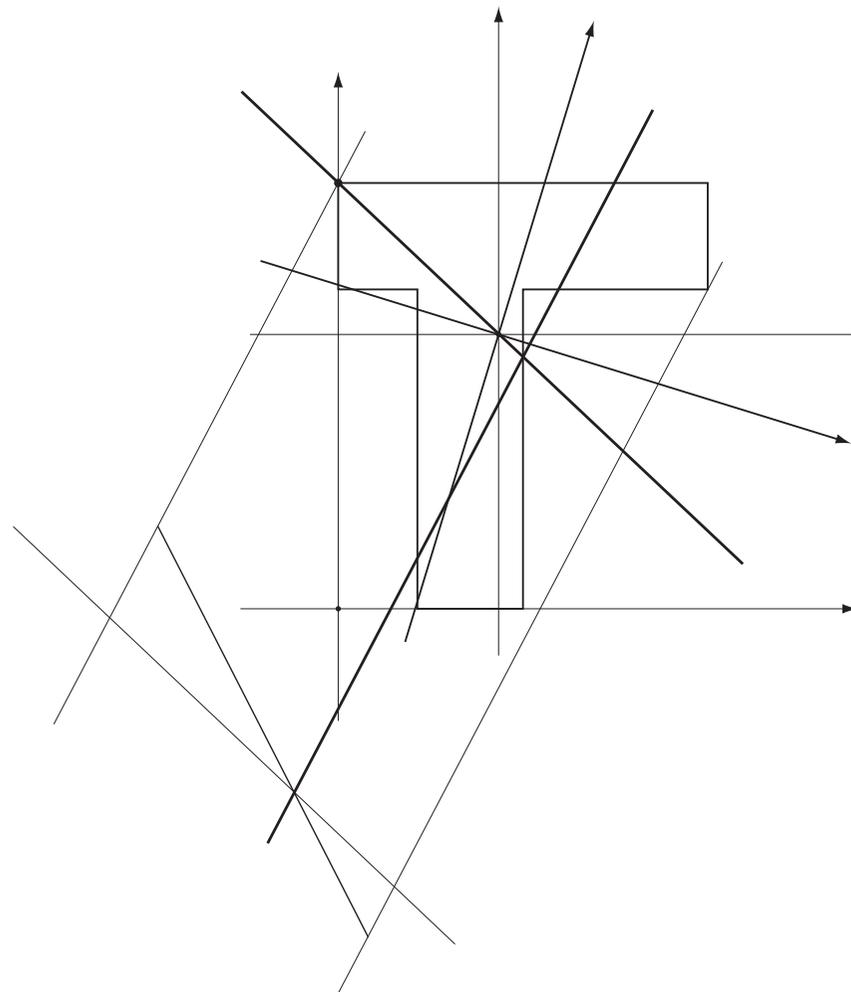
2.17 Esercizio 26



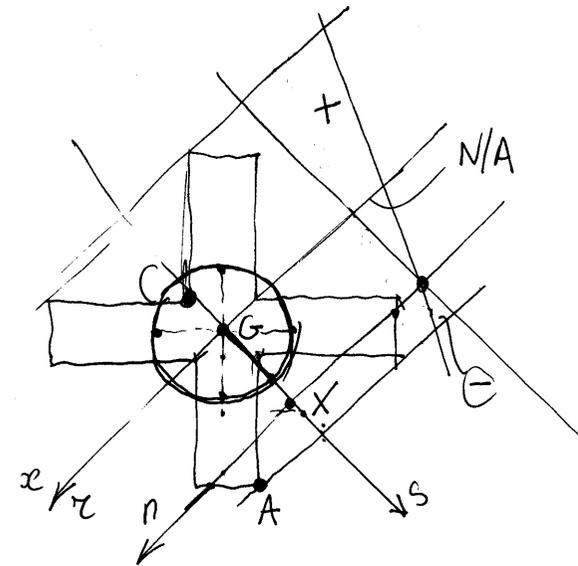
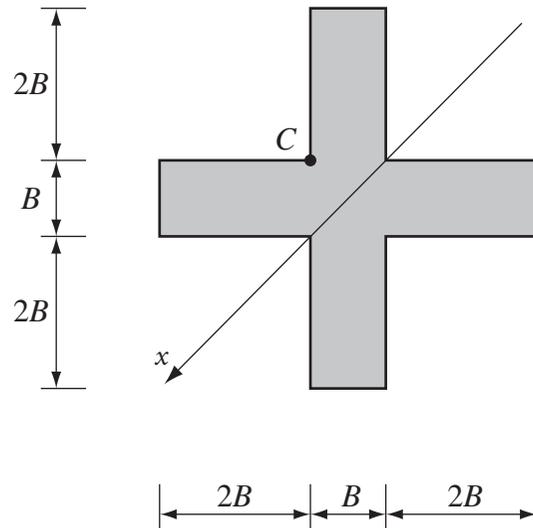
La sezione in figura è soggetta ad uno sforzo normale di compressione di 200 kN, applicato in corrispondenza del punto C.

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (baricentro G , assi principali di inerzia ξ e η e momenti principali di inerzia J_ξ e J_η);
2. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia e determinare qualitativamente la posizione dell'asse neutro;
3. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
4. Calcolare la tensione normale massima a compressione;

5. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali ξ e η
6. Determinare l'inclinazione dell'asse neutro e la sua intersezione con l'asse di sollecitazione;
7. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula monomia.



2.18 Esercizio 27



Data la sezione a croce di figura soggetta ad una forza normale eccentrica nel punto C :

1. Calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse x ;
2. Calcolare il raggio d'inerzia rispetto all'asse x e disegnare l'ellisse centrale di inerzia;
3. Disegnare l'asse di sollecitazione, l'asse neutro della flessione associata alla forza normale eccentrica (quotando la sua inclinazione) e l'asse neutro della forza normale eccentrica (quotando la sua intersezione con l'asse di sollecitazione);
4. Disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali nell'ipotesi di forza normale di compressione ($N < 0$);
5. Valutare il momento statico rispetto all'asse neutro (della forza normale eccentrica) e calcolare la massima tensione di compressione.

$$J_x = \frac{B(5B)^3}{12} + 2 \frac{2B(B)^3}{12} = \frac{129}{12} B^4$$

$$A = 5B^2 + 4B^2 = 9B^2$$

$$f = \sqrt{\frac{129}{108}} B = 1.09 B$$

$$\overline{CG} = \frac{B}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} B$$

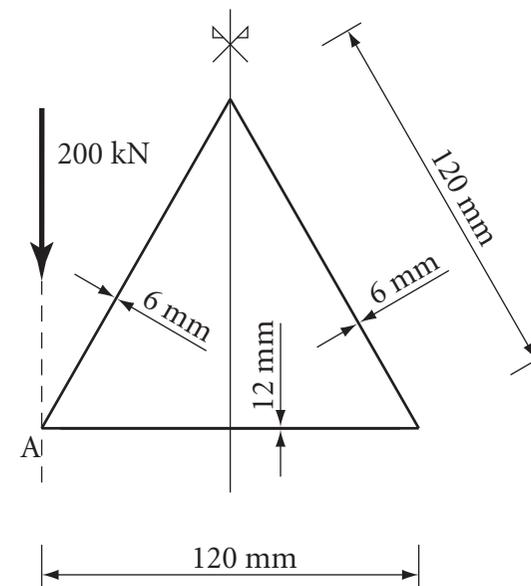
$$\overline{GX} = \frac{129}{108} \sqrt{2} B = 1.69 B$$

$$S'_n = (5B^2) \overline{GX} + (4B^2) \overline{GX} = \frac{129}{12} \sqrt{2} B^3 = 15.20 B^3$$

$$\begin{aligned} S_A &= \left(\sqrt{2} B + \frac{\sqrt{2}}{2} B \right) - \frac{129}{108} \sqrt{2} B = \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{129}{108} \right) \sqrt{2} B = \frac{162 - 129}{108} \sqrt{2} B \\ &= \frac{33}{108} \sqrt{2} B = \frac{11}{36} \sqrt{2} B = 0.43 B \end{aligned}$$

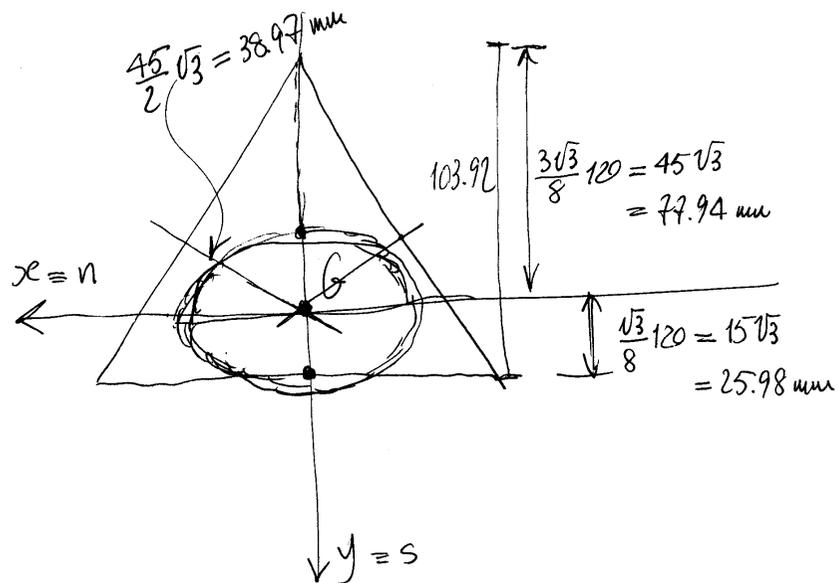
$$\begin{aligned} \sigma_A = \frac{N}{S_n} S_A &= \frac{11}{36} \sqrt{2} \frac{12}{129} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{N}{B^2} \\ &= \frac{11}{387} \frac{N}{B^2} = 2.84 \times 10^{-2} \frac{N}{B^2} \end{aligned}$$

2.19 Esercizio 28



Sezione sottile chiusa triangolare soggetta ad un taglio.

1. Posizionare il baricentro e disegnare gli assi principali di inerzia;
2. Indicare l'asse di sollecitazione e l'asse neutro della flessione associata al taglio;
3. Scomporre la soluzione nella somma di due problemi;
4. Calcolare le tensioni tangenziali per il solo problema del momento torcente, utilizzando la nota proprietà del flusso delle tensioni tangenziali e l'equivalenza statica tra le tensioni e il momento torcente;
5. Calcolare le tensioni tangenziali per il solo problema del momento torcente, utilizzando la formula di Bredt.



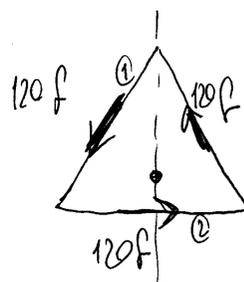
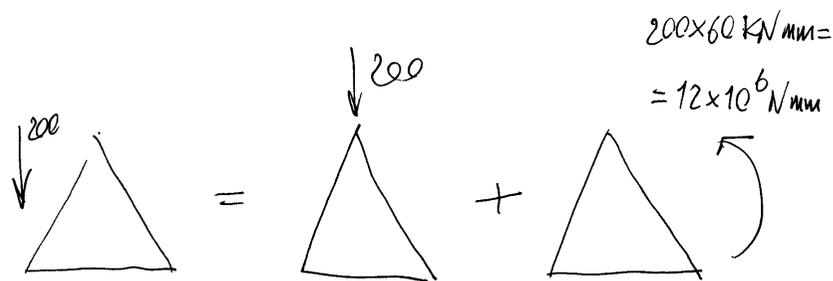
$J_{xy} = 0$

$$J_x = 12 \times 120 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{8} 120\right)^2 + 2 \times \left\{ \frac{6 \times 120^3}{12} \cos^2 30 + 6 \times 120 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{8} 120\right)^2 \right\}$$

$$= 3.24000 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$J_y = \frac{12 \times 120^3}{12} + 2 \times \left\{ \frac{6 \times 120^3}{12} \cos^2(-60) + 6 \times 120 \times (30)^2 \right\}$$

$$= 3.45600 \times 10^6 \text{ mm}^4$$



$f = \tau b$

$$120 \times \left(2 \frac{45\sqrt{3}}{2} + 15\sqrt{3}\right) f = 12 \times 10^6$$

$$60\sqrt{3} f = 10^5$$

$$f = \frac{10^4}{6\sqrt{3}} = 962.25 \text{ N/mm}$$

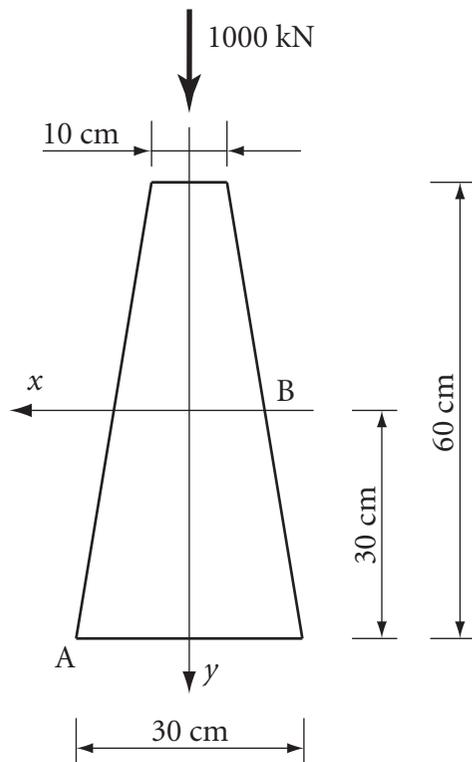
$$r = \frac{\sqrt{3}}{4} 120^2$$

$$f = \frac{12 \times 10^6}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} 120^2} = 962.25 \text{ N/mm}$$

$$\tau_1 = 160.38 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_2 = 80.19 \text{ N/mm}^2$$

2.20 Esercizio 29



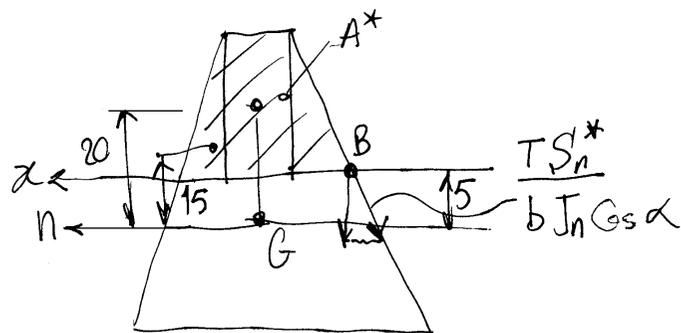
$\alpha = \arctan \frac{10}{60} = 9.46^\circ$
 $\cos \alpha = 0.986394$

$A^1 = 10 \times 60 = 600 \text{ cm}^2$
 $A^2 + A^3 = 10 \times 6 = 60 \text{ cm}^2$

$J_n = \frac{10 \times 60^3}{12} + (10 \times 60) \times 5^2 + 2 \left[\frac{10 \times 60^3}{36} + \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 60 \right) \times 5^2 \right] = 135000 \text{ cm}^4 = 330000 \text{ cm}^4$

Data la sezione compatta simmetrica di Figura, soggetta ad un taglio simmetrico:

1. Indicare il baricentro, gli assi principali di inerzia e infine gli assi di sollecitazione e neutro della flessione associata al taglio;
2. Calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse neutro;
3. Calcolare la tensione tangenziale totale nel punto B.



$$S_n^* = (10 \times 30) \times 20 + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 30 \right) \times 15 = 8250 \text{ cm}^3$$

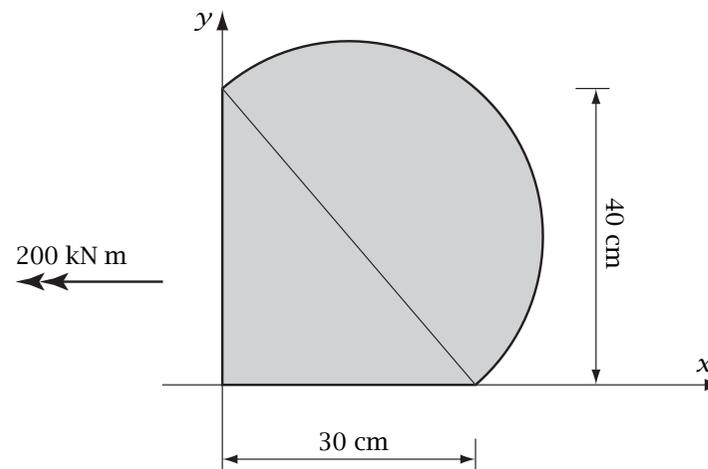
$$b = 20 \text{ cm}$$

$$\tau_B = \frac{1}{G s \alpha} \frac{1 \times 10^6 \times 8.25 \times 10^6}{200 \times 33 \times 10^8} =$$

$$= \frac{8.25}{G s \alpha \times 33} \times 10^2 = \frac{8.25}{1.9728 \times 33} 10^2$$

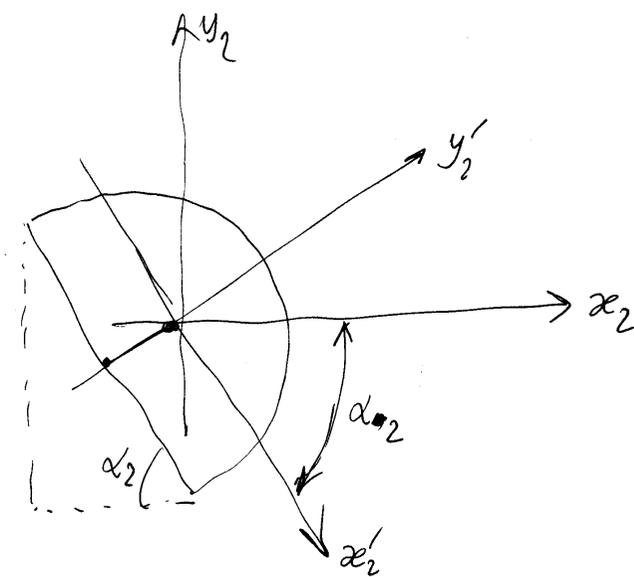
$$= 12.67 \text{ N/mm}^2$$

2.21 Esercizio 30

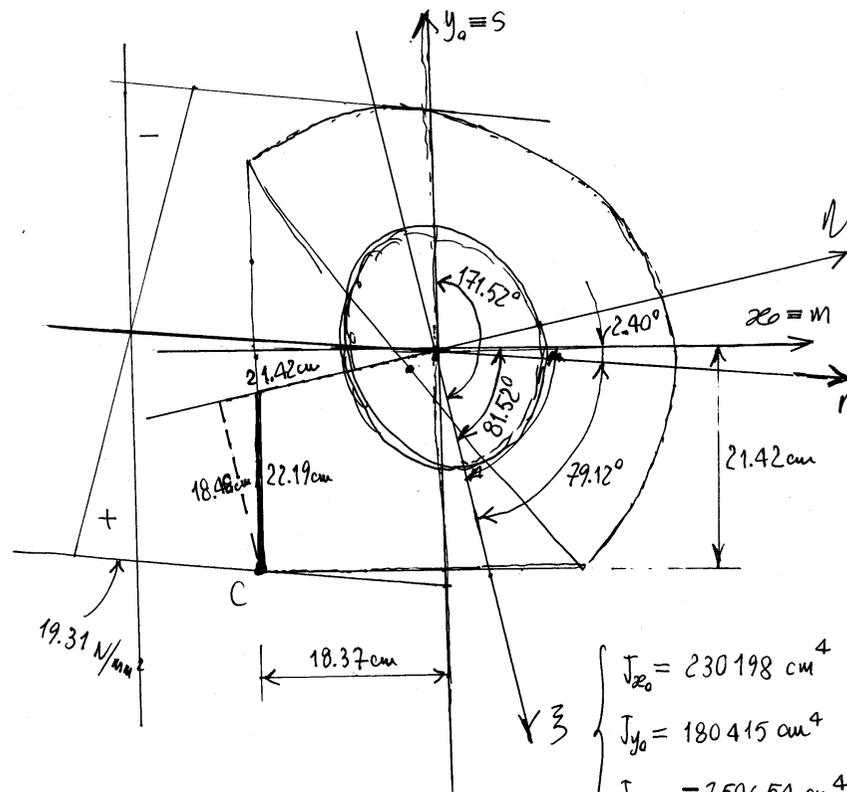


Data la sezione piena di figura, composta da un triangolo e un semicerchio, soggetta ad un momento flettente di 200 kN m con asse momento avente la direzione dell'asse x e verso opposto, determinare:

1. Il baricentro G ;
2. Gli assi principali di inerzia ξ e η , i momenti principali di inerzia J_ξ e J_η e i raggi principali di inerzia ρ_ξ e ρ_η ;
3. Disegnare in scala la circonferenza di Mohr e l'ellisse centrale di inerzia.
4. Calcolare l'inclinazione dell'asse neutro rispetto all'asse x e disegnare il diagramma qualitativo delle tensioni normali;
5. Calcolare la tensione normale massima a trazione utilizzando la formula binomia
6. Calcolare la tensione normale massima a trazione utilizzando la formula monomia.



$$\alpha_2 = \arctan \frac{4}{3} = 53.13^\circ$$

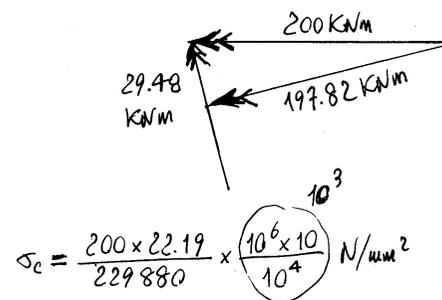


$$\begin{cases} J_{z_0} = 230198 \text{ cm}^4 \\ J_{y_0} = 180415 \text{ cm}^4 \\ J_{z_0 y_0} = 7586.54 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_z = 179285 \text{ cm}^4 \\ J_y = 231328 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

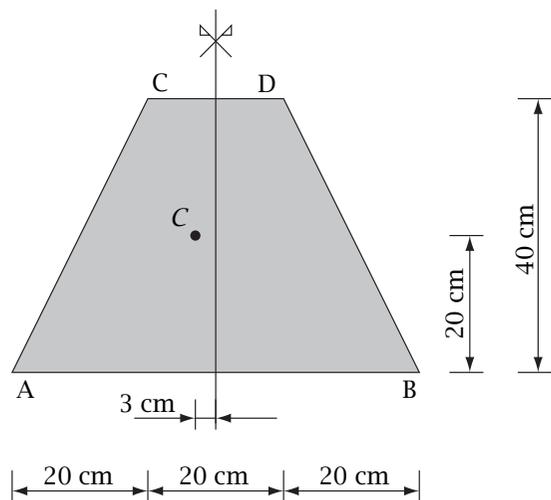
$$\begin{cases} p_z = 10.65 \text{ cm} \\ p_y = 12.09 \text{ cm} \end{cases}$$

$$J_n = 229880 \text{ cm}^4$$



$$\sigma_c = \frac{200 \times 22.19}{229880} \times \frac{10^6 \times 10}{10^4} \text{ N/mm}^2$$

2.22 Esercizio 31



La sezione assialsimmetrica di figura è soggetta ad una forza normale di compressione di 500 kN, applicata in corrispondenza del punto C.

1. Determinare le caratteristiche inerziali della figura piana (area, baricentro, assi principali di inerzia, momenti principali di inerzia e raggi di inerzia) e disegnare in scala l'ellisse centrale di inerzia;
2. Disegnare qualitativamente l'asse neutro e il diagramma delle tensioni normali;
3. Determinare il nocciolo centrale di inerzia;
4. Calcolare la tensione normale massima a compressione utilizzando la formula di Navier;
5. Determinare le intersezioni dell'asse neutro con gli assi principali.

$$A = 40 \times 40 = 1600 \text{ cm}^2$$

$$y_G = 20 + \frac{40}{3} \cdot 13.33 = 16.67 \text{ cm}$$

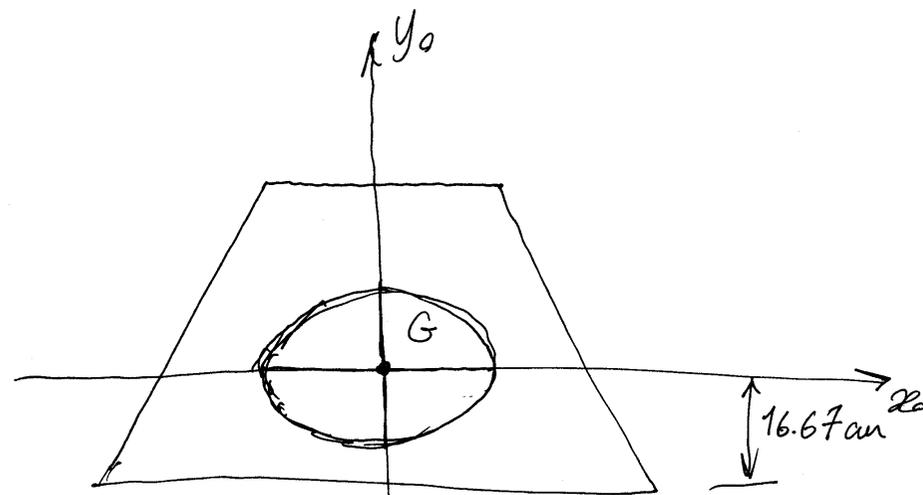
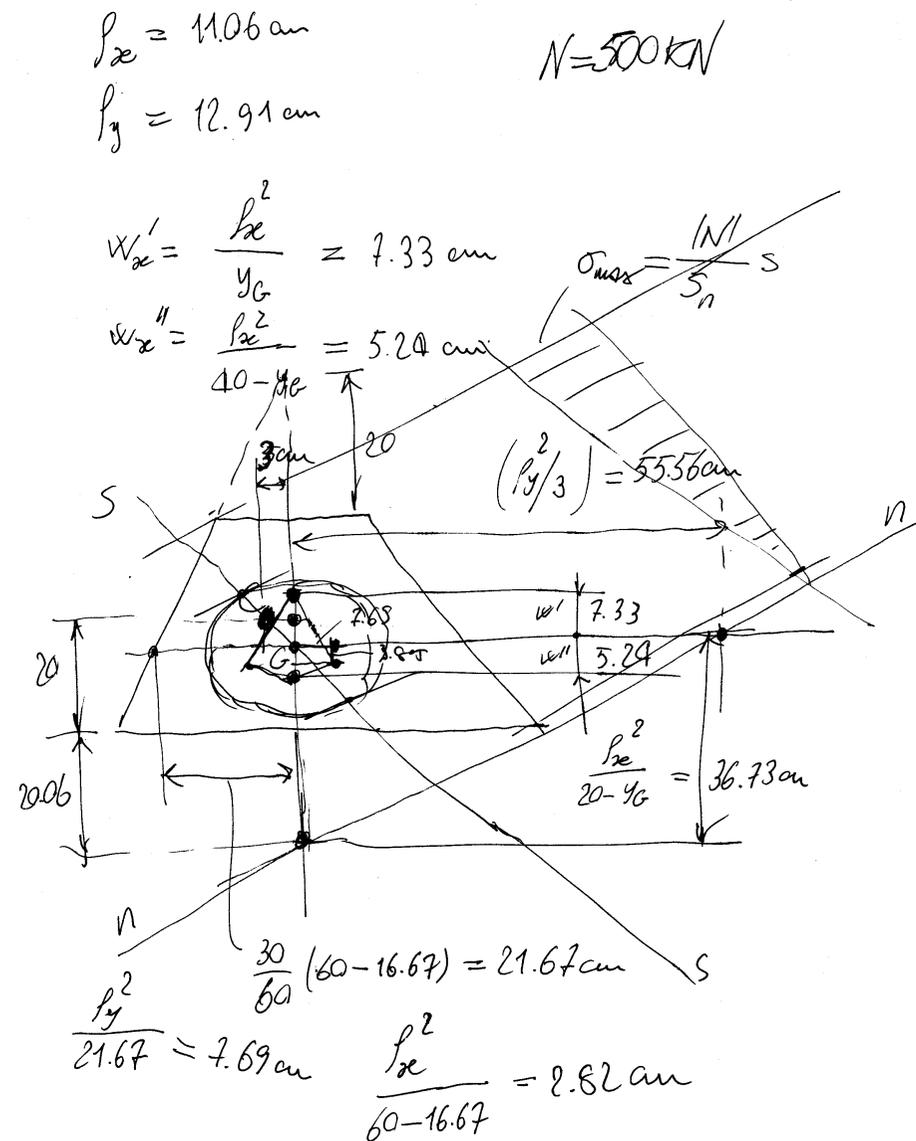
$$J_x = \frac{20 \times 40^3}{12} + (20 \times 40)(20 - 16.67)^2 + \frac{2 \times 20 \times 40^3}{36} + (20 \times 40) \times (16.67 - 13.33)^2$$

$$= 195556 \text{ cm}^4$$

$$= 26667 \text{ cm}^4 + 17778 + 222222$$

$$J_y = \frac{20^3 \times 40}{12} + 2 \frac{20^3 \times 40}{36} + (20 \times 40) \times (10 + \frac{20}{3})^2 = 240000$$

$$= 266667 \text{ cm}^4$$



$A = 1600 \text{ cm}^2$
 $J_{x_0} = 195556 \text{ cm}^4$
 $J_{y_0} = 266667 \text{ cm}^4$
 $I_{x_0} = 11.06 \text{ cm}$
 $I_{y_0} = 12.91 \text{ cm}$

$$\sigma_{max} = \frac{500 \times 10^3}{1600 \times 10^2}$$

$$+ \frac{500 \times 10^3 \times (20 - 16.67) \times 10}{195.556 \times 10^7} (40 - 16.67) \times 10$$

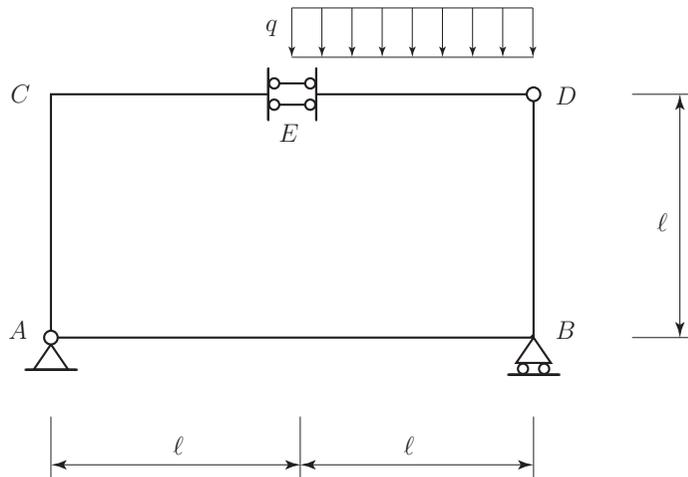
$$+ \frac{500 \times 10^3 \times 3 \times 10}{266.667 \times 10^7} \times 10 \times 10 =$$

$$= 3.13 + 1.99 + 0.56 = 5.68 \text{ N/mm}^2$$

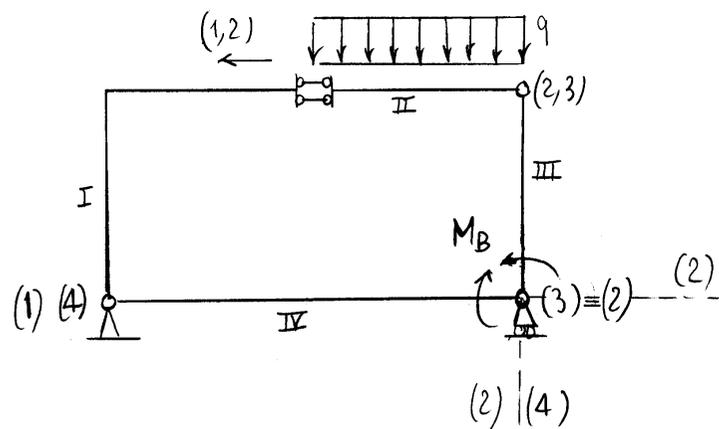
ESERCIZI SUI CENTRI ASSOLUTI E RELATIVI

3.1 Esercizio 32

Cinematica rigida infinitesima per il calcolo del momento flettente in B

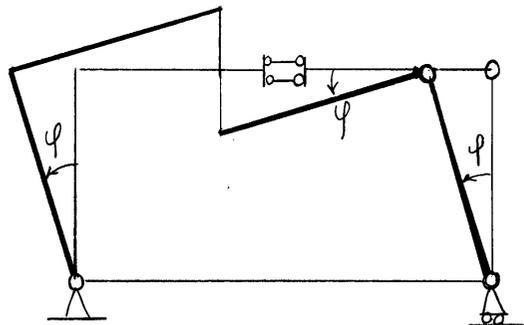


Determinare il momento flettente in B utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;



(4) non esiste $\Rightarrow (3) \equiv B$

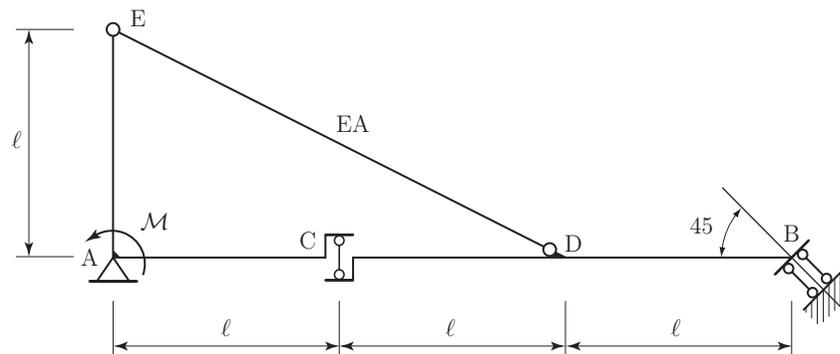
$(3) \equiv (2)$ e $(2,3) \neq (3) \Rightarrow$ II e III non subiscono moti relativi



$$L_e = (ql) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) + M_B \varphi$$

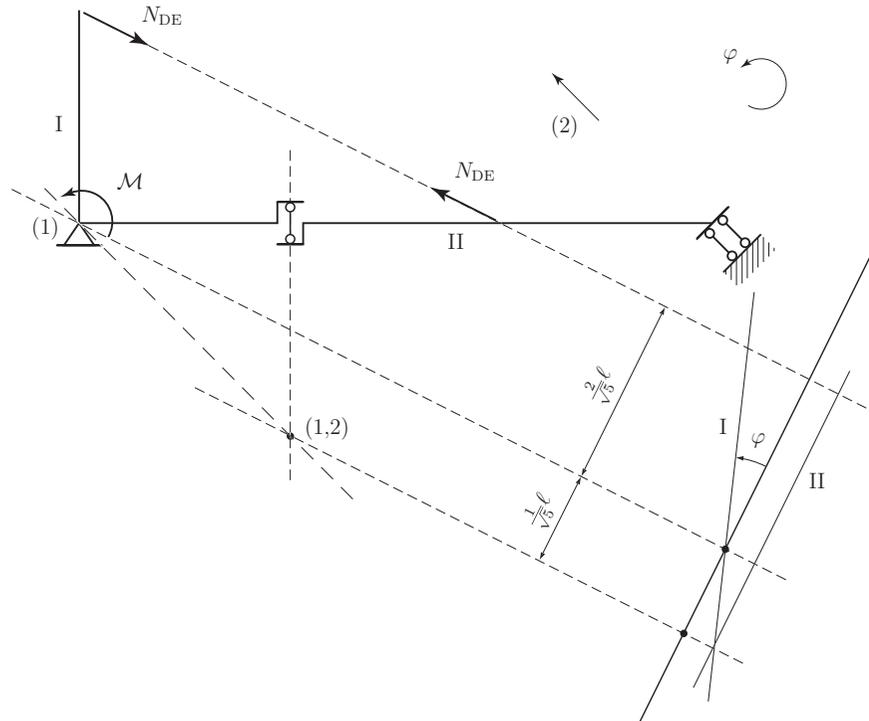
$$L_e = 0 \Rightarrow M_B = -\frac{1}{2} ql^2$$

3.2 Esercizio 33



Determinare la forza normale nel pendolo DE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.

Cinematica rigida infinitesima per il calcolo della forza normale nel pendolo DE

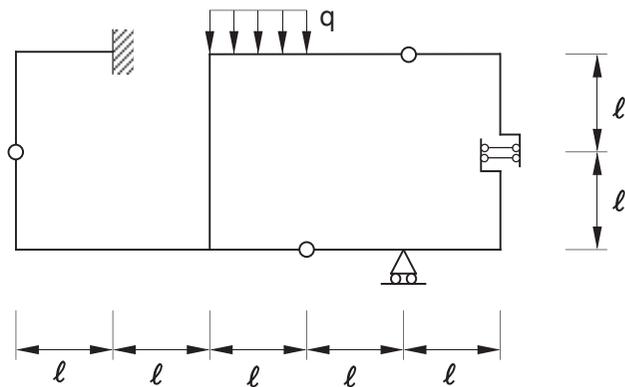


$$L_{ve} = \mathcal{M}\varphi - N_{DE} \frac{2}{\sqrt{5}} \varphi l - N_{DE} \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi l$$

$$L_{ve} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{DE} = \frac{\sqrt{5}}{3} \frac{\mathcal{M}}{l}$$

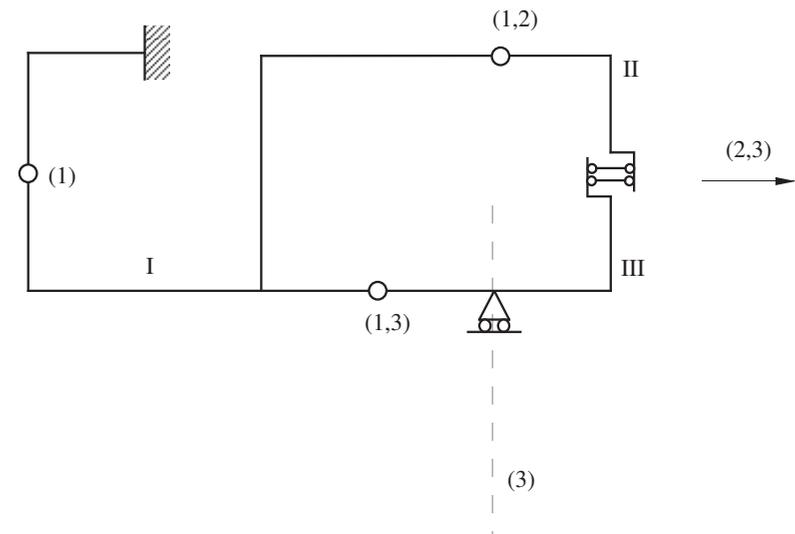
ESERCIZI SU SISTEMI DI TRAVI ISOSTATICI

4.1 Esercizio 34

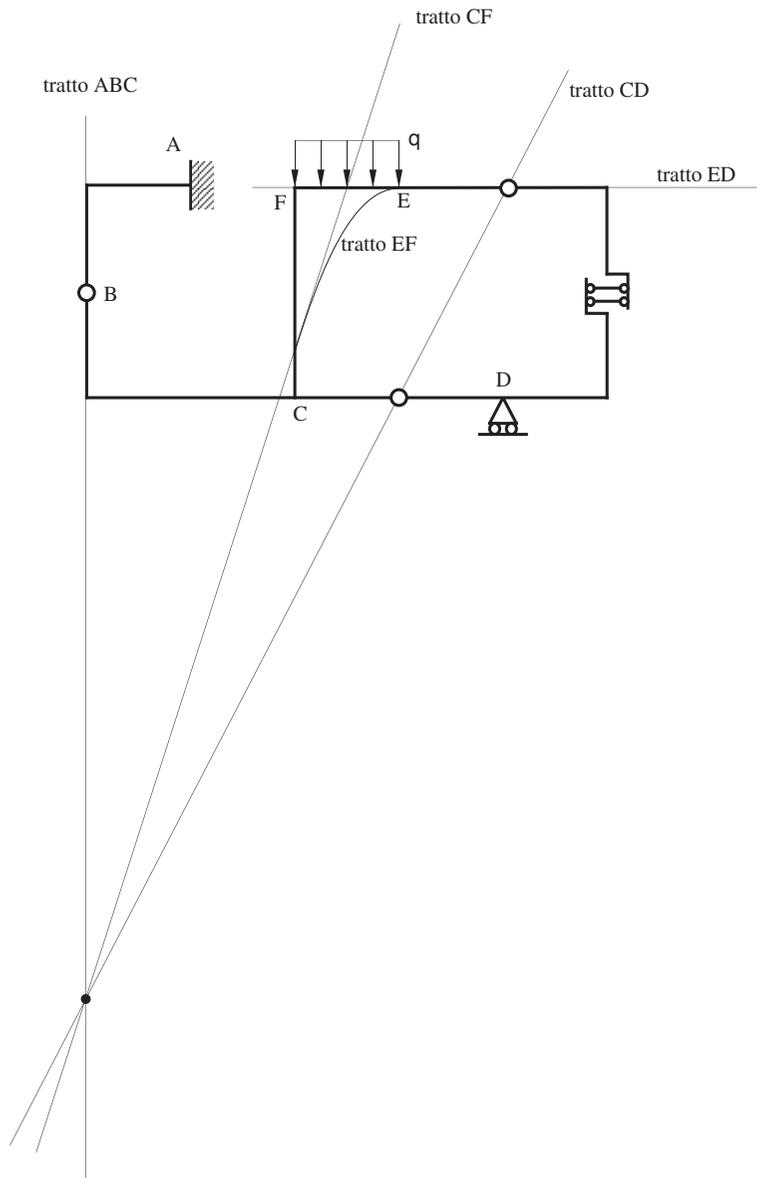


- Verificare l'isostaticità della struttura
- Definire la curva delle pressioni
- Determinare le reazioni interne ed esterne
- Tracciare il diagramma del momento flettente

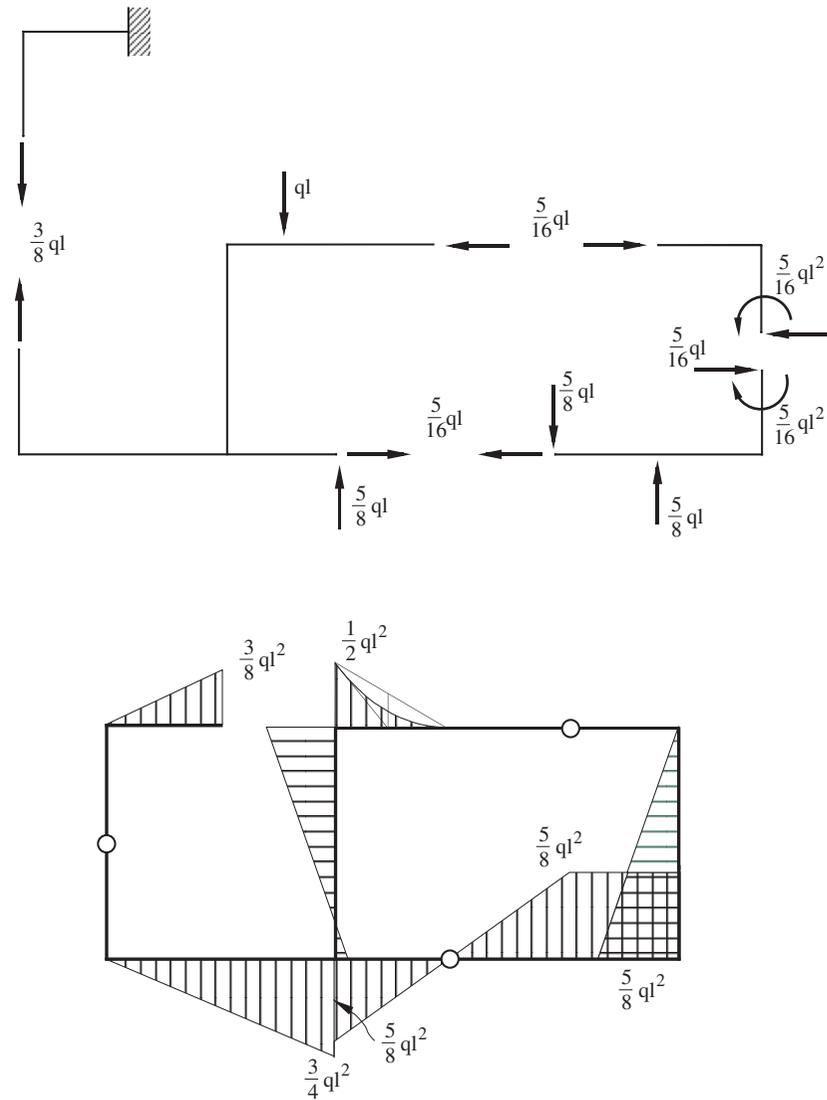
Verifica dell'isostaticità



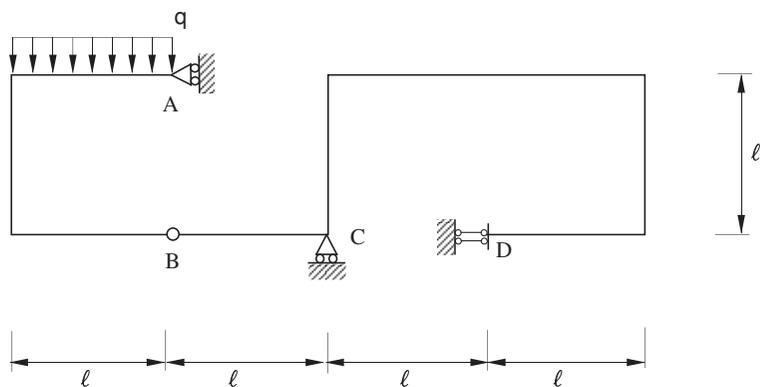
Curva delle pressioni



Reazioni interne ed esterne e diagramma del momento flettente

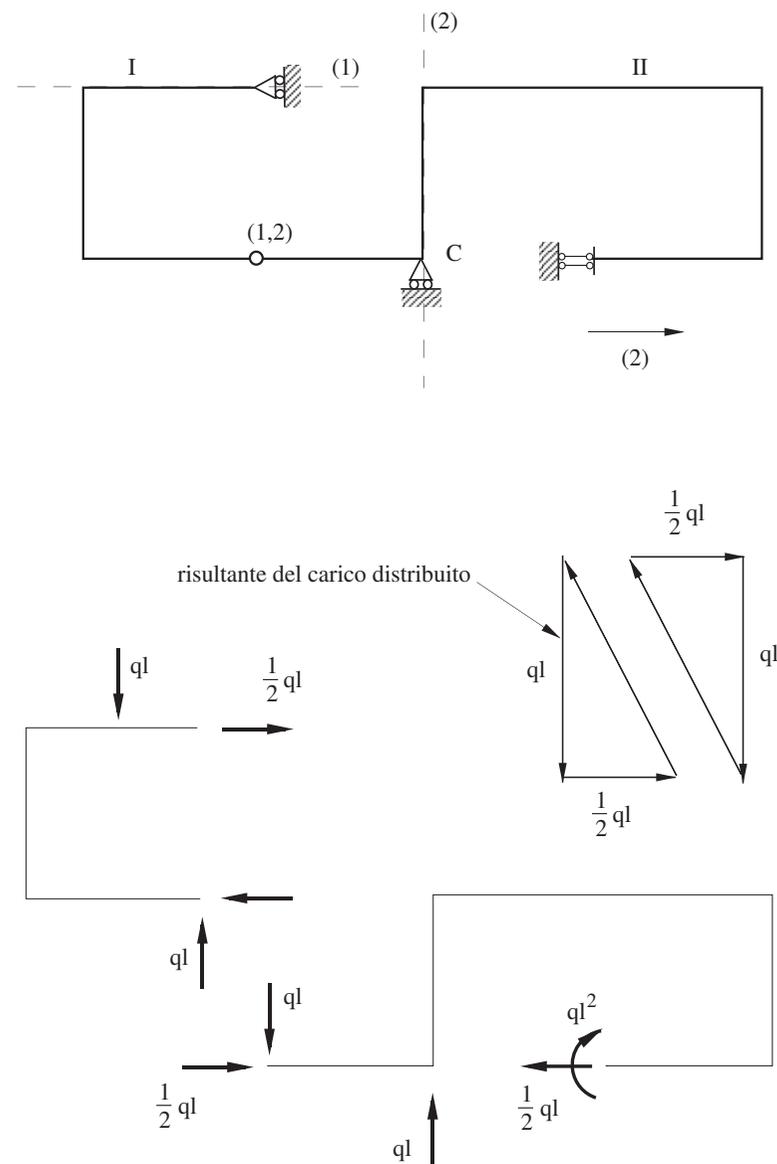


4.2 Esercizio 35



- a) Verificare l'isostaticità della struttura;
- b) Definire la curva delle pressioni;
- c) Determinare le reazioni interne ed esterne;
- d) Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza della cerniera B utilizzando il principio dei lavori virtuali, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

Verifica dell'isostaticità e reazioni interne ed esterne



Curva delle pressioni

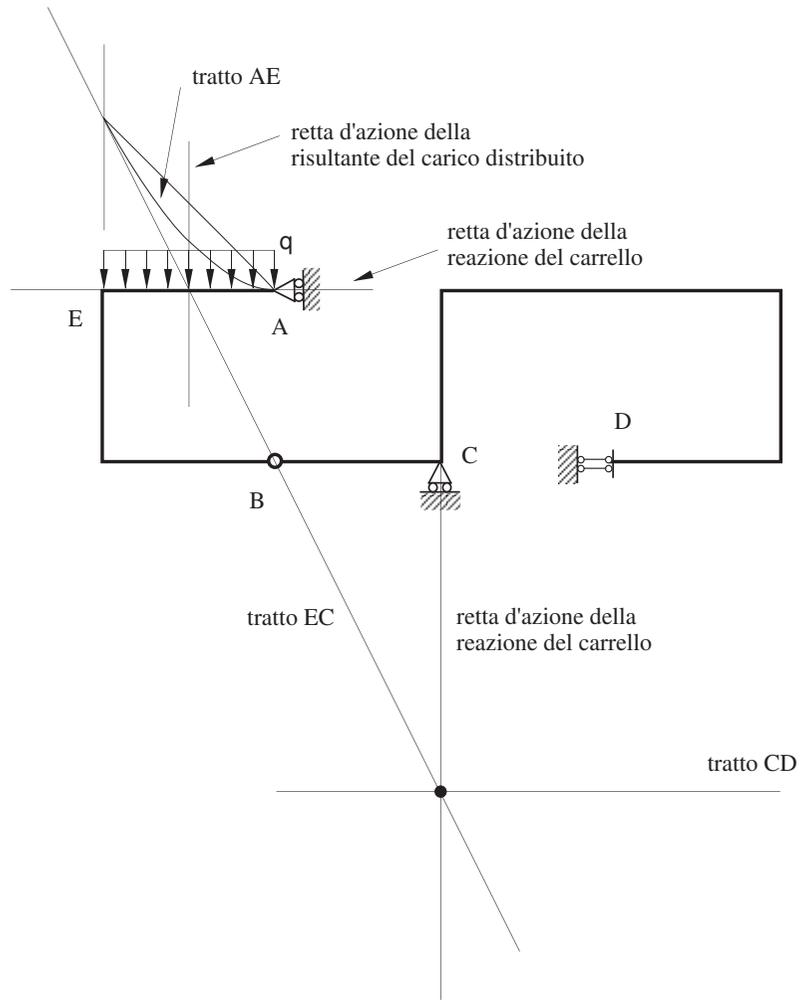
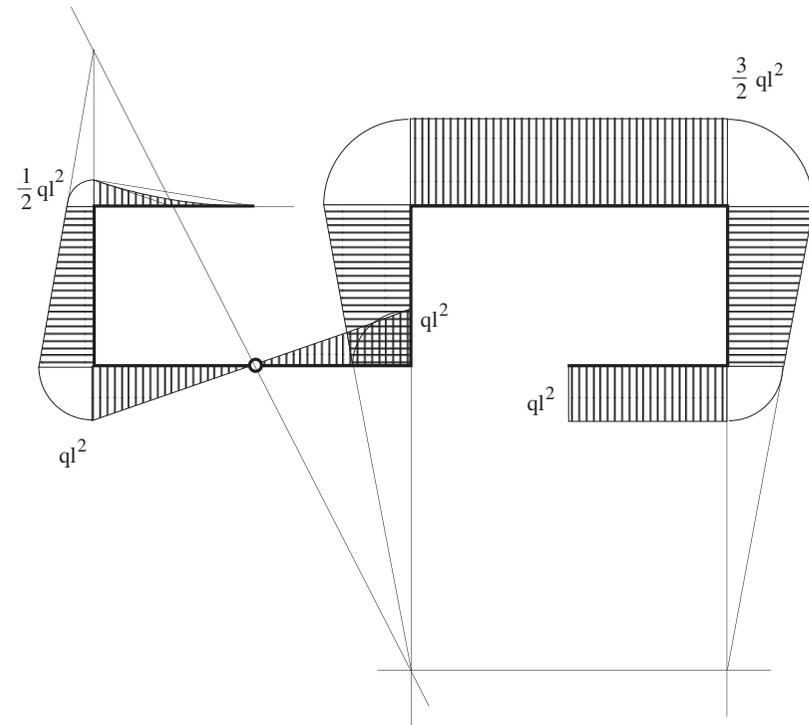
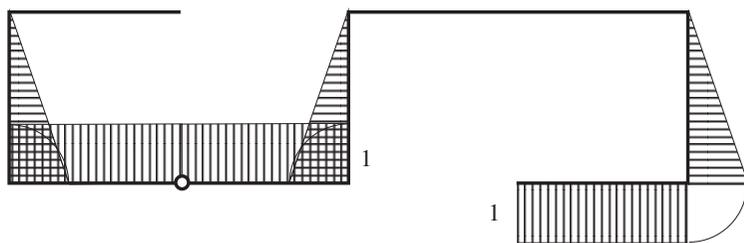
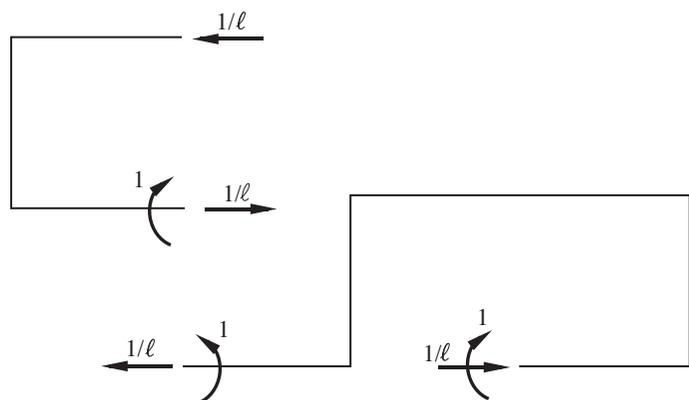
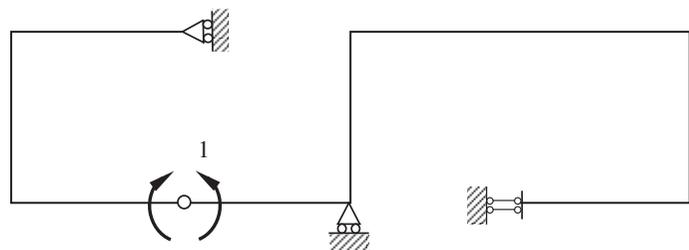


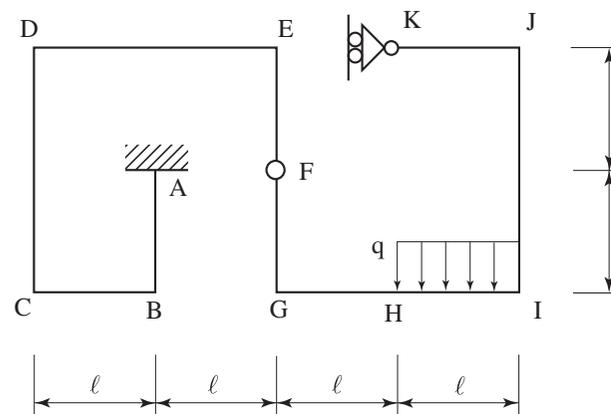
Diagramma del momento flettente



Schema delle forze per il calcolo della rotazione relativa nella cerniera B

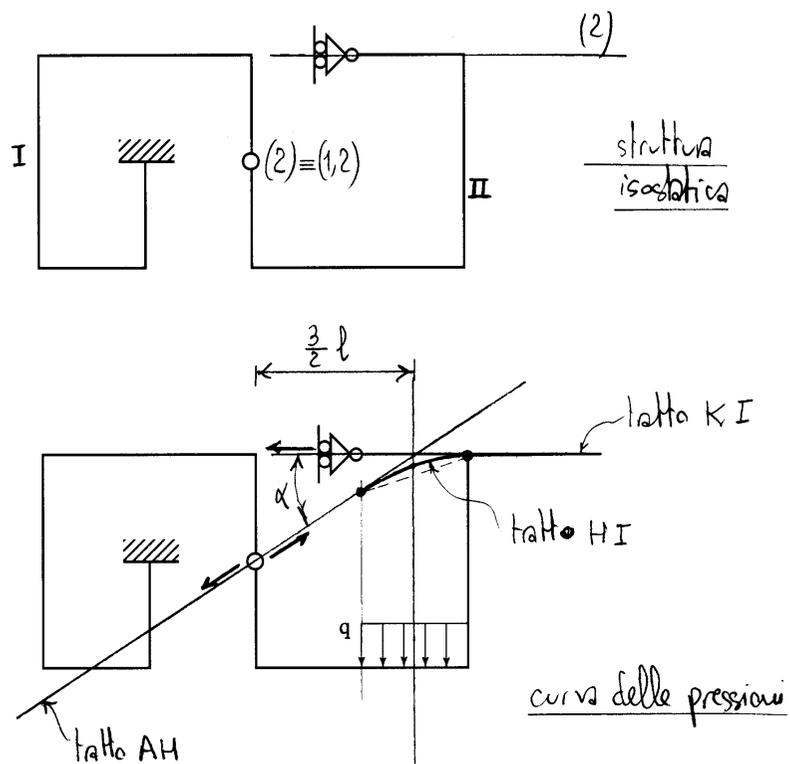


4.3 Esercizio 36

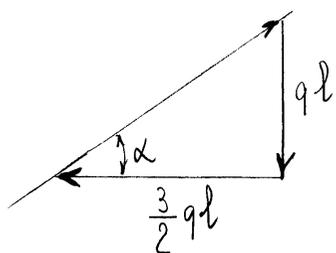


- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare la curva delle pressioni;
- 3) Determinare graficamente le reazioni vincolari e quantificarle;
- 4) Tracciare il diagramma dei momenti facendo uso dei punti di nullo e quarto;
- 5) Tracciare i diagrammi quotati del taglio e dello sforzo normale;
- 6) Determinare il momento in corrispondenza dell'incastro utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 7) Impostare il calcolo dello spostamento del carrello facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo.

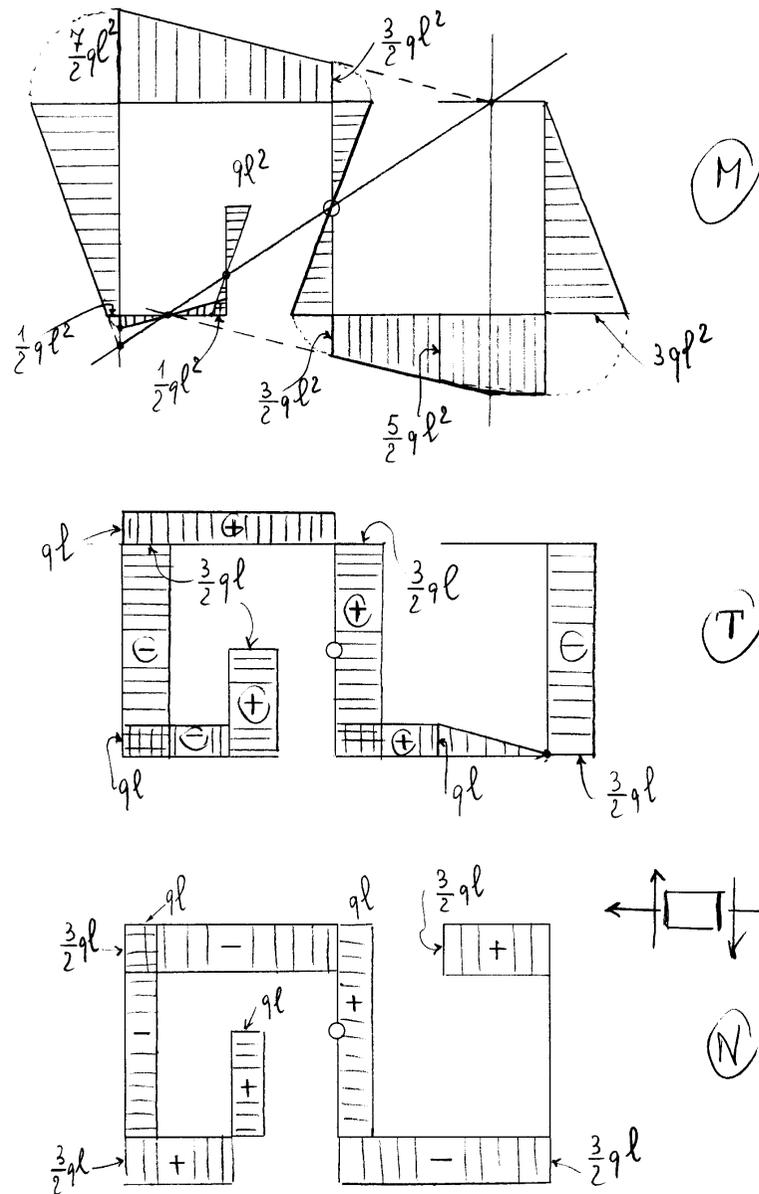
Verifica dell'isostaticità e curva delle pressioni



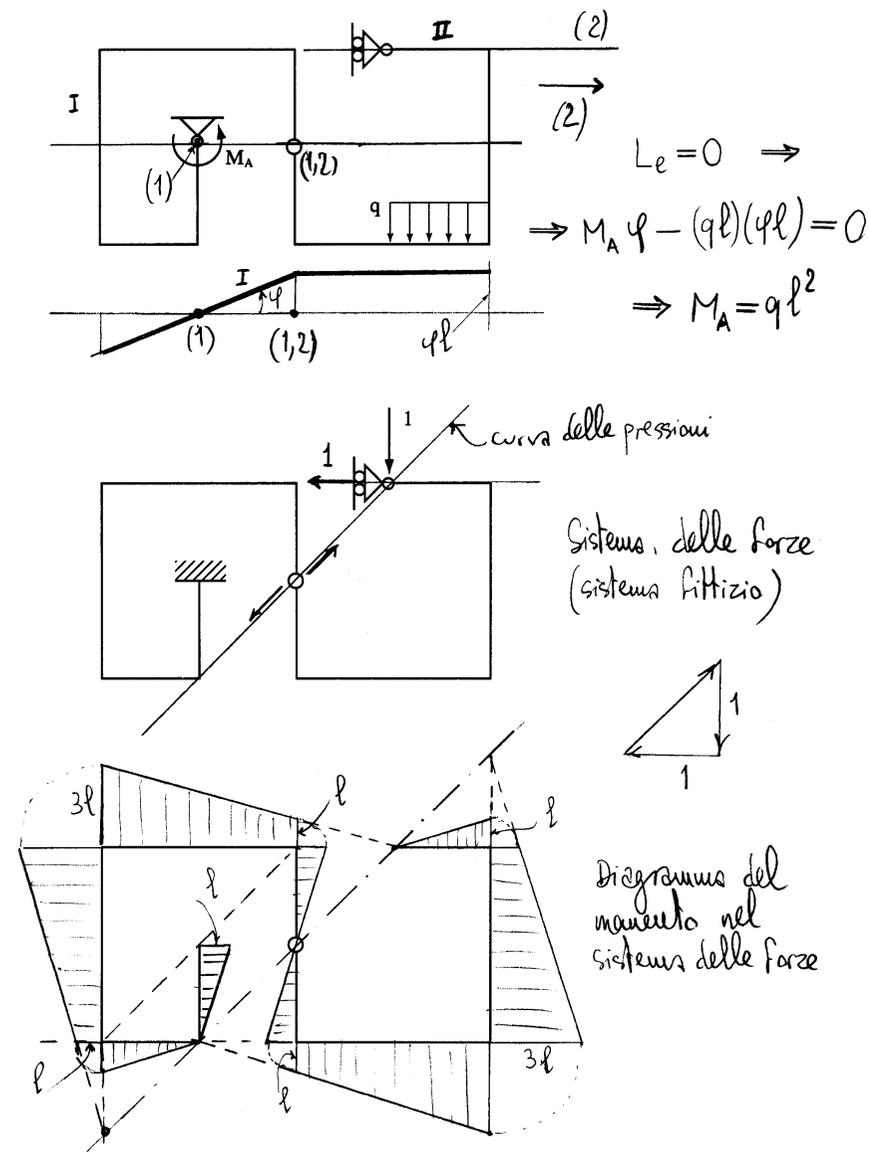
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{\frac{3}{2}l} = \frac{2}{3}$$



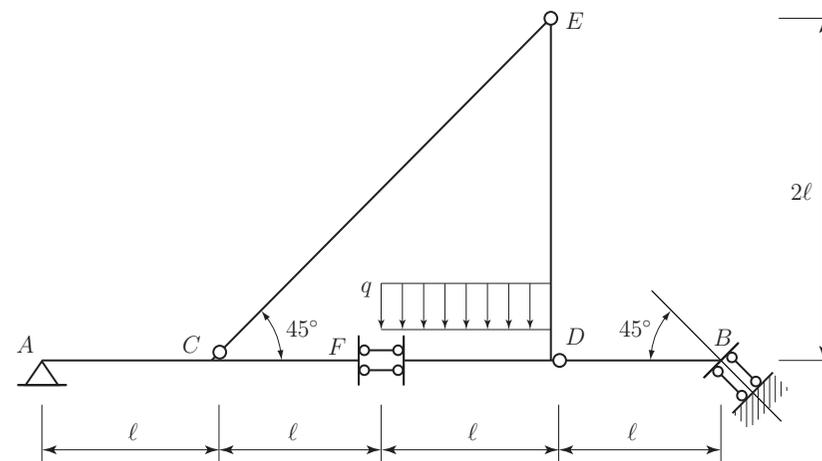
Diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione



Momento in corrispondenza dell'incastro e schema delle forze per il calcolo dello spostamento del carrello

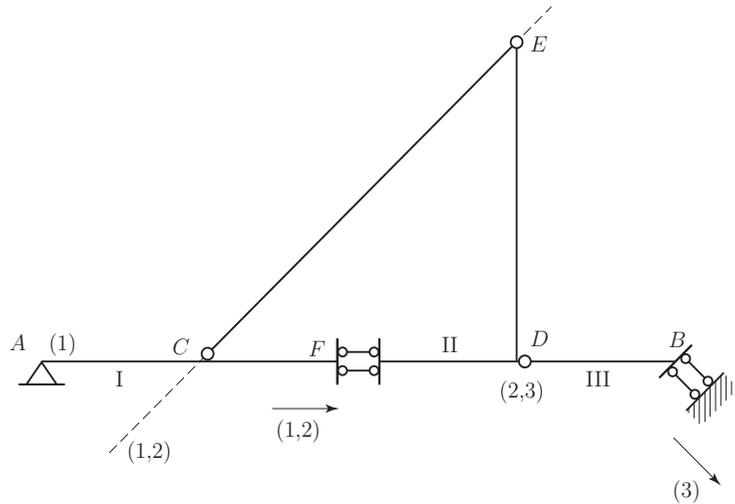


4.4 Esercizio 37



- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Determinare lo sforzo normale in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 6) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in F facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, nell'ipotesi che il pendolo CE sia indeformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Verifica dell'isostaticità



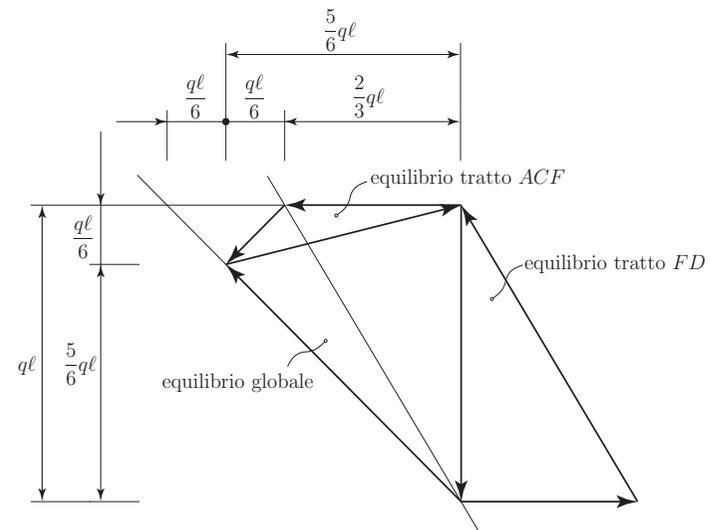
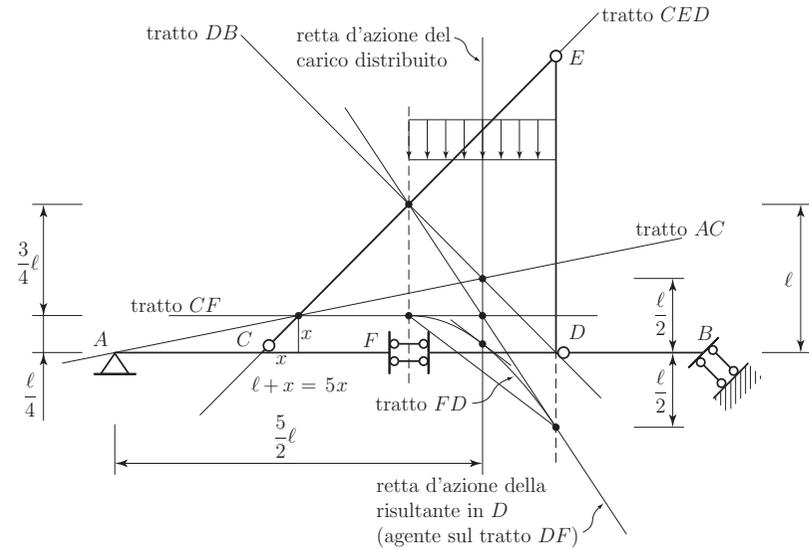
$(1,2)$ appartiene alla retta CE
 $(1,2)$ coincide con il punto improprio della retta AB

\Rightarrow I e II non subiscono moti relativi
 $\Rightarrow (1,3) \equiv (2,3)$ e $(1) \equiv (2)$
 $\Rightarrow (1), (1,3), (3)$ non sono allineati
 \Rightarrow gradi di labilità = 0

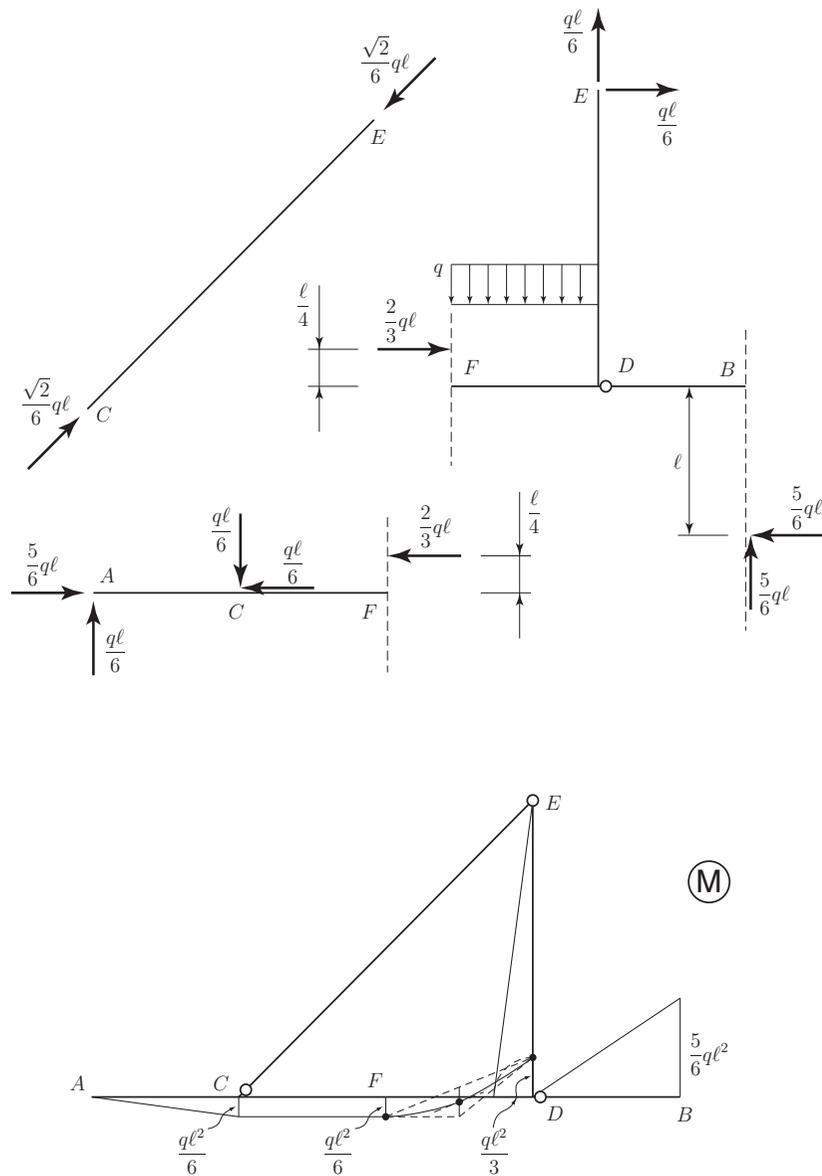
gradi di libertà = $3 \times 3 = 9$
 gradi di vincolo = $\frac{(2+2)}{\text{vincoli esterni}} + \frac{(1+2+2)}{\text{vincoli interni}} = 9$

\Rightarrow gradi di iperstaticità = 0

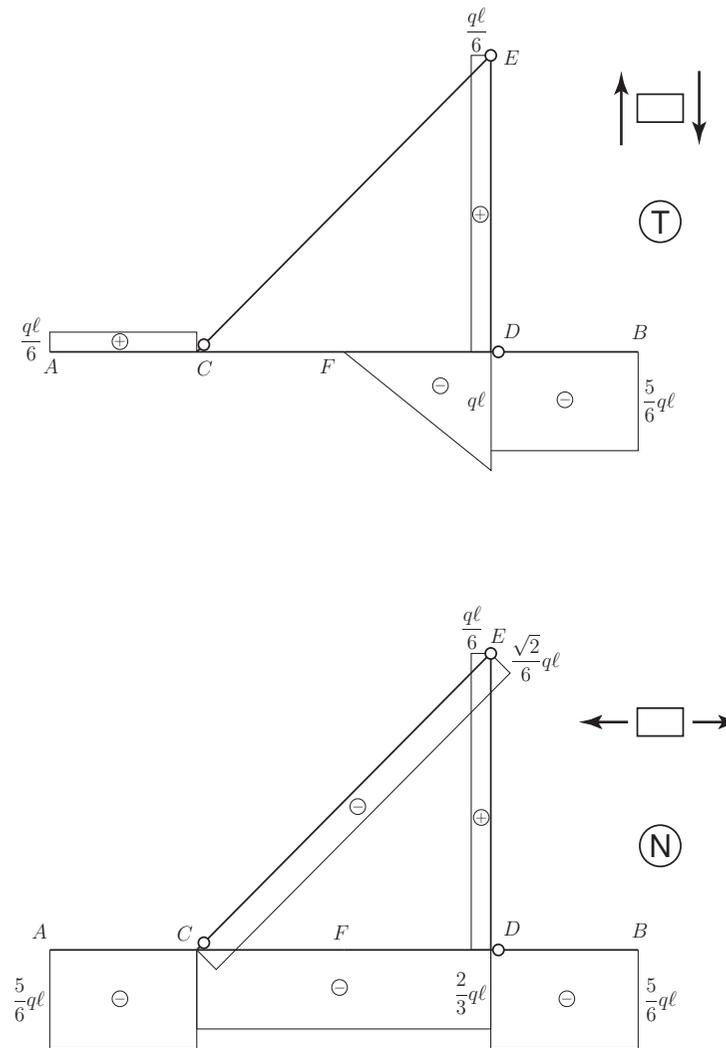
Curva delle pressioni e poligoni delle forze



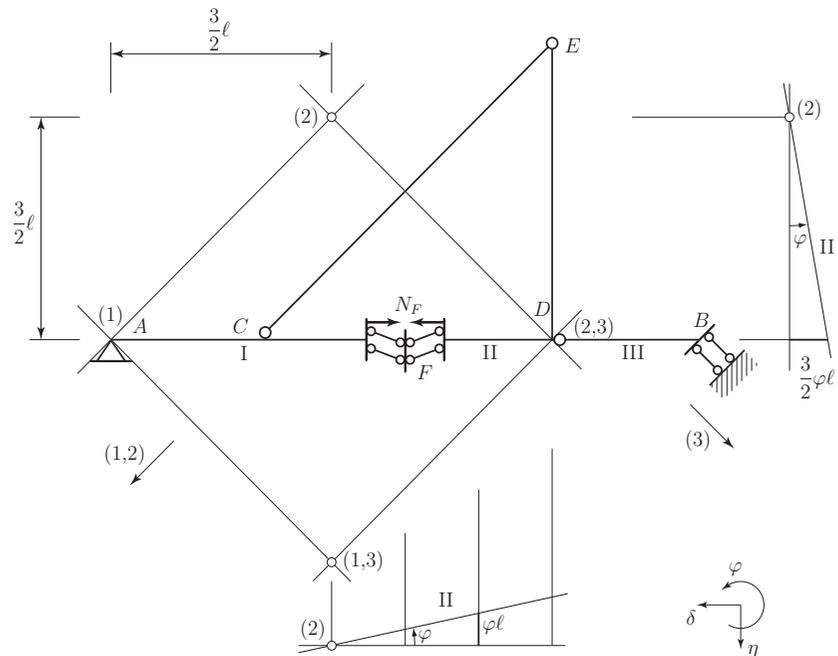
Reazioni interne ed esterne e diagramma del momento



Diagrammi del taglio e della forza normale

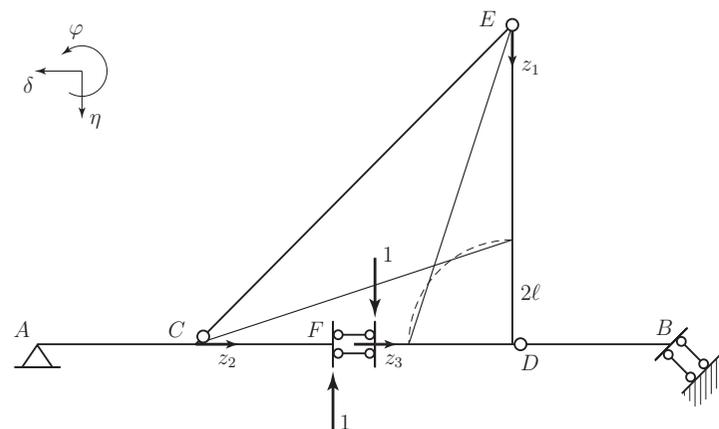


Calcolo della forza normale in F



$$-(N_F)\left(\frac{3}{2}\varphi\ell\right) - (q\ell)(\varphi\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad N_F = -\frac{2}{3}q\ell$$

Calcolo dello spostamento relativo in F

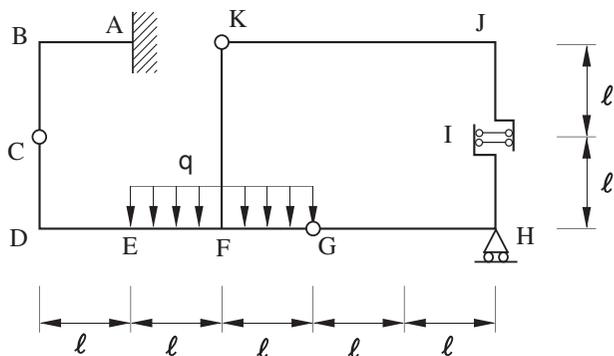


$$L_e = \eta_{FD} - \eta_{FC}$$

$$L_i = \int_0^{2\ell} (z_1)\left(\frac{q\ell}{6}z_1\right)\frac{dz_1}{EJ} - \int_0^\ell (z_2)\left(\frac{q\ell^2}{6}\right)\frac{dz_2}{EJ} - \int_0^\ell (\ell + z_3)\left(\frac{q\ell^2}{6} - \frac{qz_3^2}{2}\right)\frac{dz_3}{EJ}$$

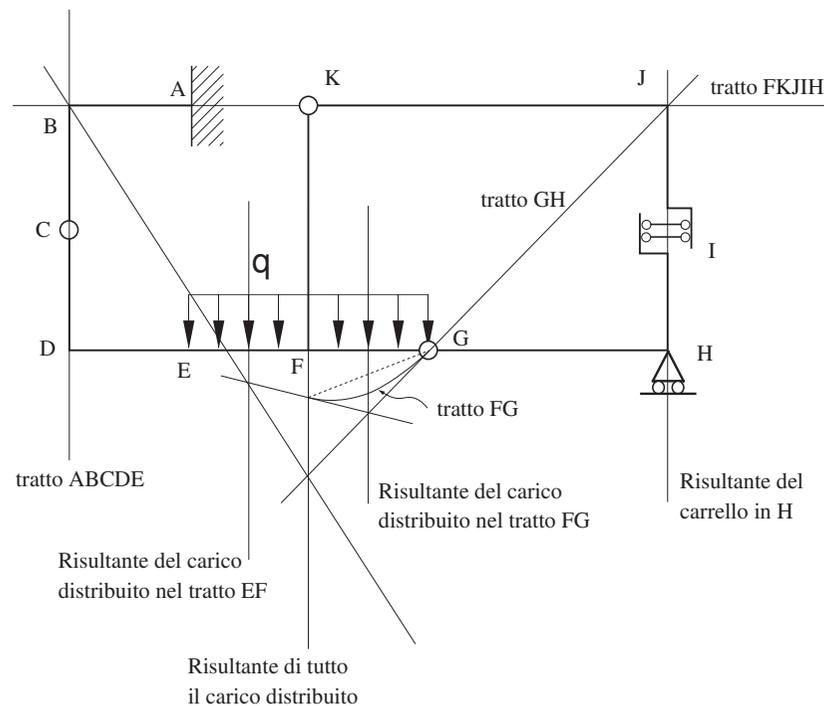
$$= \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{8}\right)\frac{q\ell^4}{EJ} = \frac{29}{72}\frac{q\ell^4}{EJ}$$

4.5 Esercizio 38



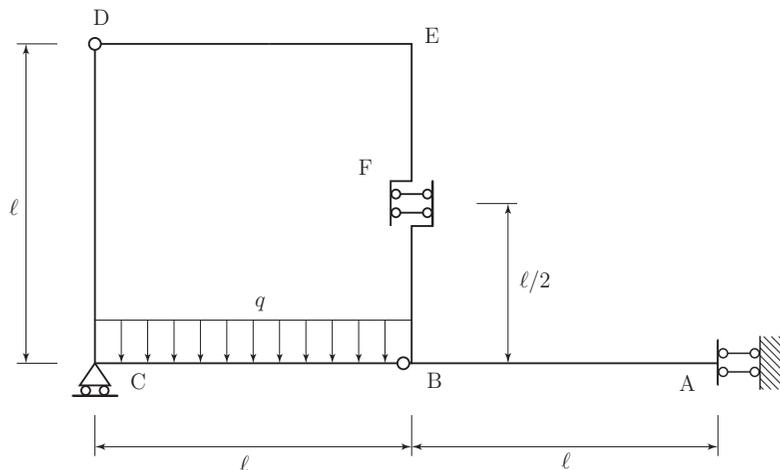
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni e determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Determinare lo sforzo di taglio in *I* utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 6) Determinare lo spostamento relativo (dovuto alla deformazione della struttura) in corrispondenza del doppio pendolo in *I* facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.

Curva delle pressioni



Nel tratto EF la curva delle pressioni degenera in un fascio di rette verticali

4.6 Esercizio 39



- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Determinare il taglio in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 5) Calcolare lo spostamento del nodo A utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
- 6) Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Curva delle pressioni e reazioni esterne ed interne

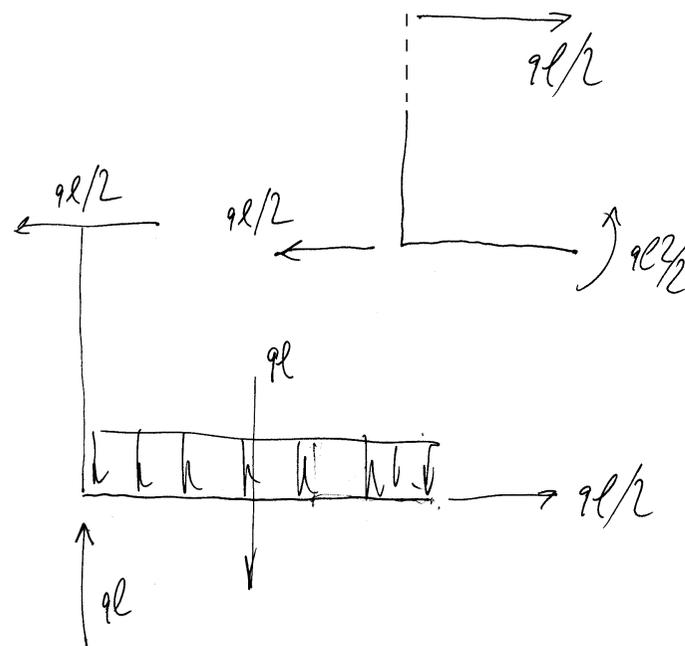
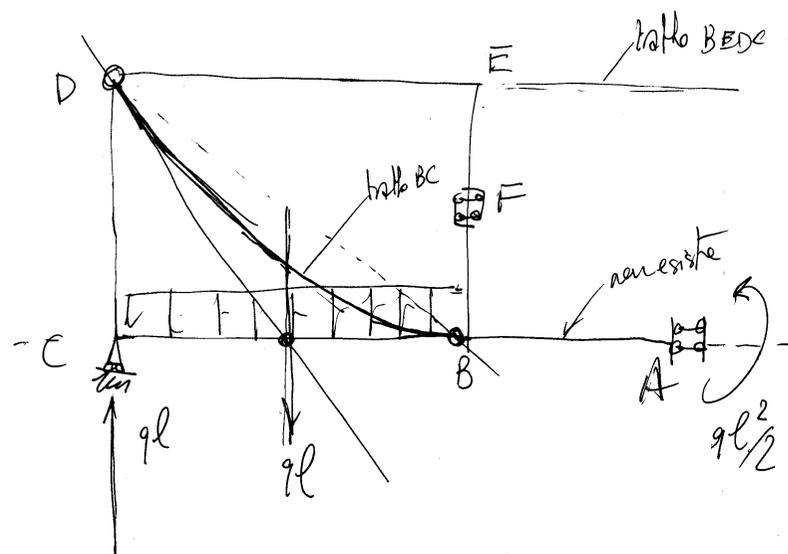
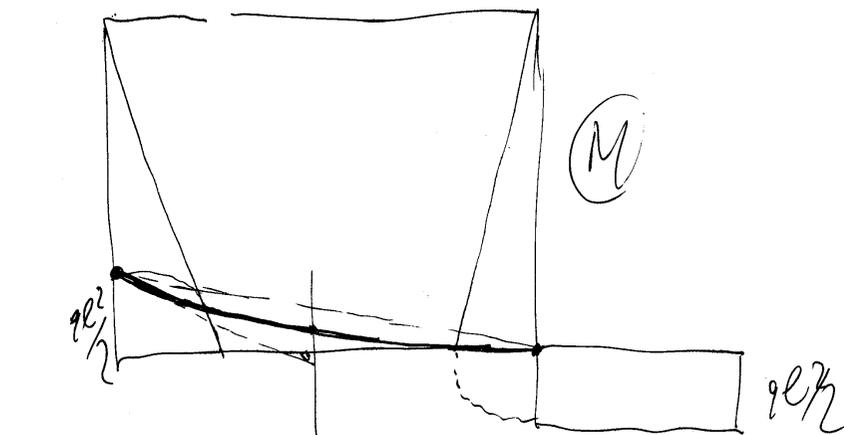
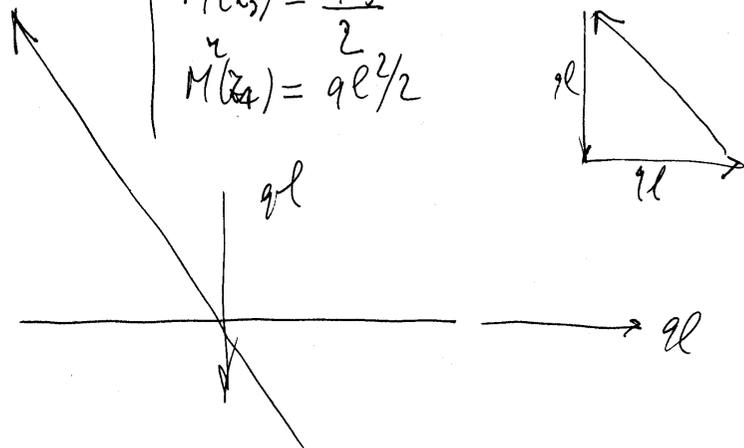


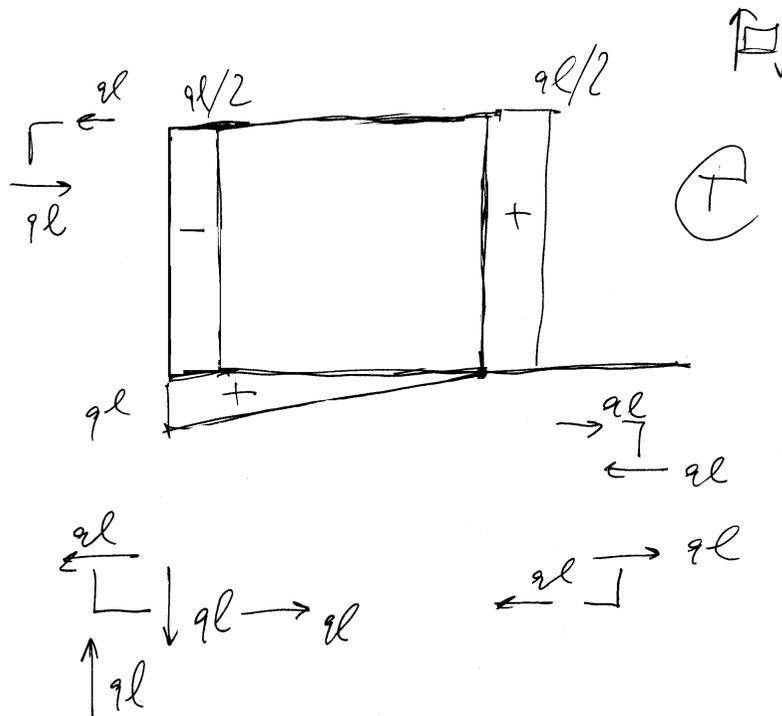
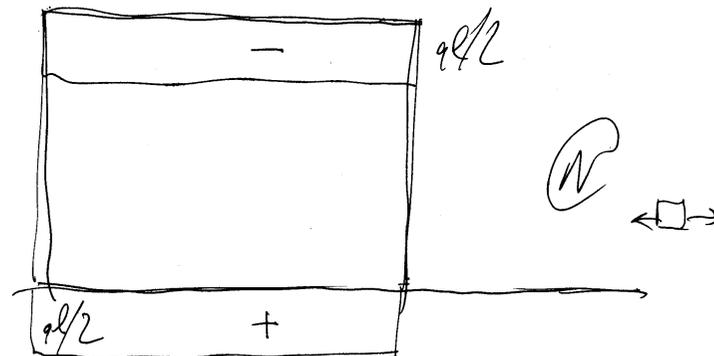
Diagramma del momento



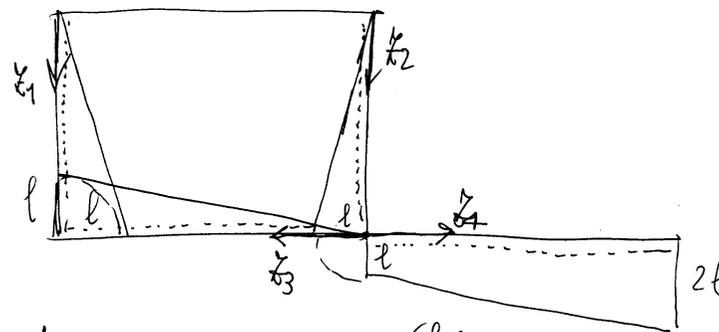
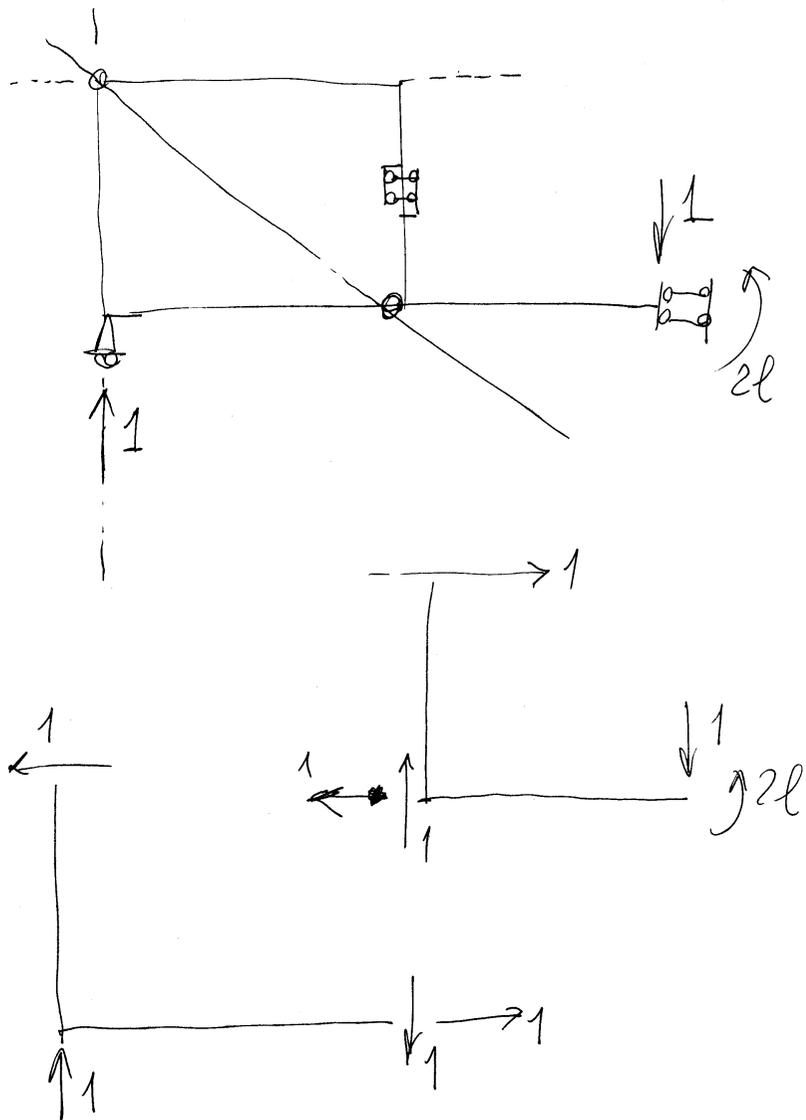
$$\begin{cases} M(z_1) = \frac{ql}{2} z_1 \\ M(z_2) = \frac{ql}{2} z_2 \\ M(z_3) = \frac{qlz_3^2}{2} \\ M(z_4) = qlz_4/2 \end{cases} \quad (r)$$



Diagrammi del taglio e della forza normale



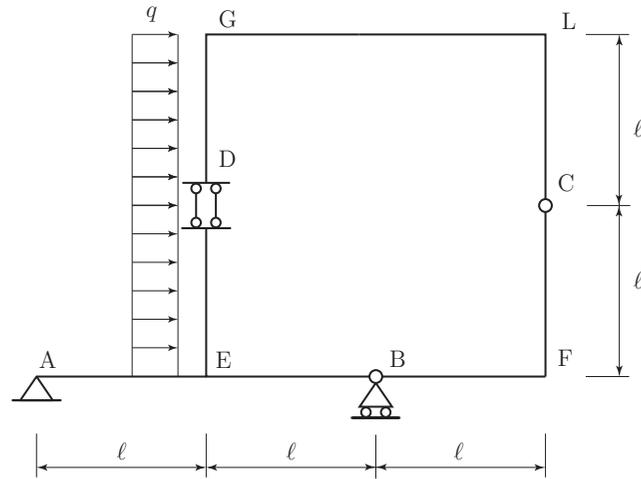
Calcolo dello spostamento di A



$$\begin{cases} M(z_1) = z_1 \\ M(z_2) = z_2 \\ M(z_3) = z_3 \\ M(z_4) = l + z_4 \end{cases} \quad (f)$$

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \int_A \\ L_{vi} &= \int \frac{M^p M^c}{EJ} ds = 2 \int_0^l \frac{ql}{2EJ} z^2 dz + \\ &+ \int_0^l \frac{q}{2EJ} z^3 dz + \int_0^l \frac{ql^2}{2EJ} (l+z) dz = \\ &= \frac{ql^4}{EJ} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} \right\} = \frac{8+3+18}{24} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{29}{24} \frac{ql^4}{EJ} \end{aligned}$$

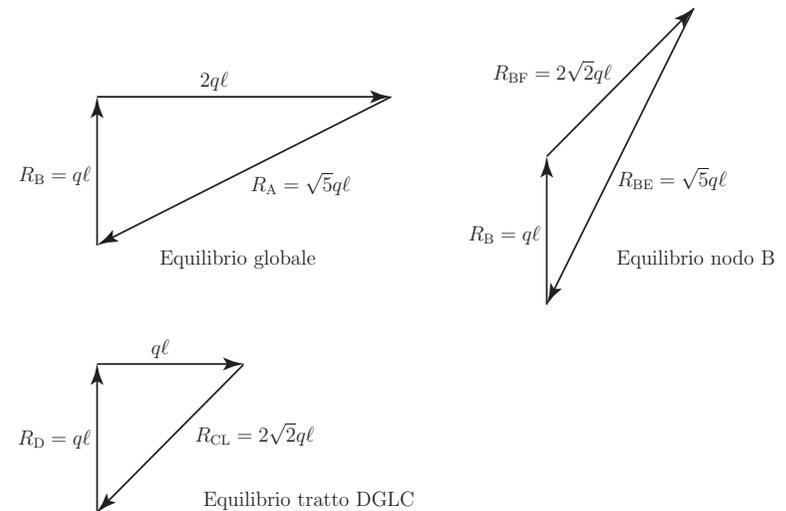
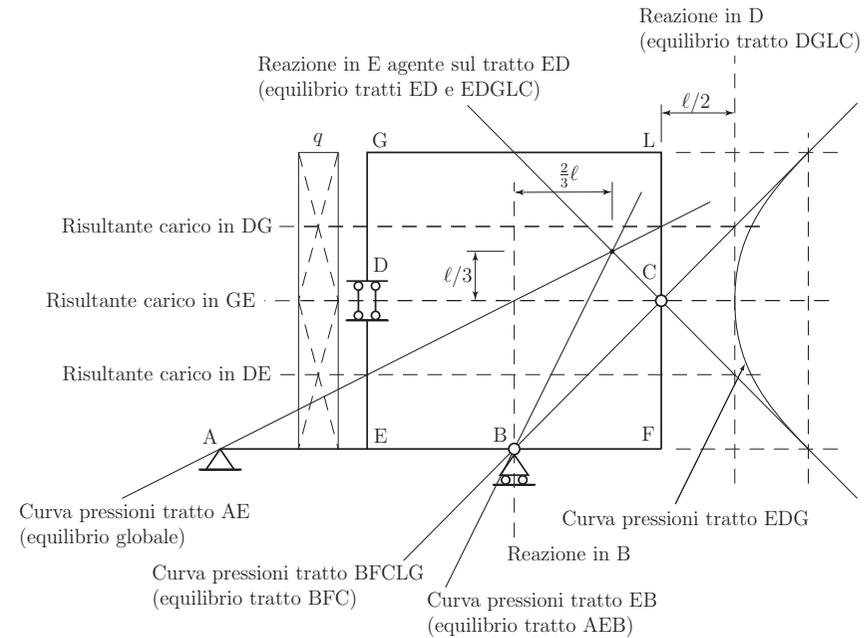
4.7 Esercizio 40



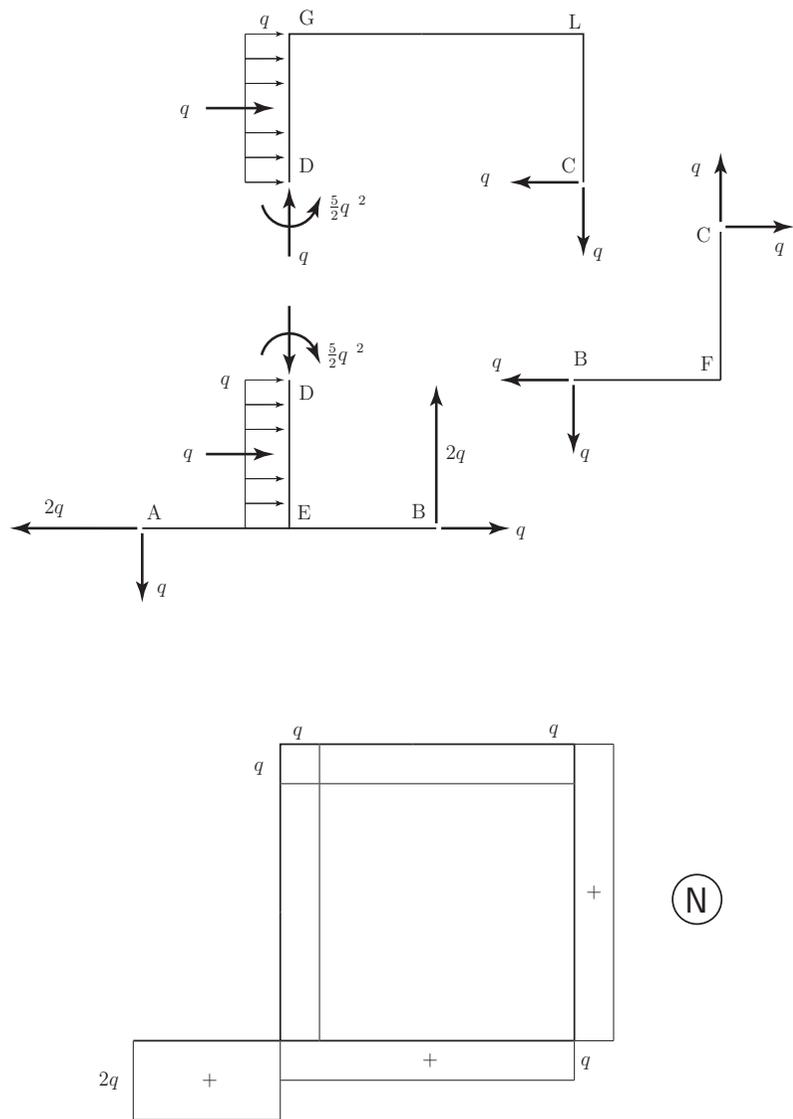
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante sul montante di sinistra:

- 1) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni;
- 4) Determinare il taglio in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 5) Impostare il calcolo della rotazione relativa in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando i diagrammi necessari a tal fine.

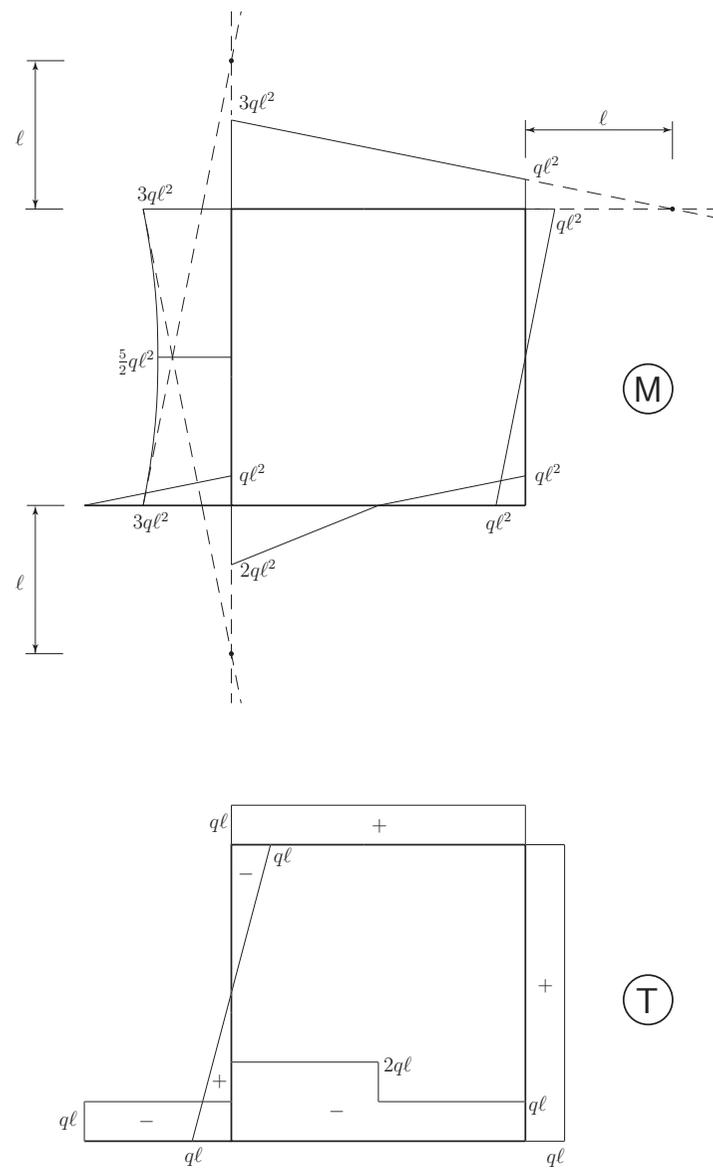
Curva delle pressioni e poligoni delle forze



Reazioni interne ed esterne e diagramma della forza normale

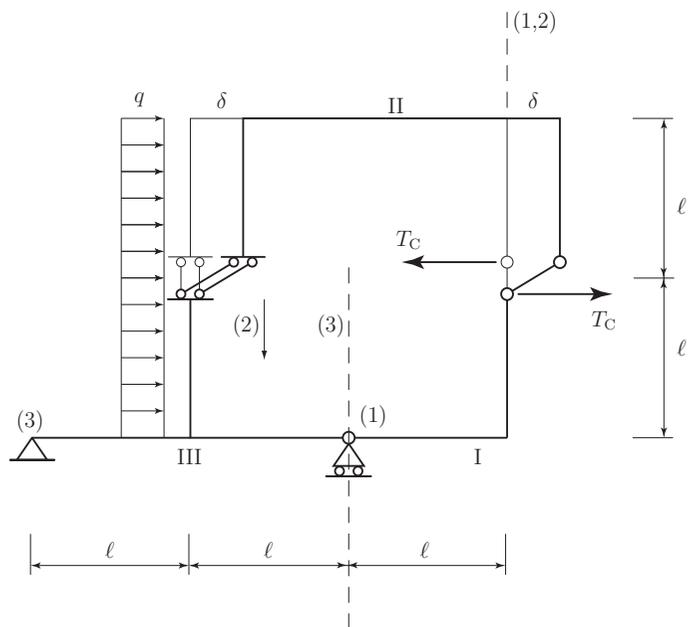


Diagrammi del momento e del taglio



Calcolo del taglio in C

Schema per il calcolo del taglio in C



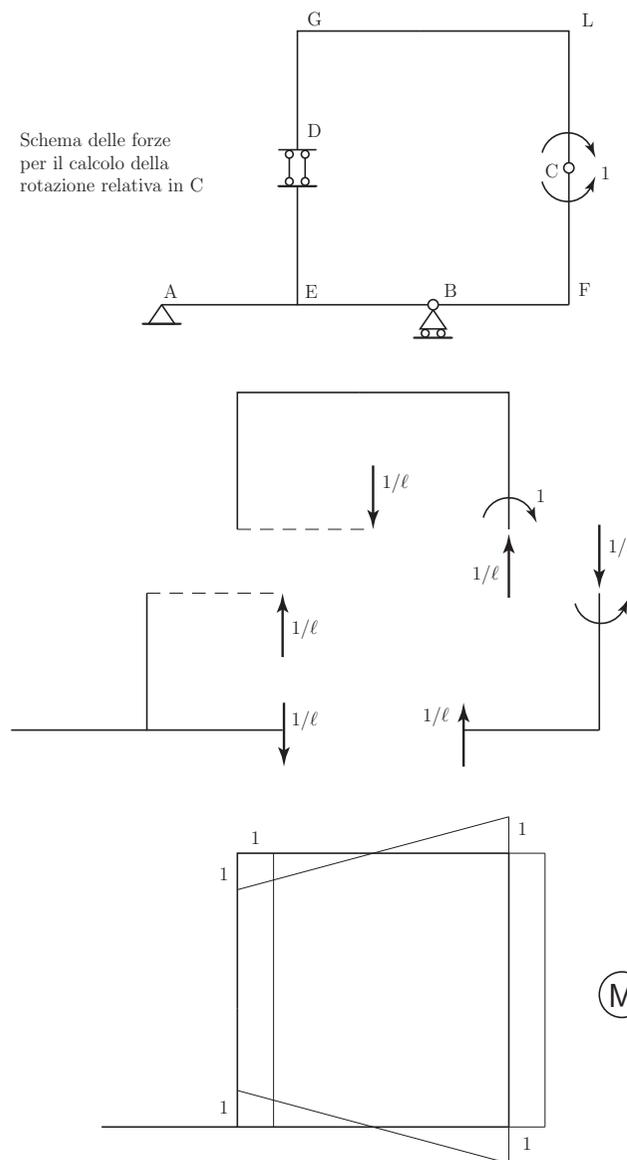
$\left. \begin{array}{l} (3) \text{ deve coincidere con A} \\ (3) \text{ deve appartenere alla verticale per B} \end{array} \right\} \Rightarrow (3) \text{ non esiste}$

$(2) \equiv (1,2) \Rightarrow (1) \text{ non esiste}$

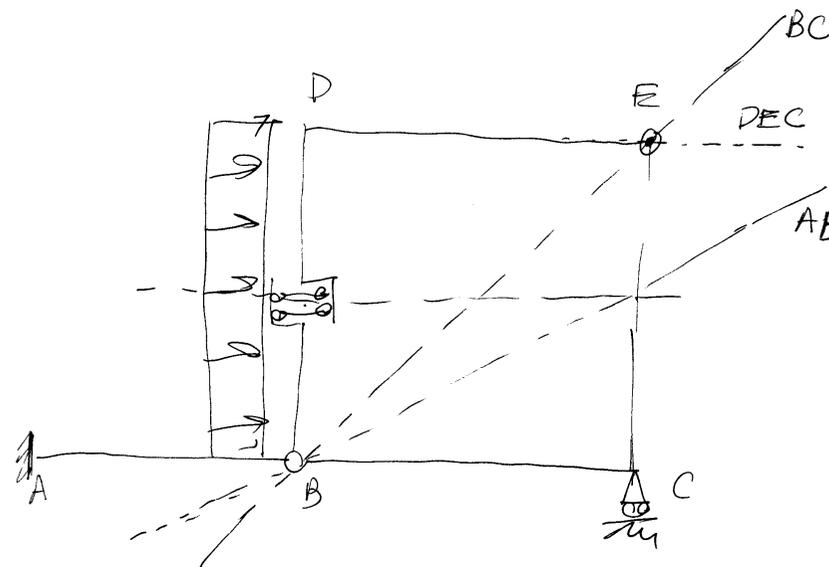
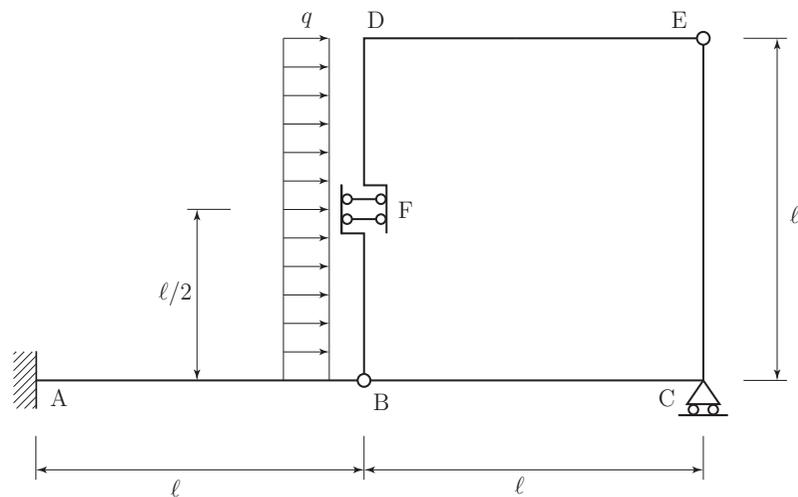
$$-T_C \delta + q l \delta = 0 \Rightarrow T_C = q l$$

Calcolo della rotazione relativa in C

Schema delle forze per il calcolo della rotazione relativa in C

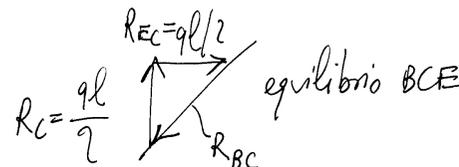
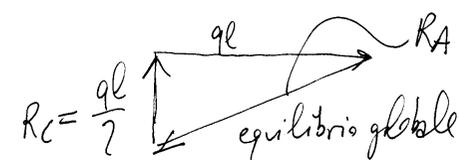


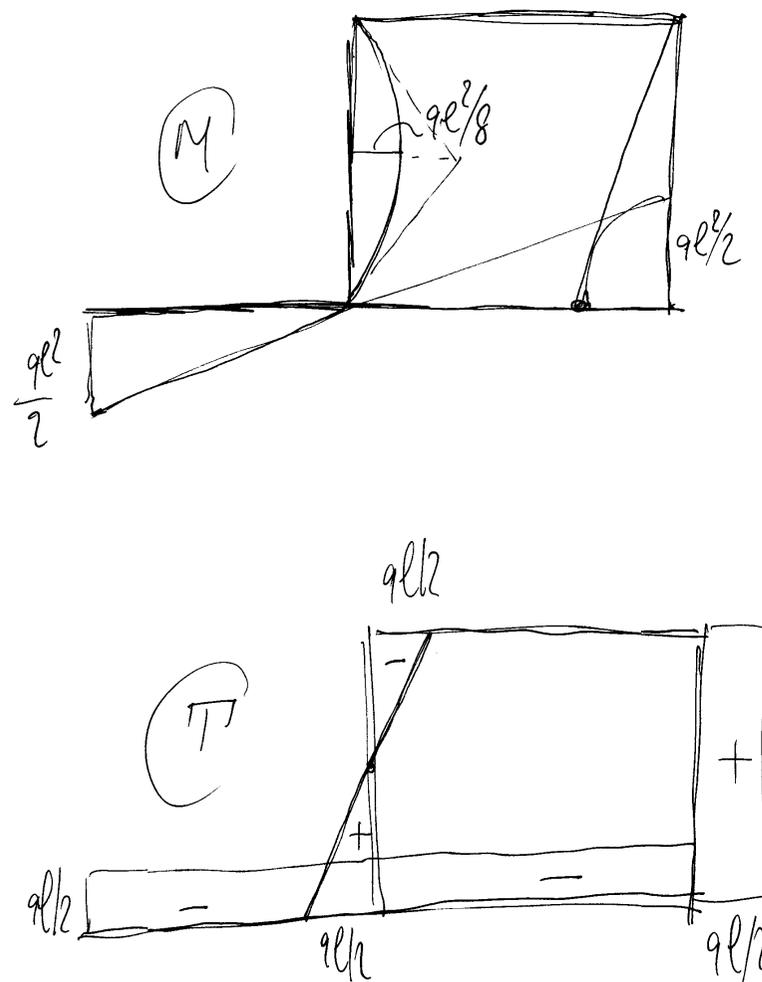
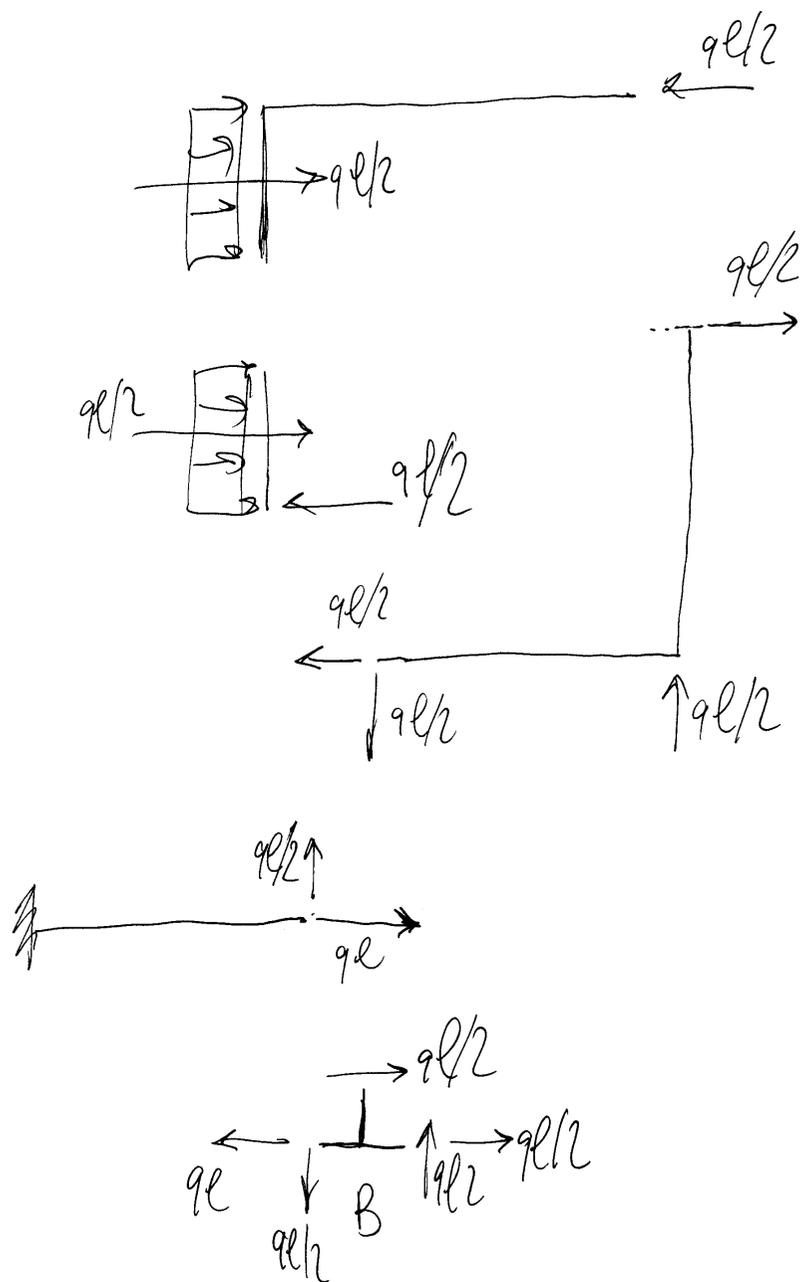
4.8 Esercizio 41

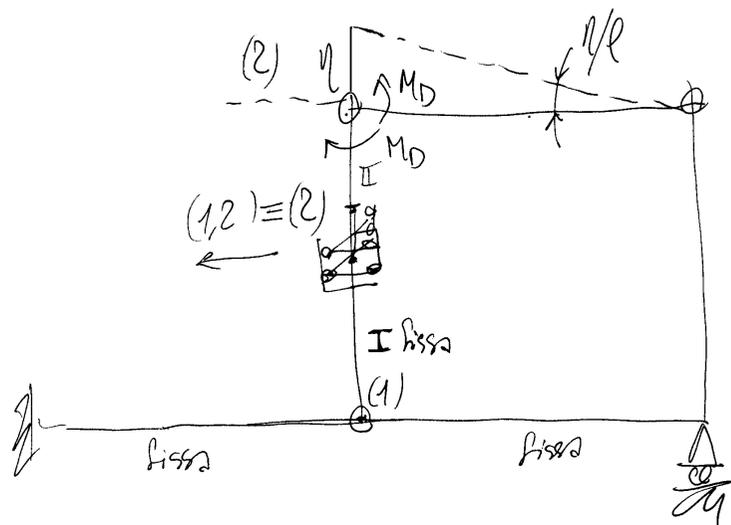
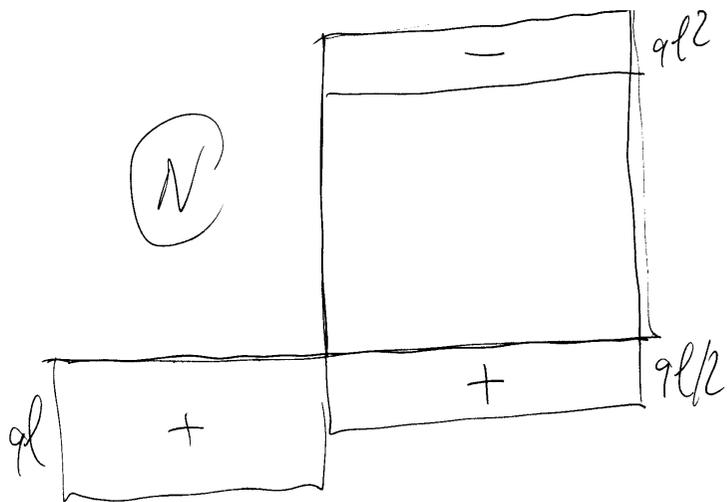


tratto DB \equiv degenerare
(insieme di rette parallele)

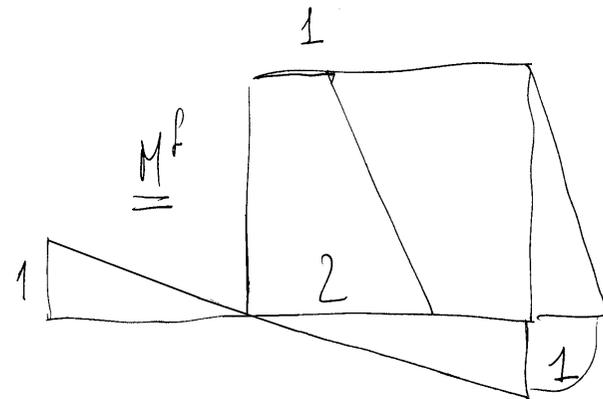
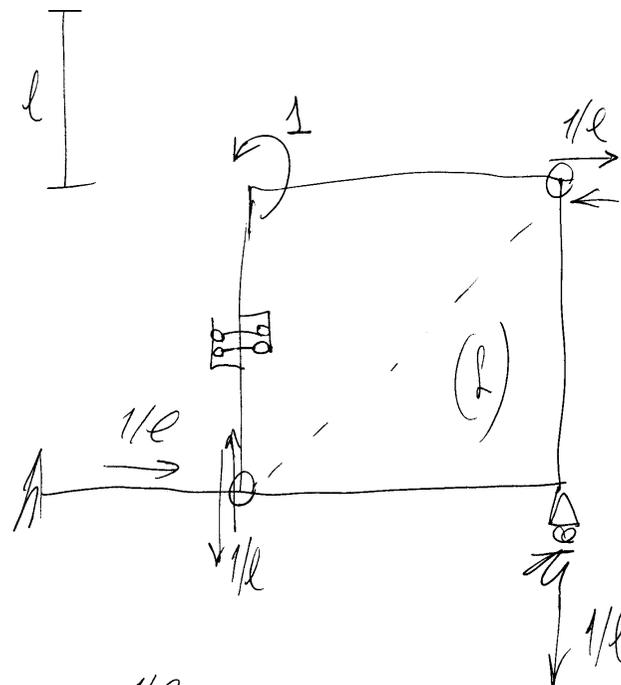
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 2) Disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Determinare il momento flettente in D utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 5) Calcolare la rotazione del nodo D utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili.



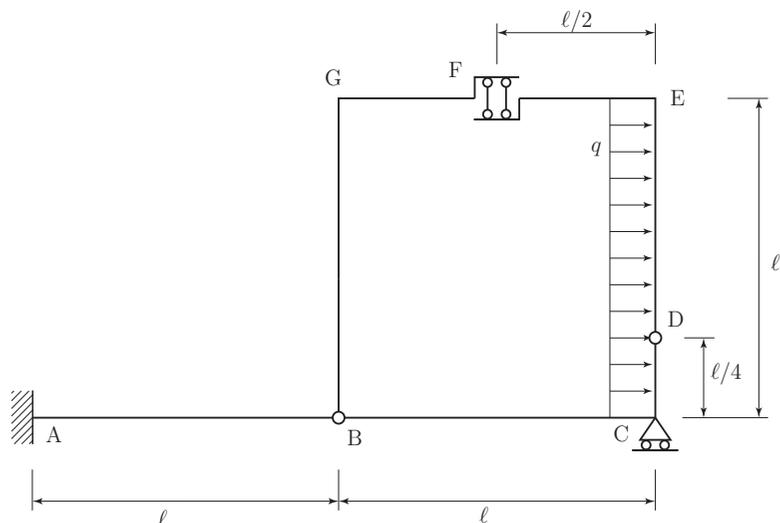




$$-\frac{M_D l}{l} = 0 \Rightarrow M_D = 0$$

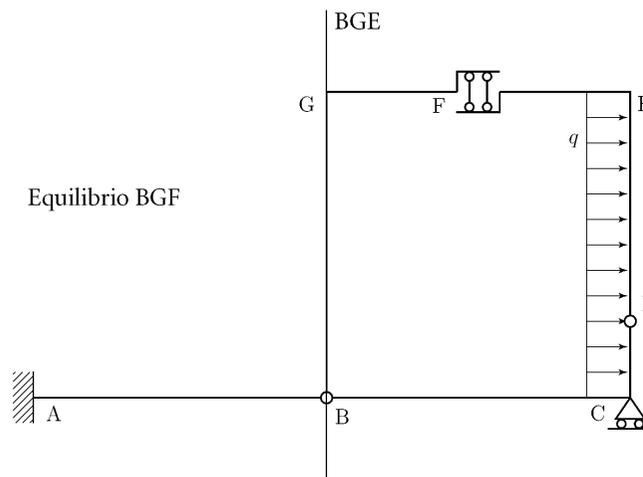
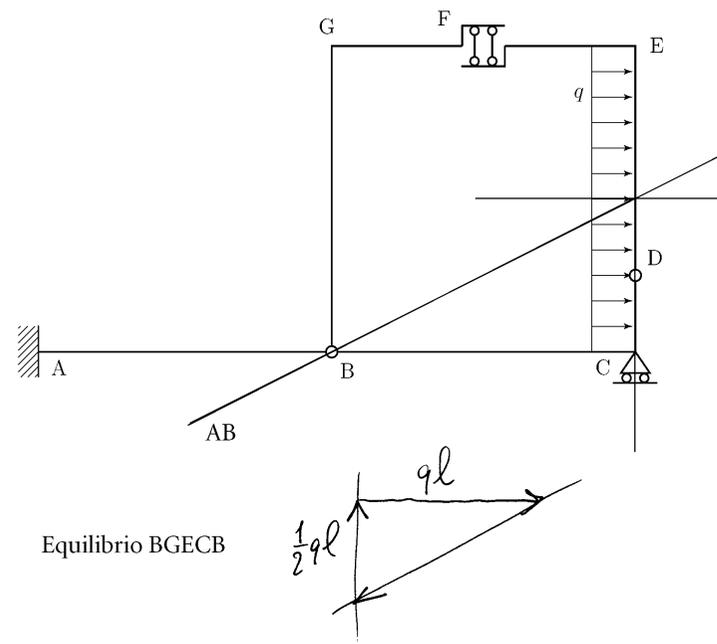


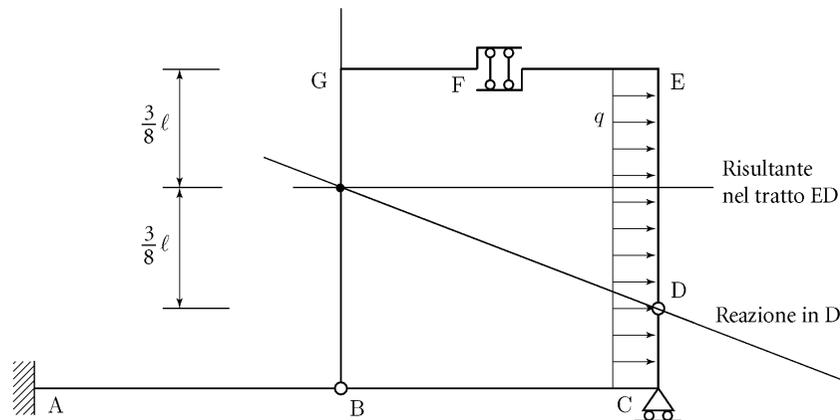
4.9 Esercizio 42



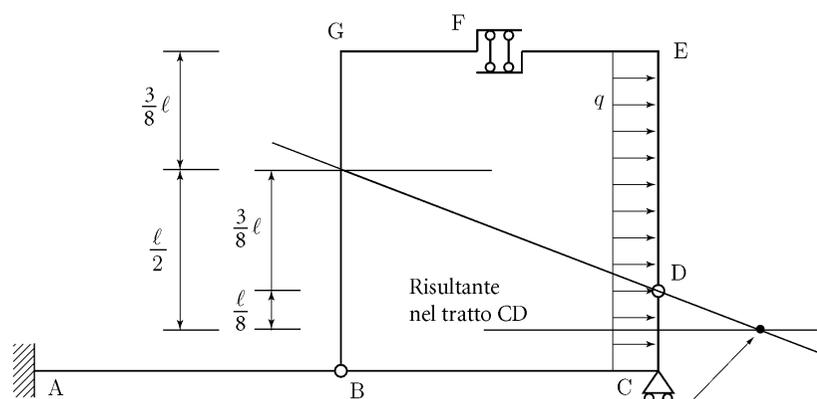
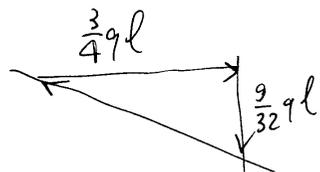
- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Determinare il momento flettente in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 6) Calcolare la rotazione del nodo F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili.

Curva delle pressioni e poligoni delle forze



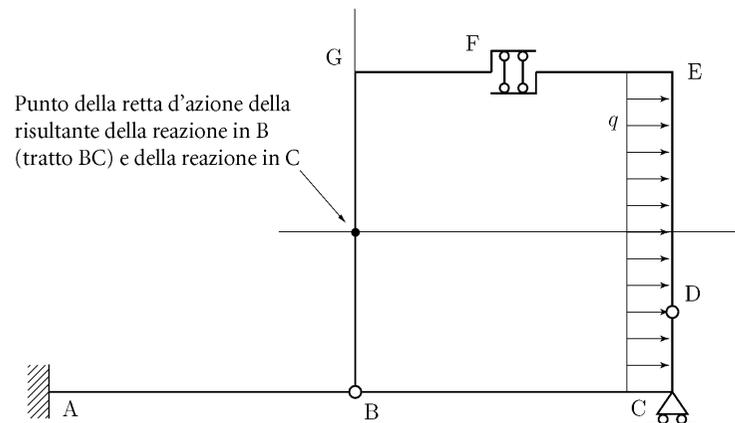


Equilibrio FED

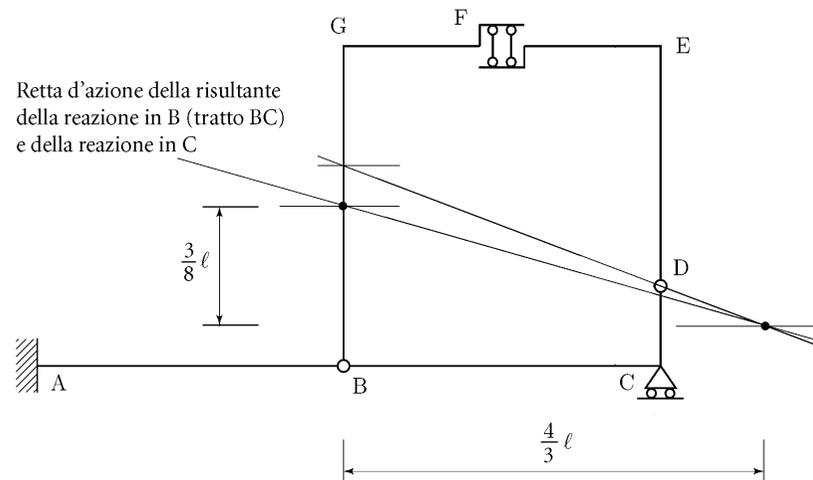


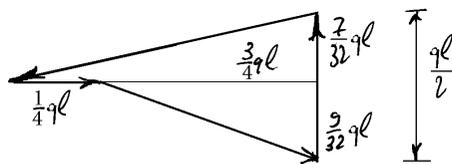
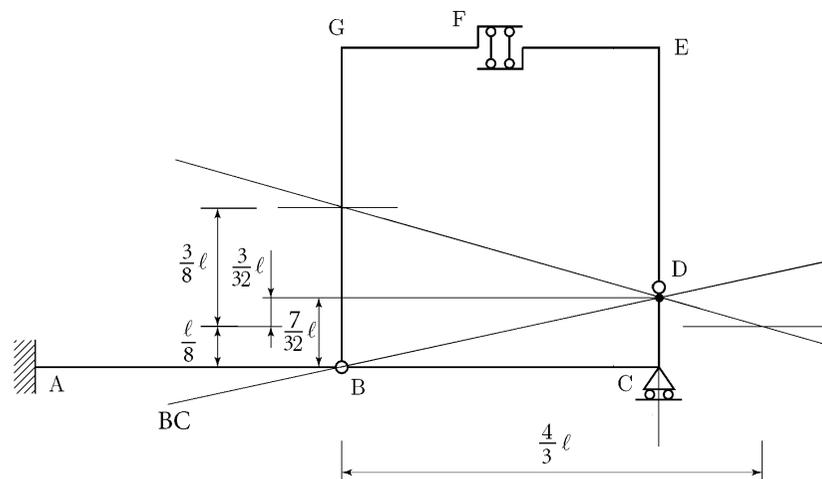
Equilibrio BCD

Punto della retta d'azione della risultante della reazione in B (tratto BC) e della reazione in C $\frac{l}{3}$



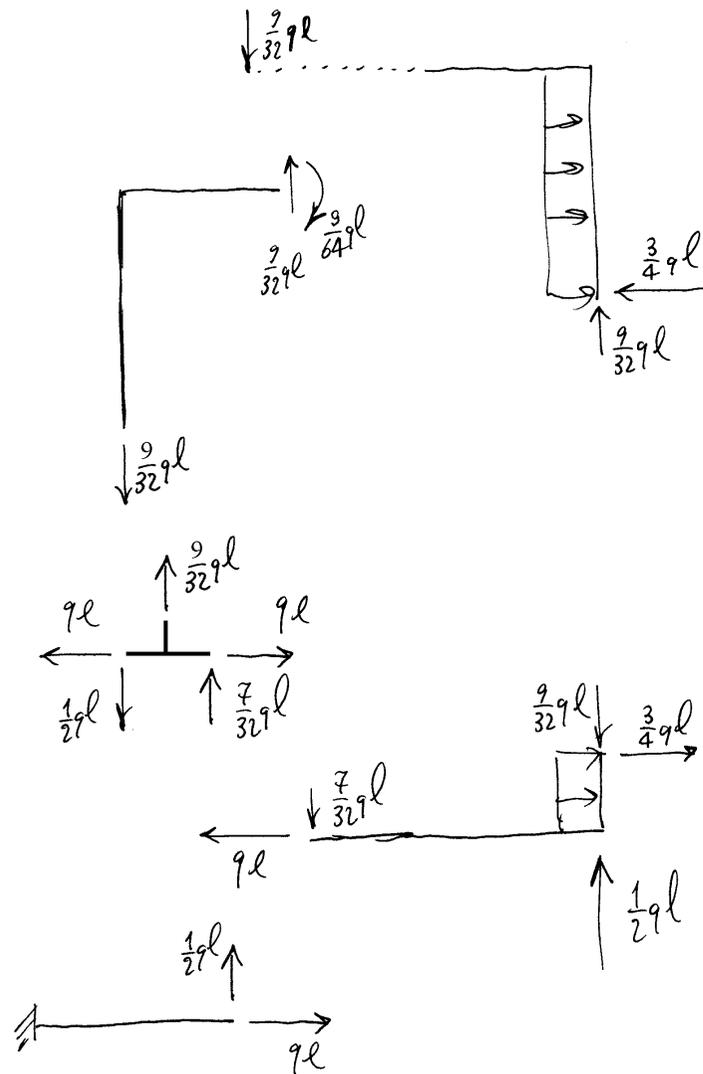
Equilibrio BCDEF



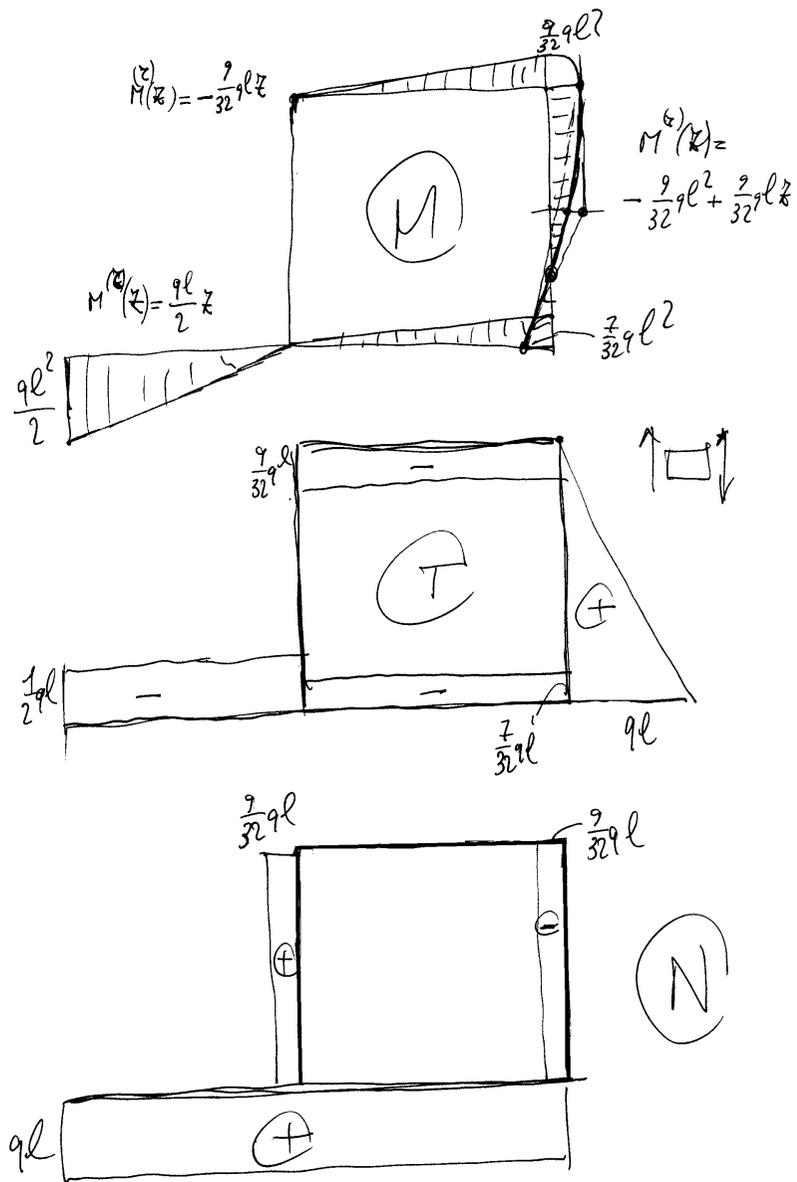


Equilibrio BCD

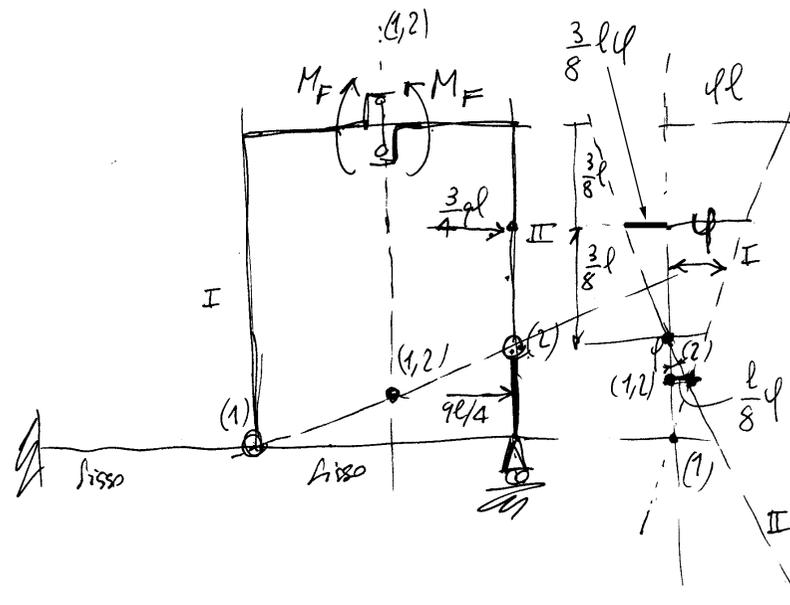
Reazioni esterne ed interne



Diagrammi del momento, del taglio e della forza normale



Calcolo del momento flettente in F

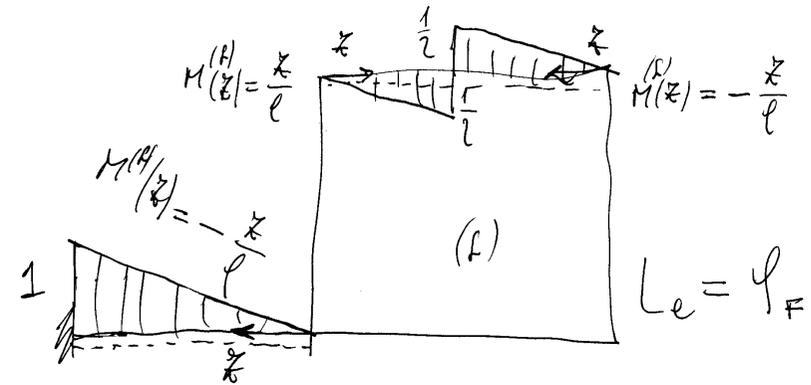
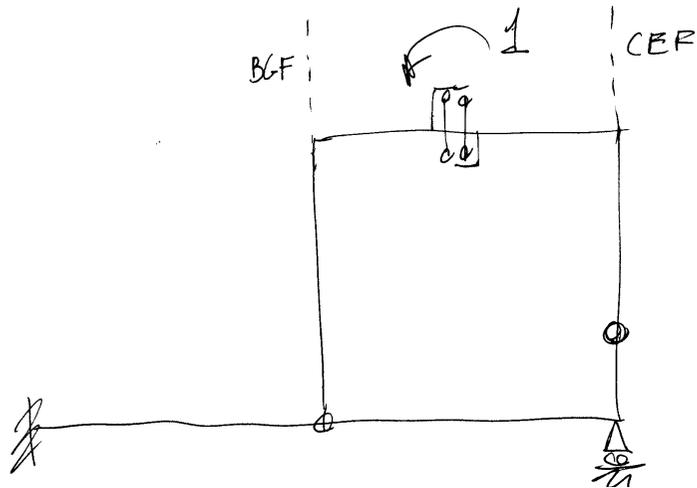


$$L_e = +M_F l + M_F l - \frac{3}{4}ql \frac{3}{8}l$$

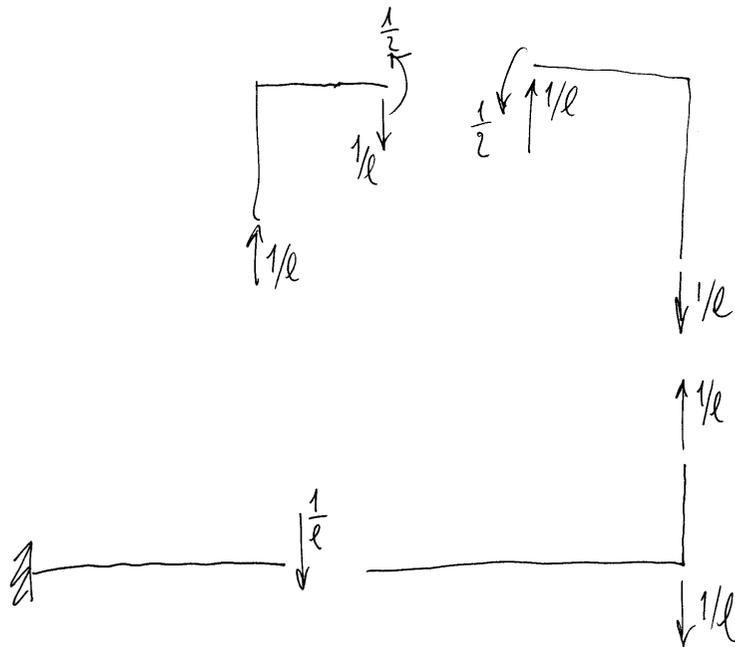
$$2M_F = \frac{9}{32}ql^2$$

$$M_F = \frac{9}{64}ql^2$$

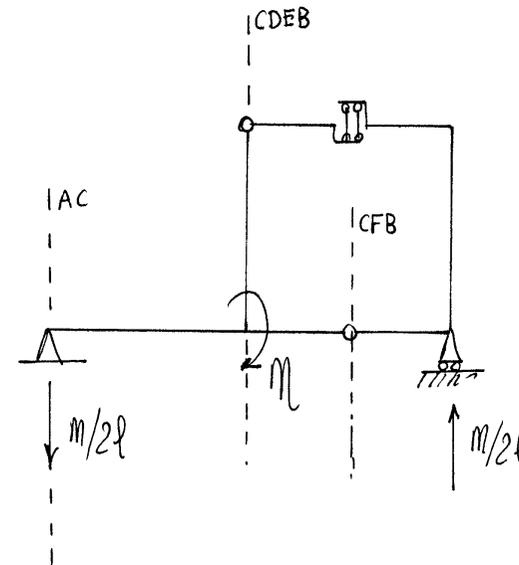
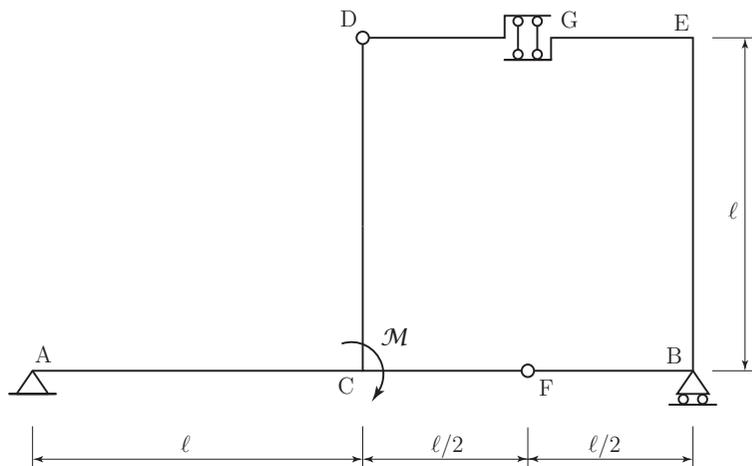
Calcolo della rotazione del nodo F



$$\begin{aligned}
 L_i &= -\int_0^l \frac{q}{2EJ} z^2 dz - \int_0^{l/2} \frac{q}{32EJ} z^2 dz \\
 &\quad + \int_0^{l/2} \frac{q}{32EJ} \frac{ql}{EJ} z dz - \int_0^{l/2} \frac{q}{32EJ} z^2 dz \\
 &= \frac{ql^3}{EJ} \left\{ -\frac{1}{6} - 2 \frac{q}{32} \frac{1}{3} \frac{1}{8} + \frac{q}{32} \frac{1}{2} \frac{1}{4} \right\} \\
 &= \frac{ql^3}{EJ} \left\{ -\frac{1}{6} - \frac{q}{6 \times 64} + \frac{q}{4 \times 64} \right\} \\
 &= \frac{-128 - 18 + 27}{12 \times 64} = -\frac{119}{12 \times 64} ql^3/EJ
 \end{aligned}$$

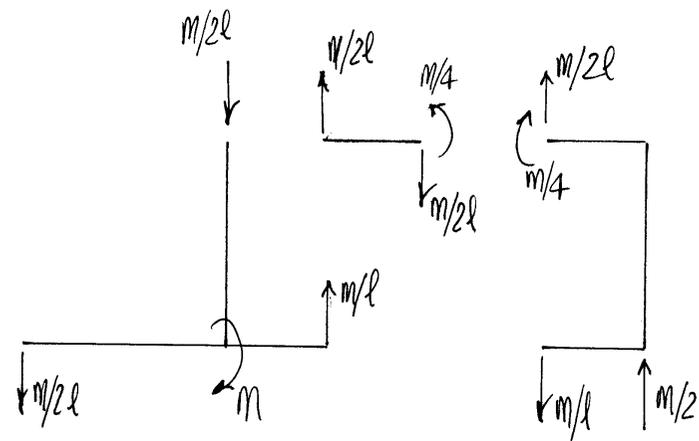


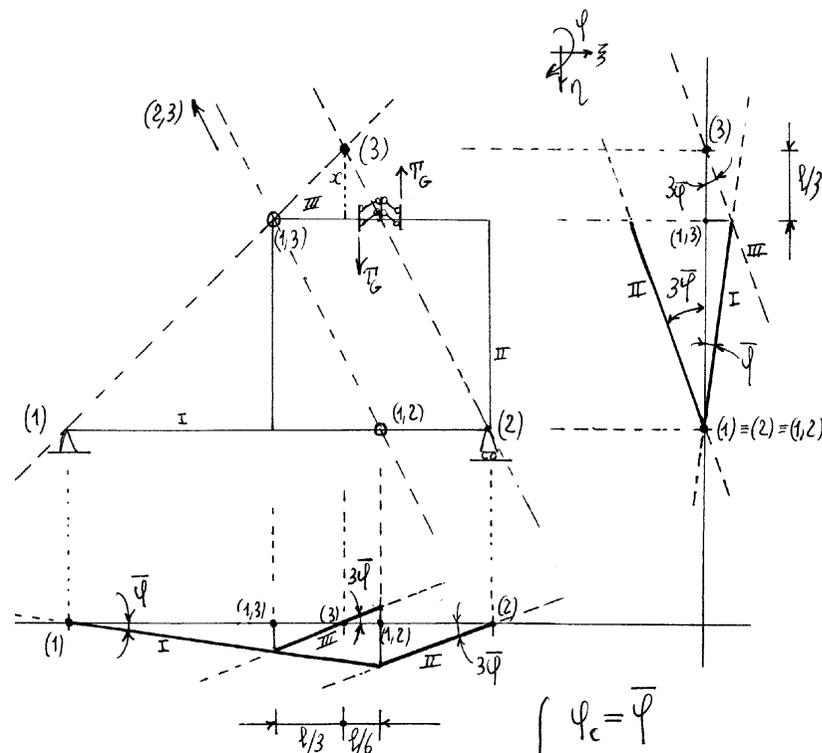
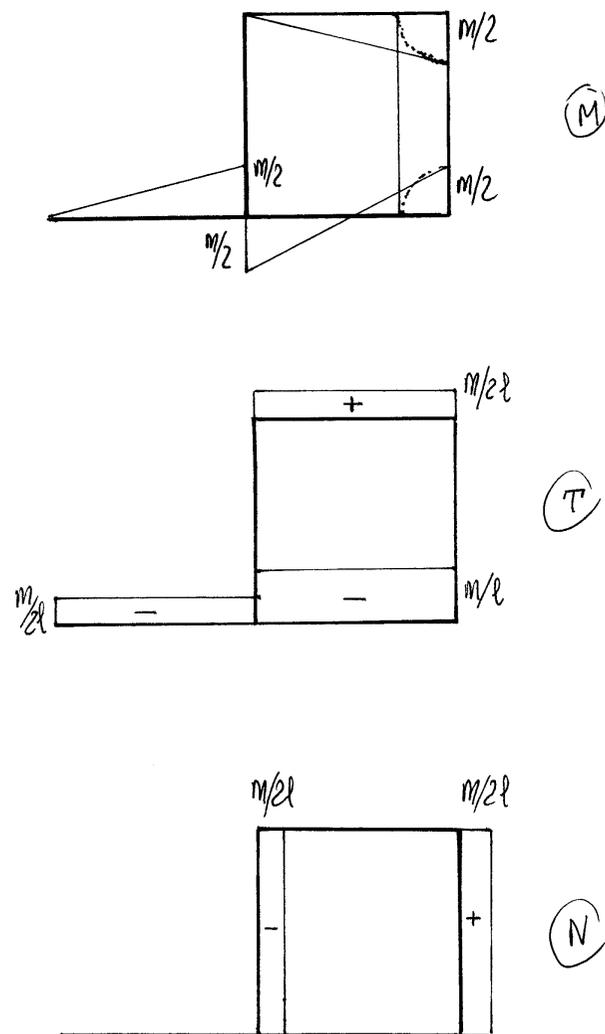
4.10 Esercizio 43



Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una coppia concentrata in corrispondenza del nodo rigido C:

- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare lo spostamento orizzontale dei punti della travata GE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
- 6) Determinare il taglio in G utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 7) Determinare la rotazione del nodo C considerando la struttura caricata da una forza orizzontale P nel nodo E, in luogo della coppia;
- 8) Disegnare la deformata elastica della struttura (limitarsi a disegnare la deformata elastica a meno della sovrapposizione di moti rigidi e dire quali moti rigidi occorre sovrapporre per rispettare la congruenza dei vincoli).



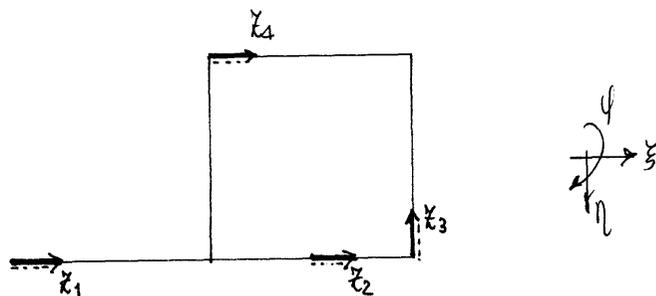


$$x + \frac{x}{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{3}$$

$$\begin{cases} \varphi_c = \bar{\varphi} \\ \xi_E = -3\bar{\varphi}l \\ \eta_G^{II} = \frac{3}{2}\bar{\varphi}l \\ \eta_G^{III} = -\frac{1}{2}\bar{\varphi}l \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \tau_G \bar{\varphi} l - \frac{3}{2} \tau_G \bar{\varphi} l + m \bar{\varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \tau_G = \frac{m}{2l}$$



$$M(x_1) = -m \frac{x_1}{2l}$$

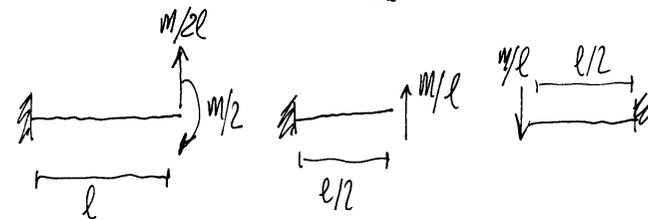
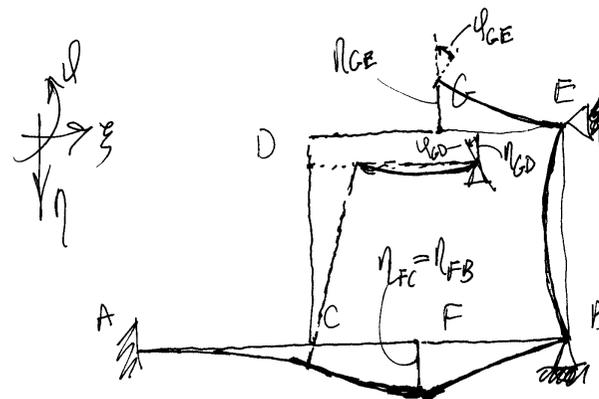
$$M(x_2) = -m \frac{x_2}{l}$$

$$M(x_3) = -m \frac{1}{2}$$

$$M(x_4) = m \frac{x_4}{2l}$$

$$\int_0^l \frac{x_1^2}{4l} dx_1 - 2 \int_0^{l/2} \frac{x_2^2}{l} dx_2 - \left(\int_0^l \frac{l}{4} dx_3 + \int_0^l \frac{x_3}{2} dx_3 \right) - \int_0^l \frac{3}{4} \frac{x_4^2}{l} dx_4 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) l^2 = -\frac{3}{4} l^2 \Rightarrow \xi_{EG} = -\frac{3}{4} \frac{ml^2}{EJ}$$

Deformata elastica



$$\eta_{GE} = -\frac{(m/4)(l/2)^2}{2EJ} - \frac{(m/2l)(l/2)^3}{3EJ} - \frac{(m/2)l}{2EJ} \frac{l}{2} = -\frac{17}{96} \frac{ml^2}{EJ}$$

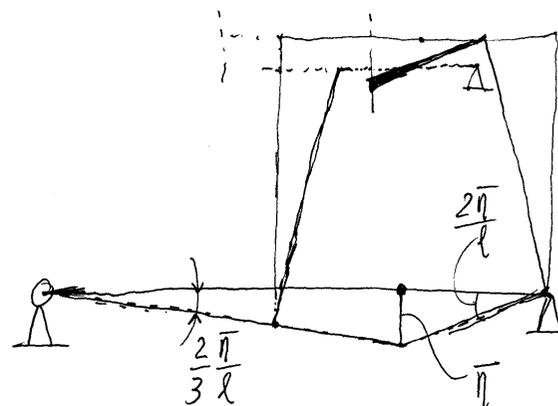
$$\eta_{GD} = \frac{(m/2)l^2}{2EJ} - \frac{(m/2)l^3}{3EJ} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \frac{ml^2}{EJ} = \frac{ml^2}{12EJ}$$

$$\varphi_{GE} = \frac{(m/4)l}{EJ} - \frac{(m/2)l^2}{2EJ} - \frac{(m/2)l}{2EJ} = -\frac{3}{4} \frac{ml}{EJ}$$

$$\varphi_{GD} = \frac{(m/4)(l/2)}{3EJ} = \frac{ml}{24EJ}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_c &= \eta_{GD} \\
 \eta_{Fc} &= -\frac{(m/l)(l/2)^3}{3EJ} + \left(\frac{(m/2)l^2}{2EJ} - \frac{(m/2l)l^3}{3EJ} \right) \\
 &\quad + \left(\frac{(m/2)l}{EJ} - \frac{(m/2l)l^2}{2EJ} \right) \frac{l}{2} \\
 &= \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) \frac{ml^2}{EJ} \\
 &= \frac{-1+6+4+6-3}{24} \frac{ml^2}{EJ} = \frac{4ml^2}{24EJ} = \frac{ml^2}{6EJ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_{Fb} &= \frac{(m/l)(l/2)^3}{3EJ} + \frac{(m/2)l}{2EJ} \frac{l}{2} = \\
 &= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) \frac{ml^2}{EJ} = \frac{ml^2}{6EJ}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \eta_{GE} &= +\bar{\eta} \\
 \eta_{GD} &= \frac{2}{3}\bar{\eta} \\
 \eta_{GE} &= +\frac{2\bar{\eta}}{l}
 \end{aligned}$$

$$-\frac{3}{4} \frac{ml}{EJ} + 2\frac{\bar{\eta}}{l} = +\frac{ml}{24EJ}$$

$$-\left\{ -\frac{17ml^2}{96EJ} + \bar{\eta} - \frac{ml^2}{12EJ} - \frac{2}{3}\bar{\eta} \right\} \frac{2}{l}$$

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{24} + \frac{17}{48} + \frac{1}{6} \right) \frac{ml}{EJ} = \left(2 + 2 - \frac{4}{3} \right) \frac{\bar{\eta}}{l}$$

$$\frac{45}{48} \frac{ml}{EJ} = \frac{8}{3} \bar{\eta} \Rightarrow \bar{\eta} = \frac{3}{8} \frac{45}{48} \frac{ml^2}{EJ}$$

$$\varphi_{G1}^I = \varphi_{E1} + \frac{(m/4)(l/2)}{EJ} + \frac{(m/2l)(l/2)^2}{2EJ}$$

$$\varphi_{E1} = \frac{ml}{4EJ} \Rightarrow \varphi_{G1}^I = \frac{7ml}{16EJ}$$

$$\varphi_{G1}^{II} = -\frac{(m/4)(l/2)}{3EJ} = -\frac{ml}{24EJ}$$

$$\eta_{G1}^{III} = \frac{ml^2}{6EJ}$$

$$\eta_{G1}^{IV} = -\varphi_{E1} \frac{l}{2} - \frac{(m/4)(l/2)^2}{2EJ} - \frac{(m/2l)(l/2)^3}{3EJ} = -\frac{17ml^2}{96EJ}$$

Incongnita η_{F2}

Rotazione di I $\varphi_{A2} = \frac{\eta_{F2}}{3l} = \frac{2}{3} \frac{\eta_{F2}}{l}$

Rotazione di II $\varphi_{B2} = -\frac{\eta_{F2}}{l/2} = -2 \frac{\eta_{F2}}{l}$

$$\begin{cases} \varphi_{G2}^{II} = -2 \frac{\eta_{F2}}{l} \\ \eta_{G2}^{II} = \eta_{F2} \end{cases} \quad \eta_{G2}^{III} = \frac{2}{3} \eta_{F2}$$

Rotazione di III attorno a D

$$\begin{aligned} \varphi_{D3} &= -\frac{(\eta_{G1}^{III} + \eta_{G2}^{III}) + (\eta_{G1}^{II} + \eta_{G2}^{II})}{l/2} \\ &= \frac{-\frac{11ml^2}{32EJ} + \frac{1}{3}\eta_{F2}}{l/2} = -\frac{11ml}{16EJ} + \frac{2}{3} \frac{\eta_{F2}}{l} \end{aligned}$$

$$\varphi_{G3}^{III} = -\frac{11ml}{16EJ} + \frac{2}{3} \frac{\eta_{F2}}{l}$$

$$\sum_{EG}^{\text{III}} = -2N_{F2} = -\frac{7ml}{8EJ}$$

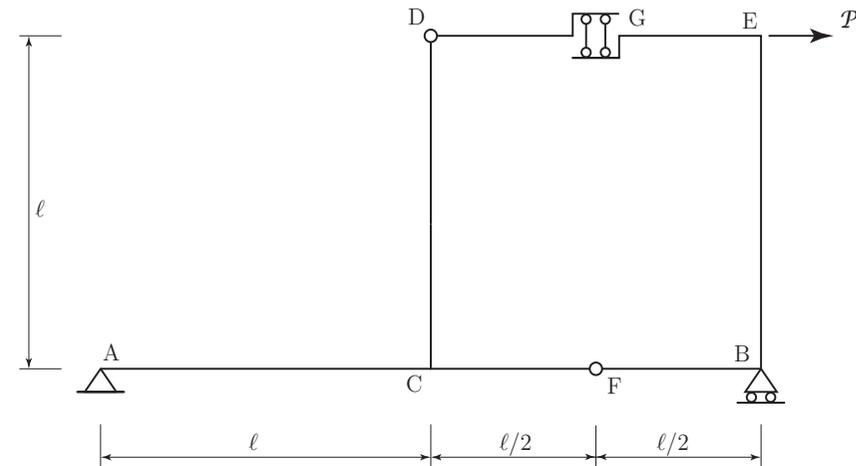
$$\varphi_{G1}^{\text{III}} + \varphi_{G3}^{\text{III}} = \varphi_{G1}^{\text{II}} + \varphi_{G2}^{\text{II}}$$

$$-\frac{ml}{24EJ} - \frac{11ml}{16EJ} + \frac{2N_{F2}}{3l} =$$

$$= \frac{7ml}{16EJ} - 2\frac{N_{F2}}{l}$$

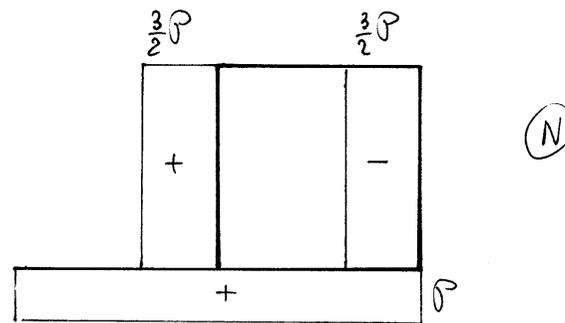
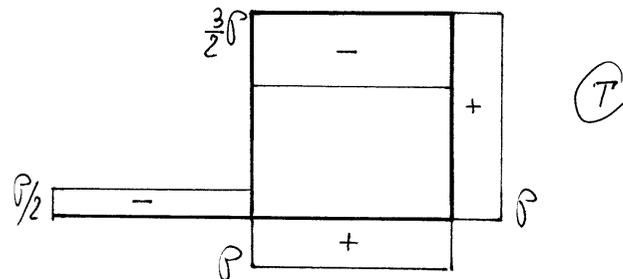
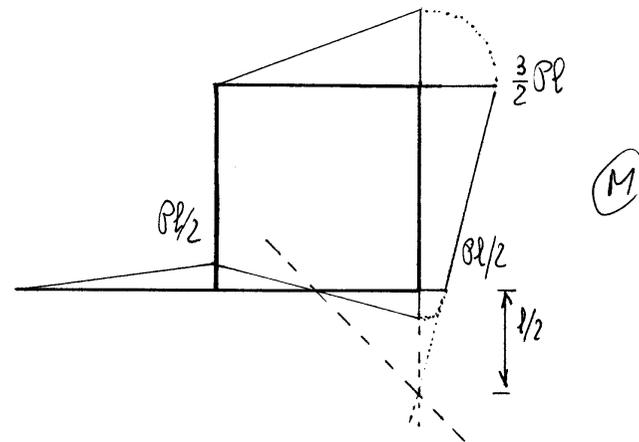
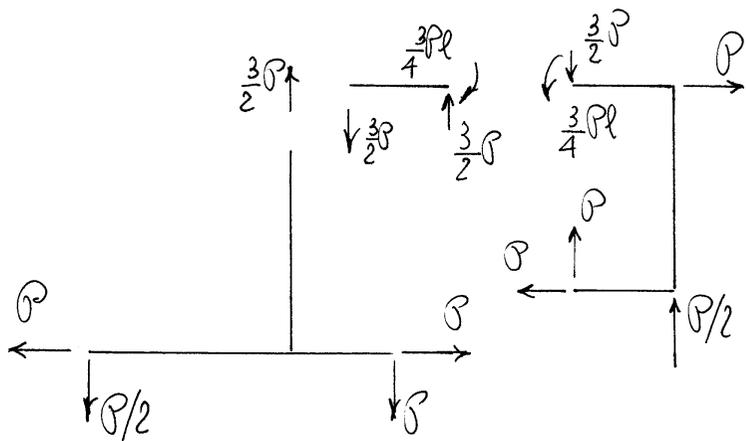
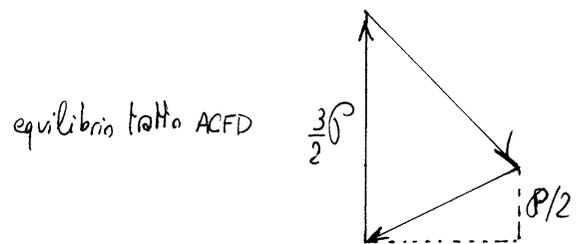
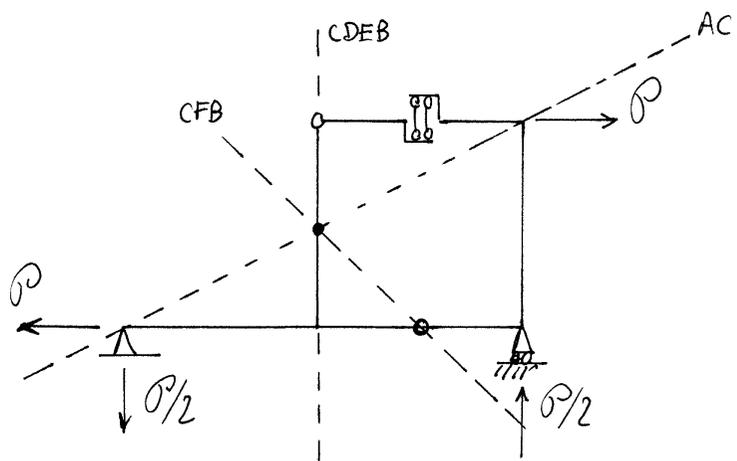
$$\frac{8}{3}N_{F2} = \frac{7ml}{6EJ} \Rightarrow N_{F2} = \frac{7ml}{16EJ}$$

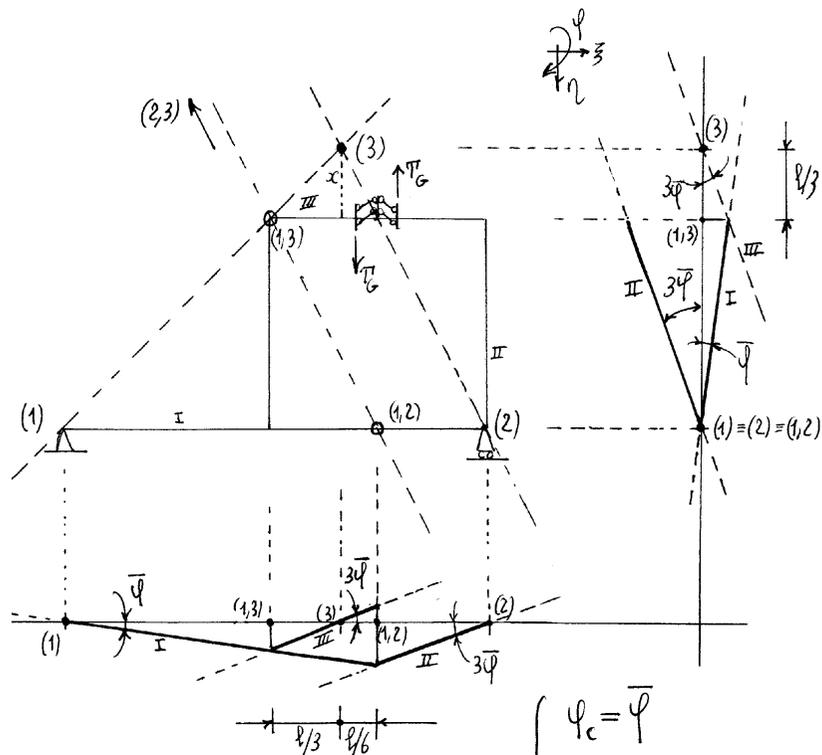
4.11 Esercizio 44



Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una forza orizzontale P in corrispondenza del nodo E:

- 1) Verificare l'isostaticità della struttura;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
- 3) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Calcolare la rotazione del nodo C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
- 6) Determinare il taglio in G utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
- 7) Determinare lo spostamento orizzontale dei punti della travata GE considerando la struttura caricata da una coppia concentrata M in corrispondenza del nodo rigido C, in luogo del carico concentrato;
- 8) Disegnare la deformata elastica della struttura (limitarsi a disegnare la deformata elastica a meno della sovrapposizione di moti rigidi e dire quali moti rigidi occorre sovrapporre per rispettare la congruenza dei vincoli).



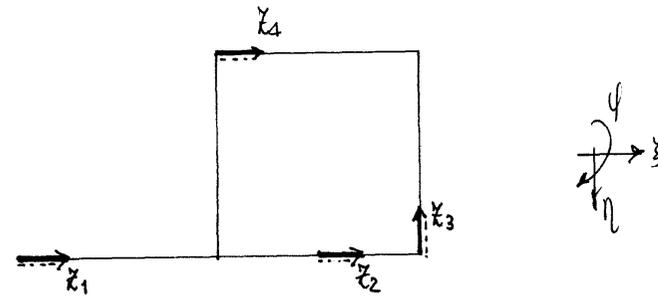


$$x + \frac{x}{2} = \frac{l}{2} \Rightarrow x = \frac{l}{3}$$

$$\begin{cases} \varphi_c = \bar{\varphi} \\ \xi_E = -3\bar{\varphi}l \\ \eta_G^{II} = \frac{3}{2}\bar{\varphi}l \\ \eta_G^{III} = -\frac{1}{2}\bar{\varphi}l \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} \tau_G \bar{\varphi} l - \frac{3}{2} \tau_G \bar{\varphi} l - 3P\bar{\varphi}l = 0$$

$$\Rightarrow \tau_G = -\frac{3}{2}P$$



$$M(x_1) = -P \frac{x_1}{2}$$

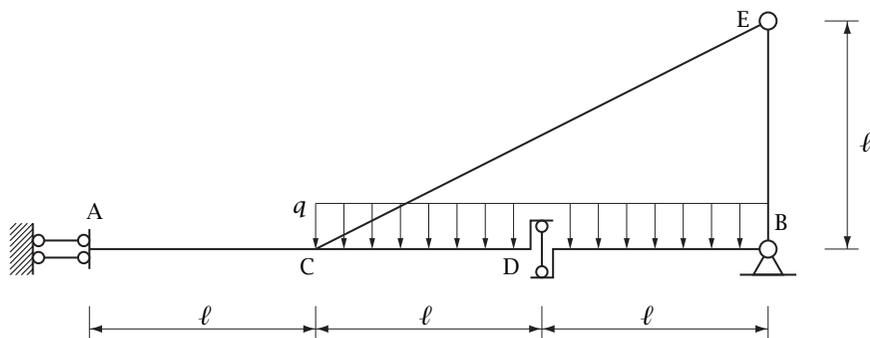
$$M(x_2) = P x_2$$

$$M(x_3) = P \left(\frac{l}{2} + x_3 \right)$$

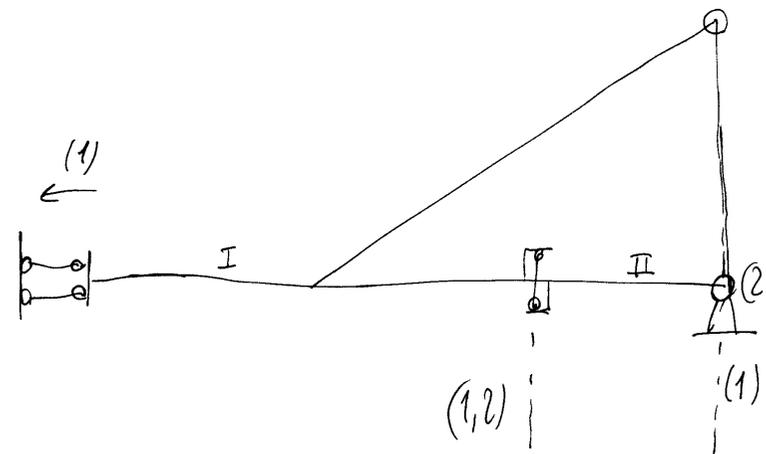
$$M(x_4) = -P \frac{3}{2} x_4$$

$$\int_0^l \frac{x_1^2}{4l} dx_1 - 2 \int_0^{l/2} \frac{x_2^2}{l} dx_2 - \left(\int_0^l \frac{l}{4} dx_3 + \int_0^l \frac{x_3}{2} dx_3 \right) - \int_0^l \frac{3}{4} \frac{x_4^2}{l} dx_4 = \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) l^2 = -\frac{3}{4} l^2 \Rightarrow \varphi_c = -\frac{3}{4} \frac{P l^2}{EJ}$$

4.12 Esercizio 45



1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Disegnare la curva delle pressioni;
5. Determinare lo sforzo normale nel pendolo BE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
6. Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuta alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, nell'ipotesi che il pendolo BE sia indeformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.



isostaticità

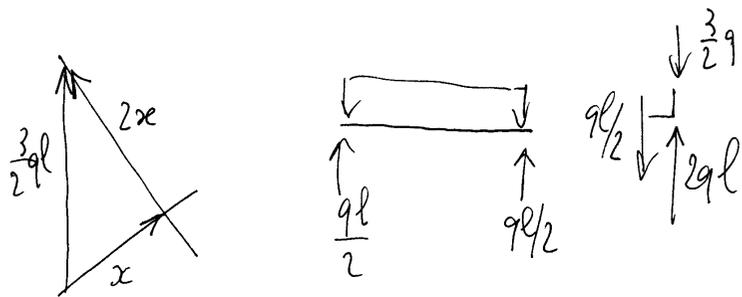
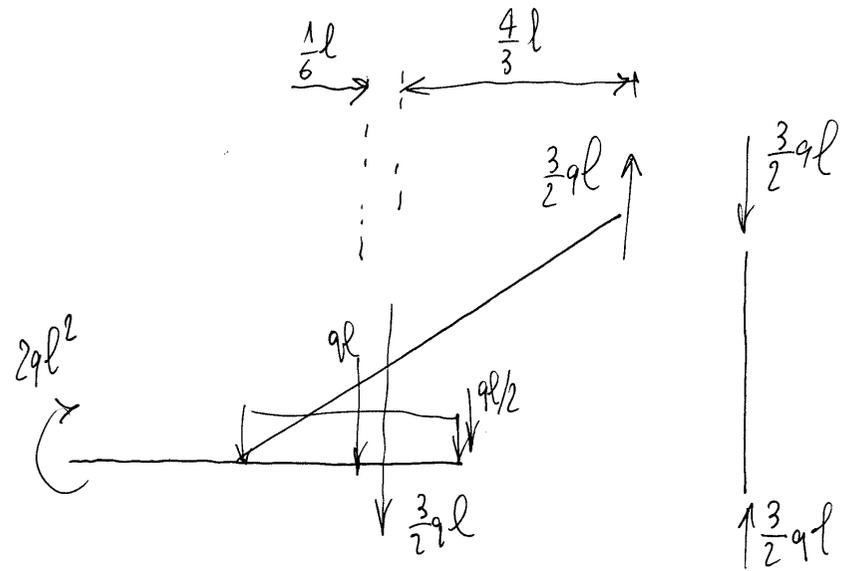
(1) non esiste

(1) non esiste \Rightarrow

\Rightarrow (2) non esiste

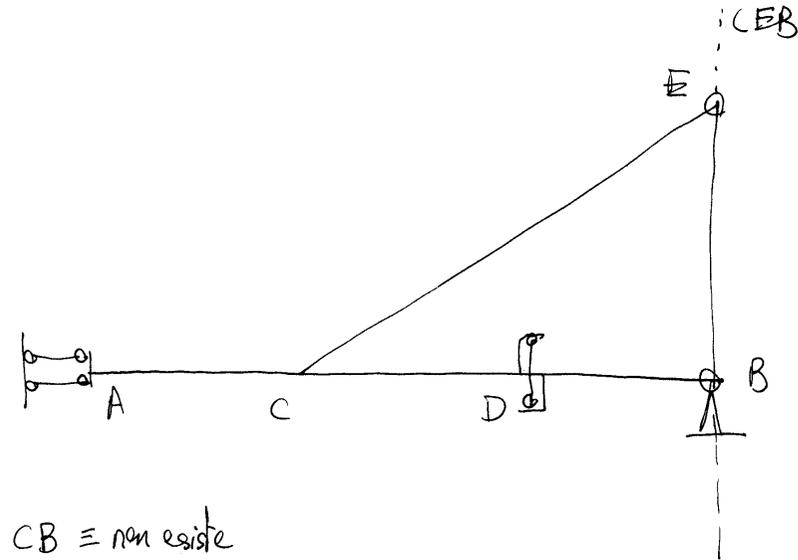
(2) non esiste

Reazioni interne ed esterne



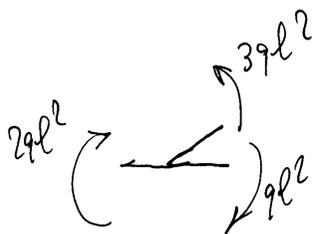
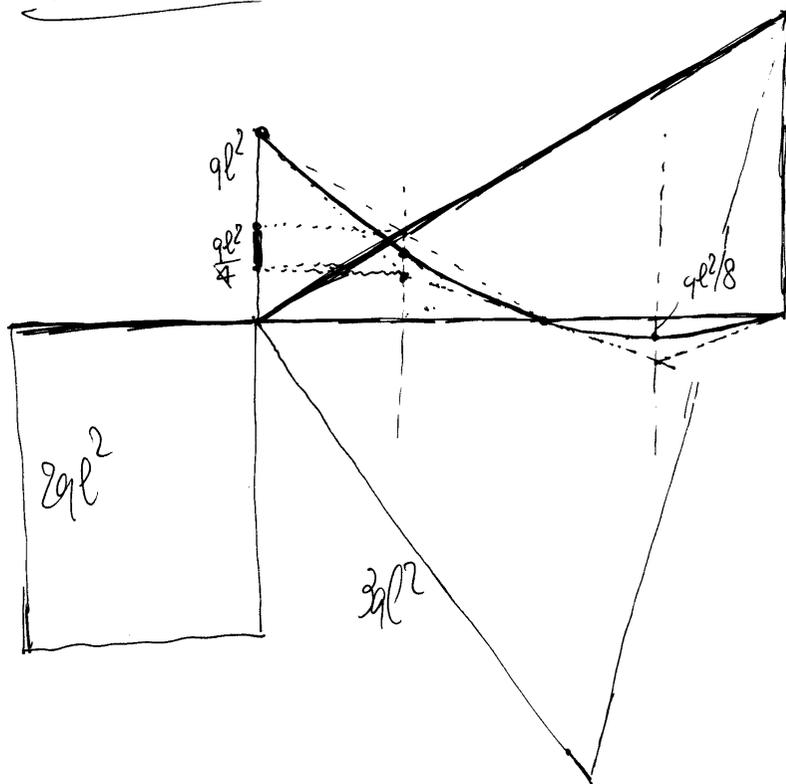
$$5x^2 = \frac{9}{4}ql^2 \implies x = \frac{3}{2\sqrt{5}}ql$$

Curva pressione

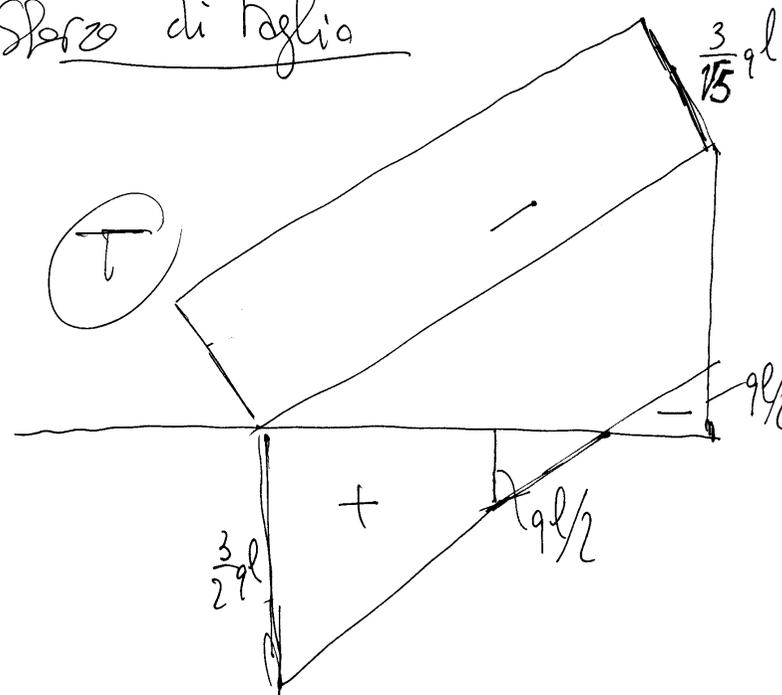


CB \equiv non esiste
 AC \equiv retta impropria

Momento

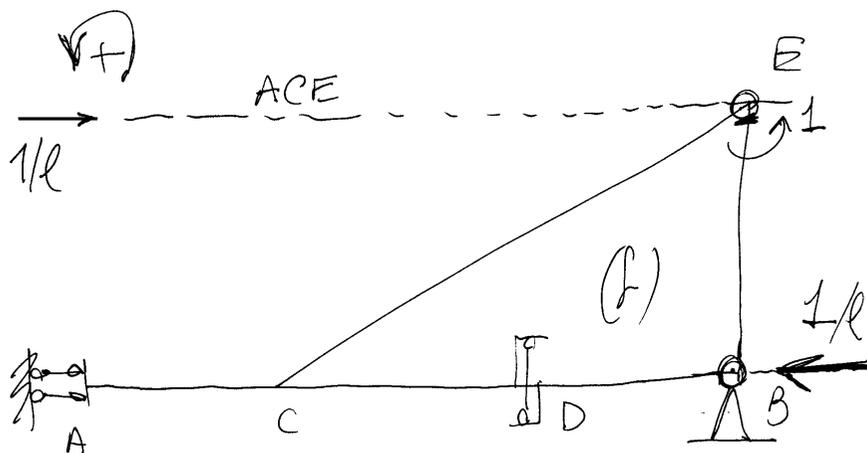


Spazio di taglio

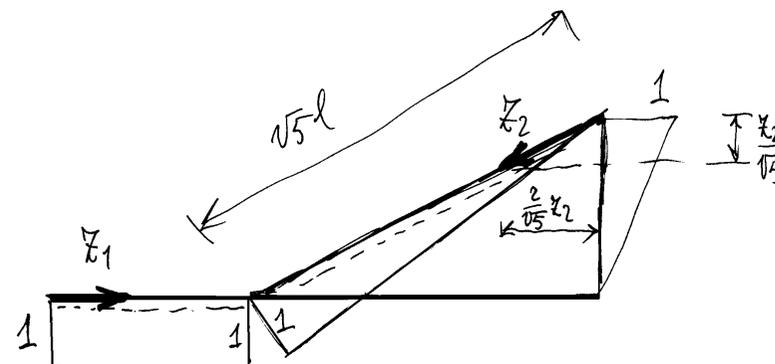
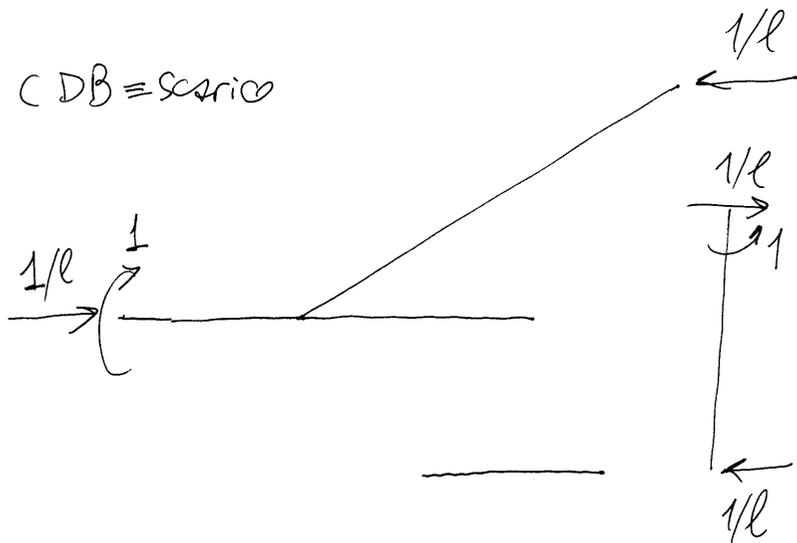


Spazio normale





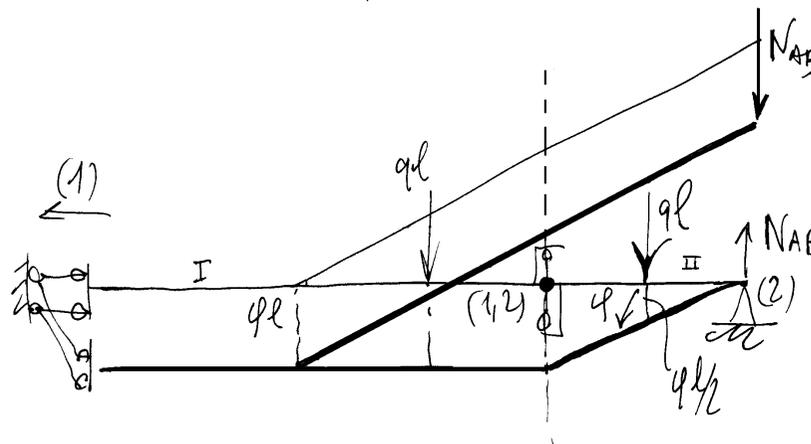
Schemi delle forze



$$M^{(1)}(z_1) = 1 \quad M^{(1)}(z_2) = \frac{z_2}{\sqrt{5}l}$$

$$M^{(2)}(z_1) = ql^2 \quad M^{(2)}(z_2) = \frac{3}{\sqrt{5}}qlz_2$$

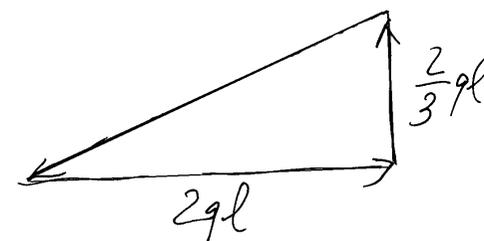
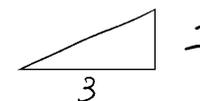
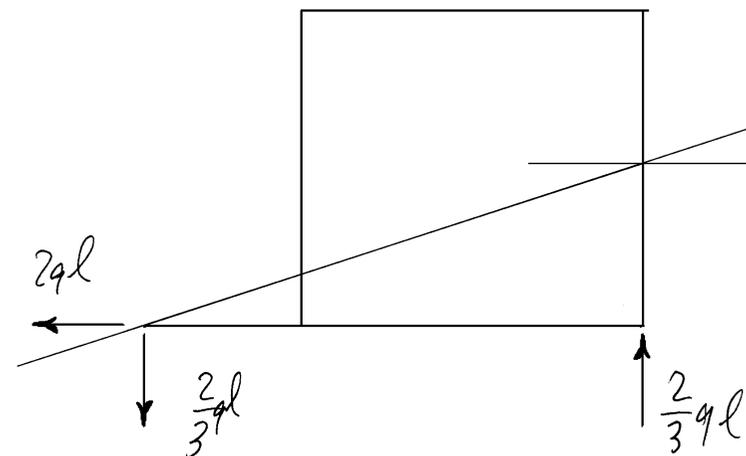
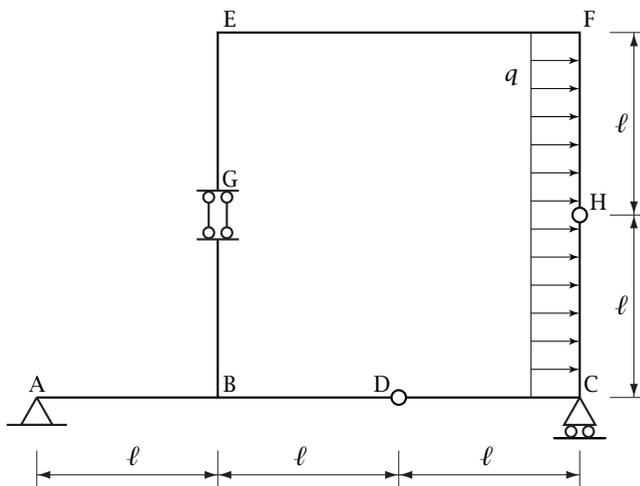
$$\varphi_{BE} = \frac{2ql^3}{EJ} + \frac{ql^3}{EJ}$$



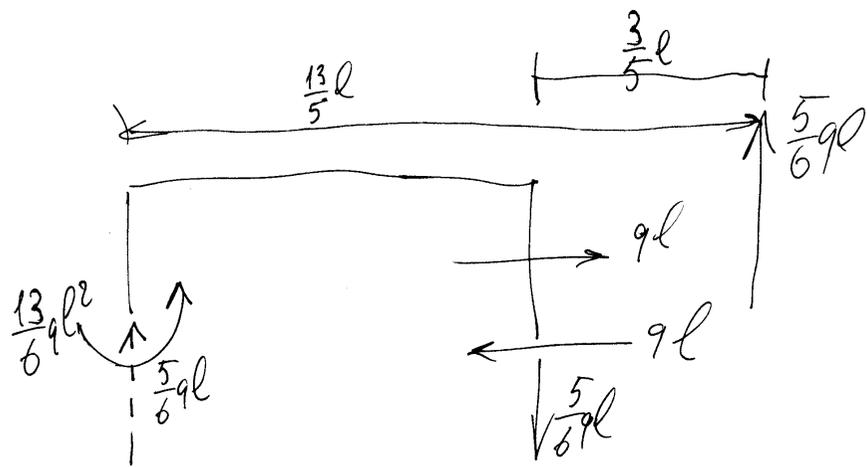
$$ql \cdot \frac{l}{2} + ql \cdot l + N_{AB} \cdot l = 0$$

$$N_{AB} = -ql - \frac{ql}{2} = -\frac{3}{2}ql$$

4.13 Esercizio 46

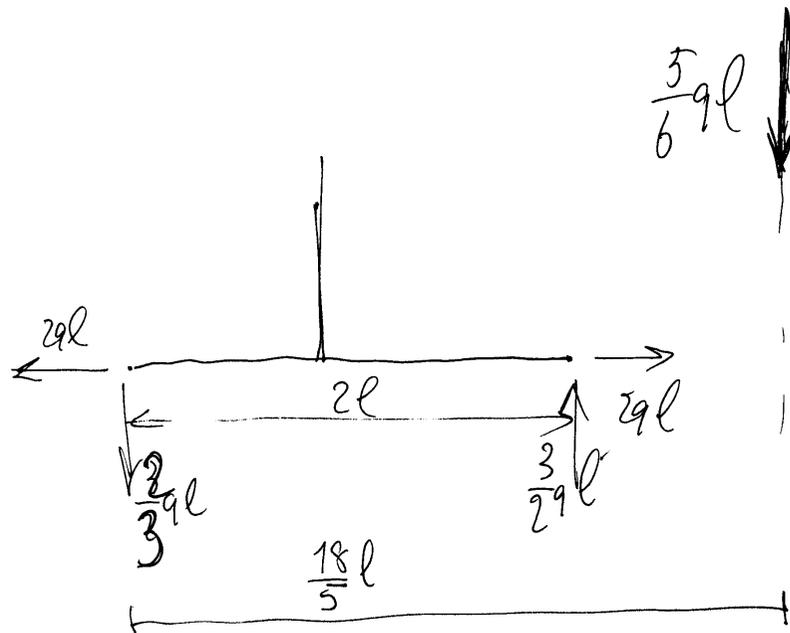
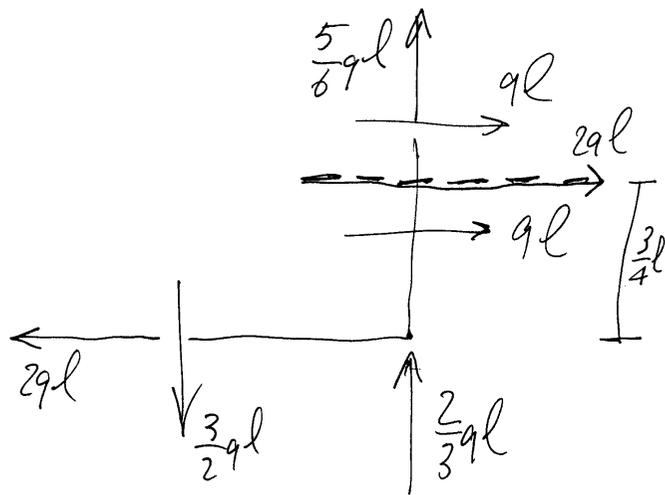


1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Disegnare la curva delle pressioni;
5. Determinare lo sforzo normale nel tratto BE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
6. Determinare lo spostamento relativo in corrispondenza del doppio pendolo G (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.



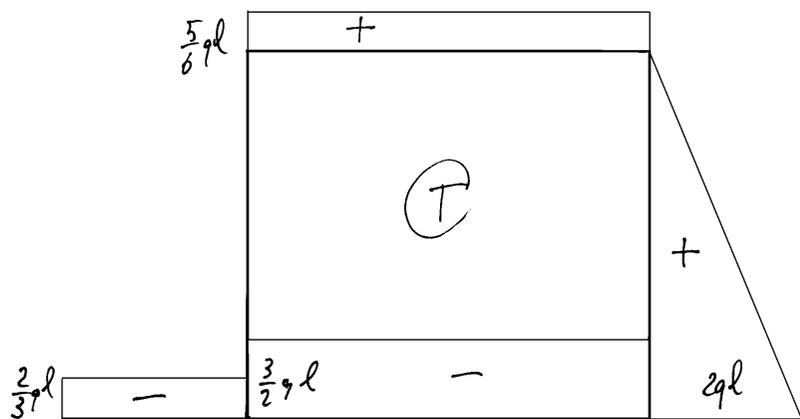
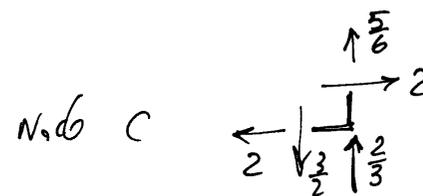
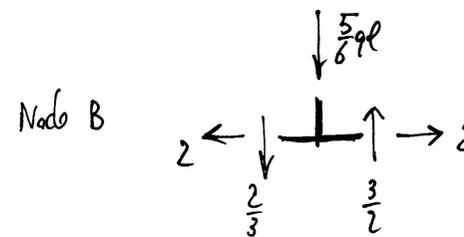
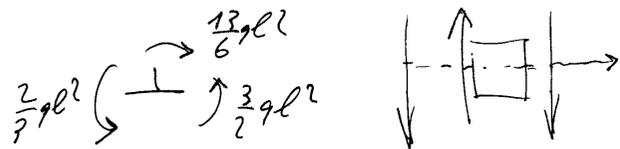
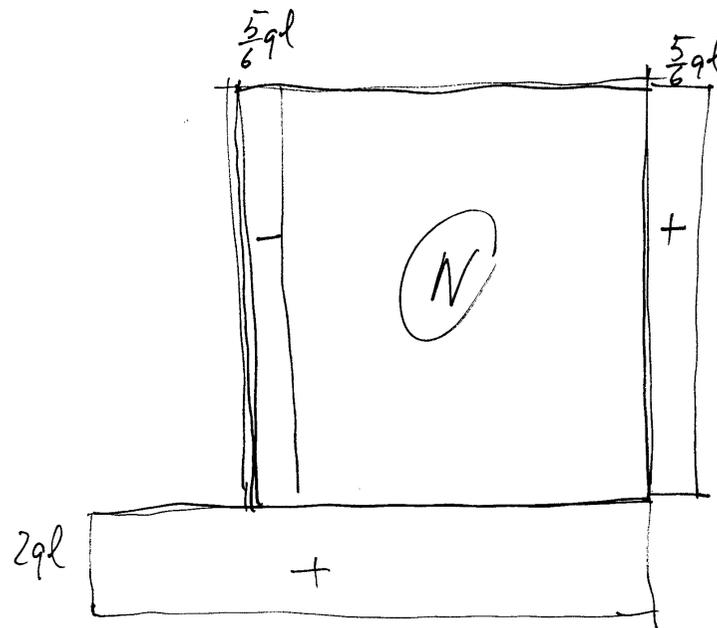
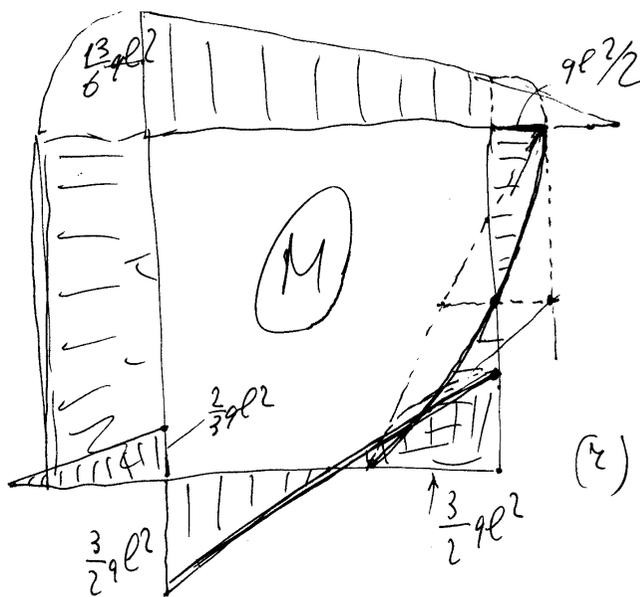
$$\frac{q l^2}{2} / \frac{5}{6} q l = \frac{6}{2 \times 5} l = \frac{3}{5} l$$

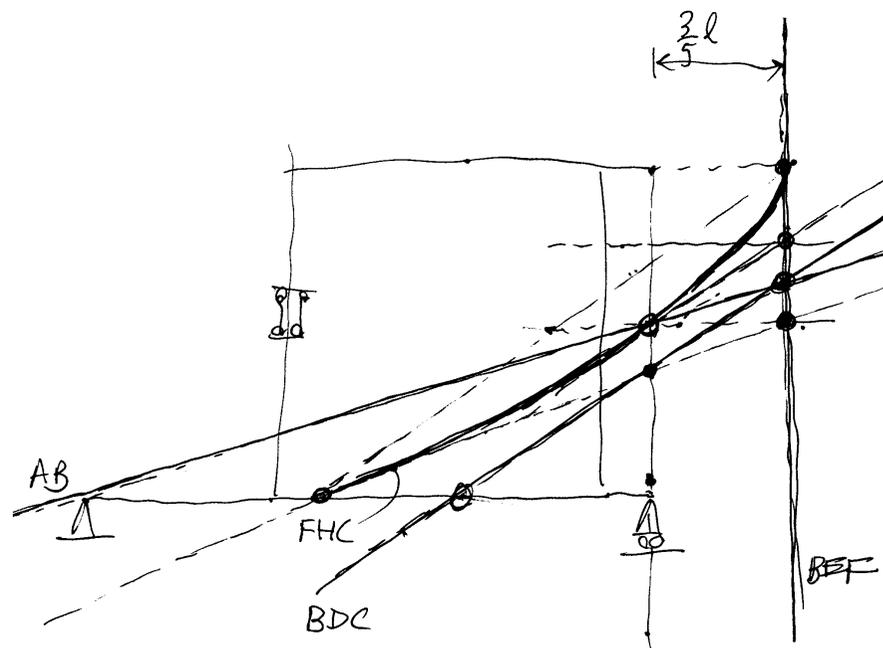
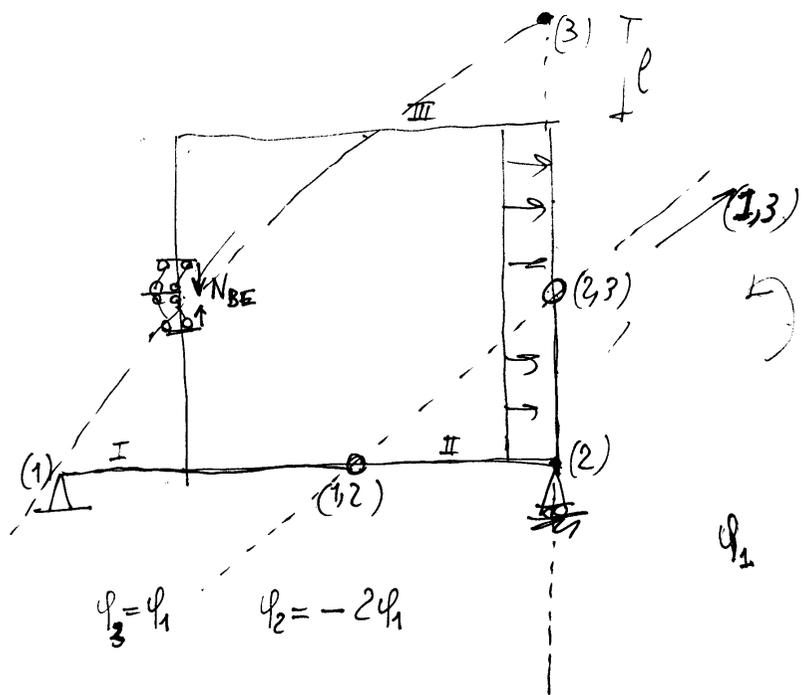
$$\frac{5}{6} q l \frac{17}{6} q l = \frac{85}{36} q l^2$$



$$2q l \frac{3}{4} l = \frac{3}{2} q l^2$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{9-4}{6} = \frac{5}{6}$$

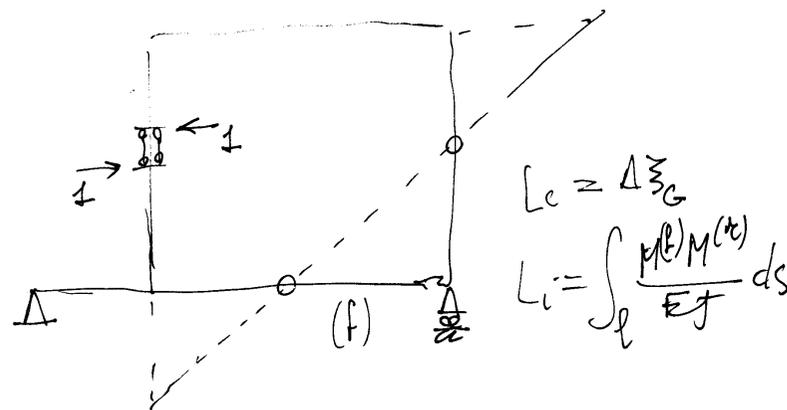


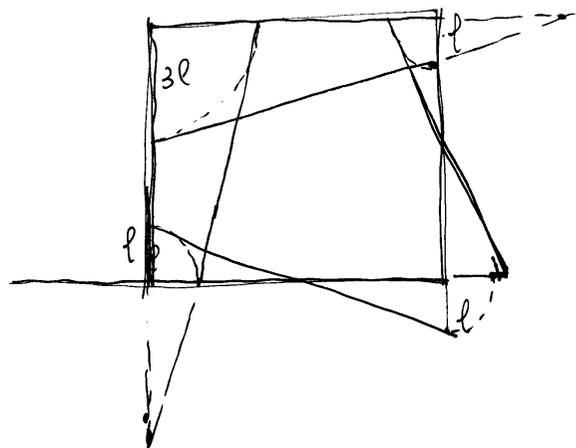
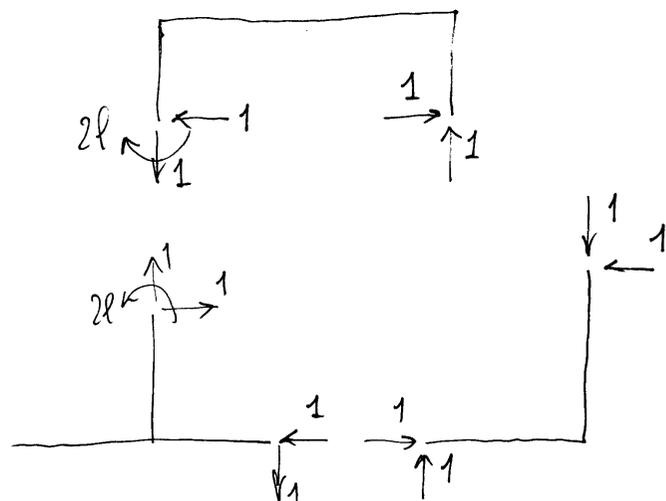


$$L_e = N_{BE} \varphi_1 l + N_{BE} \varphi_1 2l + 2\varphi_1 \frac{l}{2} (ql) + ql \varphi_1 \frac{3}{2} l$$

$$L_e = 0 \Rightarrow 3N_{BE} + \frac{5}{2} ql = 0$$

$$\Rightarrow N_{BE} = -\frac{5}{6} ql$$





$$L_{vi} = \frac{Xl}{EA} \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} + \frac{Fl}{EA} \left\{ \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= -\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{Xl}{EA} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Fl}{EA}$$

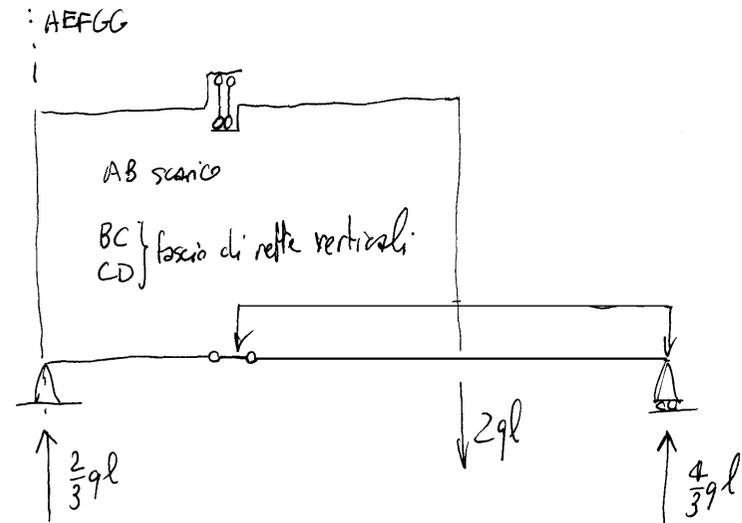
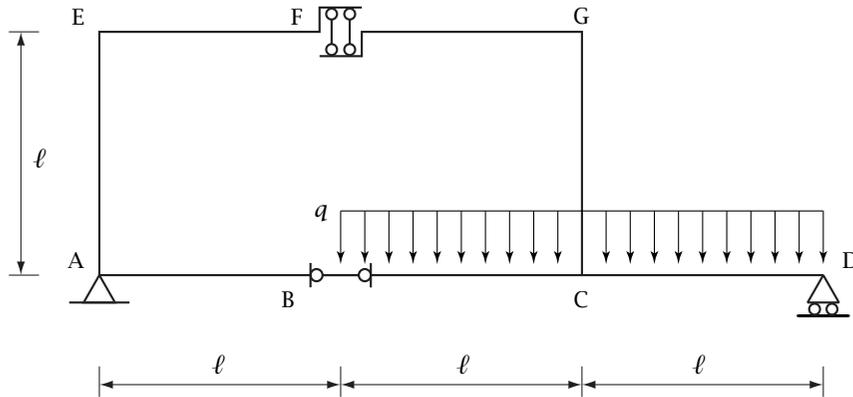
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \frac{Xl}{EA} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{Fl}{EA}$$

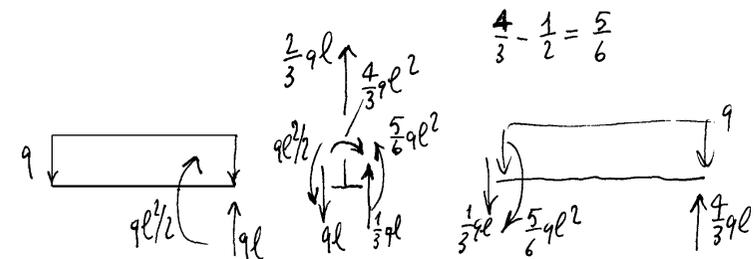
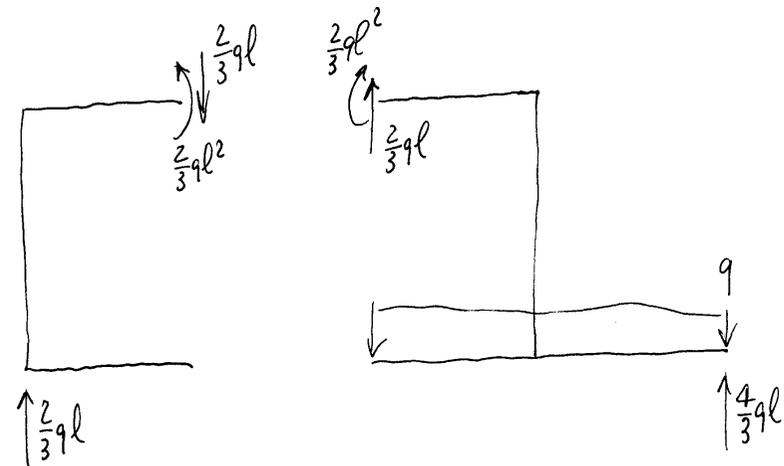
$$\frac{5 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}}{4} X = \frac{1}{2\sqrt{2}} F$$

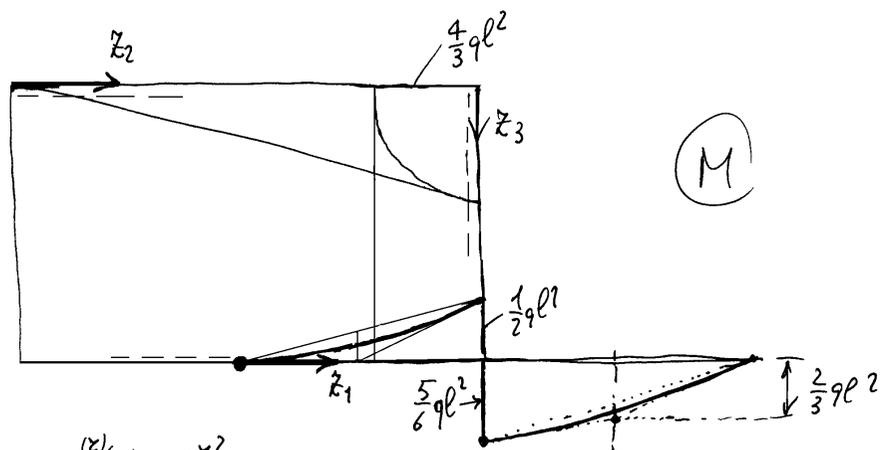
$$X = \frac{2}{(5\sqrt{2} + 12)} F = 0.1049 F$$

4.14 Esercizio 47



1. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
3. Determinare la rotazione relativa in B (dovuta alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo;
4. Verificare l'isostaticità della struttura;
5. Determinare la curva delle pressioni;
6. Determinare il taglio nel tratto CG utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Disegnare la deformata della struttura (limitarsi a disegnare la deformata delle due parti separatamente a meno di un moto rigido e scrivere le equazioni che permettono di determinare i due moti rigidi che ripristinano la congruenza).

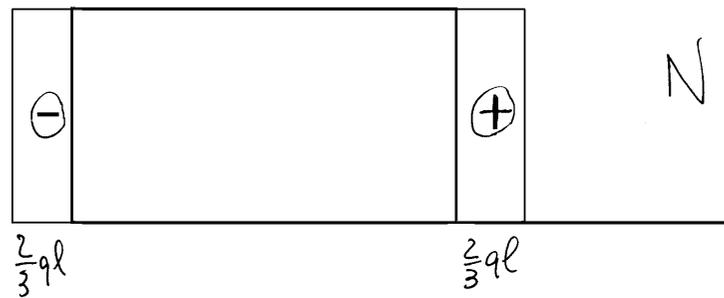
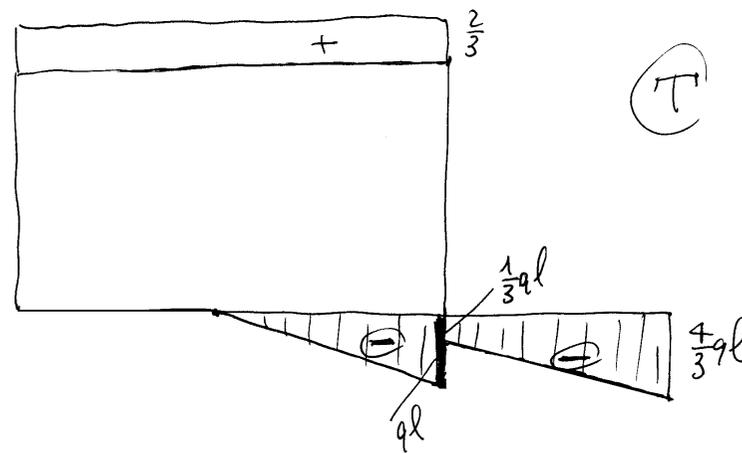
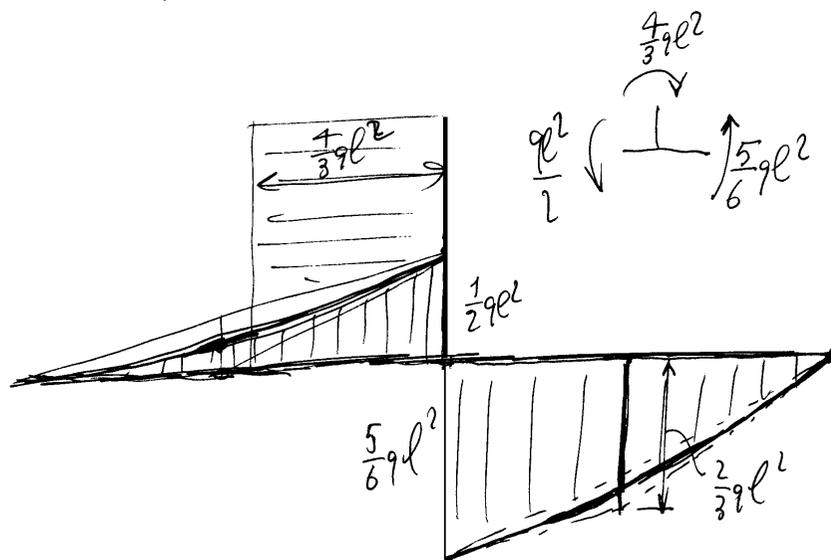


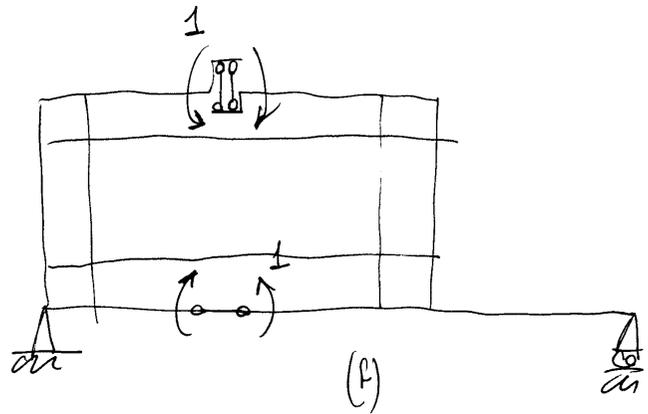


$$M^z(z_1) = \frac{qz_1^2}{2}$$

$$M^z(z_2) = \frac{2}{3}qlz_2$$

$$M^z(z_3) = \frac{4}{3}ql^2$$





$$M^f(z_1) = 1$$

$$M^f(z_2) = 1$$

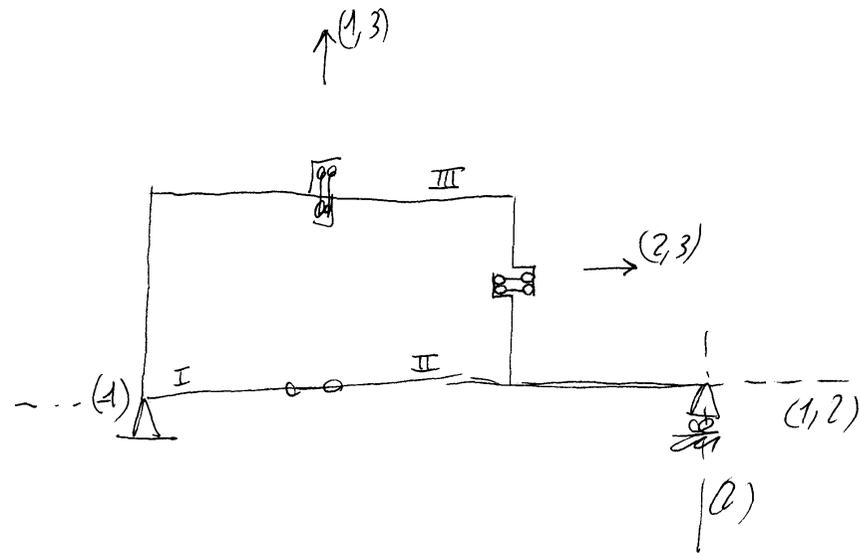
$$M^f(z_3) = 1$$



$$\Delta\varphi_B = \varphi_{BC} - \varphi_{BA}$$

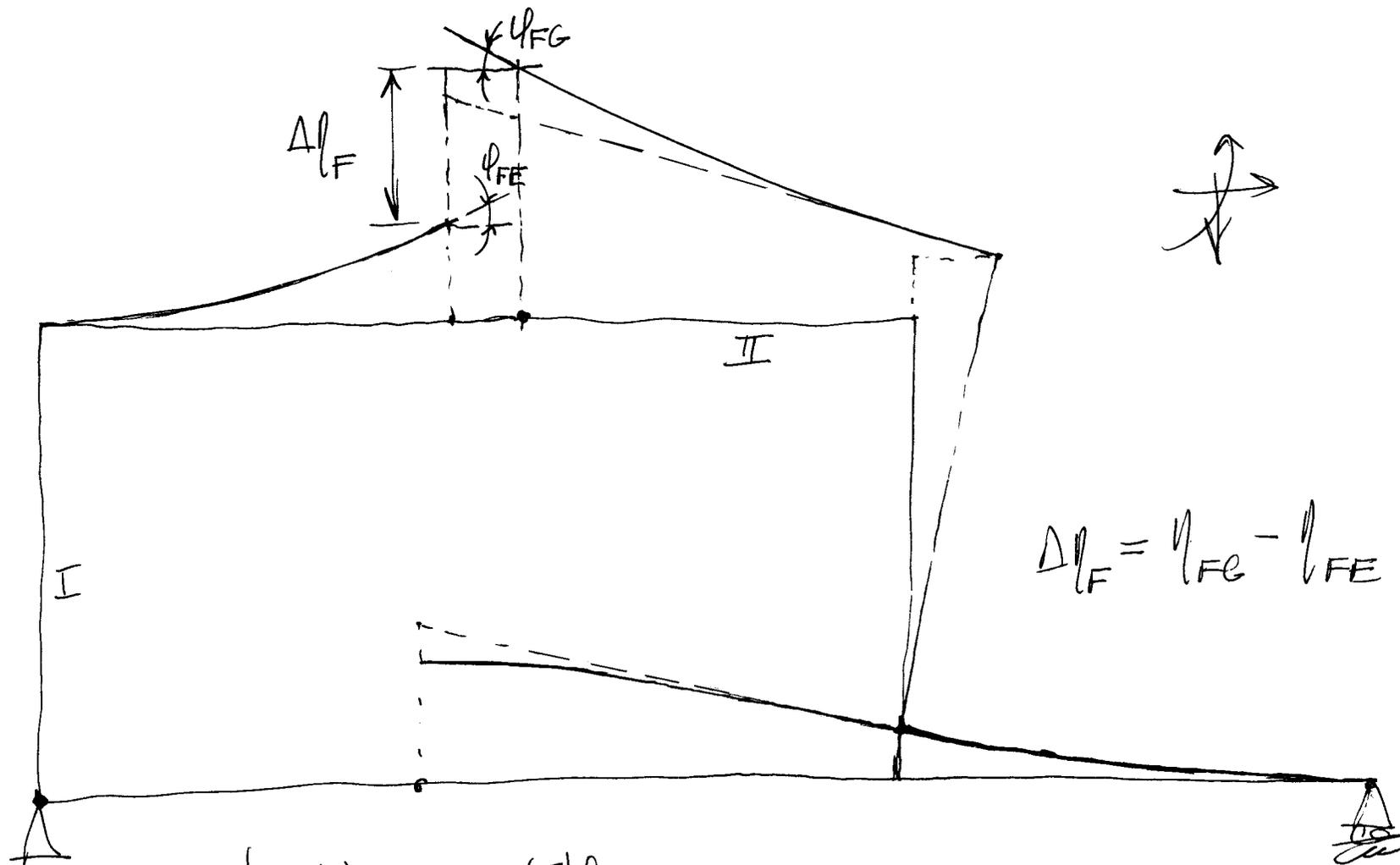
$$= \int_0^l \frac{q}{2EJ} z_1^2 dz_1 + \int_0^{2l} \frac{2ql}{3EJ} z_2 dz_2 + \int_0^l \frac{4ql^2}{3EJ} dz_3$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{17}{6} \frac{ql^3}{EJ}$$

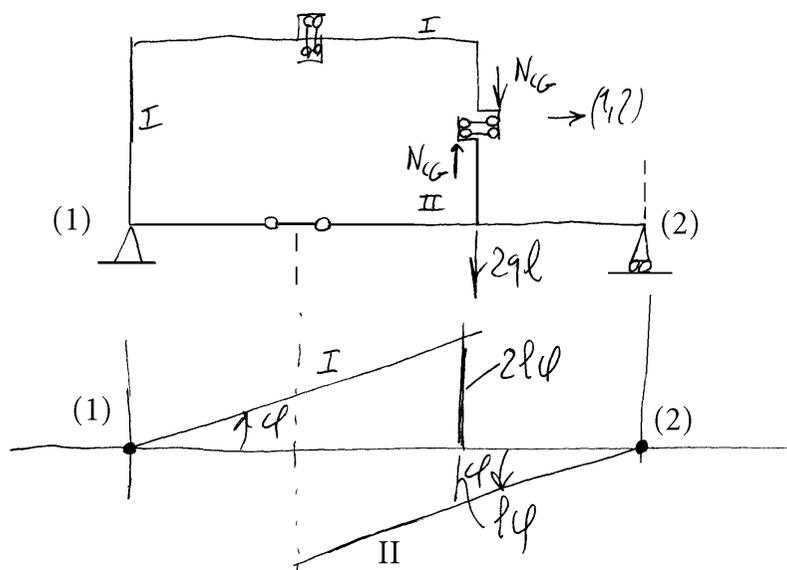


$(1,2) \equiv (2,3)$ per l'allineamento dei centri relativi e allora anche $(2,3)$ deve coincidere con $(1,2)$

Cio' e' impossibile salvo che $(1) \equiv (3)$ e I e III subiscano lo stesso moto rigido



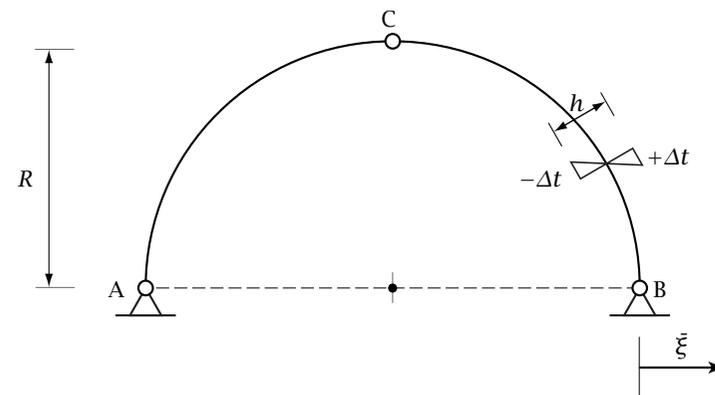
$$\begin{cases} \psi^{(I)} l + 2\psi^{(II)} l = \Delta l_F \\ \psi^{(I)} + \psi_{FE} = \psi^{(II)} + \psi_{FG} \end{cases}$$



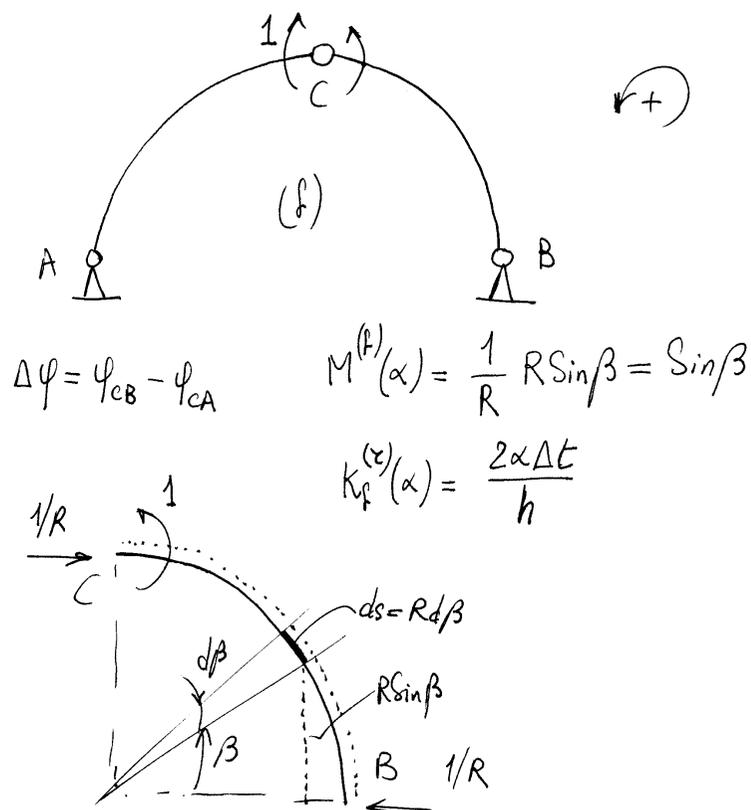
$$L_e = -N_{CG} 2l\phi - N_{CG} l\phi + 2ql^2\phi$$

$$L_e = 0 \Rightarrow N_{CG} = \frac{2}{3} ql$$

4.15 Esercizio 48



Dato l'arco circolare in figura, soggetto ad una distorsione termica nel tratto CB e ad un cedimento vincolare anelastico in B, calcolare la rotazione relativa in corrispondenza della cerniera C utilizzando il principio dei lavori virtuali.



$$\Delta\varphi = \varphi_{CB} - \varphi_{CA} \quad M^{(f)}(\alpha) = \frac{1}{R} R \sin\beta = \sin\beta$$

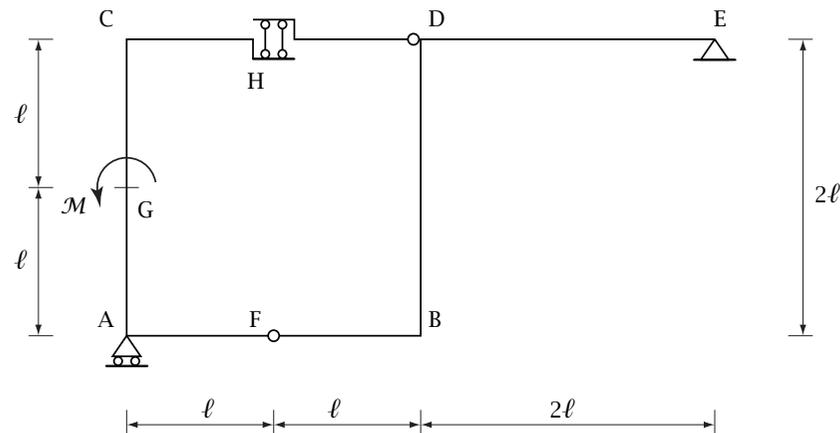
$$K_f^{(e)}(\alpha) = \frac{2\alpha\Delta t}{h}$$

$$L_{ve} = \Delta\varphi - \frac{1}{R} \int_0^{\pi/2} \sin\beta d\beta$$

$$L_{vi} = \int_0^{\pi/2} M^{(f)} K_f^{(e)} R d\beta = \int_0^{\pi/2} R \frac{2\alpha\Delta t}{h} \sin\beta d\beta = 2\alpha\Delta t \frac{R}{h}$$

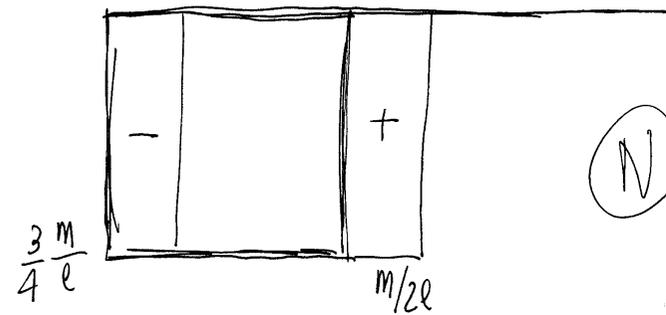
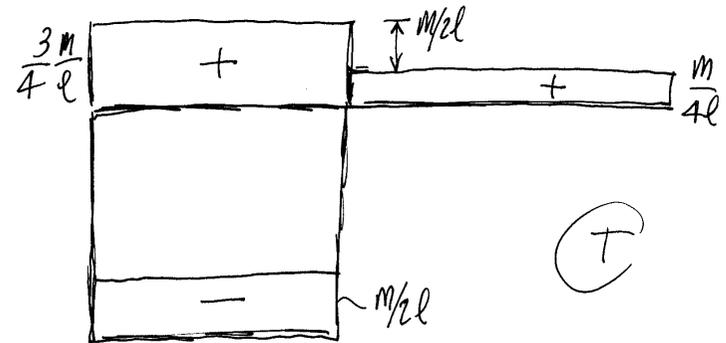
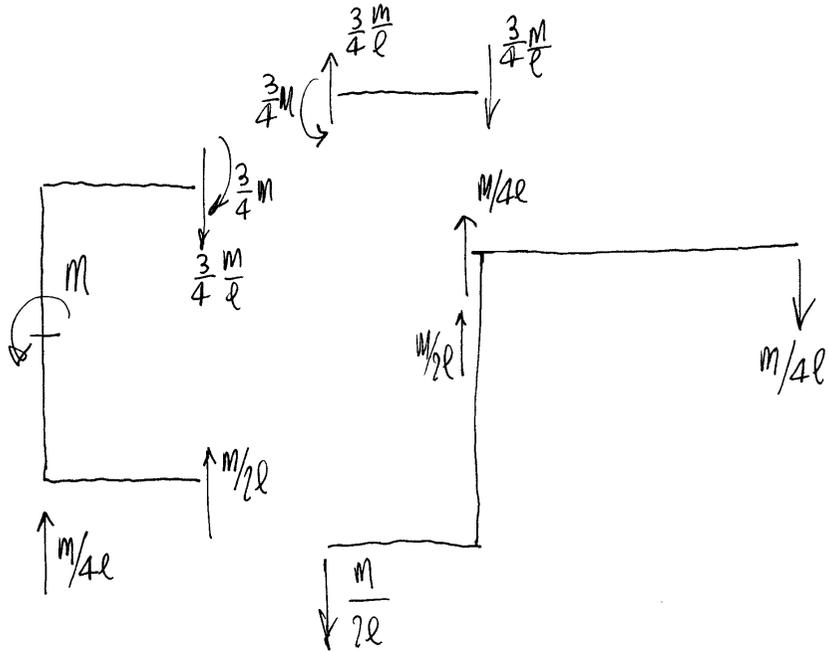
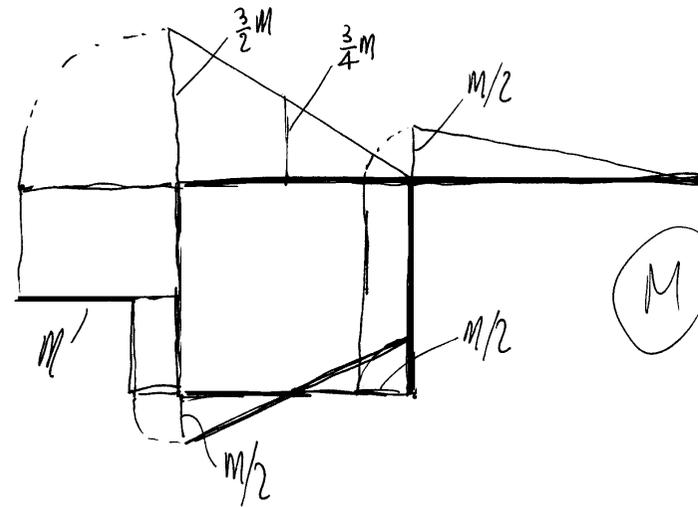
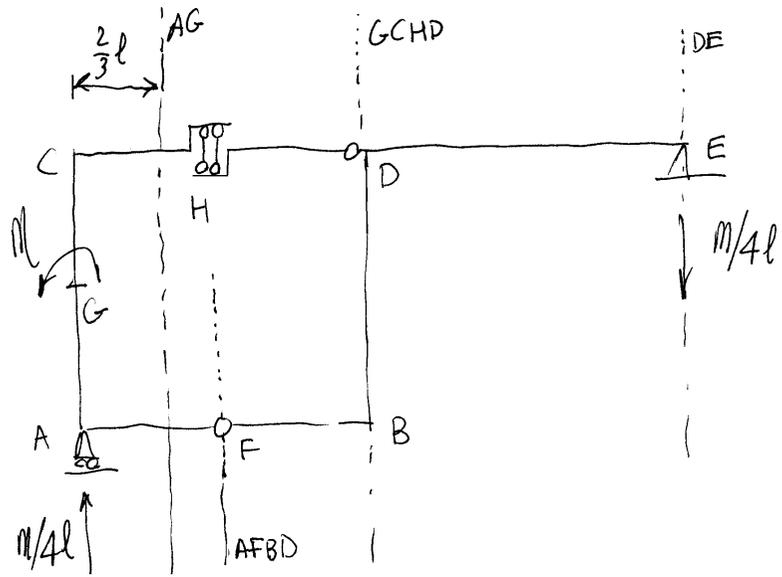
$$L_{ve} = L_{vi} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\alpha\Delta t \frac{R}{h} + \frac{1}{R}$$

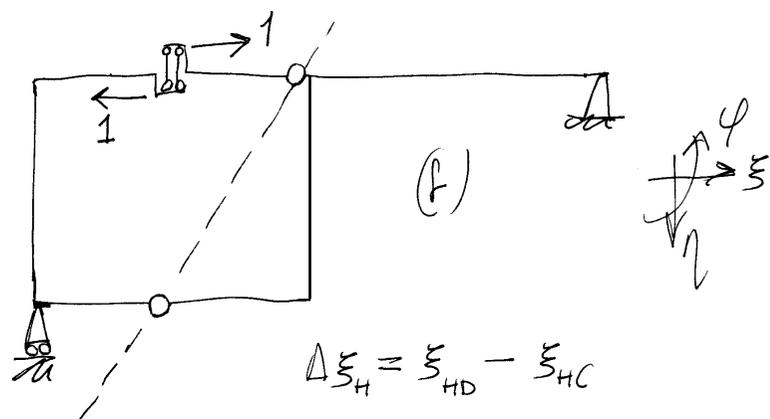
4.16 Esercizio 49



Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una coppia concentrata in corrispondenza della sezione G:

1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento orizzontale relativo nella sezione H utilizzando il principio dei lavori virtuali, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo;
5. Disegnare la curva delle pressioni;
6. Determinare il taglio in H utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento orizzontale relativo nella sezione H;
8. Determinare la rotazione della sezione G considerando la struttura caricata da due forze orizzontali P in H, in luogo della coppia in G.

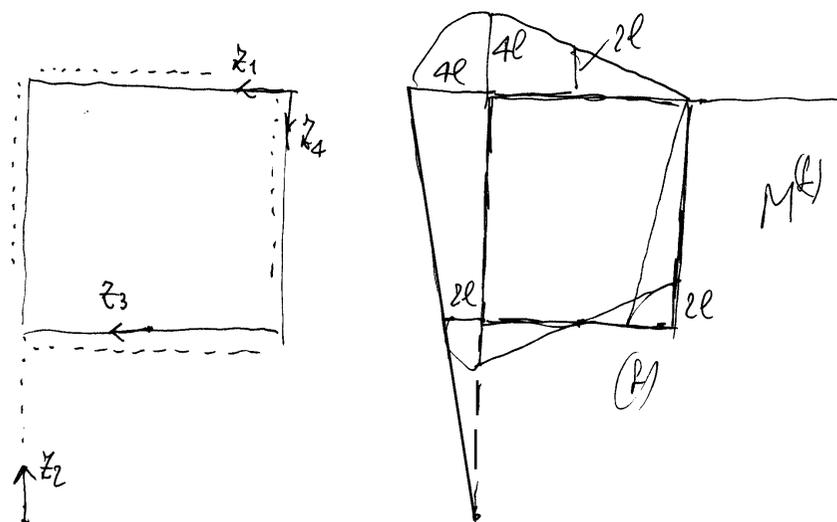
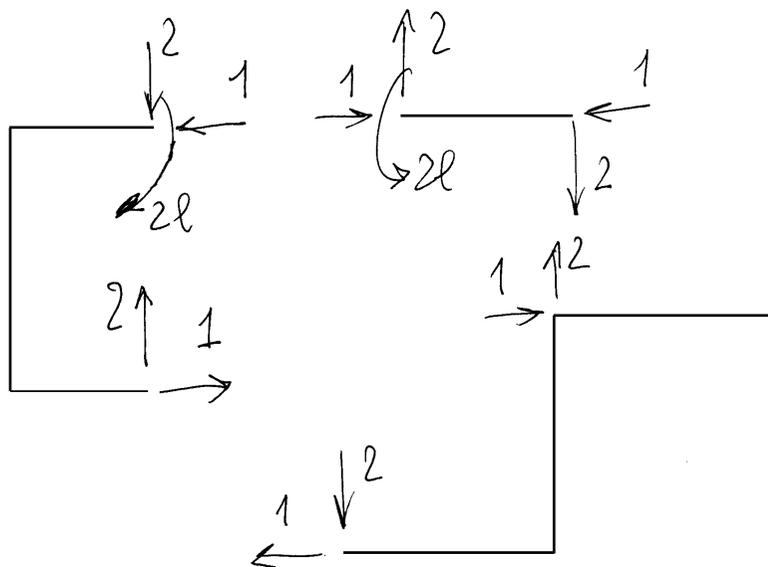




$$\Delta \xi_H = \xi_{HD} - \xi_{HC}$$

$$L_{ve} = 1 \cdot \Delta \xi_H$$

$$L_{vi} = \int_l M^{(F)} \left(\frac{M^{(E)}}{EJ} \right) ds$$



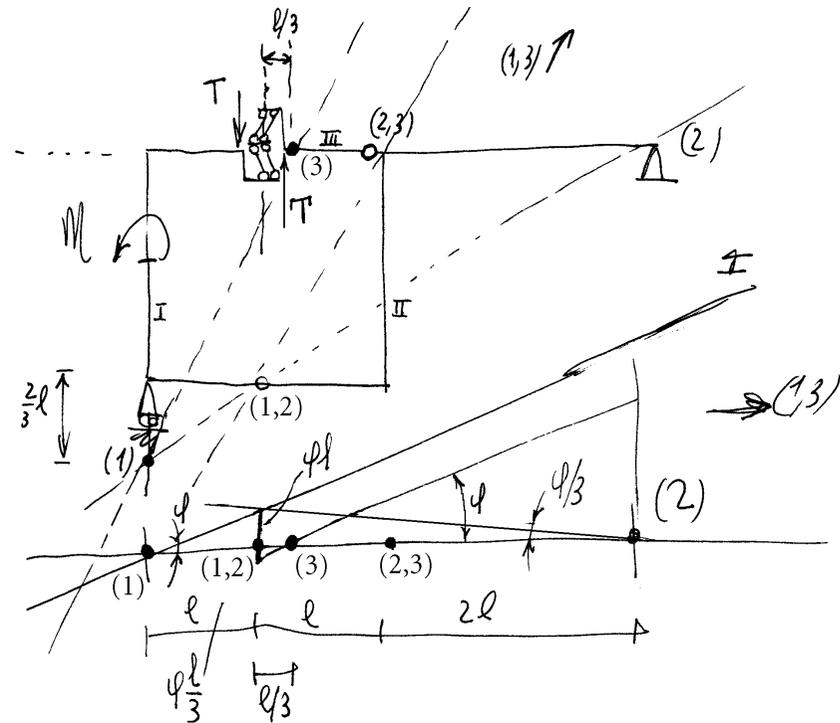
$$\textcircled{1} \begin{cases} M^{(E)}(z_1) = 2z_1 \\ M^{(E)}(z_1) = \frac{3}{4} \frac{M}{l} z_1 \end{cases} \quad 0 \leq z_1 \leq 2l$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} M^{(E)}(z_2) = z_2 & 2l \leq z_2 \leq 4l \\ M^{(E)}(z_2) = \frac{M}{2} & 2l \leq z_2 < 3l \\ M^{(E)}(z_2) = \frac{3}{2} M & 3l < z_2 \leq 4l \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} M^{(E)}(z_3) = 2z_3 \\ M^{(E)}(z_3) = \frac{M}{2l} z_3 \end{cases} \quad -l \leq z_3 \leq l$$

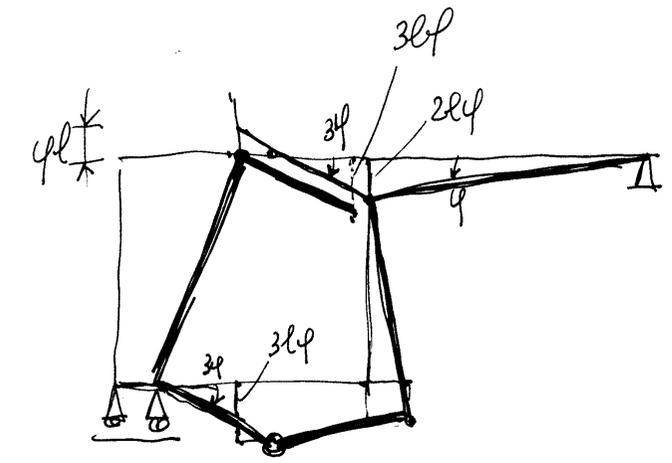
$$\textcircled{4} \begin{cases} M^{(E)}(z_4) = z_4 \\ M^{(E)}(z_4) = \frac{M}{2} \end{cases} \quad 0 \leq z_4 \leq 2l$$

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \frac{3m}{2EJ} \int_0^{2l} z_1^2 dz_1 + \frac{m}{2EJ} \int_{2l}^{3l} z_2^2 dz_2 + \frac{3m}{2EJ} \int_{3l}^{4l} z_2^2 dz_2 \\
 &\quad + \frac{m}{EJ} \int_{-l}^l z_3^2 dz_3 + \frac{m}{2} \int_0^{2l} z_4 dz_4 \\
 &= \frac{ml^2}{EJ} \left\{ \frac{3 \times 8}{2 \times 3} + \frac{9-4}{2 \times 2} + \frac{3 \times (16-9)}{2 \times 2} + \frac{1+1}{3} + \frac{4}{2 \times 2} \right\} \\
 &= \left\{ 4 + \frac{5}{4} + \frac{21}{4} + \frac{2}{3} + 1 \right\} \frac{ml^2}{EJ} \\
 &= \frac{48+15+63+8+12}{12} \frac{ml^2}{EJ} = \frac{146}{12} \frac{ml^2}{EJ} = \frac{73}{6} \frac{ml^2}{EJ}
 \end{aligned}$$



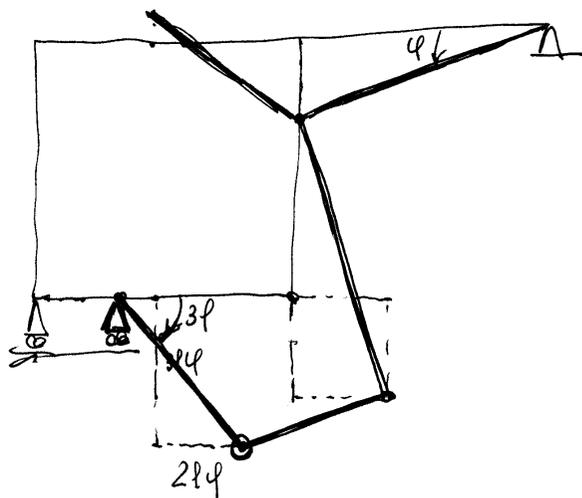
$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_G} &= -P \bar{z}_{HD} + P \bar{z}_{HC} \\
 &= -P(\bar{z}_{HD} - \bar{z}_{HC}) = -P \Delta \bar{z}_H
 \end{aligned}$$

$$\varphi_G = - \frac{73}{6} \frac{Pl^2}{EJ}$$

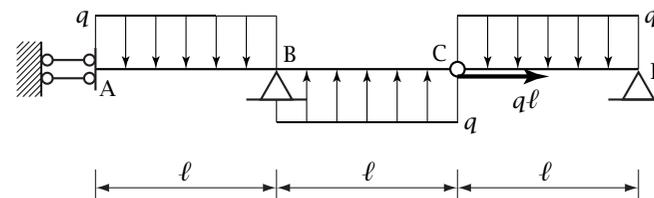


$$M(3\varphi) - T(3\varphi l) - T\varphi l = 0$$

$$T = \frac{3}{4} \frac{M}{l}$$



4.17 Esercizio 50

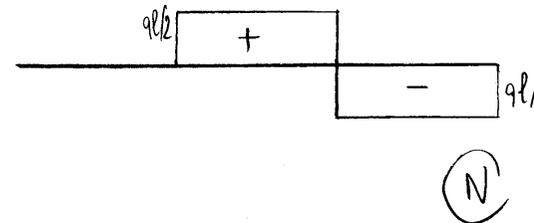
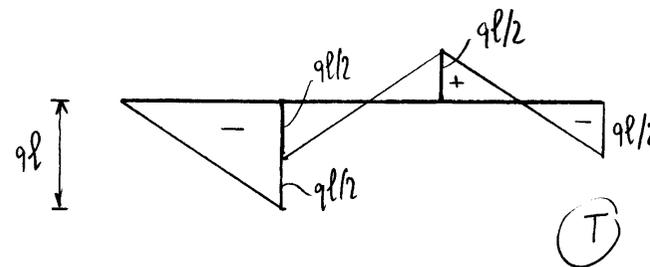
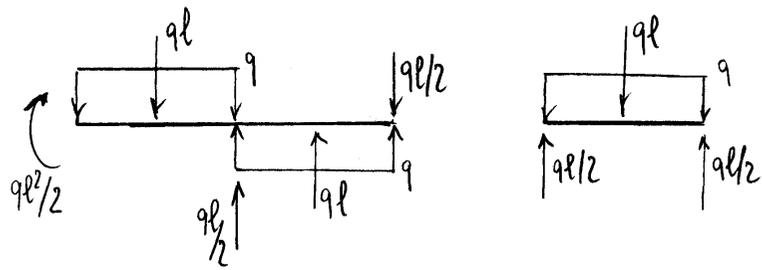


Data la trave di figura:

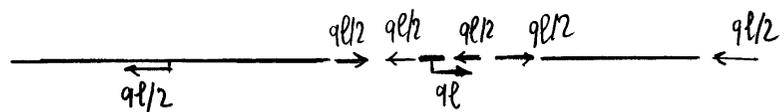
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
 2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 4. Calcolare lo spostamento verticale del nodo C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
 5. Determinare il momento flettente in A utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 6. Disegnare la curva delle pressioni;
- * * * * *
7. Calcolare la rotazione in B utilizzando il metodo cinematico;
 8. Disegnare la deformata elastica della struttura;
 9. Risolvere la struttura, per la sola parte flessionale, col metodo delle rigidità.

Struttura 2 volte iperstatica (assialmente)

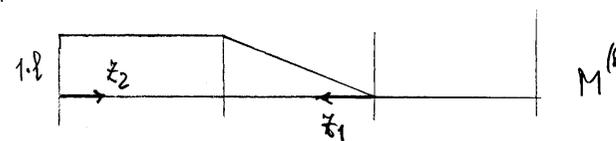
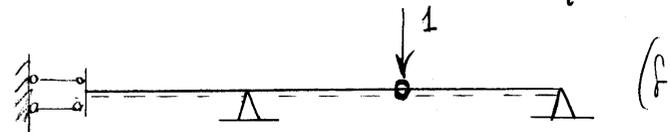
Soluzione flessionale



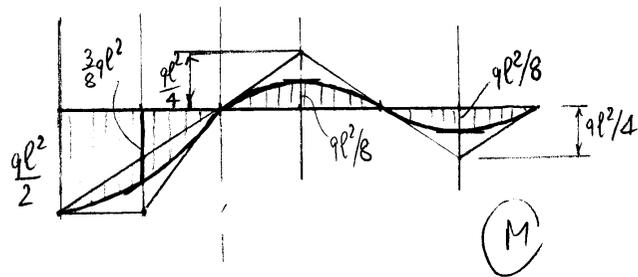
Soluzione assiale



Spostamento verticale di C



Diagrammi



$$\begin{cases} M^{(F)}(z_1) = -z_1 \\ M^{(F)}(z_2) = -l \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(z)}(z_1) = \frac{qz_1^2}{2} - \frac{ql}{2}z_1 \\ M^{(z)}(z_2) = \frac{ql^2}{2} - \frac{qz_2^2}{2} \end{cases}$$

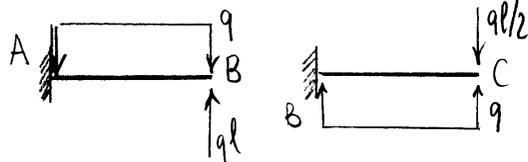
$$L_{ve} = 1 \cdot \eta_c$$

$$L_{vi} = \int_l M^{(A)} \left(\frac{M^{(R)}}{EJ} \right) ds$$

$$= \frac{q}{2EJ} \int_0^l (lx_1^2 - x_1^3) dx_1 + \int_0^l (lx_2^2 - l^3) dx_2$$

$$= \frac{ql^4}{2EJ} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{7}{24} ql^4$$

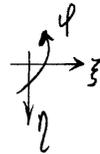
Verifica col metodo cinematico



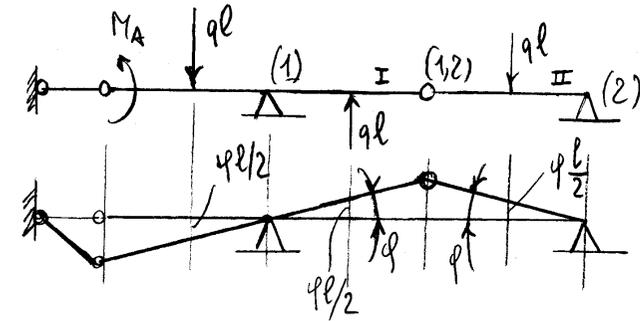
$$\eta_c = \frac{(ql/2)l^3}{3EJ} - \frac{ql^4}{8EJ} - \eta_B l$$

$$\eta_B = \frac{(ql)l^2}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = \frac{ql^3}{3EJ}$$

$$\eta_c = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{7}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$



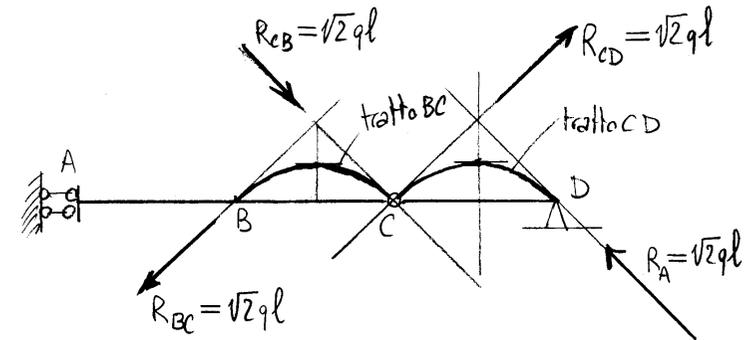
Momento flettente in A



$$M_A \varphi + (ql) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) + (ql) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) - (ql) \left(\varphi \frac{l}{2} \right) = 0$$

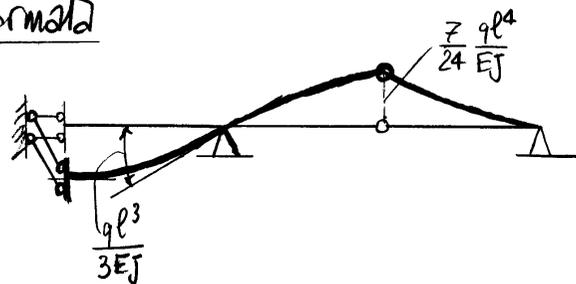
$$M_A \varphi = -\frac{ql^2}{2} \varphi \Rightarrow M_A = -\frac{ql^2}{2}$$

Curva delle pressioni



Nel tratto AB degenera in un fascio di rette verticali

Deformata

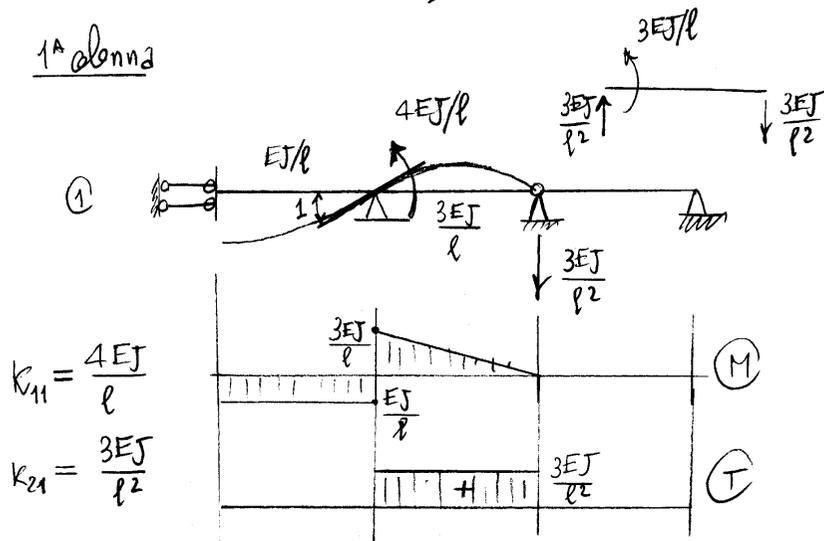


Metodo delle rigidità

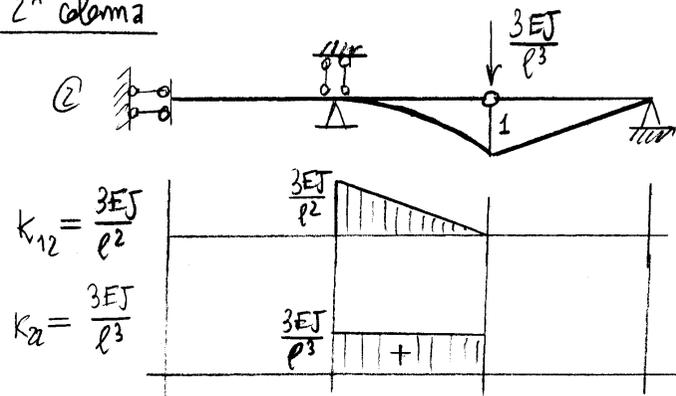
Spostamenti: $s \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_C \end{Bmatrix}$



1ª colonna

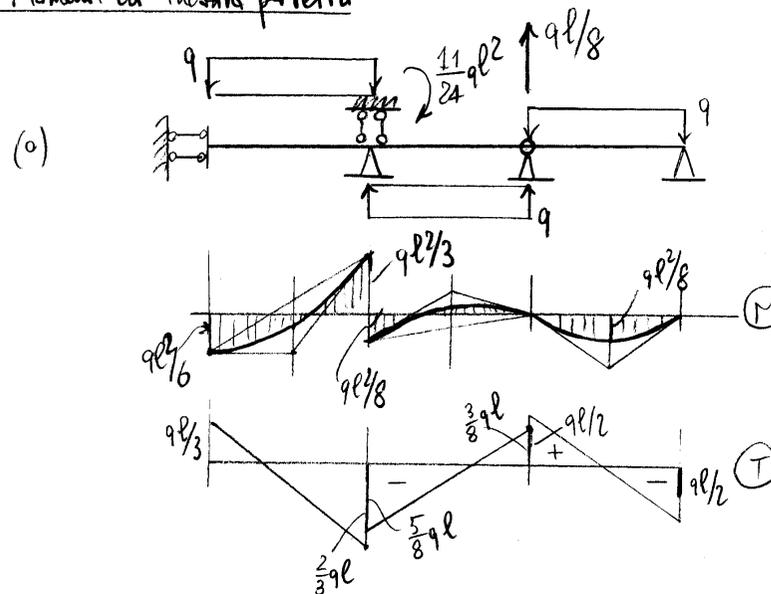


2ª colonna



$K \equiv \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix}$

Momenti di incastro perfetta



Spostamenti di nodo

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 3l \\ 3l & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = \frac{ql}{24} \begin{Bmatrix} 11l \\ 3 \end{Bmatrix}$$

A meno di $\frac{ql^4}{24EJ}$:

$$\begin{cases} 4l\varphi_B + 3\eta_C = 11 \\ 3l\varphi_B + 3\eta_C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = 8/l \\ \eta_C = -7 \end{cases}$$

e quindi:

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{3EJ}, \quad \eta_C = -\frac{7ql^4}{24EJ}$$

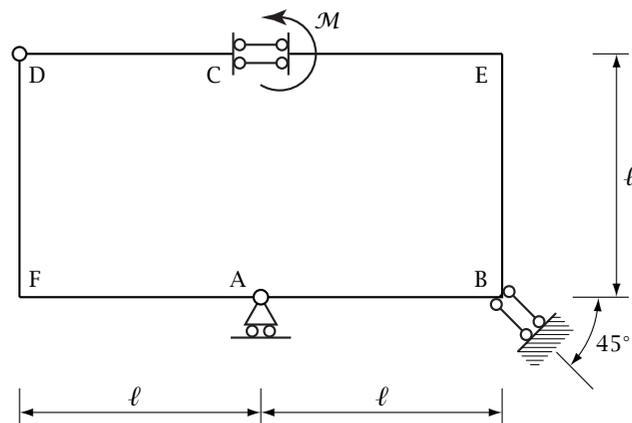
$$M_A = \frac{ql^2}{6} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} = \frac{ql^2}{2}$$

$$M_{BA} = -\frac{ql^2}{3} + \left(\frac{EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} = 0$$

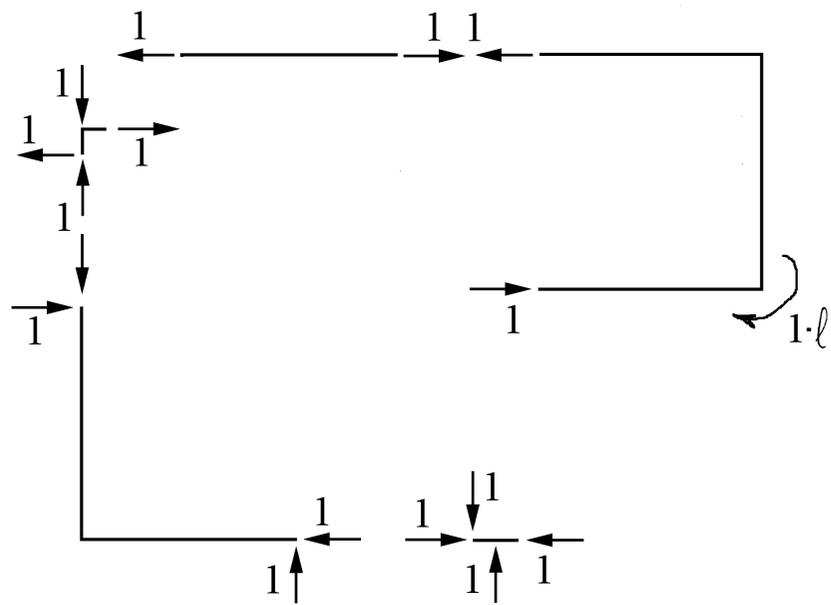
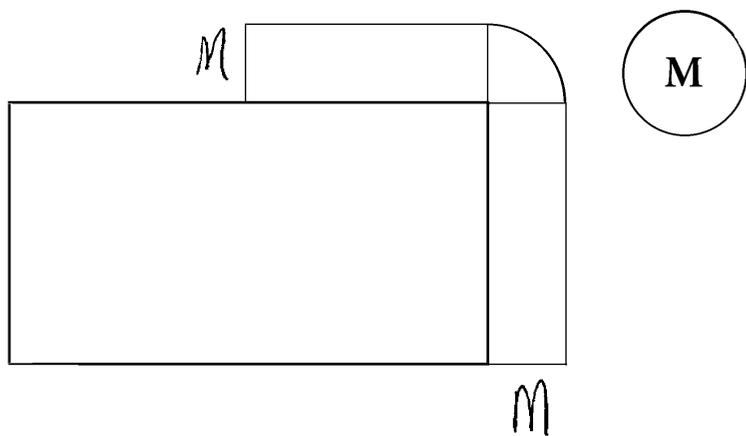
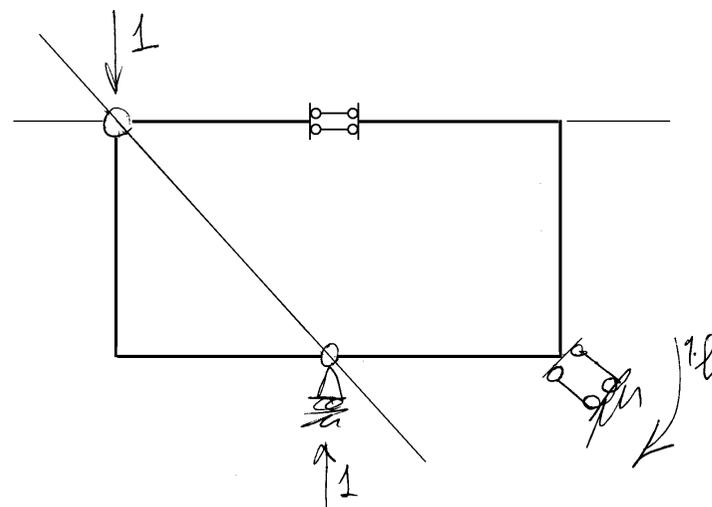
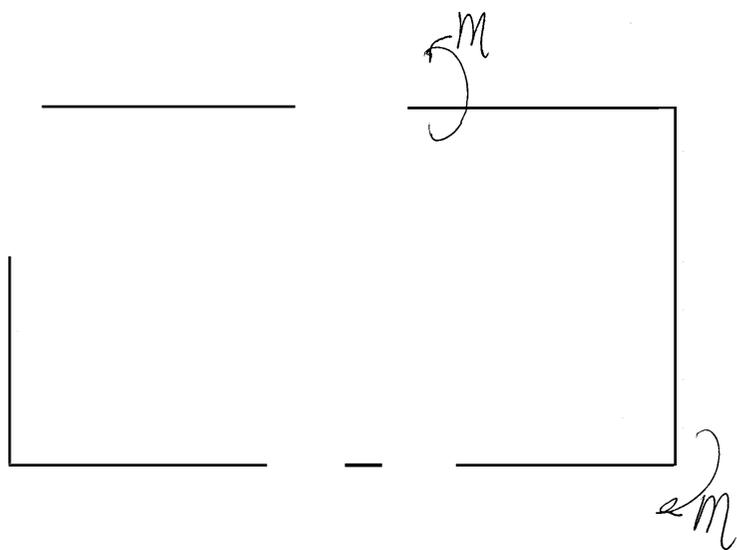
$$M_{BA} = \frac{ql^2}{8} - \left(\frac{3EJ}{l}\right) \frac{ql^3}{3EJ} - \left(\frac{3EJ}{l^2}\right) \left(-\frac{7ql^4}{24EJ}\right) = 0$$

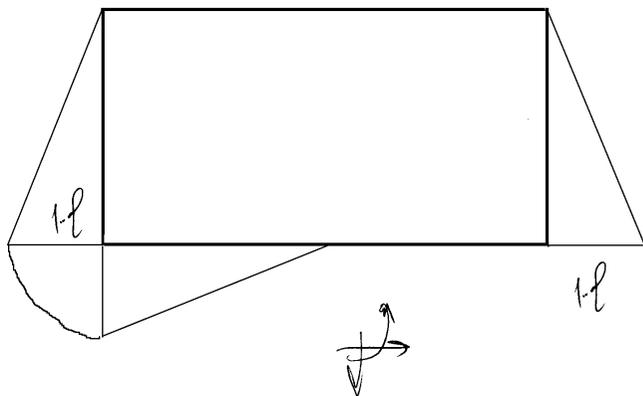
$$M_c = 0$$

4.18 Esercizio 51

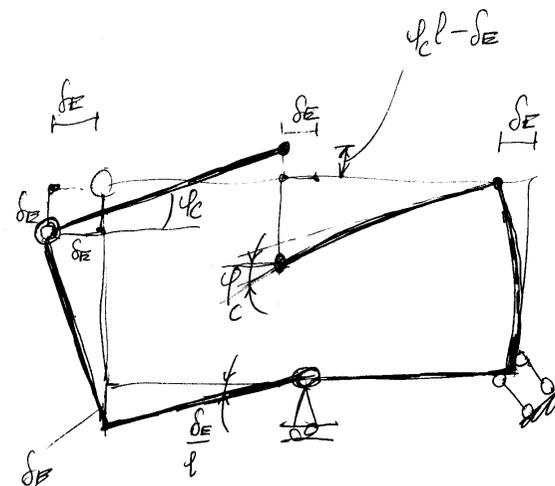
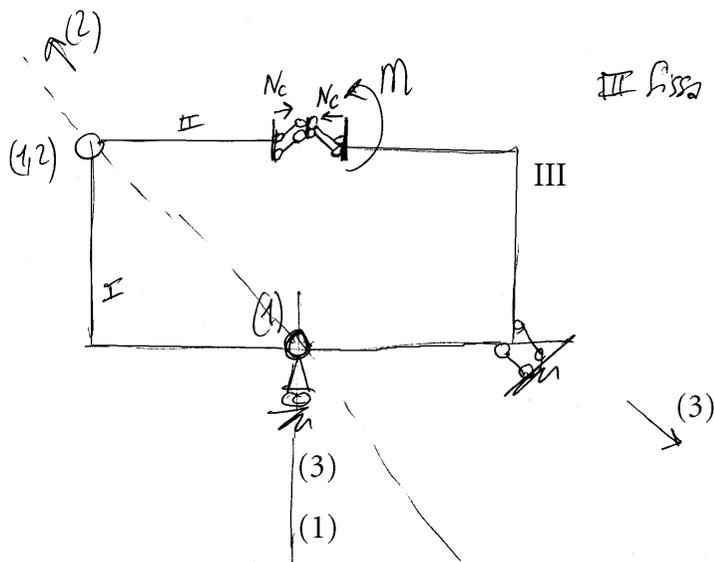


1. Analizzare cinematicamente la struttura;
 2. Determinare le reazioni interne ed esterne;
 3. Disegnare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione;
 4. Calcolare lo spostamento verticale del punto D utilizzando il principio dei lavori virtuali per i sistemi di travi deformabili;
 5. Calcolare la reazione orizzontale del doppio pendolo in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i sistemi di travi rigide;
-
6. Calcolare lo spostamento orizzontale del punto E e la rotazione della sezione C con il metodo cinematico;
 7. Disegnare la deformata elastica della struttura;
-
8. Curva delle pressioni;
 9. Calcolare l'energia elastica di deformazione;
 10. Calcolare l'energia potenziale totale in corrispondenza della soluzione.





$$I_D = \int_0^l x \left(\frac{m}{EJ} \right) dx = \frac{ml^2}{2EJ}$$

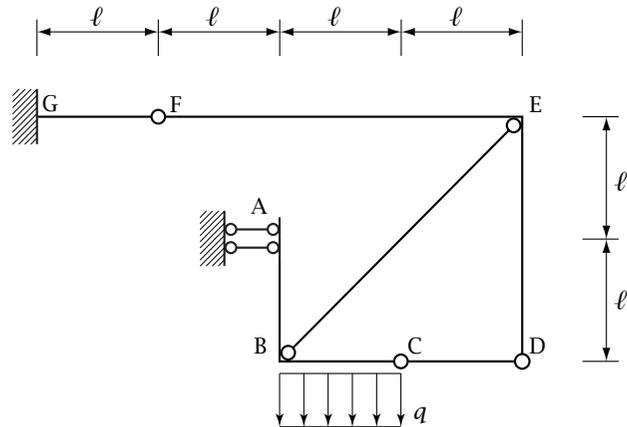


$$\phi_c = \frac{2ml}{EJ} \quad \delta_E = \frac{ml^2}{2EJ}$$

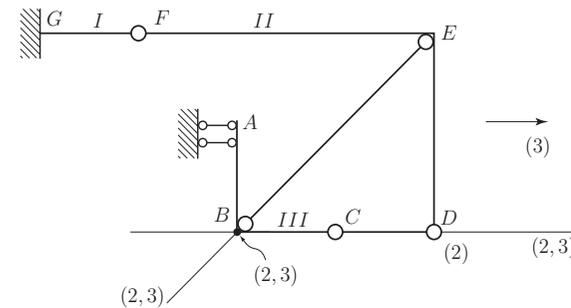
$$\phi_c \cdot l - \delta_E = \frac{3}{2} \frac{ml^2}{EJ}$$

$$\phi = \frac{ml^2}{EJ} \quad \pi = - \frac{ml^2}{EJ}$$

4.19 Esercizio 52



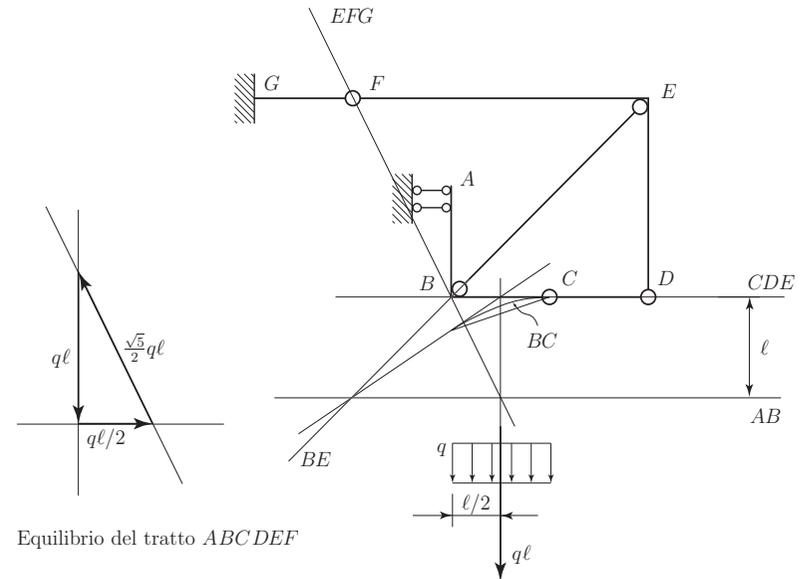
Verifica dell'isostaticità e curva delle pressioni



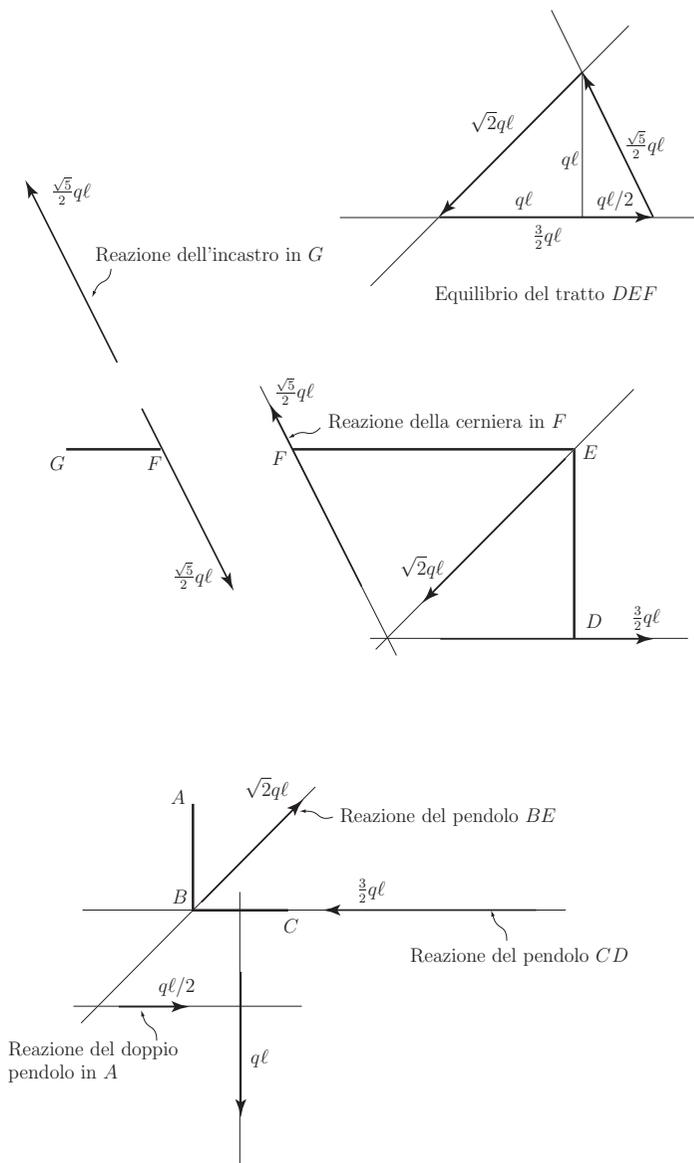
(2), (3) e (2,3) non sono allineati \Rightarrow gradi di labilita = 0

$$\left. \begin{aligned} \text{gradi di liberta} &= 3 \times 3 = 9 \\ \text{gradi di vincolo} &= \begin{matrix} (3+2) \\ \text{vincoli esterni} \end{matrix} + \begin{matrix} (2+1+1) \\ \text{vincoli interni} \end{matrix} = 9 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{gradi di iperstaticita} = 0$$

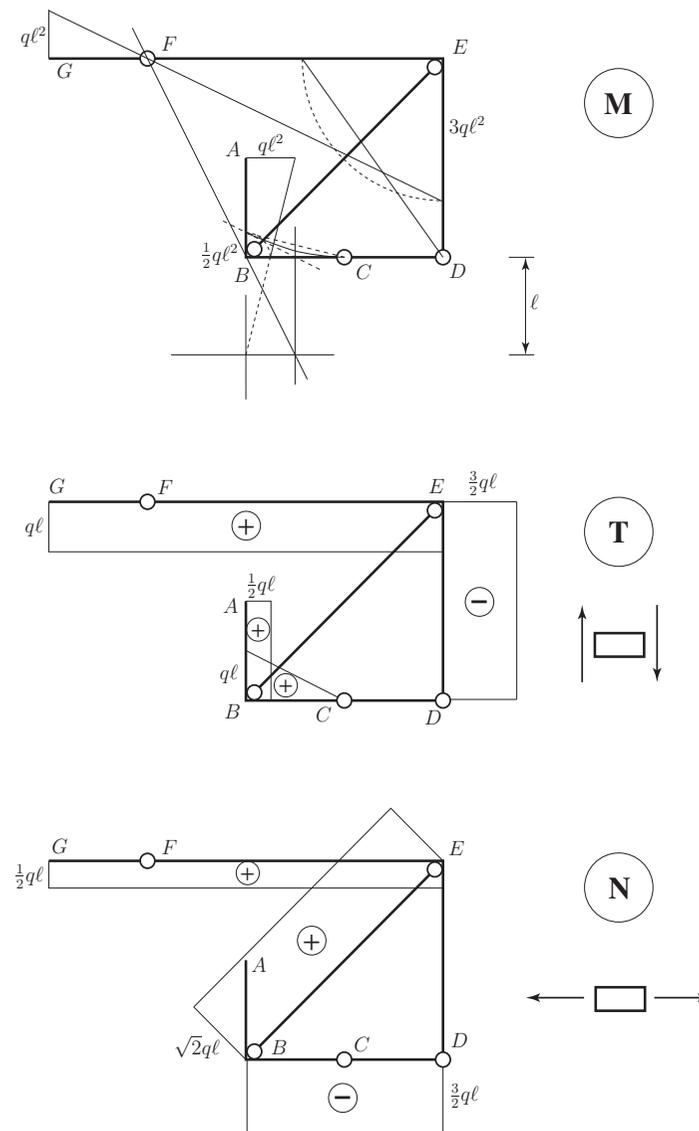
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Disegnare la curva delle pressioni;
3. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
5. Determinare la forza normale nel pendolo BE utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
6. Determinare la rotazione del pendolo BE (dovuto alla deformazione della struttura) facendo uso del principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili nell'ipotesi che il pendolo BE sia deformabile assialmente, disegnando e quotando i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo.



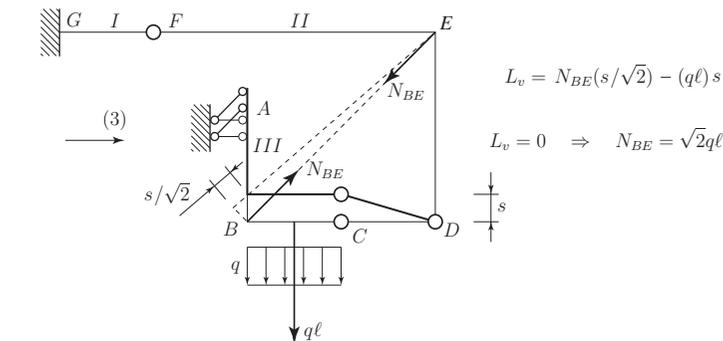
Reazioni interne ed esterne e poligoni delle forze



Diagrammi del momento, del taglio e della forza normale

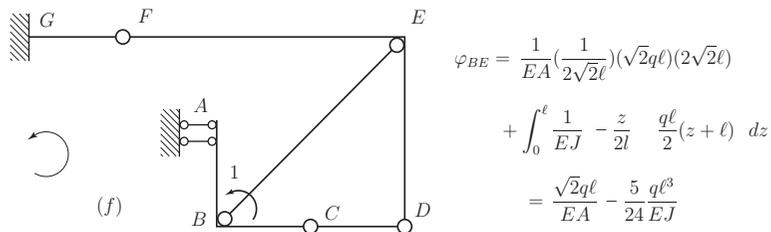


Calcolo della forza normale e della rotazione del pendolo BE



$$L_v = N_{BE}(s/\sqrt{2}) - (ql)s$$

$$L_v = 0 \Rightarrow N_{BE} = \sqrt{2}ql$$

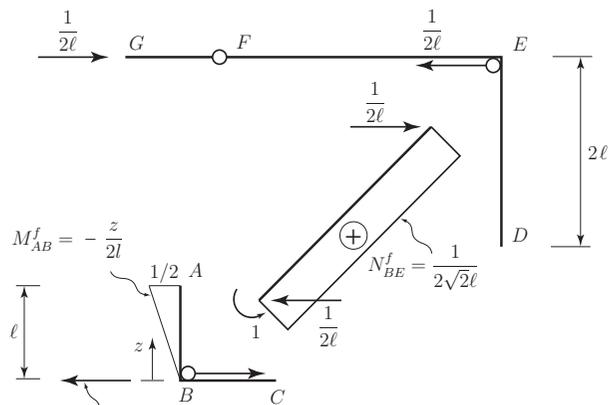


$$\varphi_{BE} = \frac{1}{EA} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\ell} \right) (\sqrt{2}ql)(2\sqrt{2}\ell)$$

$$+ \int_0^\ell \frac{1}{EJ} \left(-\frac{z}{2\ell} \right) \frac{ql}{2}(z+\ell) dz$$

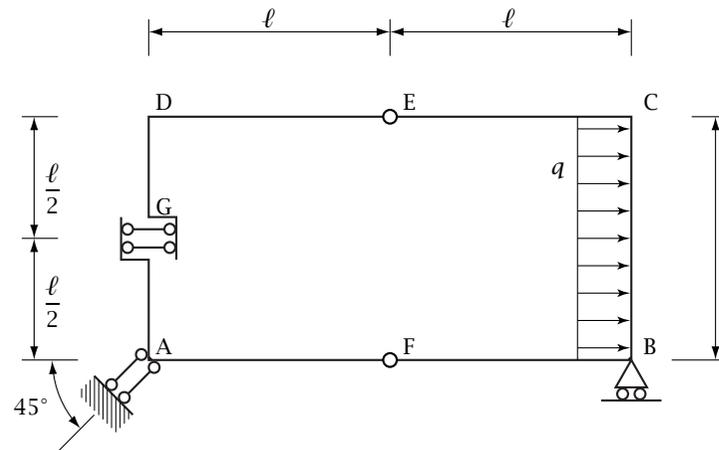
$$= \frac{\sqrt{2}ql}{EA} - \frac{5}{24} \frac{ql^3}{EJ}$$

Schema delle forze per il calcolo della rotazione del pendolo BE

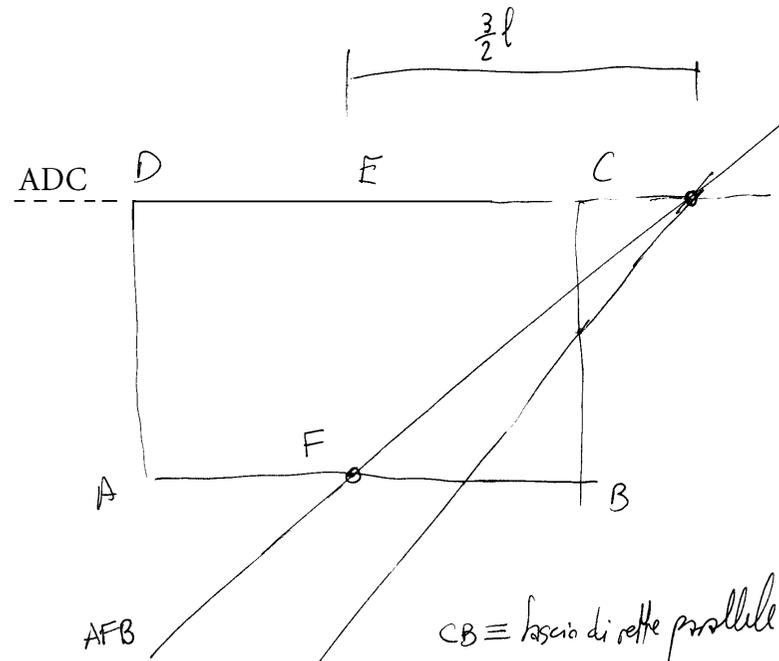
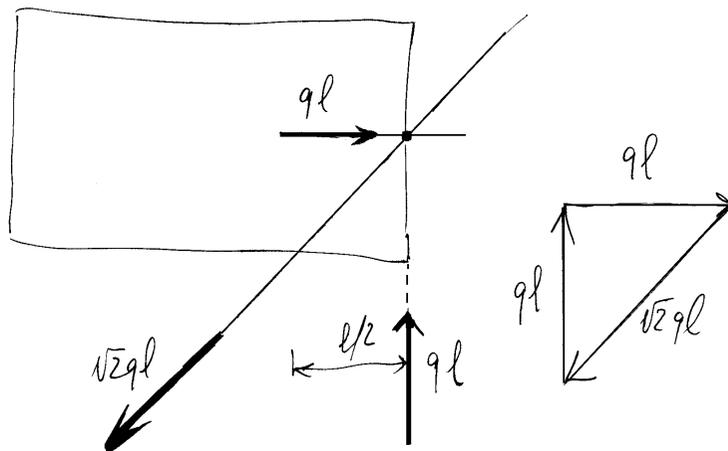
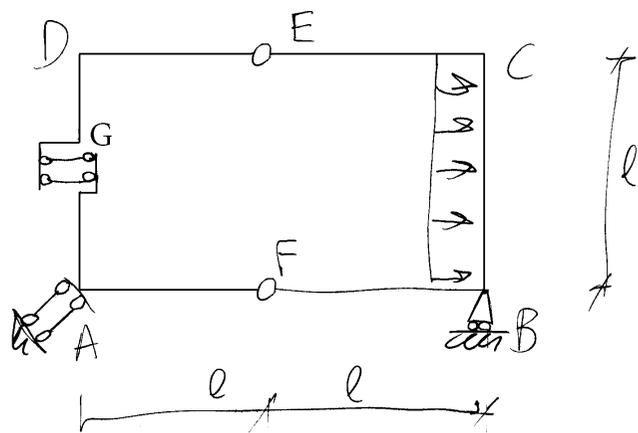


Reazione del doppio pendolo in A

4.20 Esercizio 53

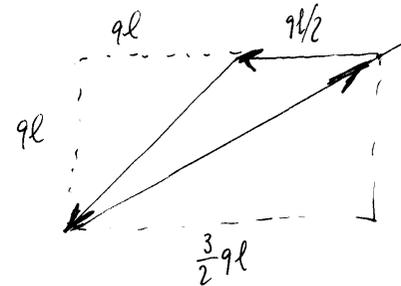


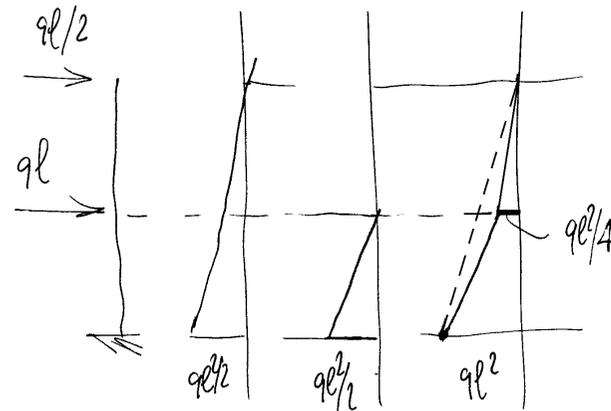
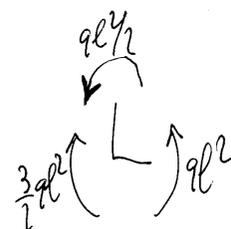
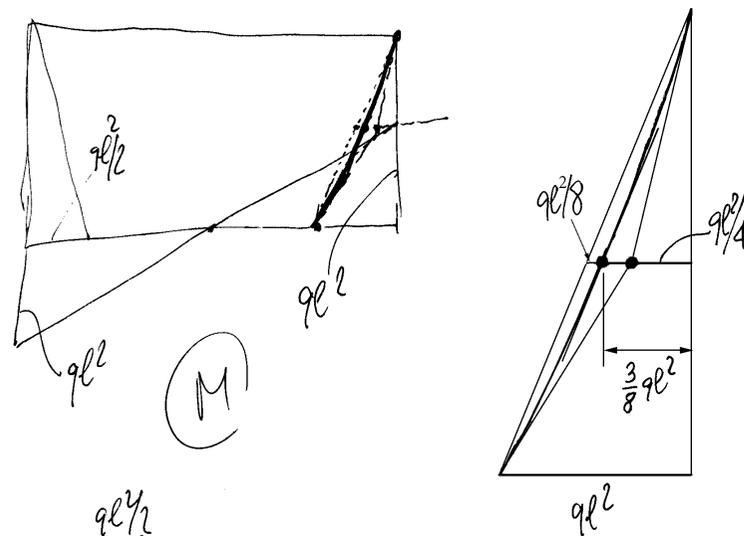
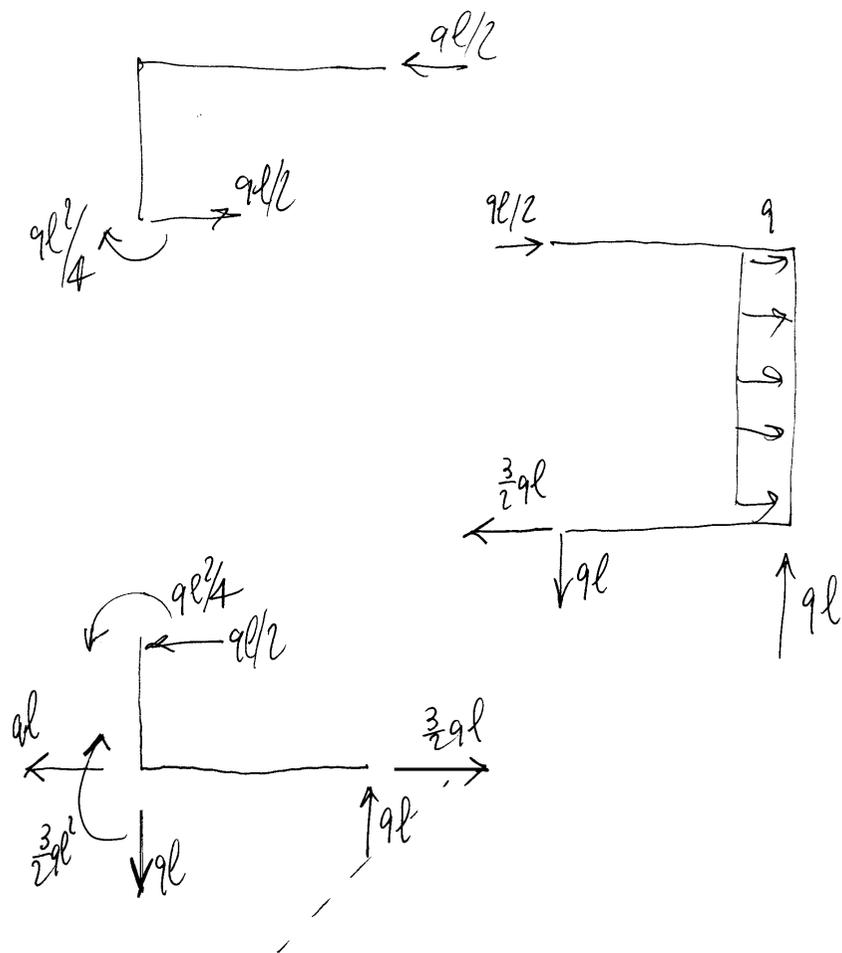
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Relativamente al calcolo dello spostamento del punto A (dovuto alla deformazione della struttura) con il principio dei lavori virtuali:
 - (a) Disegnare gli schemi delle *forze-caratteristiche della sollecitazione* e degli *spostamenti-deformazioni*, dire cosa occorre determinare in ognuno dei due schemi e scrivere simbolicamente l'equazione determinatrice dello spostamento;
 - (b) Disegnare e quotare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione che intervengono nel calcolo;
 - (c) Eseguire il calcolo;
5. Determinare la curva delle pressioni;
6. Determinare la coppia applicata in A dovuta al vincolo utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi.

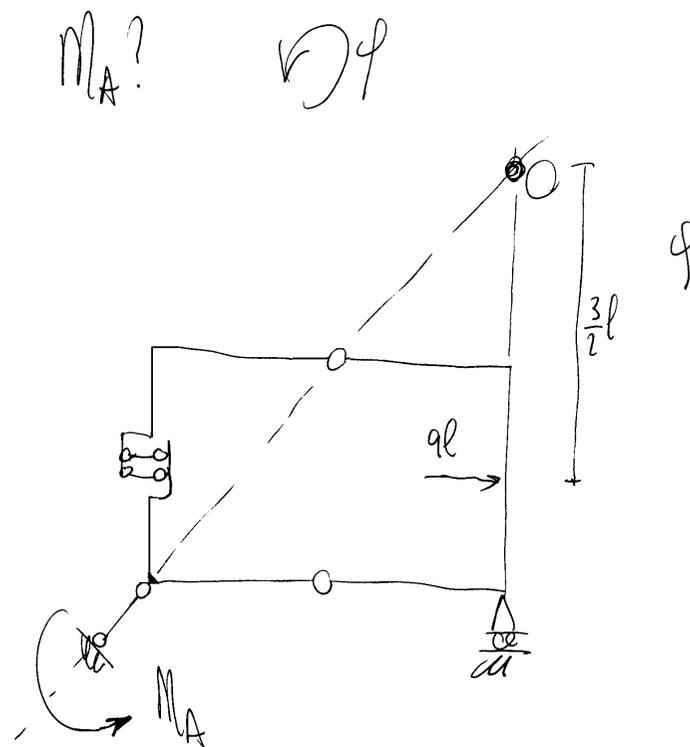
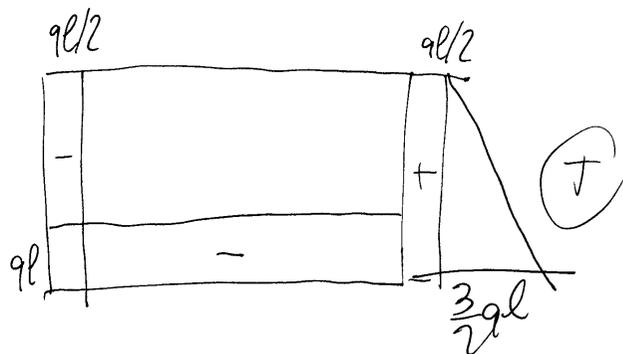
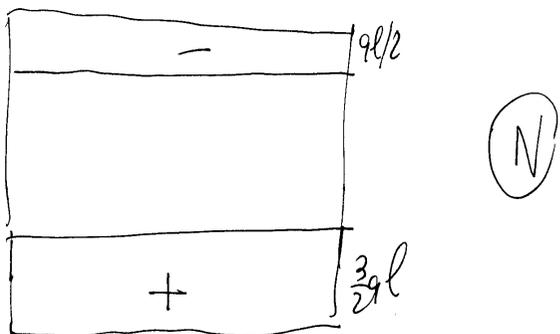


$CB \equiv$ fascio di rette parallele

Equilibrio DAF



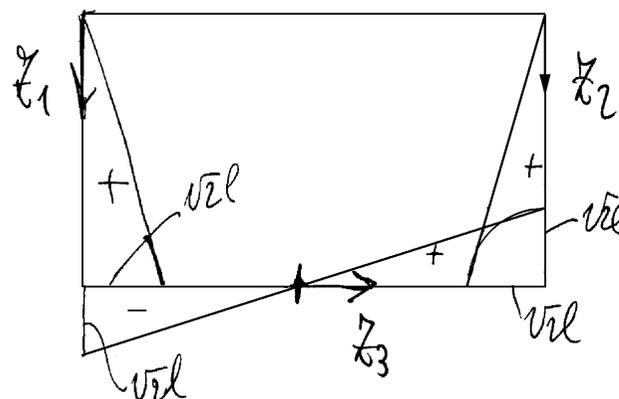
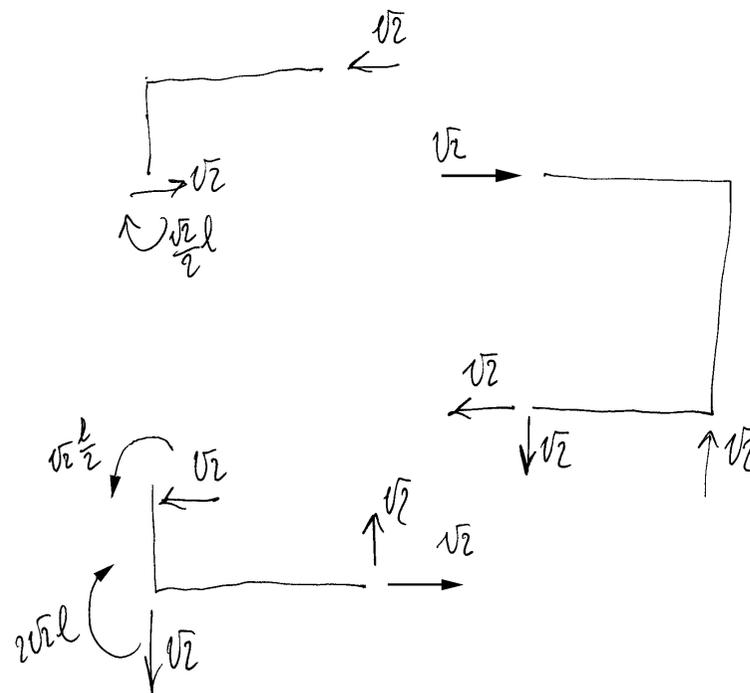
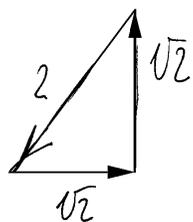
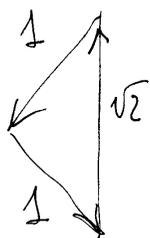
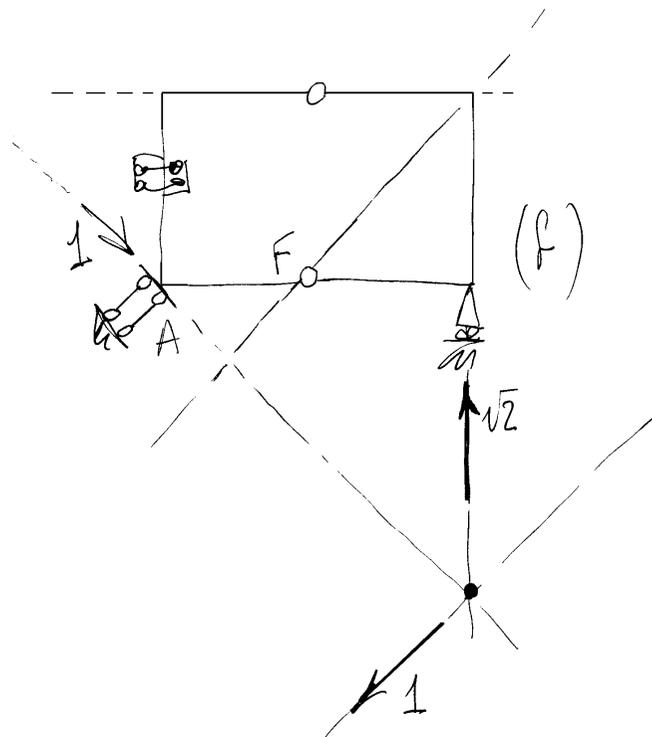




$$M_A \varphi + (ql) \left(\frac{3}{2} ql \right) = 0$$

$$M_A = - \frac{3}{2} ql^2$$

Spostamento in A S_A

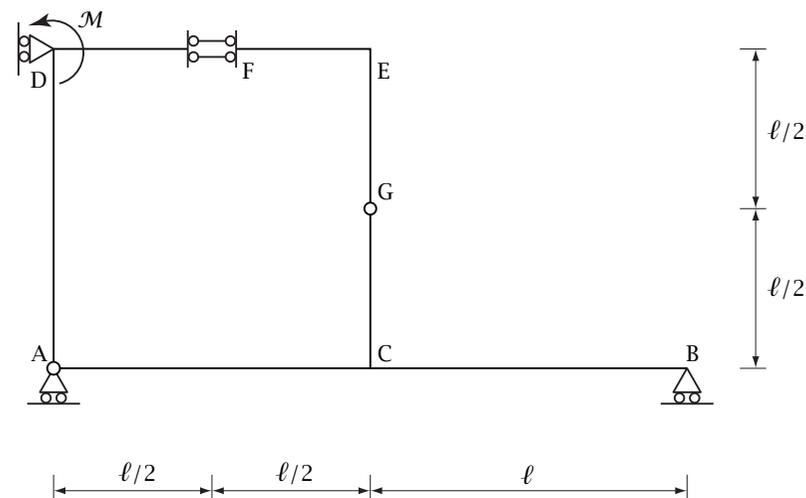


$$\begin{cases} M^f(x_1) = \sqrt{2} x_1 \\ M^f(x_2) = \sqrt{2} x_2 \\ M^f(x_3) = \sqrt{2} x_3 \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(v)}(x_1) = \frac{ql}{2} x_1 \\ M^{(v)}(x_2) = \frac{ql}{2} x_2 + \frac{qx_2^2}{2} \\ M^{(v)}(x_3) = ql x_3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot S_A &= \int_0^l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{ql x_1^2}{EJ} + \int_0^l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{ql x_2^2}{EJ} + \int_0^l \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{qx_2^3}{EJ} + \int_{-l}^l \sqrt{2} ql x_3^2 = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{8} + 2 \frac{\sqrt{2}}{3} \right\} \frac{ql^4}{EJ} = \\ &= \frac{4+4+3+8}{24} \sqrt{2} \frac{ql^4}{EJ} \end{aligned}$$

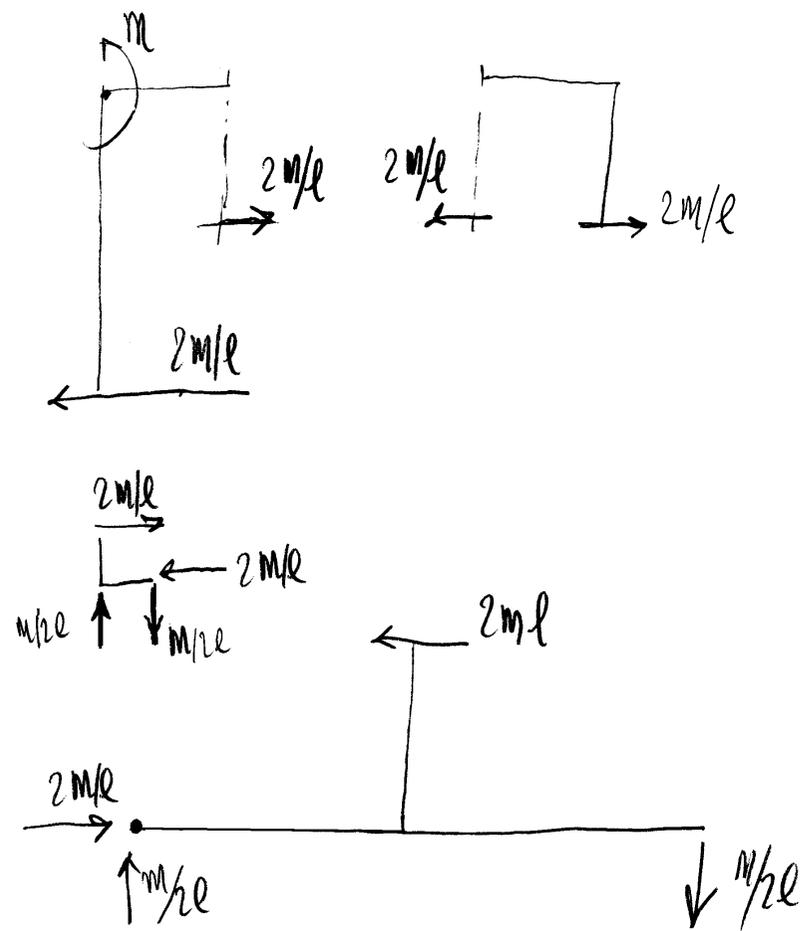
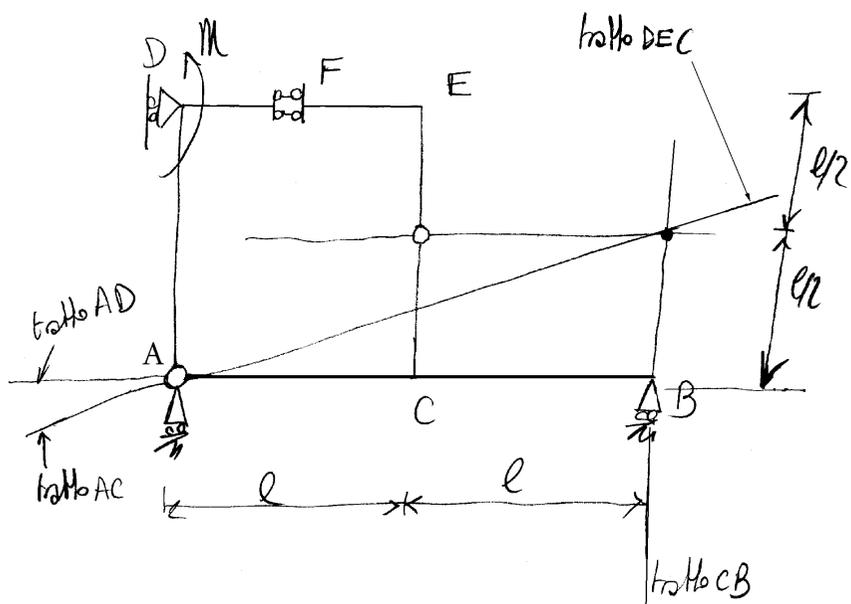
$$S_A = \frac{19\sqrt{2}}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

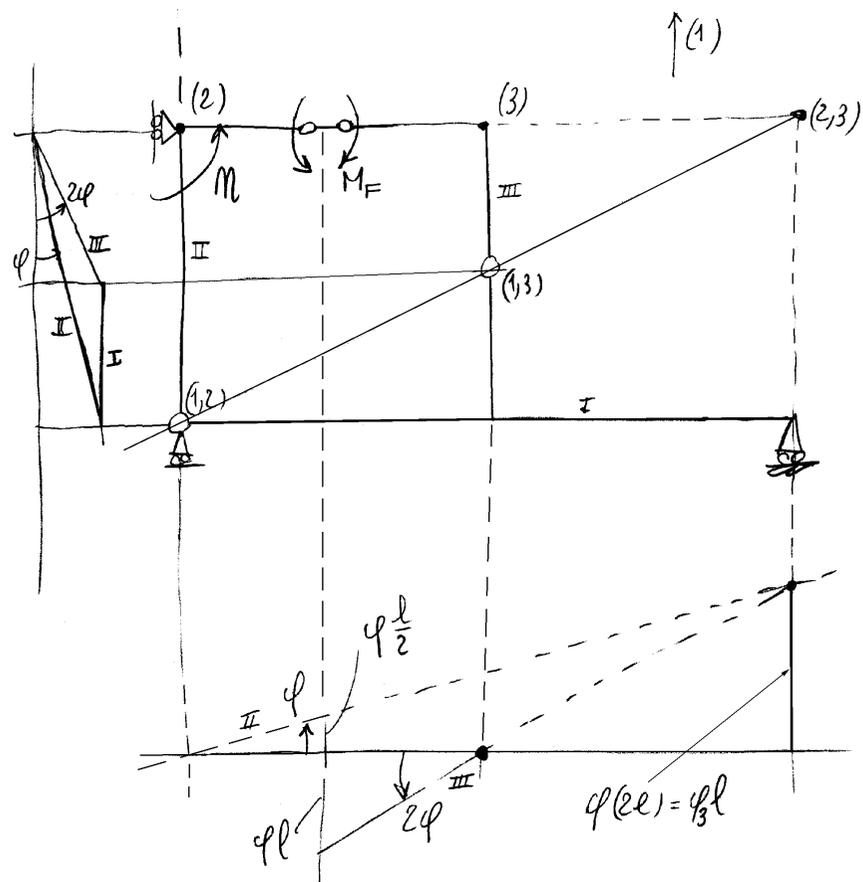
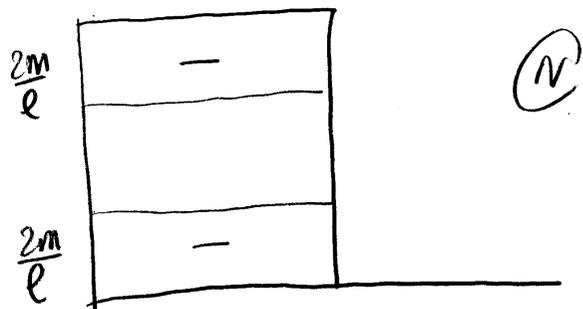
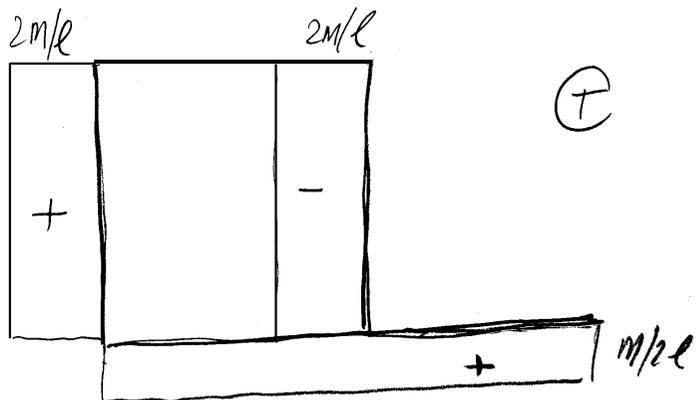
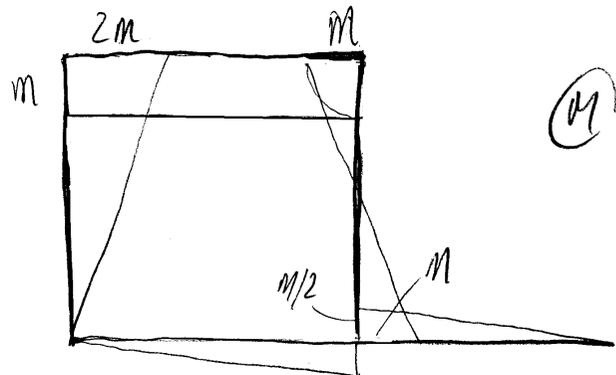
4.21 Esercizio 54



Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una coppia concentrata in corrispondenza della sezione D:

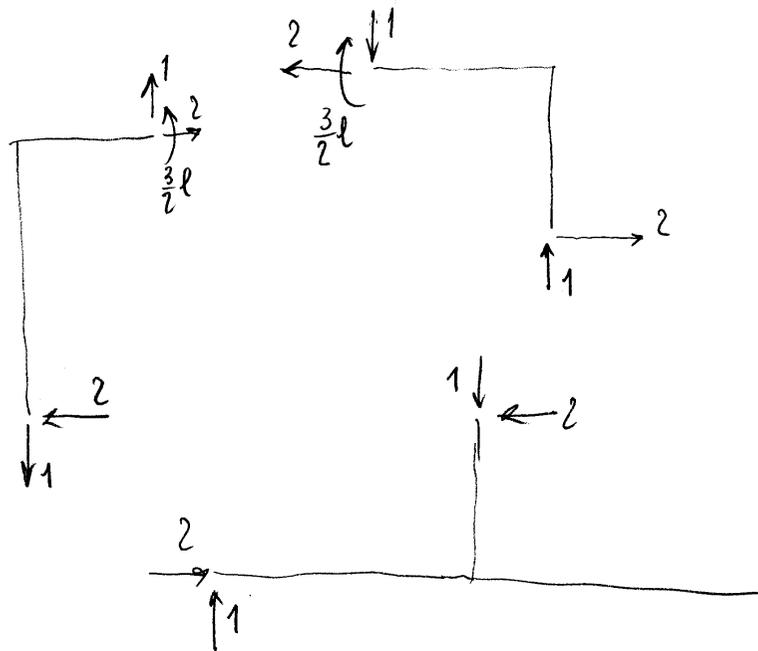
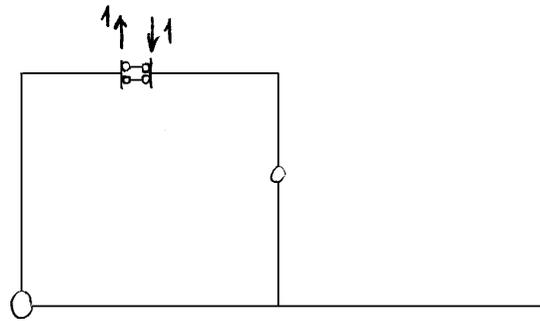
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
 2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 4. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento verticale relativo nella sezione F utilizzando il principio dei lavori virtuali;
-
5. Disegnare la curva delle pressioni;
 6. Determinare il momento flettente in F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 7. Con riferimento al punto 4, calcolare lo spostamento verticale relativo nella sezione F.



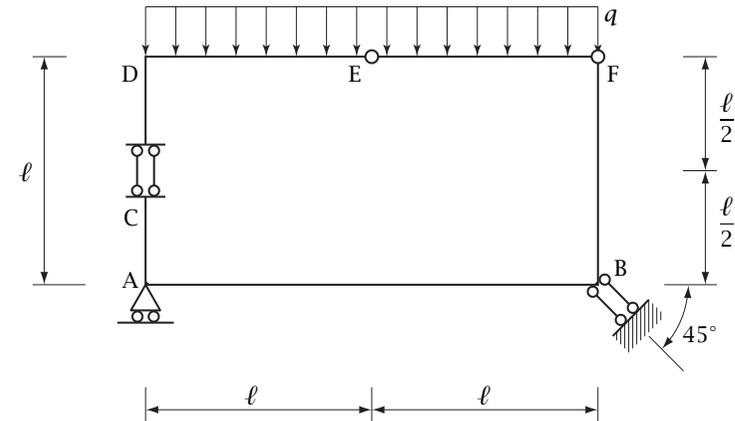


$$L_{ve} = M\phi + M_F\phi - M_F 2\phi$$

$$L_{ve} = 0 \Rightarrow M_F = M$$

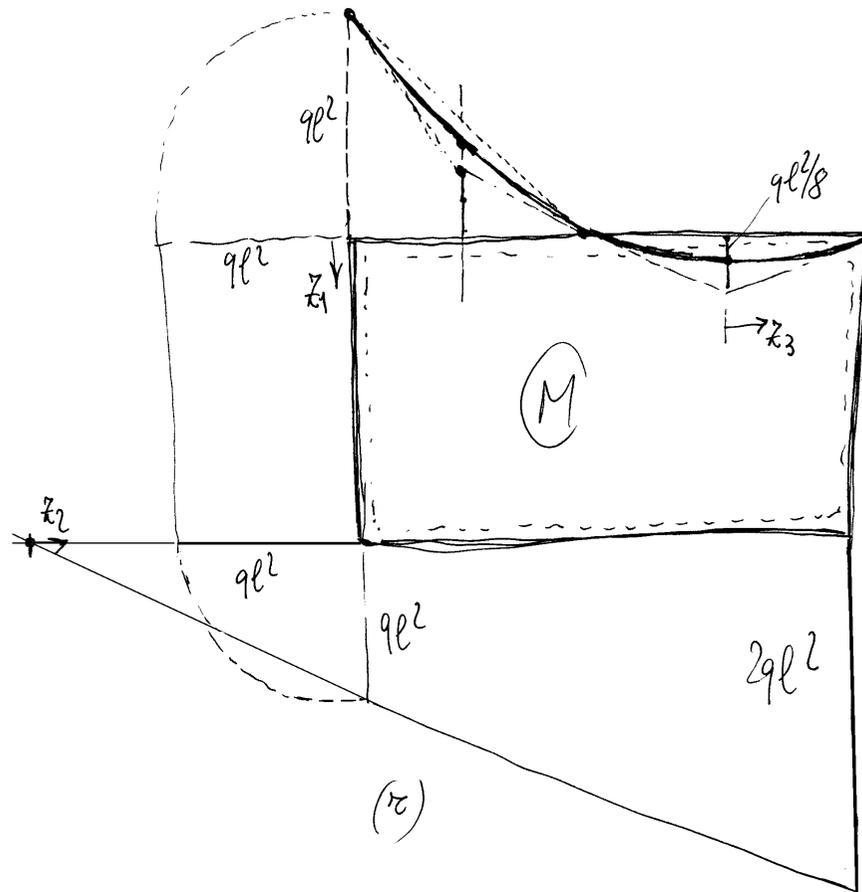
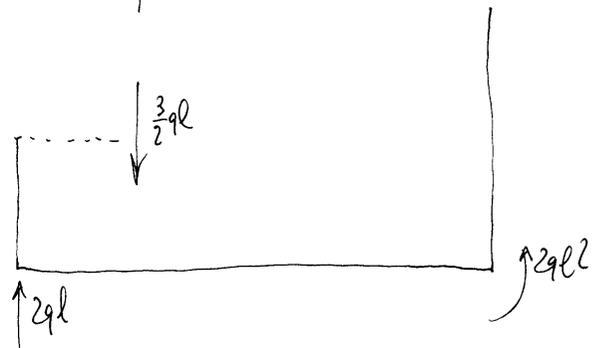
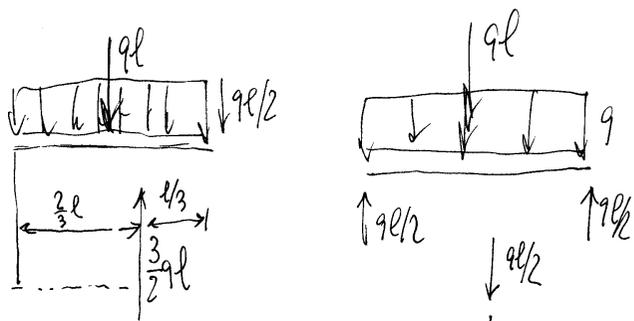
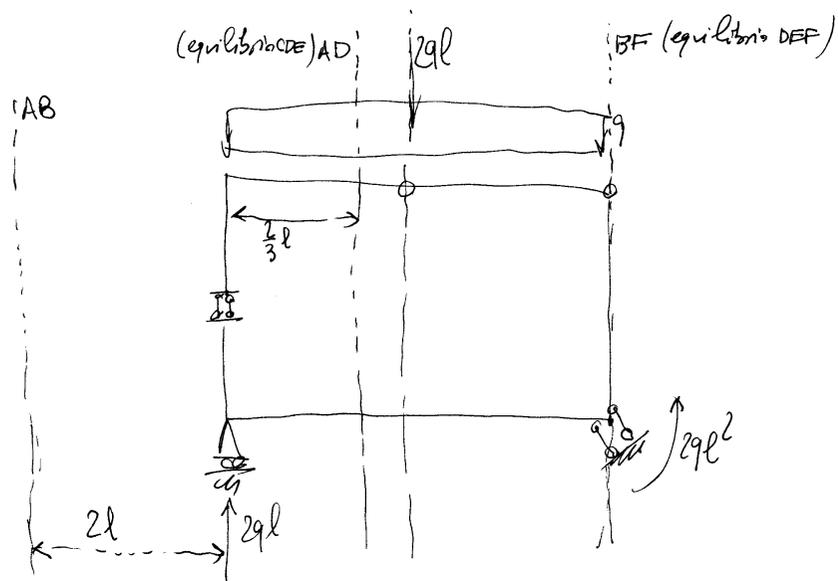


4.22 Esercizio 55

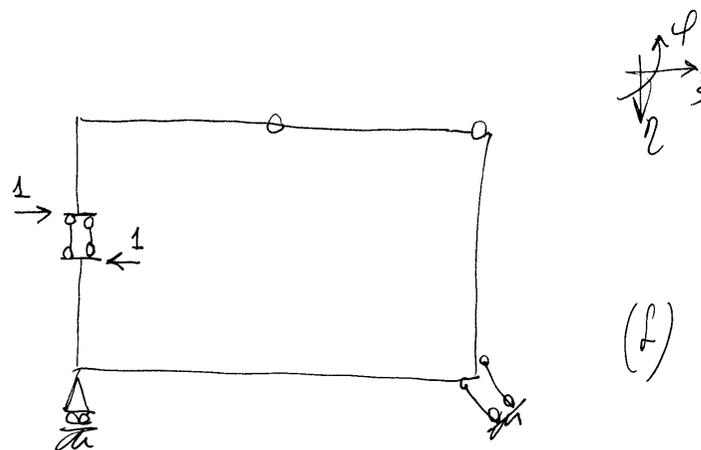
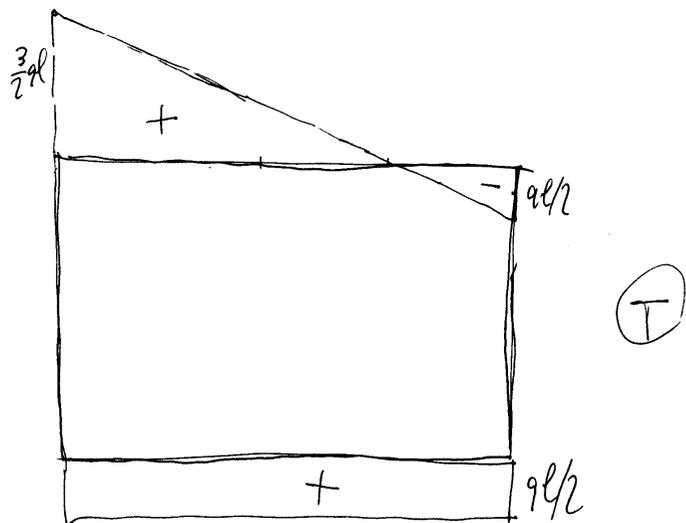


Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sulla campata DEF:

1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento orizzontale relativo nella sezione C utilizzando il principio dei lavori virtuali, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo;
5. Disegnare la curva delle pressioni;
6. Determinare il momento flettente in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento orizzontale relativo nella sezione C;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura;
9. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

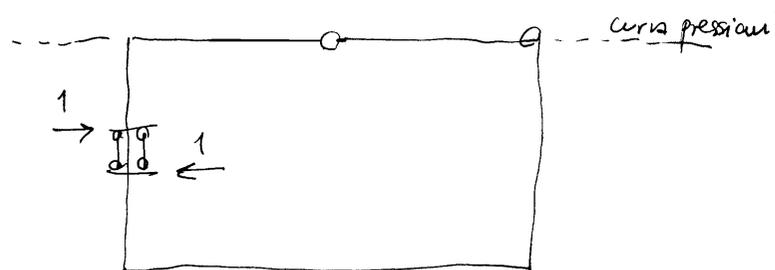
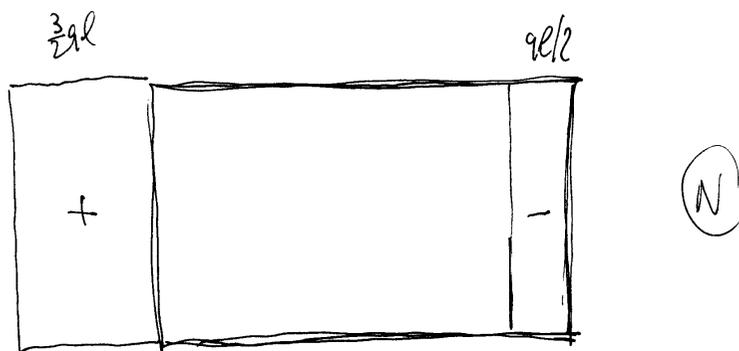


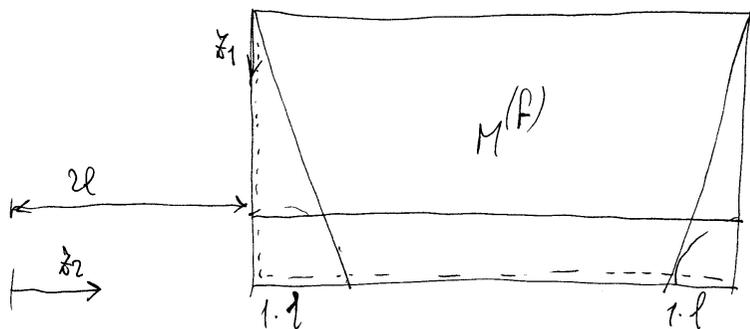
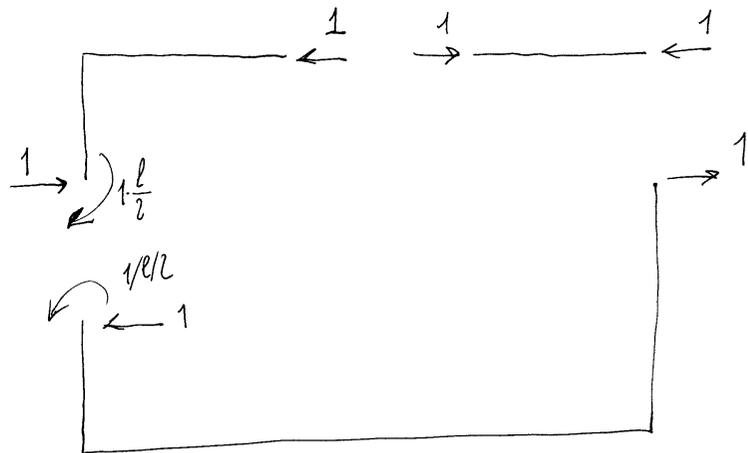
$$\begin{cases}
 M(z_1) = -9l^2 & 0 \leq z_1 \leq l \\
 M(z_2) = -\frac{1}{2}z_2^2 & 2l \leq z_2 \leq 4l \\
 M(z_3) = -\frac{9z_3^2}{2} + \frac{9l^2}{8} & -\frac{3}{2}l \leq z_3 \leq \frac{l}{2}
 \end{cases}$$



$$L_{ve} = 1 \cdot \xi_{CD} - 1 \cdot \xi_{CA}$$

$$L_{vi} = \int M^{(1)} K^{(2)} ds \quad K^{(2)} = \frac{M^{(1)}}{EJ}$$

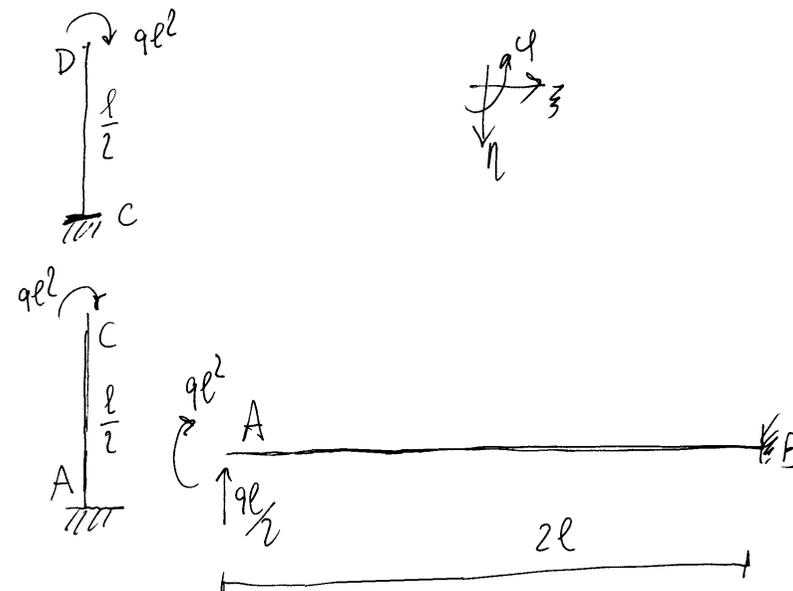
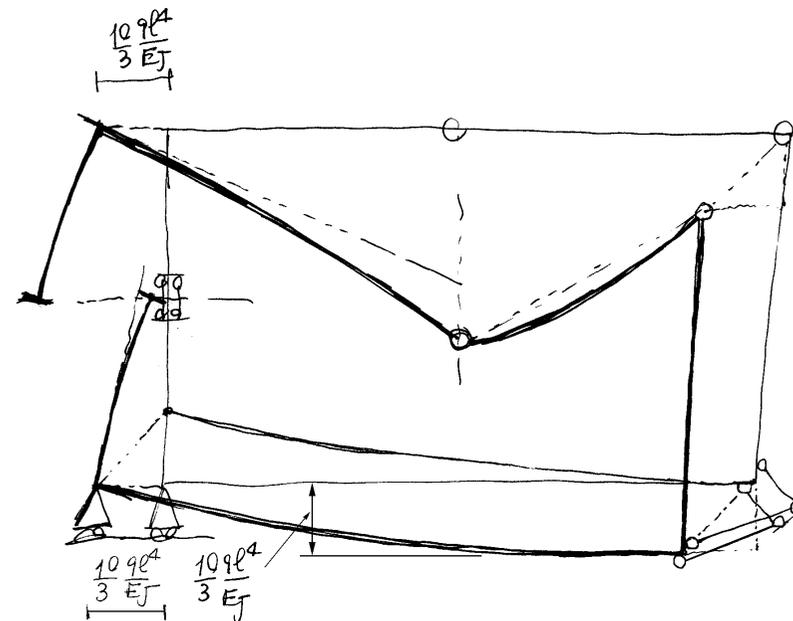




$$\begin{cases} M^{(1)}(z_1) = 1 \cdot z_1 \\ M^{(1)}(z_2) = 1 \cdot l \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(2)}(z_1) = -q l^2 \\ M^{(2)}(z_2) = -\frac{q l}{2} z_2 \end{cases}$$

$$L_{vi} = -\int_0^l q l^2 \frac{z_1}{EJ} dz_1 - \int_{2l}^{4l} \frac{q l}{2} \frac{z_2}{EJ} dz_2 = -\frac{1}{2} \frac{q l^4}{EJ} - 3 \frac{q l^4}{EJ}$$

$$= -\frac{7}{2} \frac{q l^4}{EJ} \Rightarrow \sum_{CD} - \sum_{CA} = -\frac{7}{2} \frac{q l^4}{EJ}$$



$$\eta_A = 0 \Rightarrow 0 = l_B - \frac{ql^2(2l)^2}{2EJ} - \frac{ql(2l)^3}{3EJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_B = + \frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\xi_A = \xi_B = -l_B = -\frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\varphi_A = -\frac{ql^2(2l)}{EJ} - \frac{ql(2l)^2}{2EJ} = -3 \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\xi_{CA} = \frac{ql^2(\frac{l}{2})^2}{2EJ} + \xi_A - \varphi_A \frac{l}{2} = -\frac{41}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

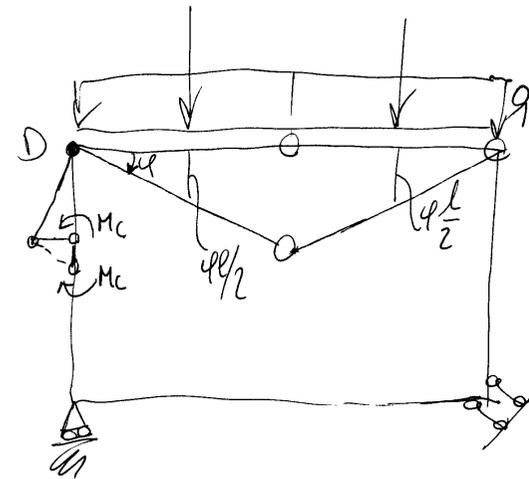
$$\varphi_C = \frac{-ql^2(\frac{l}{2})}{EJ} + \varphi_A = -\frac{7}{2} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^2(\frac{l}{2})^2}{2EJ} + \xi_{CD} - \varphi_C \frac{l}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_{CD} = -\frac{10}{3} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{7}{4} \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{125}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\xi_{CD} - \xi_{CA} = \left(-\frac{125}{24} + \frac{41}{24}\right) \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{84}{24} \frac{ql^4}{EJ} = -\frac{7}{2} \frac{ql^4}{EJ}$$



CABF lissa

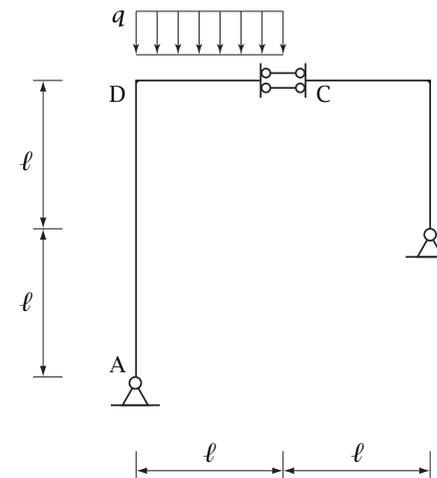
DE rotazione D

$$-M_C \varphi + ql \frac{ql}{2} + ql \frac{ql}{2} = 0$$

$$M_C = ql^2$$

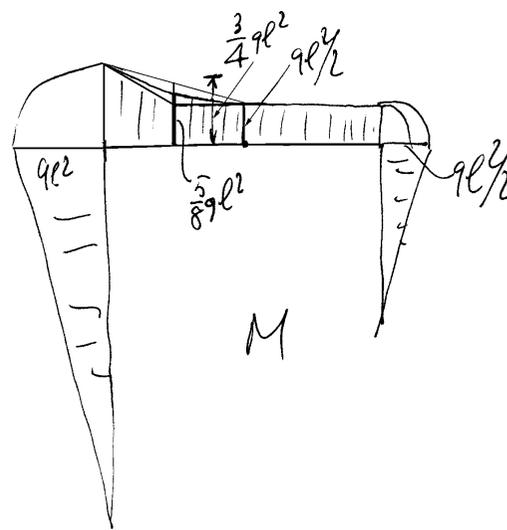
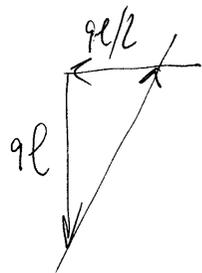
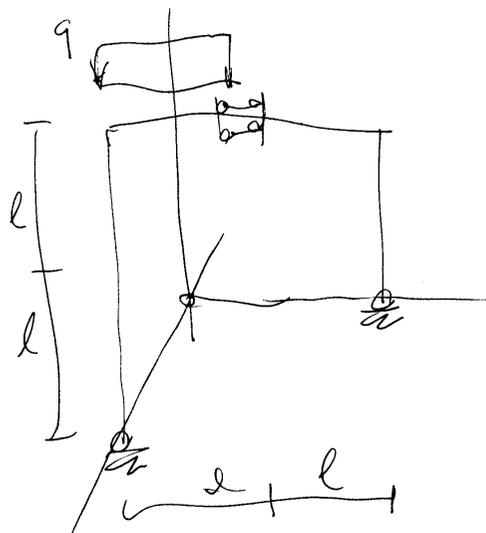
$$\begin{aligned}
 \hookrightarrow &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{L}} \frac{M^2}{EJ} ds = \int_0^l \frac{(q\ell^2)^2}{EJ} dz_1 \\
 &+ \int_{2\ell}^{4\ell} \frac{\left(\frac{q\ell}{2} z_2\right)^2}{EJ} dz_2 + \int_{-\frac{3\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \frac{\left(\frac{q\ell^2}{8} - \frac{qz_3^2}{2}\right)^2}{EJ} dz_3 = \\
 &= \frac{q^2\ell^4}{EJ} \left[z_1 \right]_0^l + \frac{q^2\ell^2}{4EJ} \left[\frac{z_2^3}{3} \right]_{2\ell}^{4\ell} + \frac{q^2\ell^4}{64EJ} \left[z_3 \right]_{-\frac{3\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} + \\
 &+ \frac{q^2}{4EJ} \left[\frac{z_3^5}{5} \right]_{-\frac{3\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} - \frac{q^2\ell^2}{8EJ} \left[\frac{z_3^3}{3} \right]_{-\frac{3\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} \\
 &= \left(1 + \frac{3\ell}{12} - \frac{4}{12} + \frac{1}{2 \times 64} + \frac{3}{2 \times 64} + \frac{1}{32 \times 20} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{243}{32 \times 20} - \frac{1}{8 \times 24} - \frac{27}{8 \times 24} \right) \frac{q^2\ell^5}{EJ} \\
 &= 3.60 \frac{q^2\ell^5}{EJ}
 \end{aligned}$$

4.23 Esercizio 56



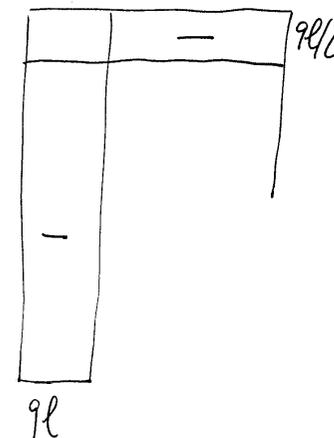
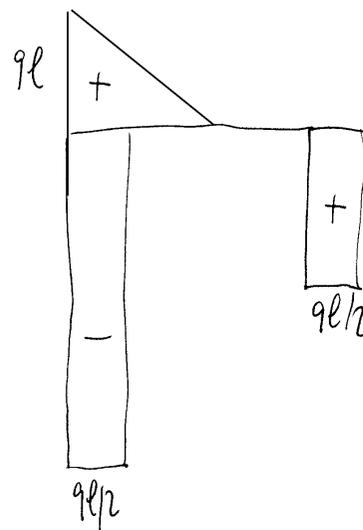
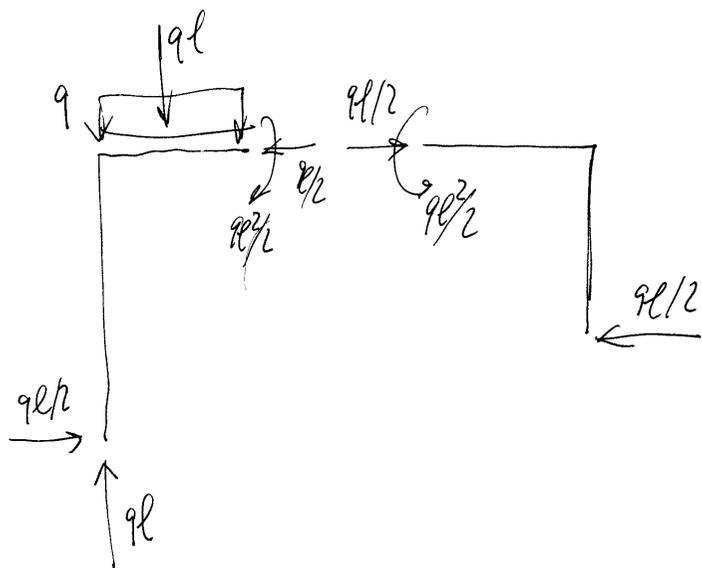
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto DC:

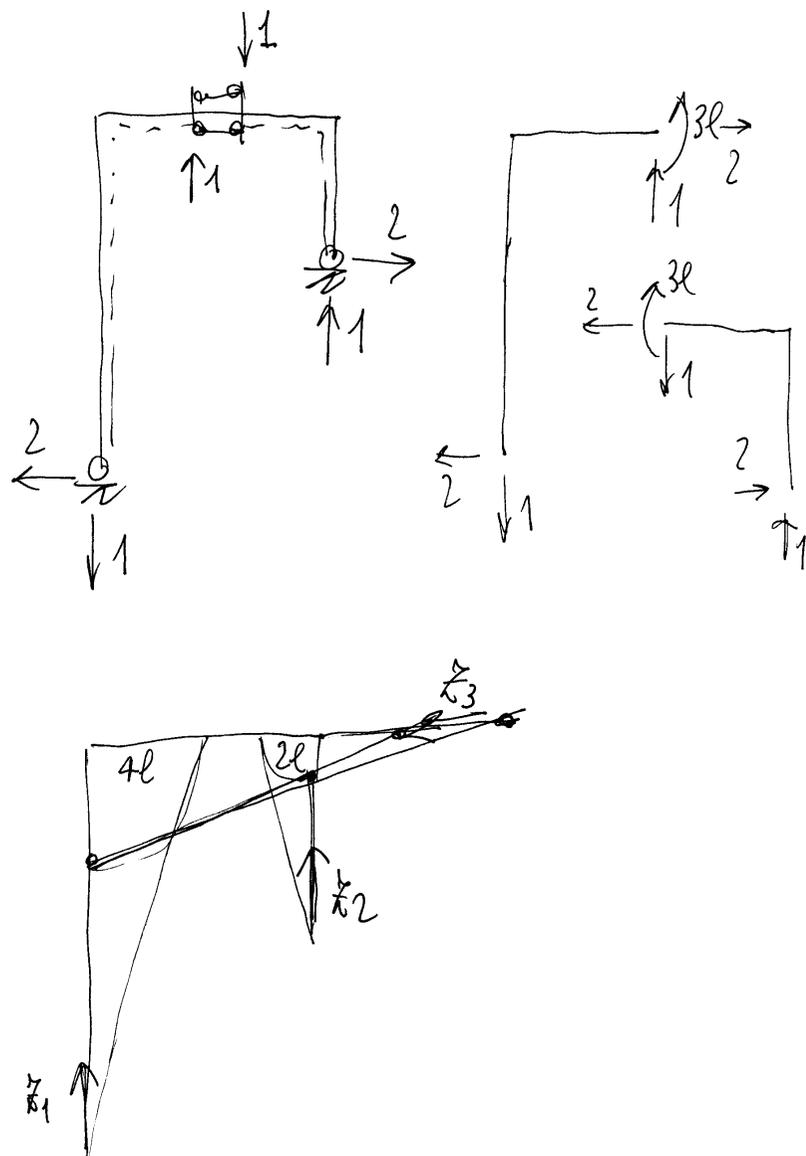
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento verticale relativo nella sezione C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili, e disegnare e quotare i diagrammi dei momenti flettenti che intervengono nel calcolo;
5. Disegnare la curva delle pressioni;
6. Determinare il momento flettente in C utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento verticale relativo nella sezione C;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura;
9. Calcolare l'energia elastica di deformazione.



$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$





$$\begin{cases} M^{(1)}(z_1) = 2z_1 \\ M^{(2)}(z_1) = -\frac{qz_1^2}{2} \end{cases} \quad 0 \leq z_1 \leq 2l$$

$$\begin{cases} M^{(1)}(z_2) = 2z_2 \\ M^{(2)}(z_2) = -\frac{qz_2^2}{2} \end{cases} \quad 0 \leq z_2 \leq l$$

$$\begin{cases} M^{(1)}(z_3) = z_3 \\ M^{(2)}(z_3) = -qz_3^2/2 \\ M^{(3)}(z_3) = -qz_3^2/2 - \frac{q(z_3 - 3l)^2}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} 2l \leq z_3 \leq 4l \\ 2l \leq z_3 \leq 3l \\ 3l \leq z_3 \leq 4l \end{matrix}$$

$$L_{we} = \Delta l$$

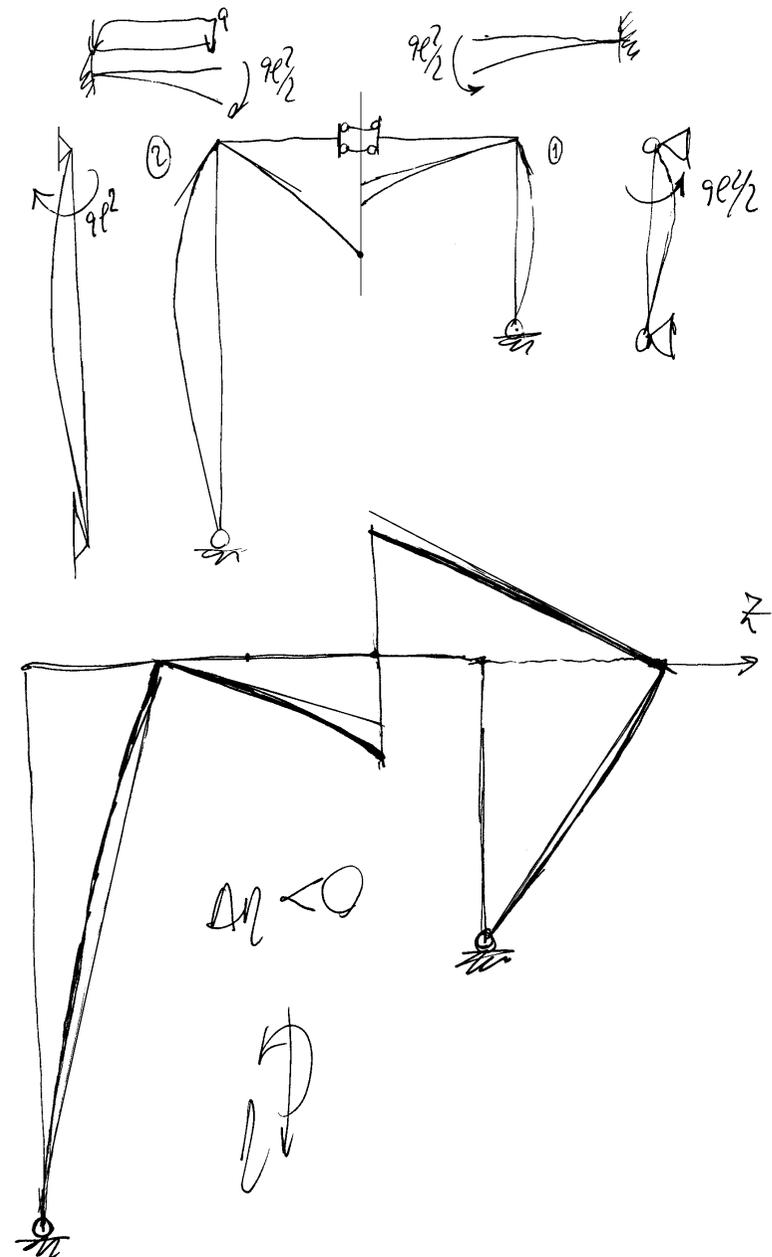
$$L_M = - \left(\int_0^{2l} \frac{ql z_1^2}{EJ} dz_1 + \int_0^l \frac{ql z_2^2}{EJ} dz_2 + \int_{2l}^{3l} \frac{ql^2}{2} \frac{z_3}{EJ} dz_3 + \int_{3l}^{4l} \frac{ql^2}{2} \frac{z_3}{EJ} dz_3 + \int_{3l}^{4l} \frac{9}{2} \frac{(z_3 - 3l)^2 z_3}{EJ} dz_3 \right) =$$

$$\left[\frac{z_3^4}{4} - 2l z_3^3 + \frac{9}{2} l^2 z_3^2 \right]_{3l}^{4l}$$

$$= - \frac{ql^4}{EJ} \left\{ \frac{8}{3} + \frac{1}{3} + \frac{12}{2 \times 2} + \frac{256 - 81}{2 \times 4} - \frac{2(64 - 27) + \frac{9}{2}(16 - 9)}{2} \right\}$$

$$= - \frac{64 + 8 + 72 + 525 - 888 + 378}{24} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$= - \frac{159}{24} \frac{ql^4}{EJ} = - \frac{53}{8} \frac{ql^4}{EJ}$$



$$\varphi^E = -\frac{(9l^2)(2l)}{3EJ} - \frac{(9l/2)l}{EJ} - \frac{9l^3}{6EJ} =$$

$$-\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)\frac{9l^3}{EJ} = -\frac{4+3+1}{6}\frac{9l^3}{EJ} = -\frac{4}{3}\frac{9l^3}{EJ}$$

$$\varphi^E = \frac{(9l^2)}{3EJ}l + \frac{(9l/2)l}{EJ} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)\frac{9l^3}{EJ} = \frac{2}{3}\frac{9l^3}{EJ}$$

$$\varphi^A + \varphi^B = \varphi^E + 2\varphi^C \Rightarrow \varphi^B = \varphi^A - \varphi^E$$

$$\varphi^B = -2\frac{9l^3}{EJ}$$

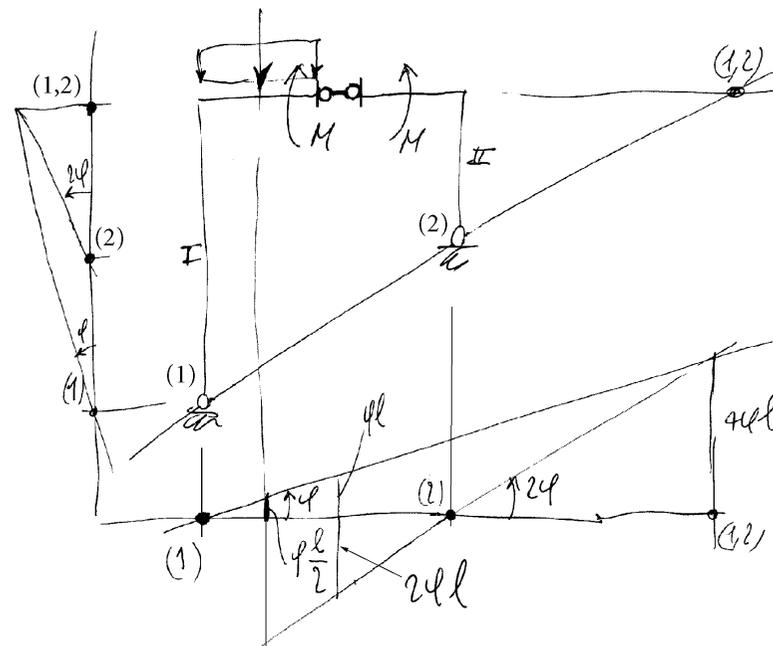
$$\eta^A = \frac{(9l^2)(2l)}{3EJ}l + \frac{(9l/2)l^2}{2EJ} + \frac{9l^4}{8EJ} + \frac{29l^3}{EJ}l$$

$$= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 2\right)\frac{9l^4}{EJ} = \frac{16+6+3+48}{24}\frac{9l^4}{EJ} = \frac{73}{24}\frac{9l^4}{EJ}$$

$$\eta^B = \frac{(9l/2)l}{3EJ}l + \frac{(9l/2)l^2}{2EJ} - \frac{4}{EJ}l^3 =$$

$$= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} - 4\right)\frac{9l^4}{EJ} = \frac{2+3-48}{12} = -\frac{43}{12}\frac{9l^4}{EJ}$$

$$\eta^B - \eta^A = -\frac{73+86}{24}\frac{9l^4}{EJ} = -\frac{159}{24}\frac{9l^4}{EJ} = -\frac{53}{8}\frac{9l^4}{EJ}$$

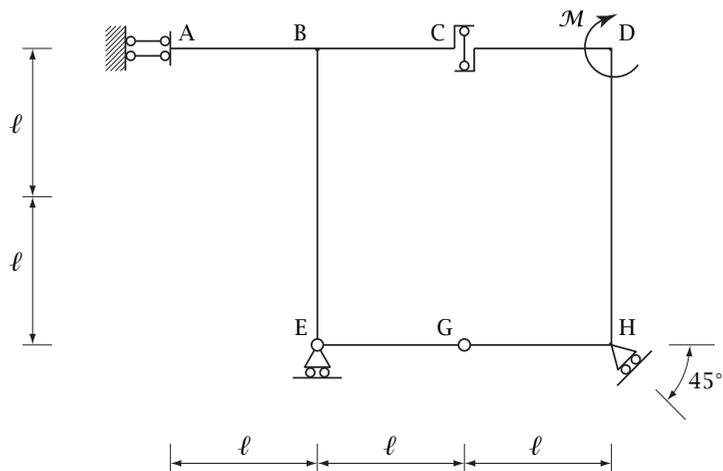


$$-(9l)\left(\frac{l}{2}\right) - Ml + 2Ml = 0 \quad \boxed{M = \frac{9l^2}{2}}$$

$$L_d = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{2l} \frac{9l^2}{4} \frac{z_1^2}{EJ} dz_1 + \int_0^l \frac{9l^2}{4} \frac{z_2^2}{EJ} dz_2 + \right.$$

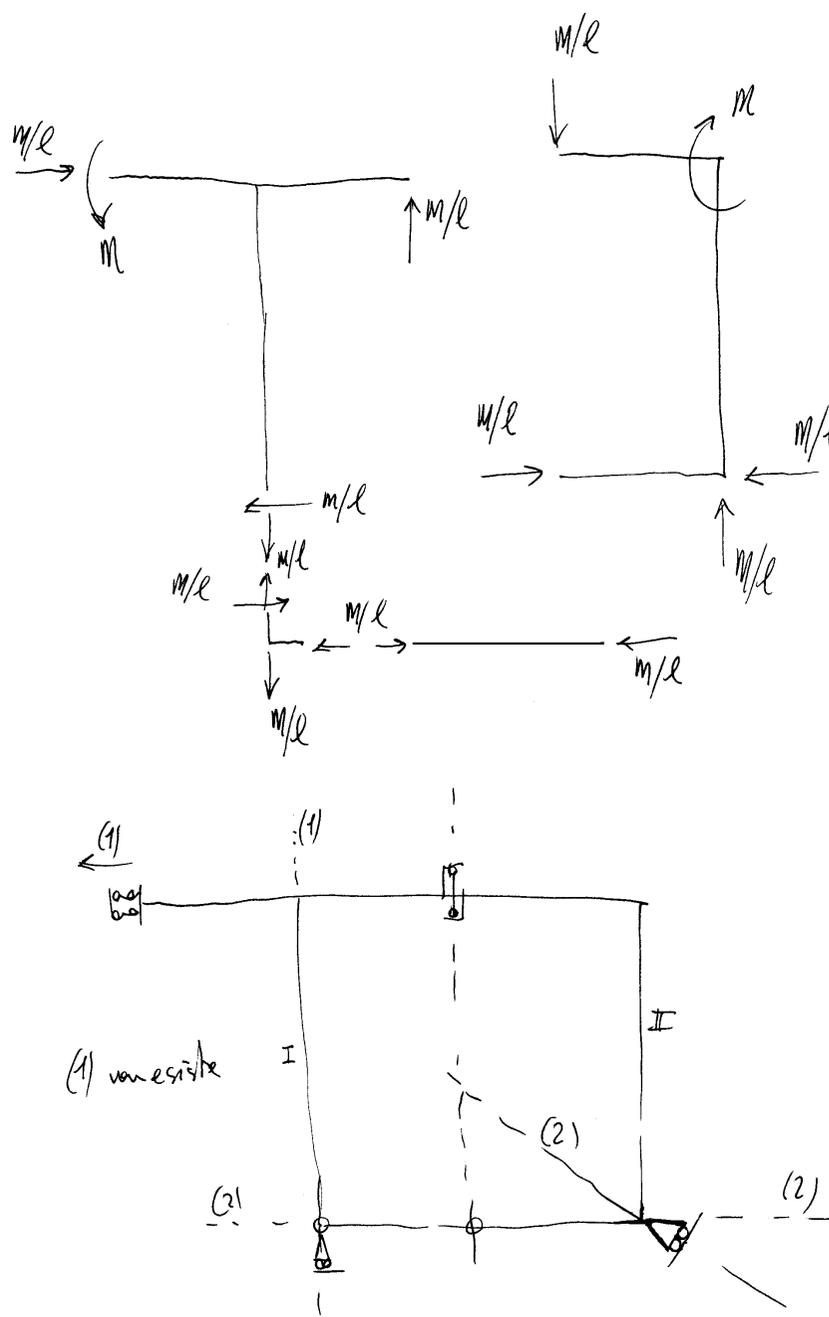
$$\left. + \int_{2l}^{3l} \frac{9l^4}{4} \frac{dz_3}{EJ} + \int_{3l}^{4l} \left(\frac{9l^2}{2} + \frac{9(z_3-3l)^2}{2} \right) \frac{dz_3}{EJ} \right\}$$

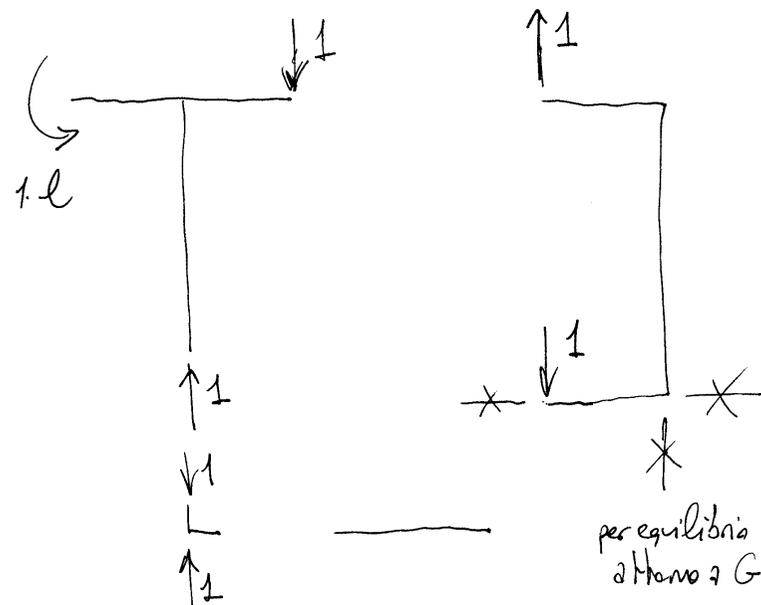
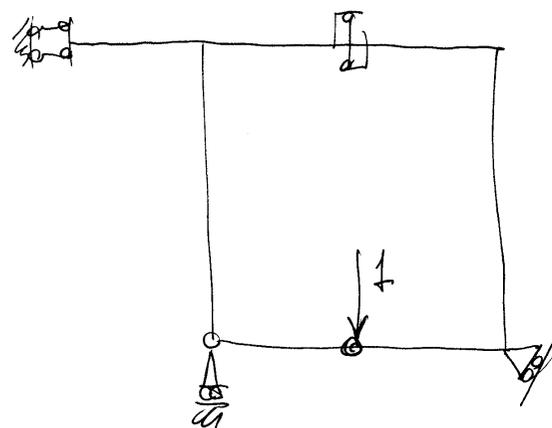
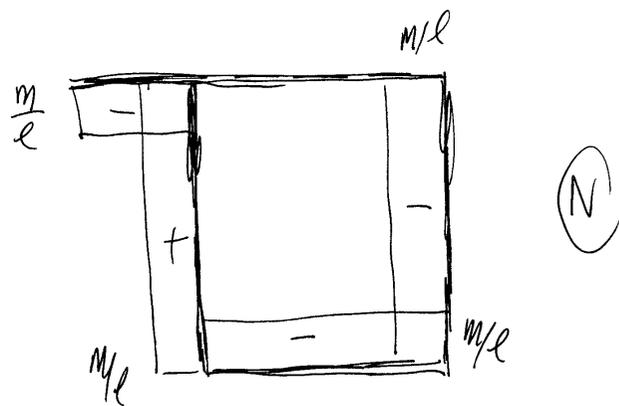
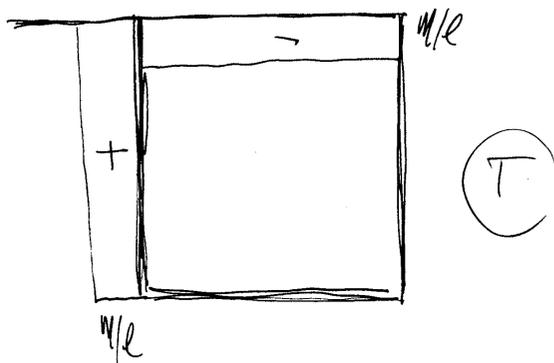
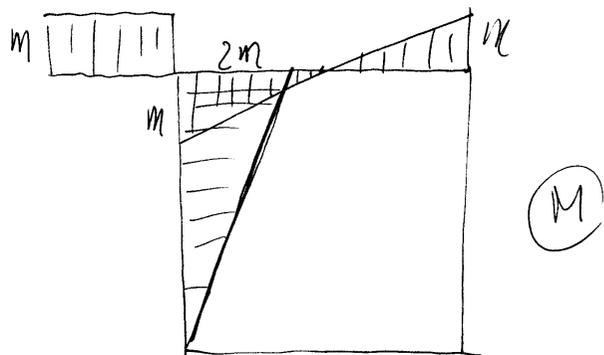
4.24 Esercizio 57

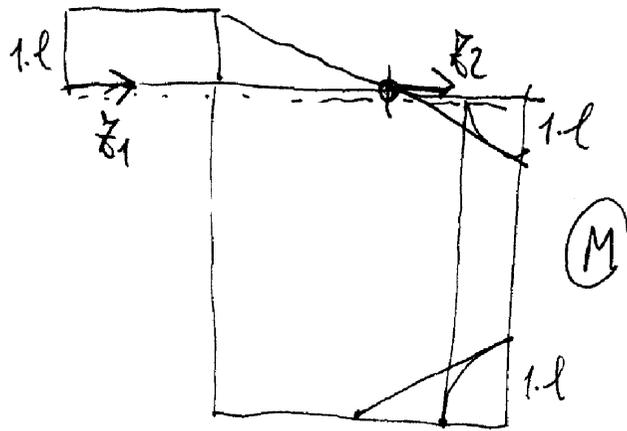


Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una coppia agente in corrispondenza del nodo D:

1. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
3. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento verticale nella sezione G utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
4. Verificare l'isostaticità della struttura;
5. Disegnare la curva delle pressioni;
6. Determinare lo sforzo normale nel tratto EGH utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento verticale nella sezione G;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura;
9. Calcolare la rotazione in D nel caso in cui la struttura sia caricata da una forza verticale F in G, in luogo della coppia in D.



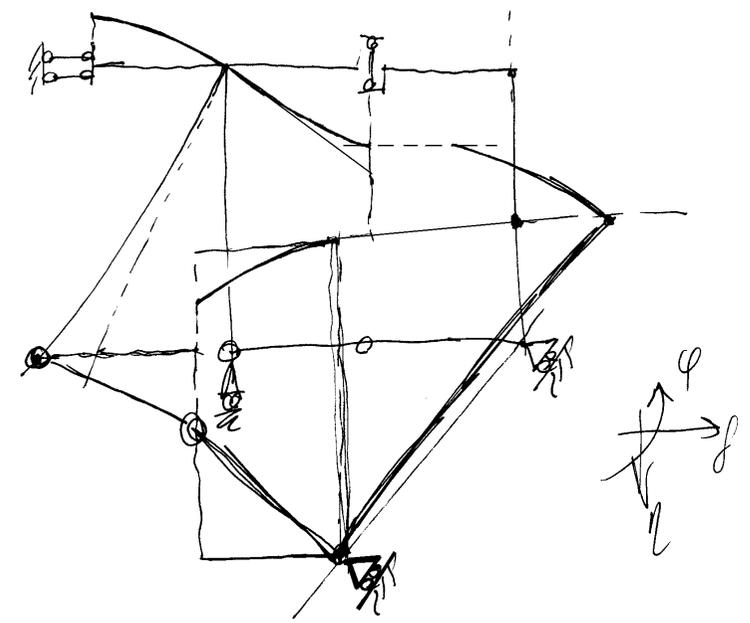




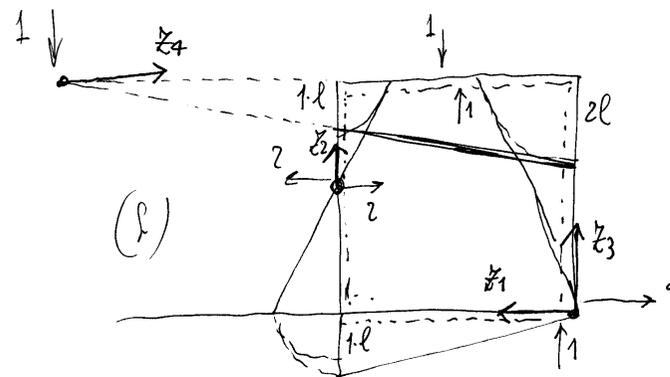
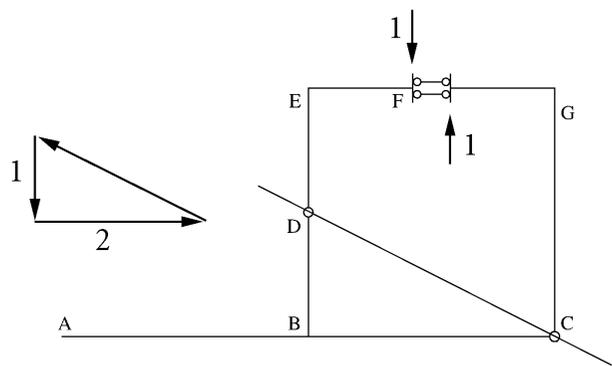
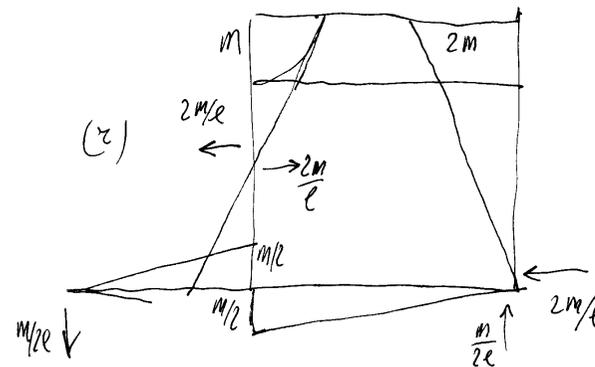
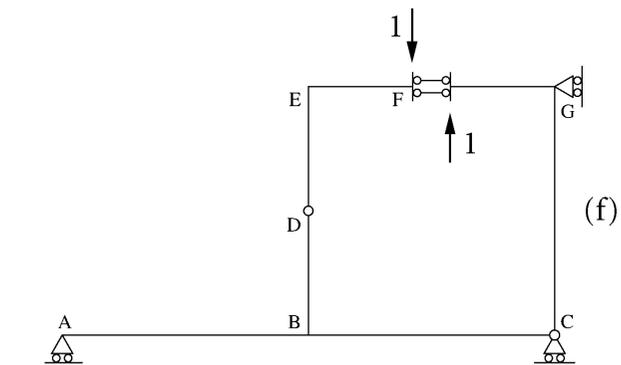
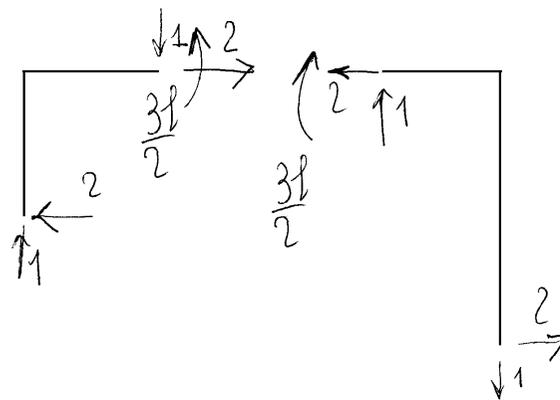
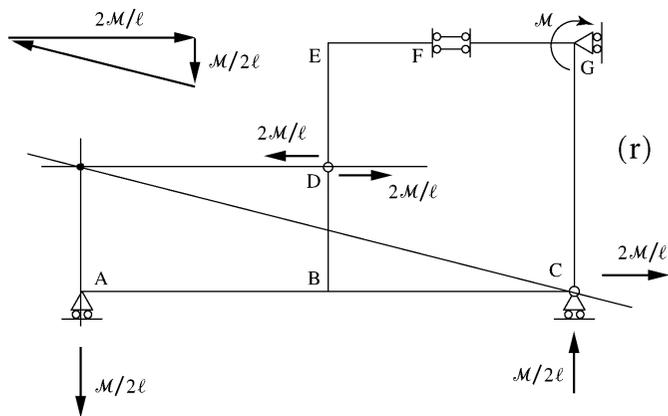
$$0 \leq z_1 \leq l \quad -l \leq z_2 \leq 0$$

$$\begin{cases} M^{(P)}(z_1) = -1 \cdot l \\ M^{(Q)}(z_1) = -m \end{cases} \quad \begin{cases} M^{(P)}(z_2) = +1 \cdot z_2 \\ M^{(Q)}(z_2) = -\frac{m}{l} z_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U_{vi} &= \int_0^l \frac{m l}{EJ} dz_1 - \int_{-l}^0 \frac{m}{l} z_2^2 dz_2 \\ &= \frac{m l^2}{EJ} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{m l^2}{3EJ} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \varphi_A &= -\frac{m l}{EJ} & \delta_E = \delta_G = \delta_H = -\delta_D = -\delta_B \\ \delta_E &= -\frac{(m/l)(2l)^3}{3EJ} - \left(\frac{m l}{EJ}\right)(2l) = -\frac{14}{3} \frac{m l^2}{EJ} \\ \eta_c &= \left(\frac{m l}{EJ}\right)l - \frac{(m/l)l^3}{3EJ} = \frac{2}{3} \frac{m l^2}{EJ} \\ \eta_c &= \frac{14}{3} \frac{m l^2}{EJ} + \frac{(m l)l^3}{3EJ} + \varphi_H l = 5 \frac{m l^2}{EJ} + \varphi_H l \\ \varphi_H &= -\frac{13}{3} \frac{m l}{EJ} & \eta_G = \frac{14}{3} \frac{m l^2}{EJ} - \frac{13}{3} \frac{m l}{EJ} l = \frac{m l^2}{3EJ} \end{aligned}$$



$$\begin{cases} M^f(z_1) = 1 \cdot z_1 \\ M^z(z_1) = \frac{m}{2l} z_1 \end{cases} \Rightarrow \int_0^l \frac{m}{2l EJ} z^2 dz = \frac{m l^2}{6 EJ}$$

$$\begin{cases} M^f(z_2) = 2 \cdot z_2 \\ M^z(z_2) = \frac{2m}{l} z_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{4m}{l EJ} z^2 dz = \frac{4m}{l EJ} \left\{ \frac{(l/2)^3}{3} - \frac{(-l/2)^3}{3} \right\} = \frac{m l^2}{3 EJ}$$

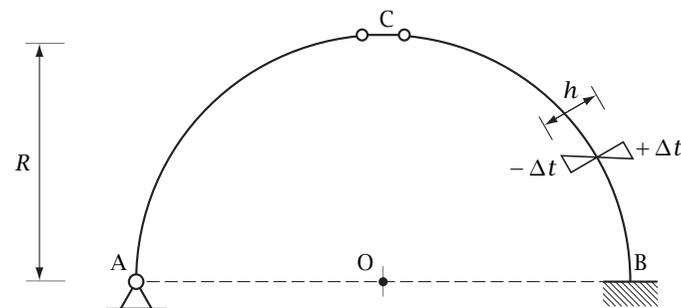
$$\begin{cases} M^f(z_3) = 2 \cdot z_3 \\ M^z(z_3) = \frac{2m}{l} z_3 \end{cases} \Rightarrow \int_0^l \frac{4m}{l EJ} z^2 dz = \frac{4}{3} \frac{m l^2}{EJ}$$

$$\begin{cases} M^f(z_4) = 1 \cdot z_4 \\ M^z(z_4) = m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_l^{2l} \frac{m}{EJ} z dz = \frac{m}{EJ} \left\{ \frac{(2l)^2}{2} - \frac{(l)^2}{2} \right\} = \frac{3}{2} \frac{m l^2}{EJ}$$

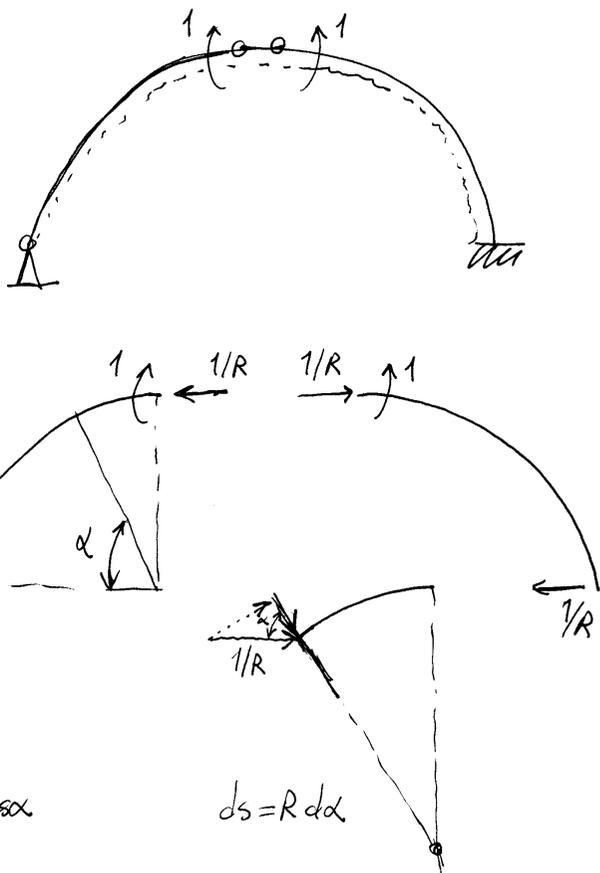
$$\Delta\eta = \frac{1+2+8+9}{6} \frac{m l^2}{EJ} = \frac{10}{3} \frac{m l^2}{EJ}$$

4.26 Esercizio 59



Dato l'arco circolare in figura, soggetto ad una distorsione termica a farfalla nel tratto BC:

1. Calcolare la rotazione relativa $\Delta\varphi_C$ nel nodo C utilizzando il principio dei lavori virtuali;
 2. Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale relativi allo schema delle forze e disegnare i relativi diagrammi, usando quale fondamentale la linea d'asse e riportando il valore in direzione radiale;
 3. Calcolare la rotazione φ_{CB} della sezione in C connessa alla parte BC utilizzando il metodo cinematico.
-
4. Disegnare la curva delle pressioni relativa allo schema delle forze utilizzato nel calcolo di $\Delta\varphi_C$;
 5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
 6. Calcolare la rotazione relativa $\Delta\varphi_C$ nel nodo C utilizzando il metodo cinematico.



$$M^{(F)} = 1 \cdot \sin \alpha$$

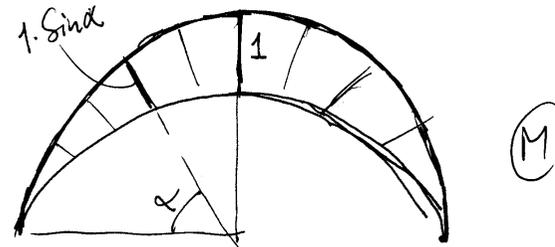
$$T^{(F)} = -\frac{1}{R} \cos \alpha$$

$$N^{(F)} = -\frac{1}{R} \sin \alpha$$

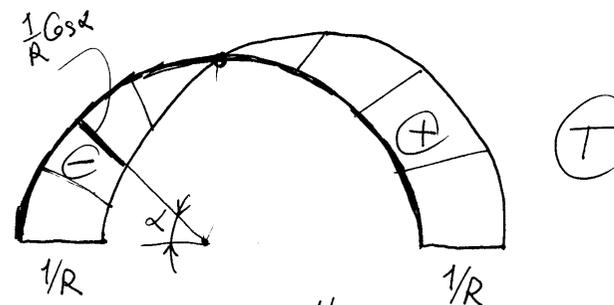
$$k^{(e)} = \frac{2\alpha \Delta t}{h} \quad \left(\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \right)$$

$$L_{ve} = \Delta \varphi \quad L_{vi} = \int_0^{\pi} M^F k^{(e)} ds = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2\alpha \Delta t}{h} R \sin \alpha d\alpha$$

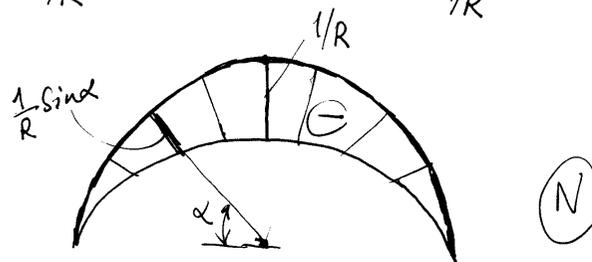
$$\Delta \varphi = 2\alpha \Delta t \frac{R}{h} \left[-\cos \alpha \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2\alpha \Delta t \frac{R}{h}$$



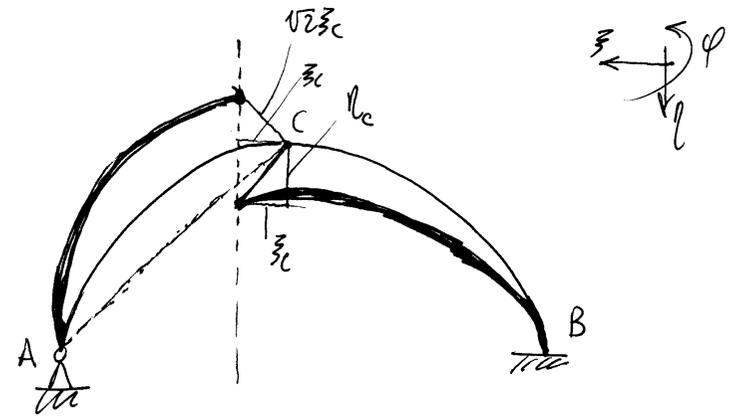
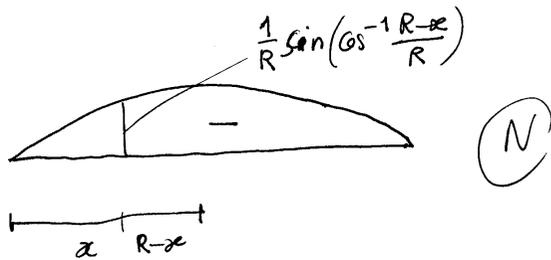
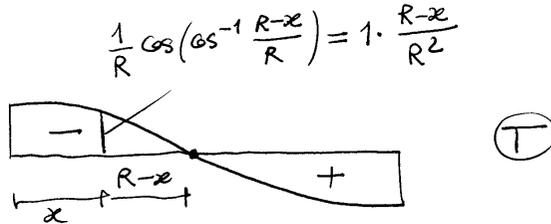
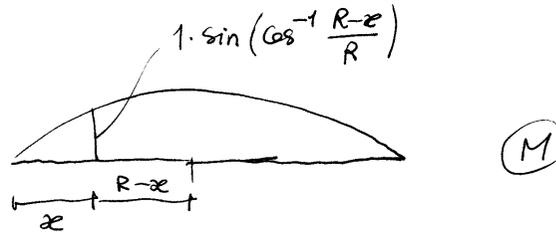
(M)



(T)



(N)



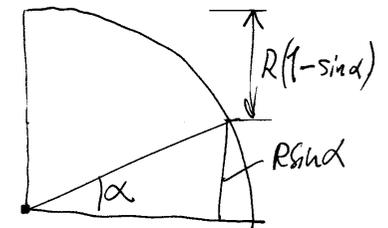
$$\varphi_{CA} = \frac{\xi_c}{R}$$

$$\varphi_{CA} = -\xi_c$$

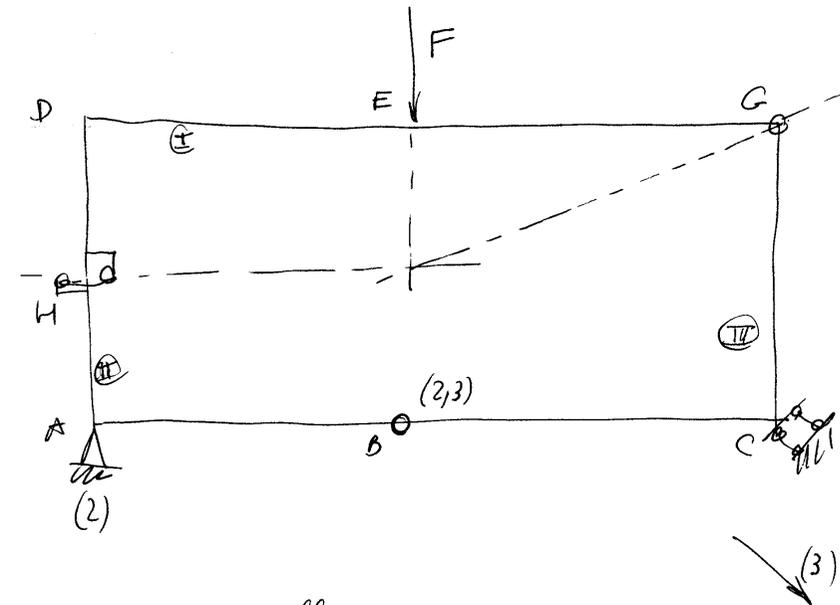
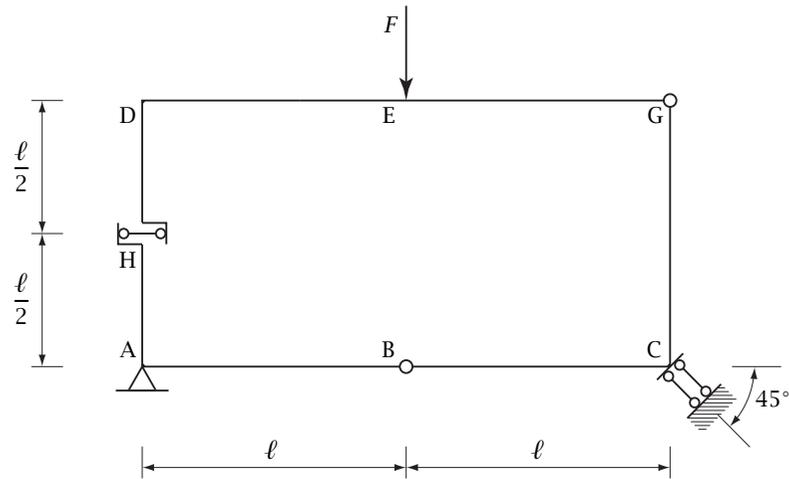
$$\varphi_{CB} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} R d\alpha = \frac{2\alpha \Delta t R}{h} \frac{\pi}{2}$$

$$\xi_c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} R^2 (1 - \sin \alpha) d\alpha = 2 \frac{\alpha \Delta t}{h} R^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \varphi_{CB} - \varphi_{CA} \\ &= \frac{2\alpha \Delta t}{h} R \end{aligned}$$



4.27 Esercizio 60

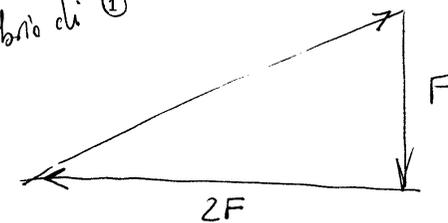


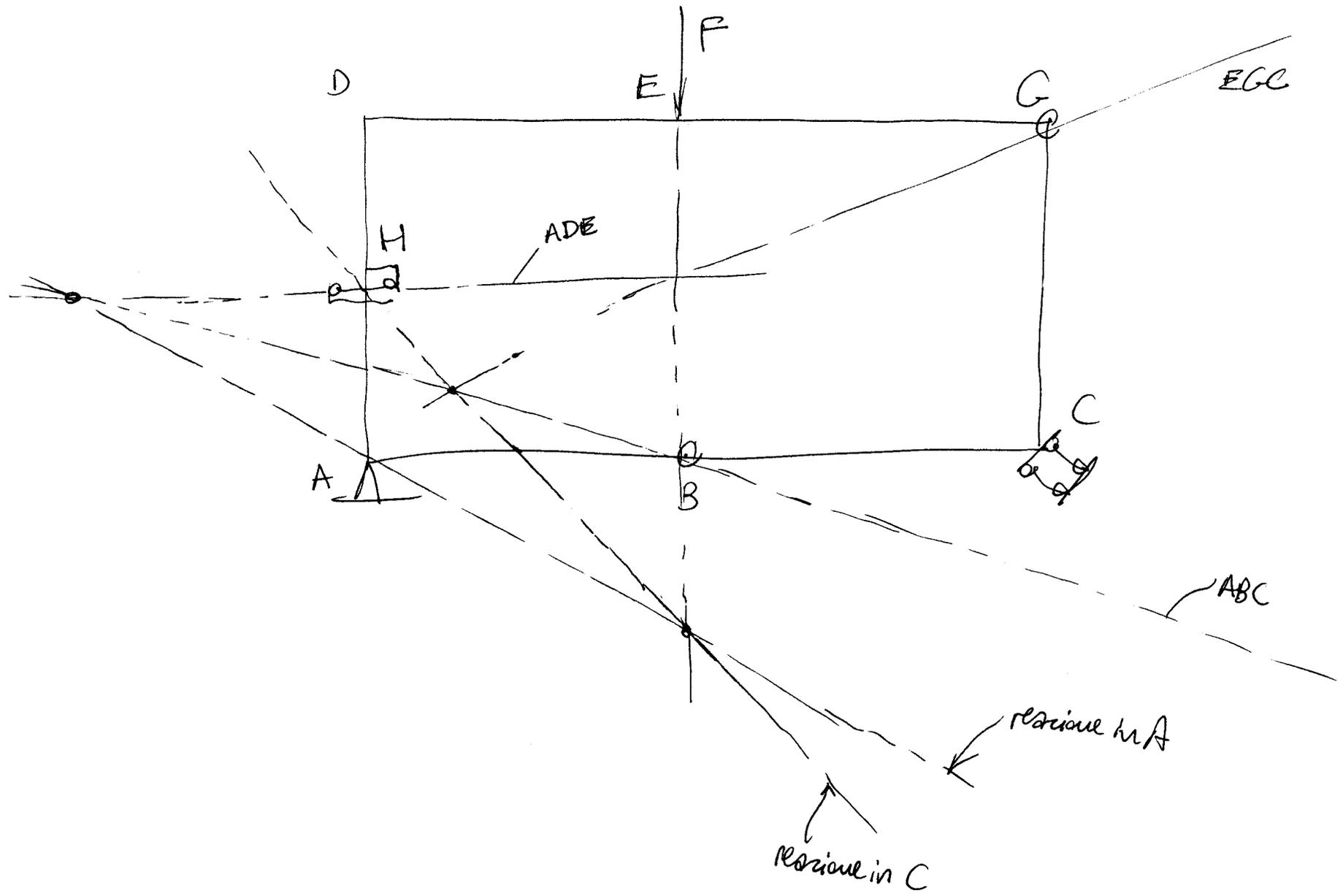
$(2), (2,3), (3)$ non allineati \Rightarrow II e III Assi

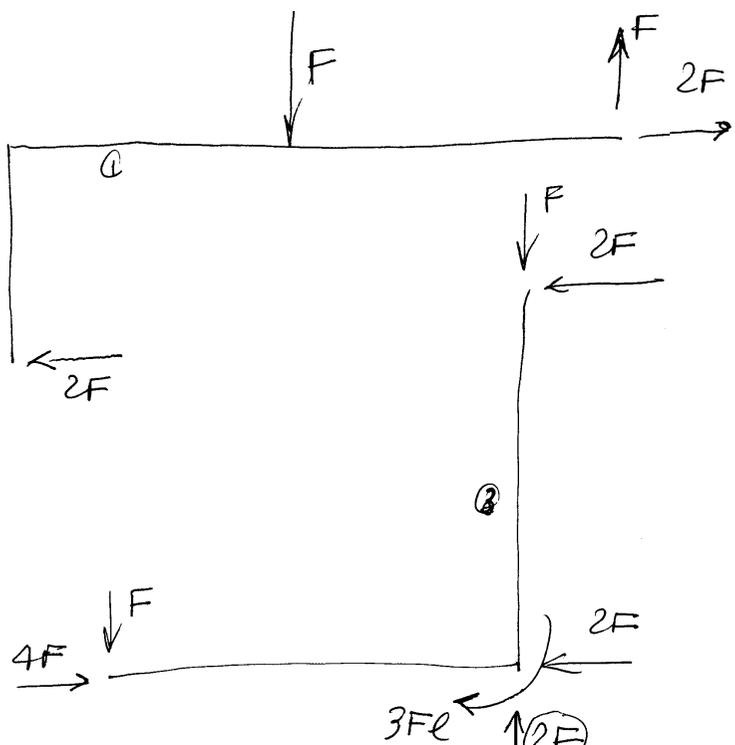
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una forza concentrata agente in corrispondenza del nodo E:

1. Verificare l'isostaticità della struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa nella cerniera B utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
5. Disegnare la curva delle pressioni;
6. Determinare lo sforzo normale nel tratto ABC utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
7. Completare il punto 4, calcolando la rotazione relativa nella cerniera B;
8. Disegnare la deformata elastica della struttura;
9. Calcolare lo spostamento verticale in E nel caso in cui la struttura sia caricata da due coppie M uguali ed opposte in B, in luogo della forza in E.

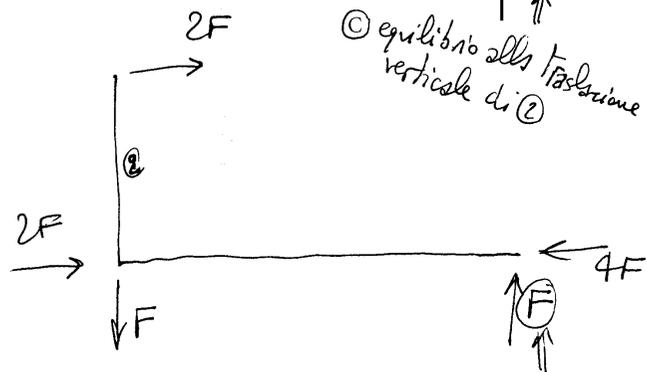
Ⓐ equilibrio di ①



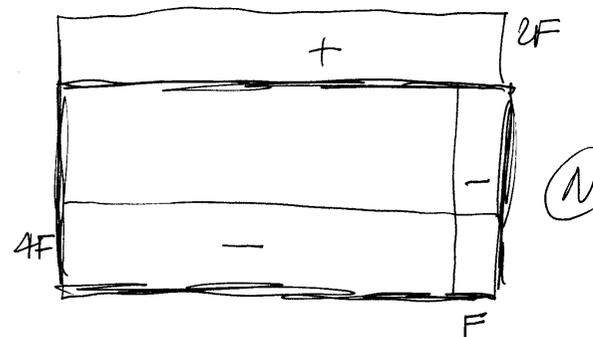
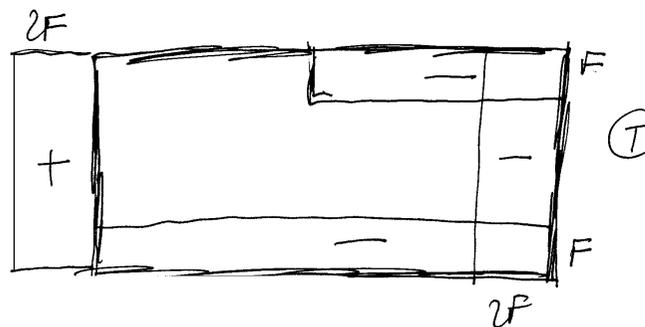
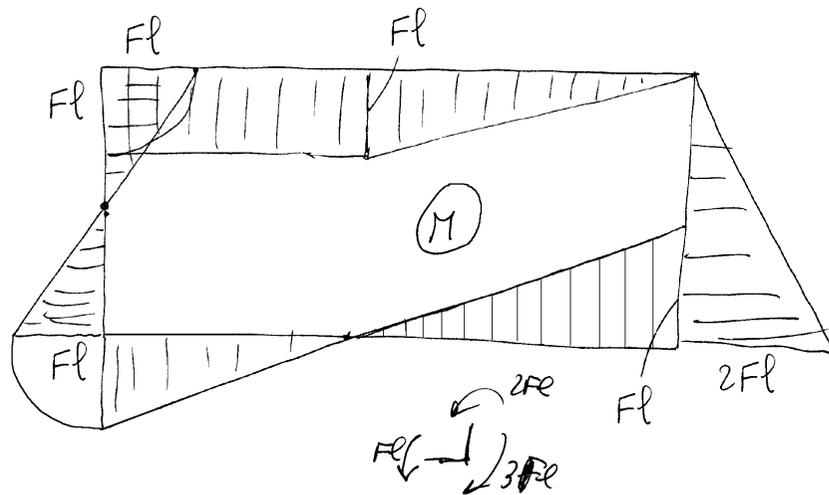


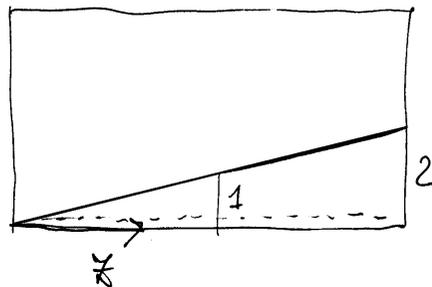
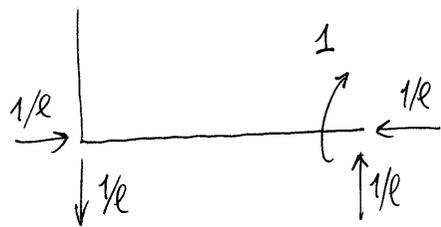
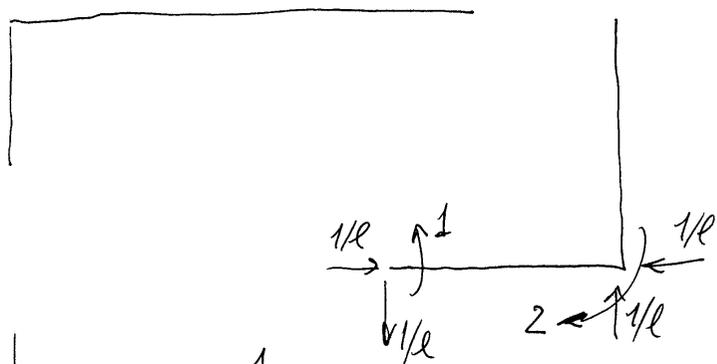
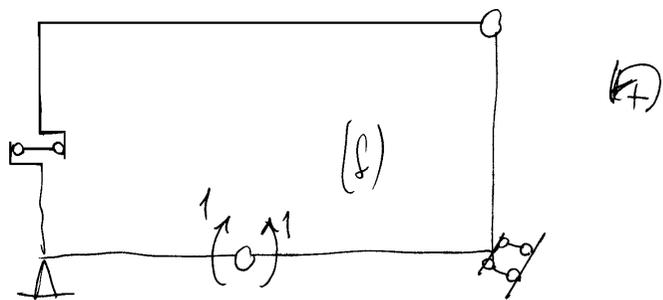


Ⓒ equilibrio alla traslazione verticale di ②



Ⓓ equilibrio di ① alla rotazione attorno ad A



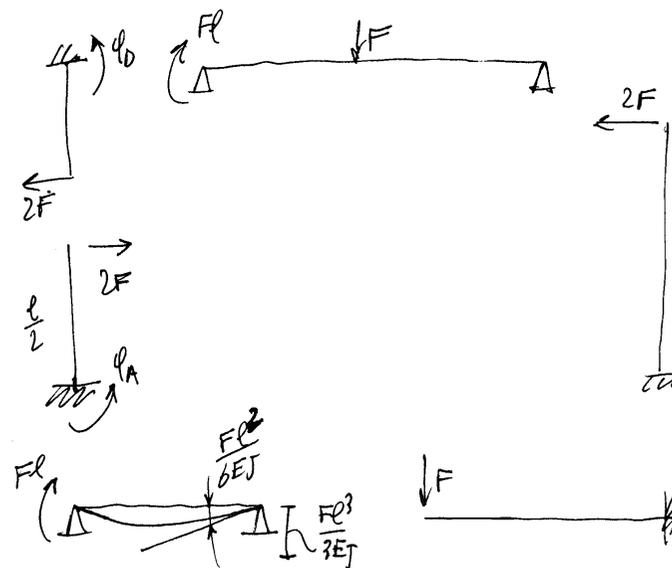
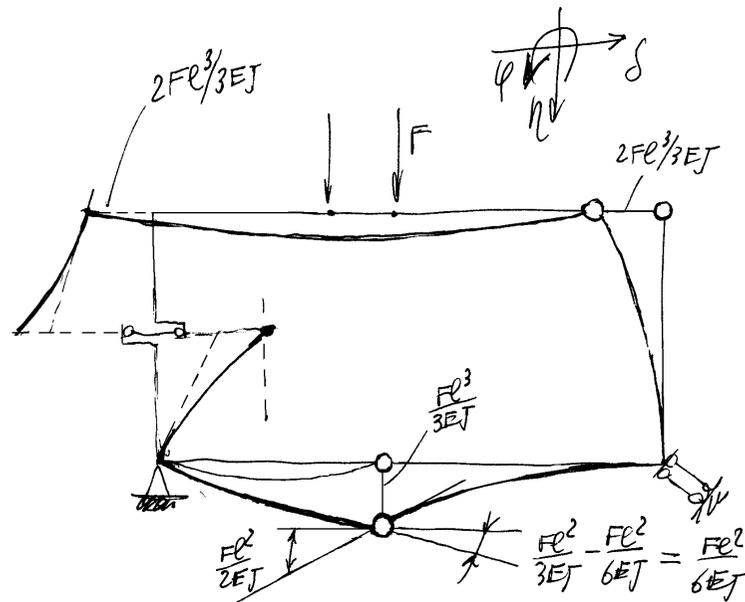


$$M^{(s)}(z) = \frac{z}{l} \quad z \in [0, l]$$

$$M^{(2)}(z) = -Fl + Fz$$

$$\Delta l_B = \int_0^{2l} \frac{M^{(s)} M^{(2)}}{EJ} dz = -\frac{2Fl^2}{EJ} + \frac{8Fl^2}{3EJ}$$

$$\Delta l_B = \frac{2Fl^2}{3EJ}$$



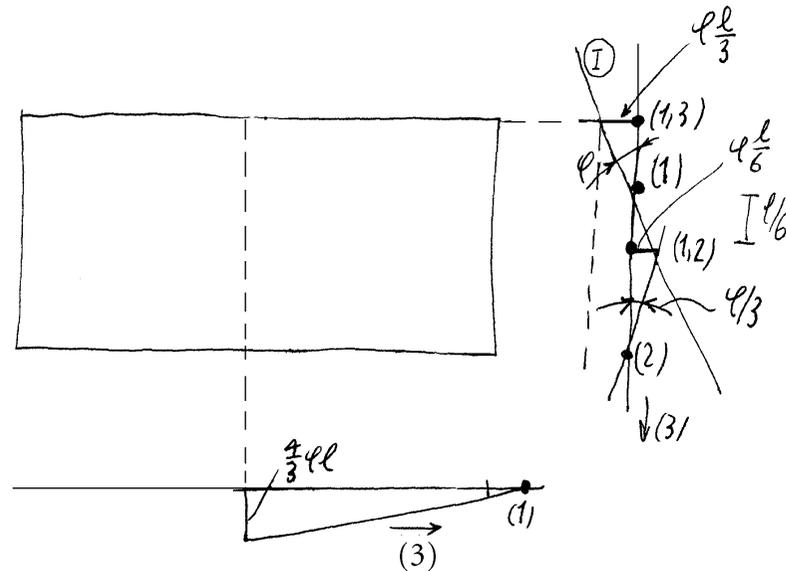
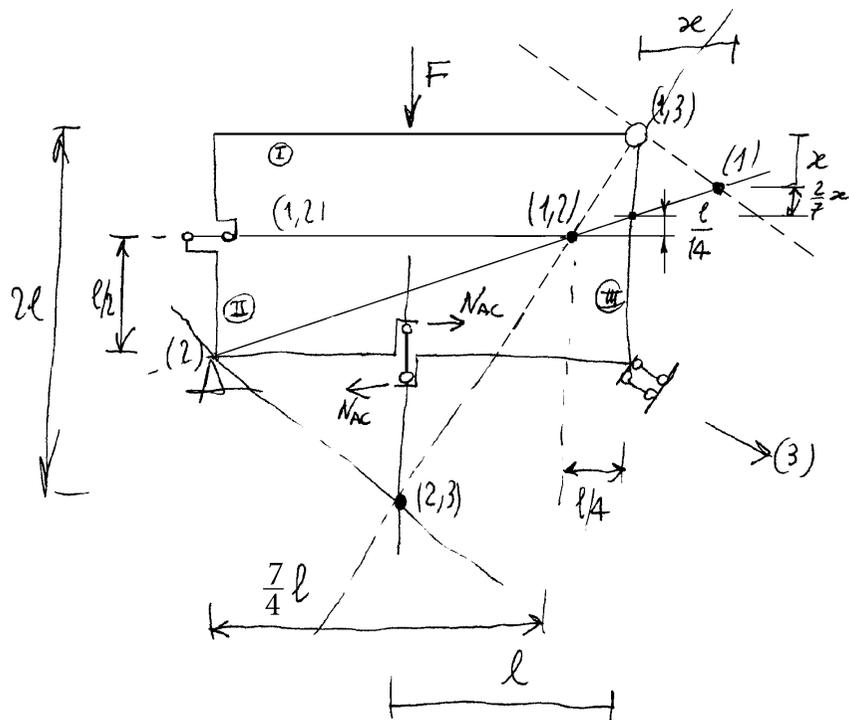
$$\varphi_A = - \left(\frac{Fl^2}{3EJ} + \frac{Fl^2}{3EJ} \right) = - \frac{2Fl^2}{3EJ}$$

$$\Delta\varphi_B = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \frac{Fl^2}{EJ} = \frac{2Fl^2}{3EJ}$$

$$\int_H = \frac{2F \left(\frac{l}{2} \right)^3}{3EJ} + \frac{2}{3} \frac{Fl^2}{EJ} \frac{l}{2} = \frac{5Fl^3}{12EJ}$$

$$x + \frac{2}{7}x + \frac{l}{14} = \frac{l}{2}$$

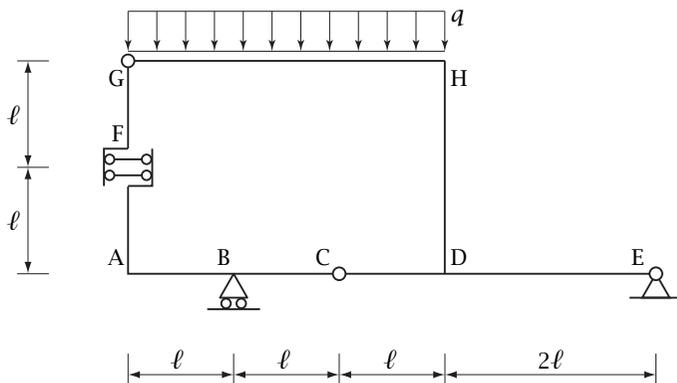
$$\frac{9}{7}x = \frac{3}{7}l \Rightarrow x = \frac{l}{3}$$



$$L_e = N_{Ac} \varphi \frac{l}{3} + F \frac{4}{3} \varphi l$$

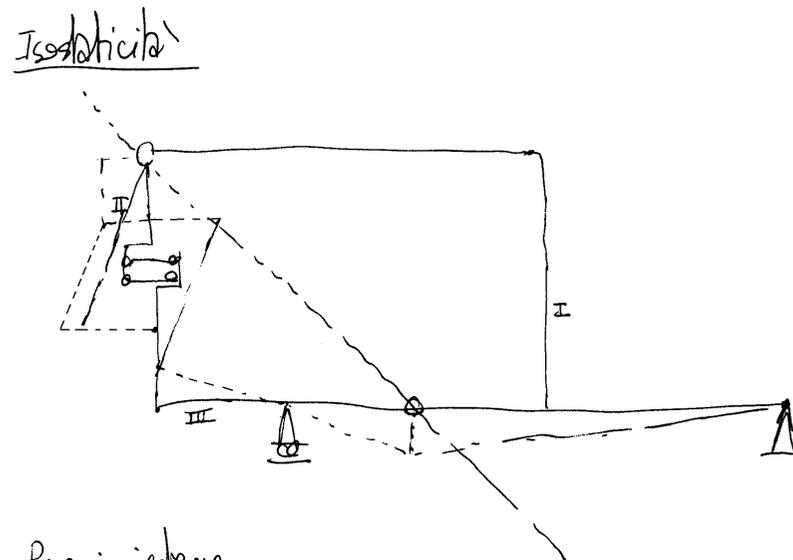
$$L_e = 0 \Rightarrow N_{Ac} = -4F$$

4.28 Esercizio 61

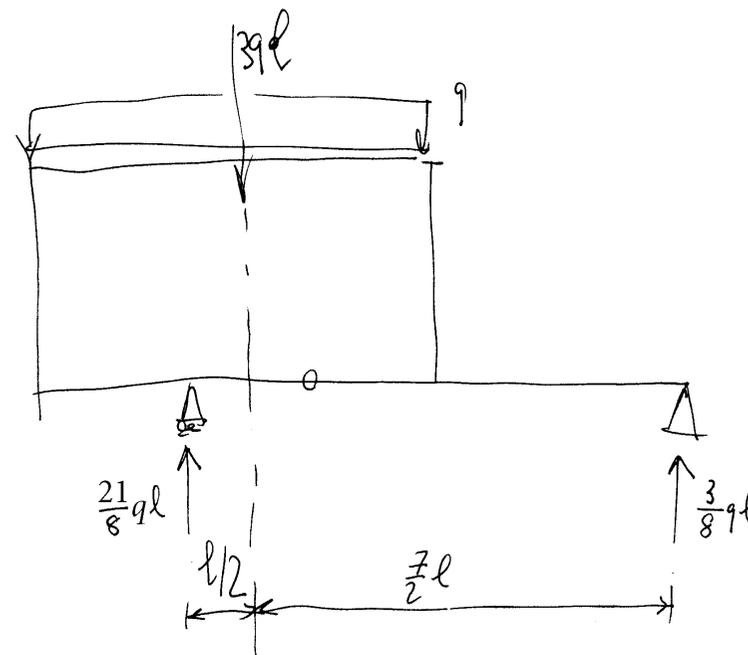


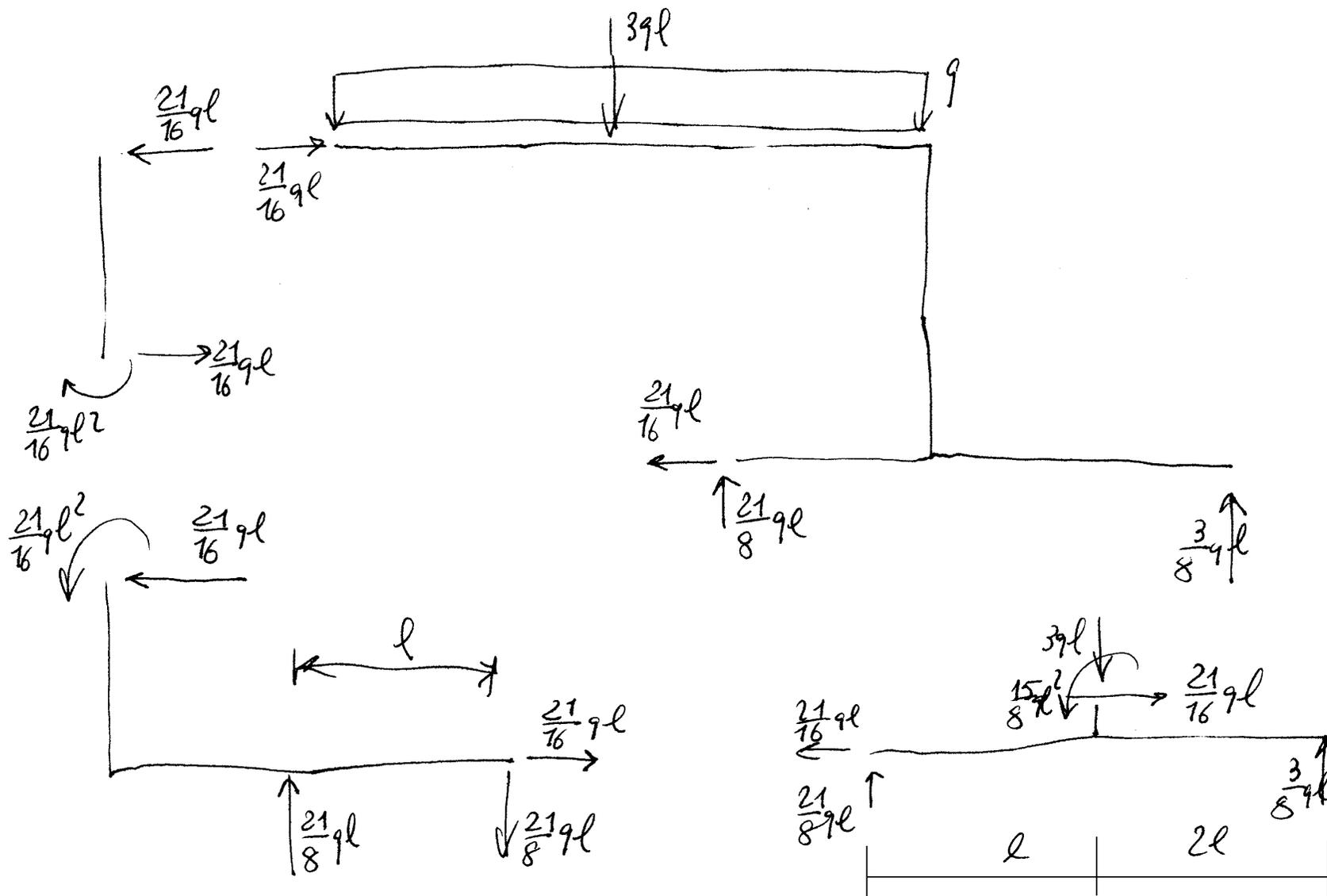
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico ripartito costante agente nella travata GH:

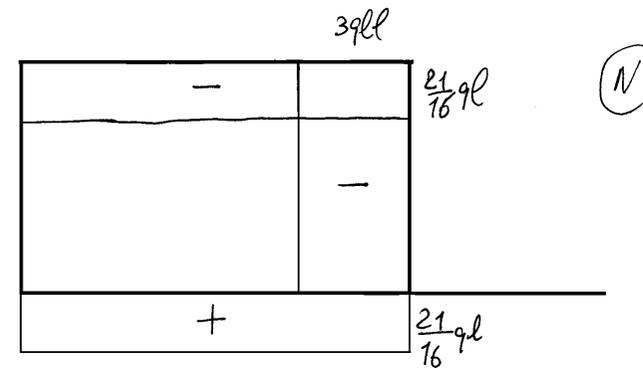
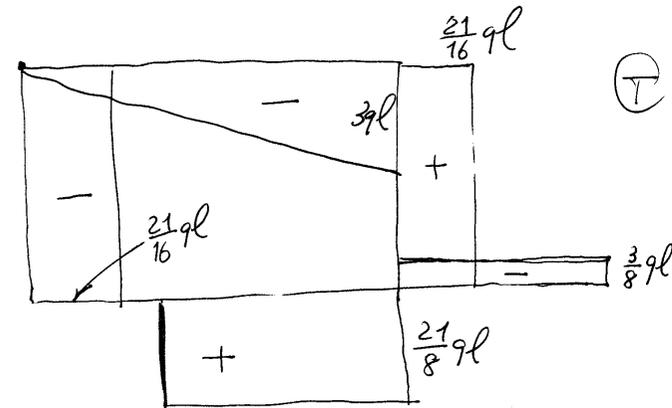
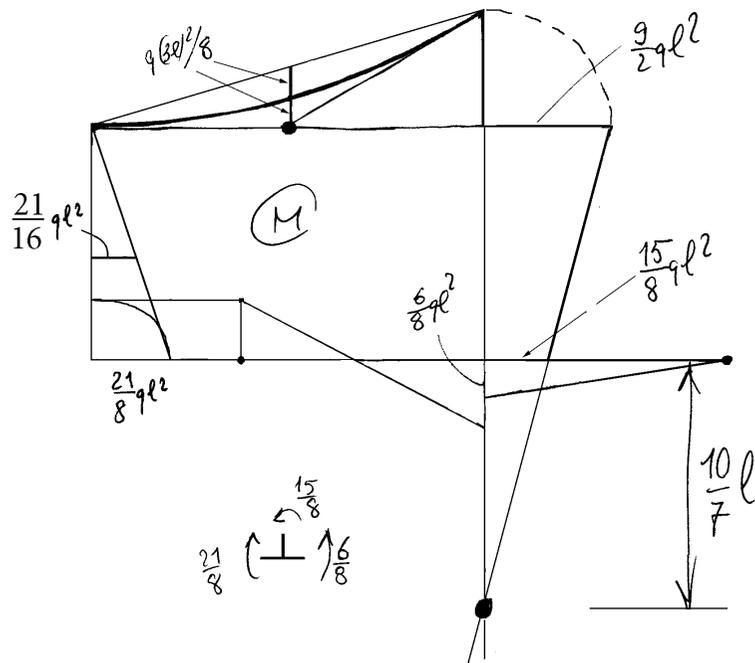
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
 2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 4. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento relativo nel doppio pendolo F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
-
5. Disegnare la curva delle pressioni;
 6. Determinare lo sforzo di taglio nel tratto BCD utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento relativo nel doppio pendolo F;
 8. Calcolare lo spostamento relativo nel doppio pendolo F utilizzando il metodo cinematico.



Reazioni esterne





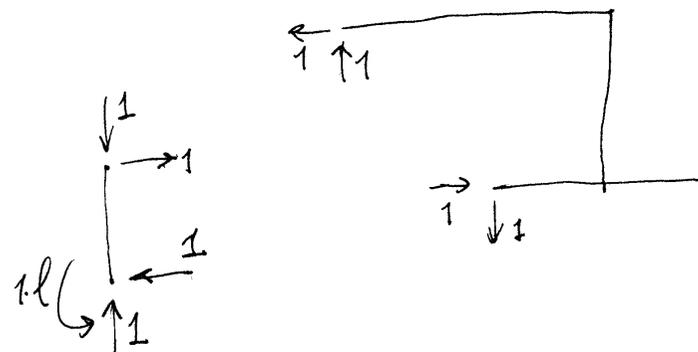
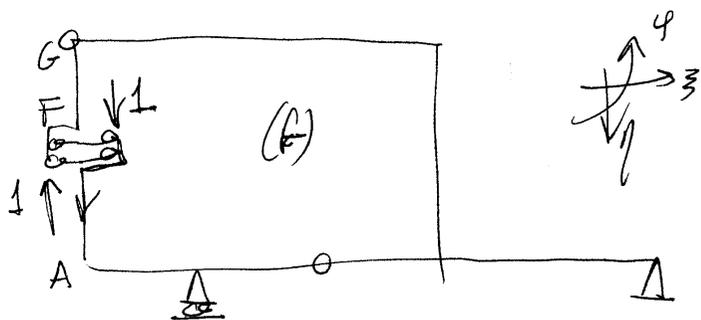


$$\frac{15}{8} = \frac{9}{2} \Rightarrow \frac{15}{48} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{9}{2} - \frac{21}{8} = \frac{36}{8} - \frac{21}{8} = \frac{15}{8}$$

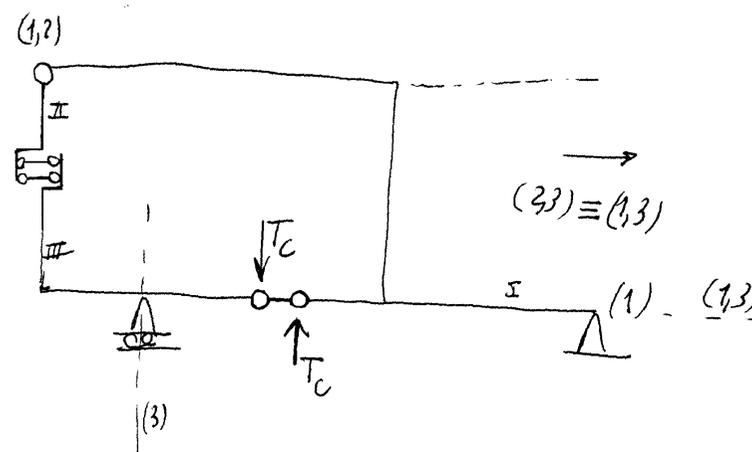
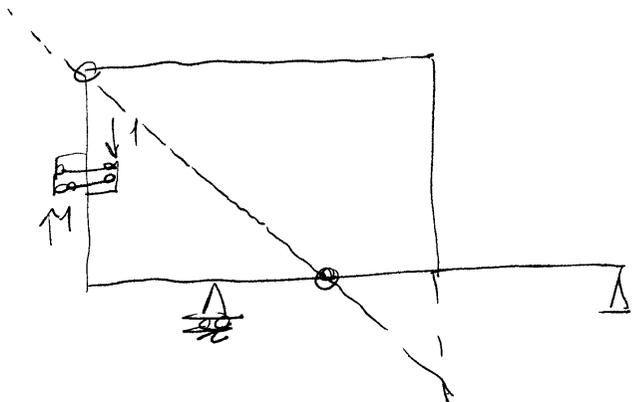
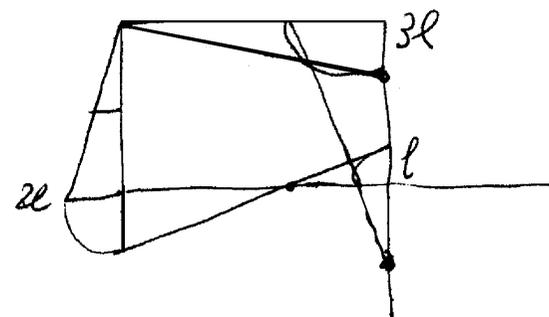
$$\frac{7}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow x = \frac{32}{7} l$$

$$\frac{9}{2} = \frac{15}{8} \Rightarrow \frac{63}{48} = \frac{105}{80}$$

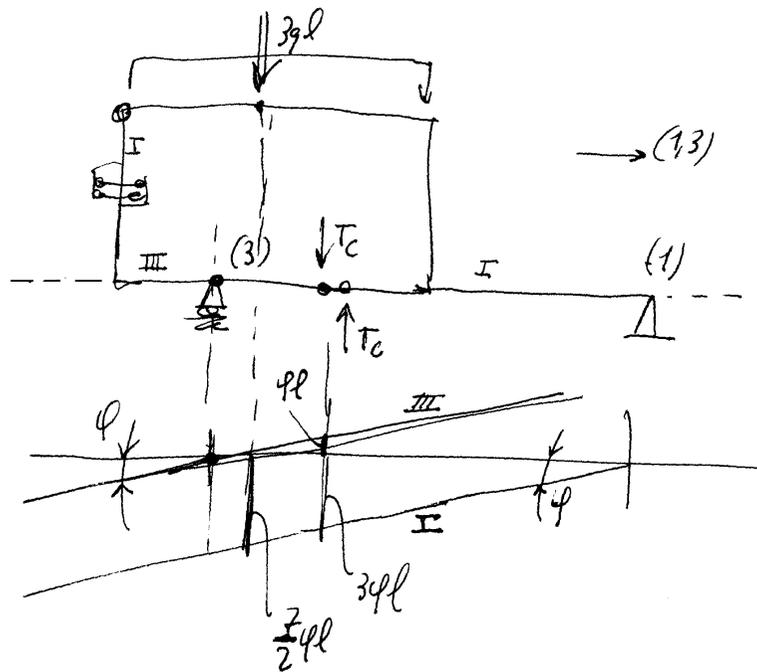


$$L_{ve} = 1 \eta_{FG} - 1 \eta_{FA} = 1 \cdot \Delta \rho_F$$

$$L_{vi} = \int l \frac{M^A M^{(v)}}{EJ} ds$$



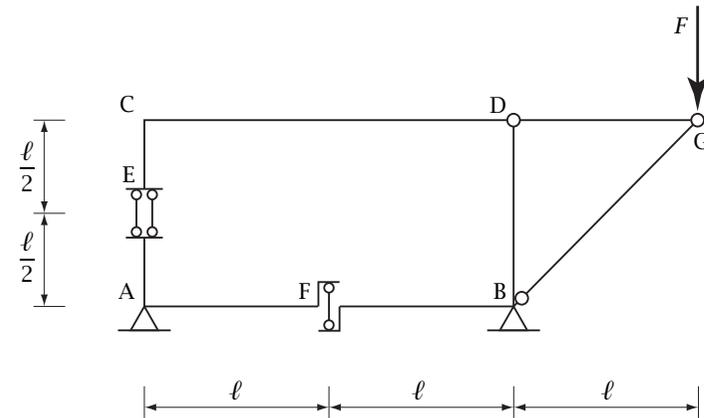
$(2,3) \equiv (1,3) \Rightarrow \text{I e II subiscono lo stesso moto rigido}$



$$L_e = (3q\ell)\left(\frac{7}{2}q\ell\right) - T_c(4\ell) - T_c(3q\ell)$$

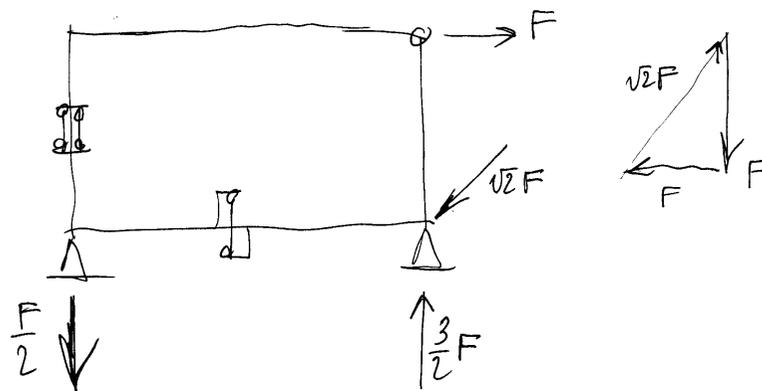
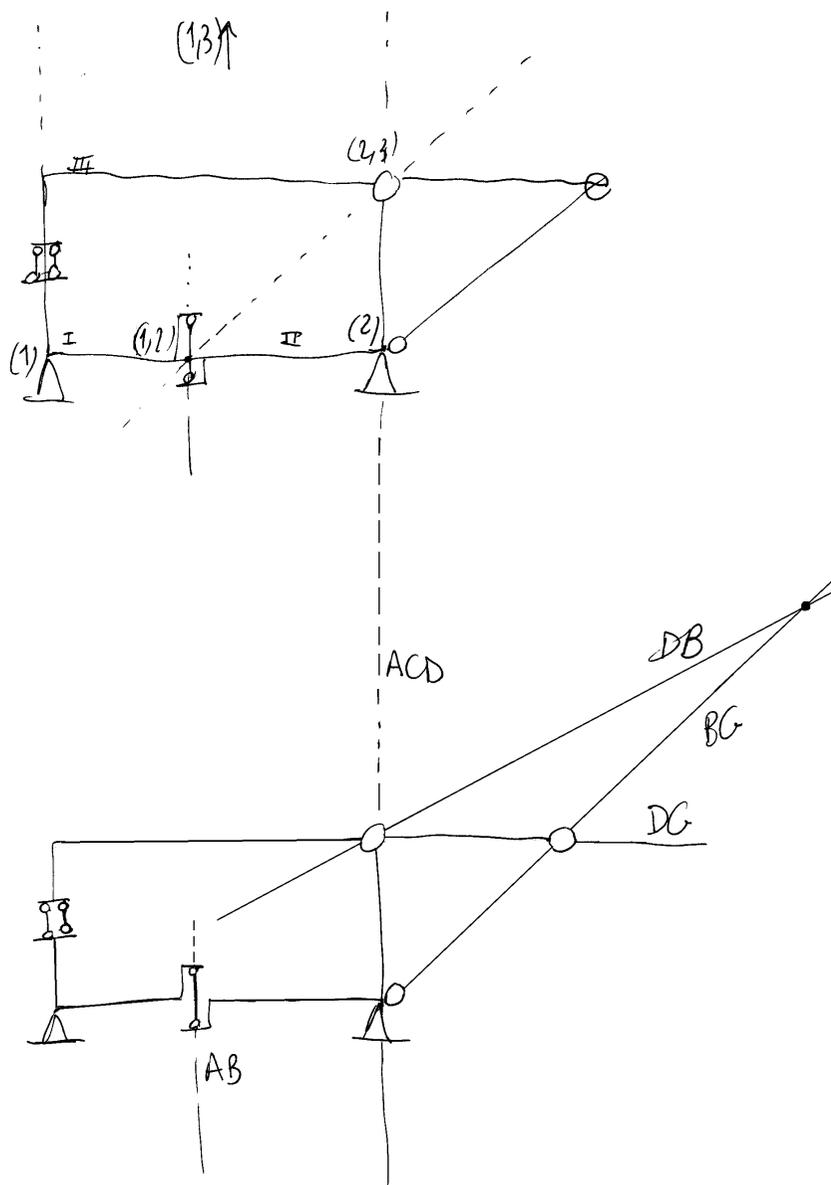
$$L_e = 0 \Rightarrow T_c = \frac{21}{8}q\ell$$

4.29 Esercizio 62

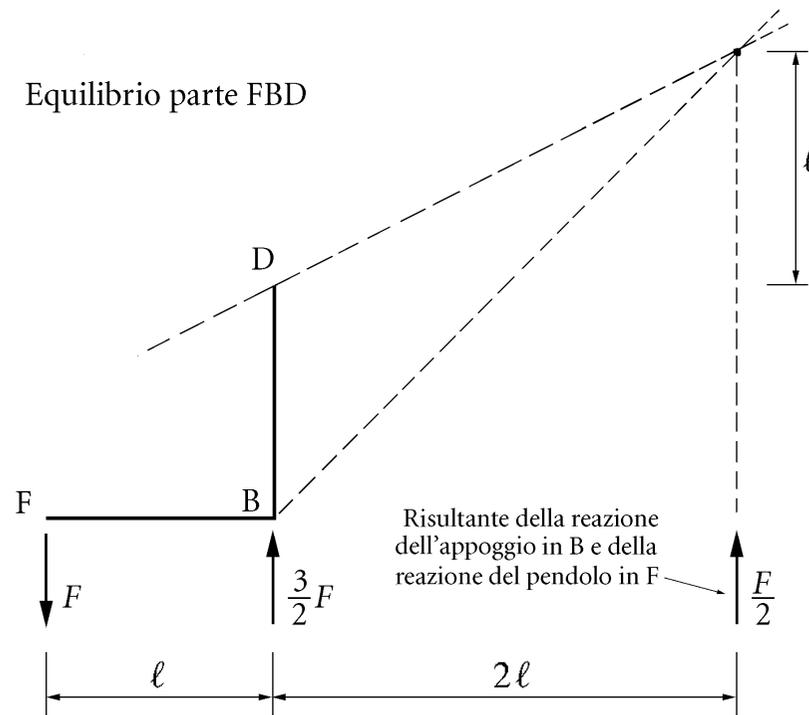


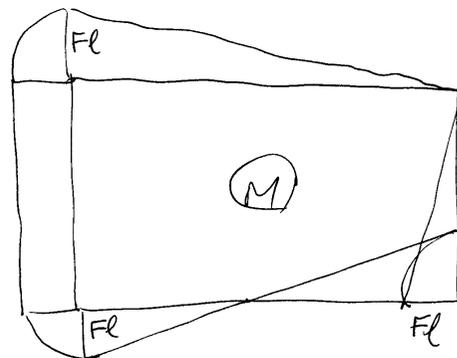
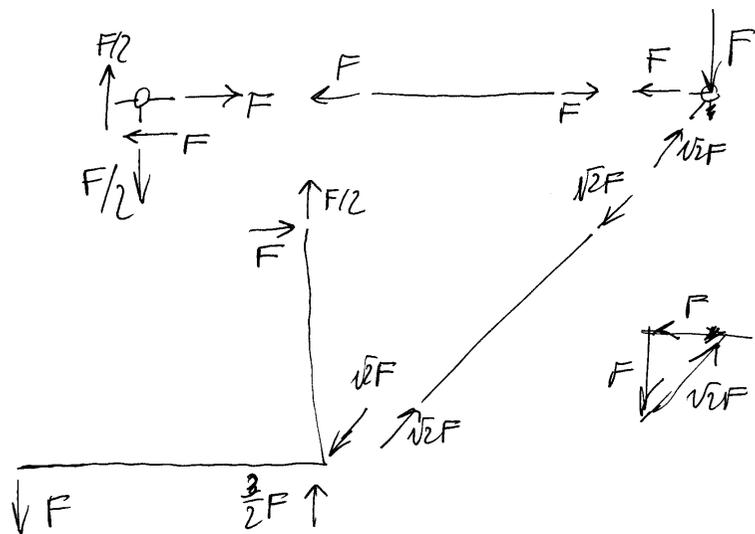
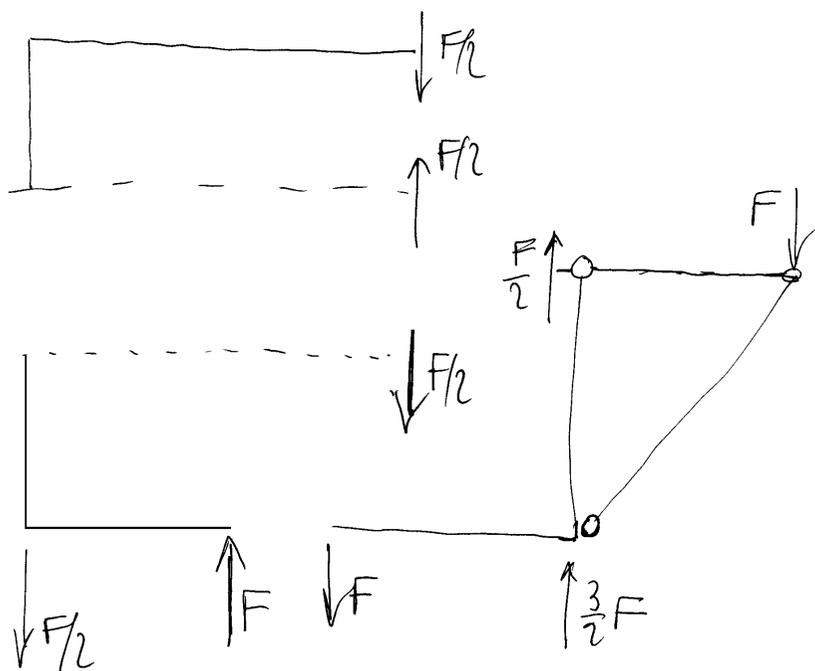
Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico concentrato agente nel nodo G:

1. Verificare l'isostaticità della struttura;
 2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 4. Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa in corrispondenza del pendolo F utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
-
5. Disegnare la curva delle pressioni;
 6. Determinare lo sforzo di taglio nel tratto AB utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 7. Completare il punto 4, calcolando la rotazione relativa in corrispondenza del pendolo F;
 8. Calcolare la rotazione relativa in corrispondenza del pendolo F utilizzando il metodo cinematico.



Equilibrio parte FBD



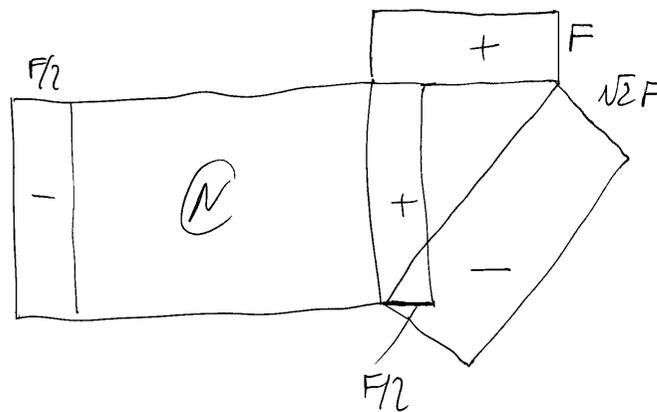
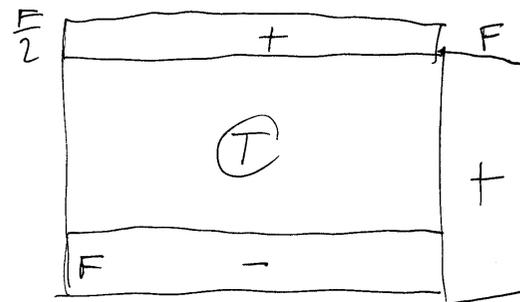


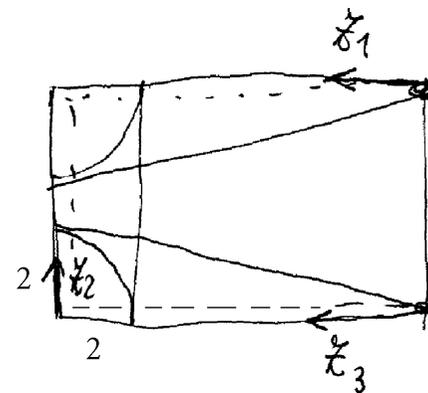
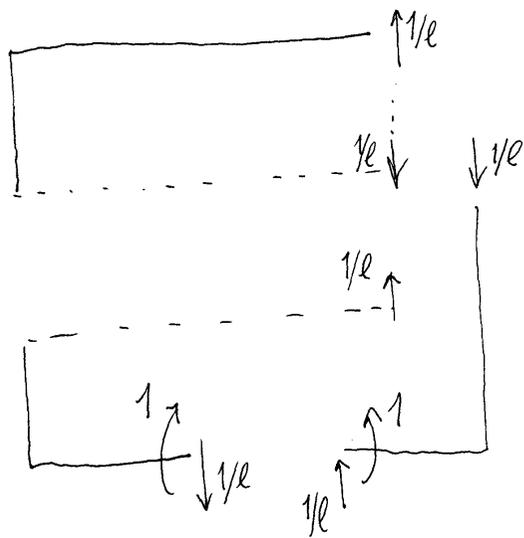
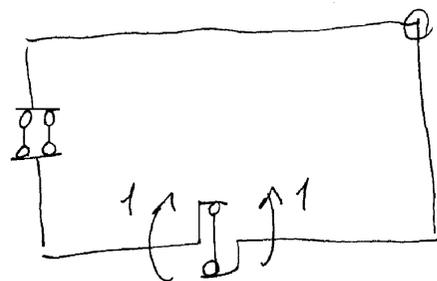
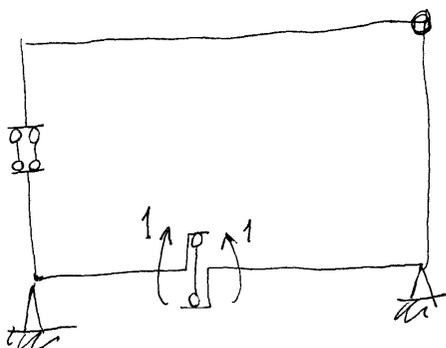
(2)

$$M(z_1) = -\frac{F}{2} z_1$$

$$M(z_2) = -Fl$$

$$M(z_3) = +Fl - Fz_3$$





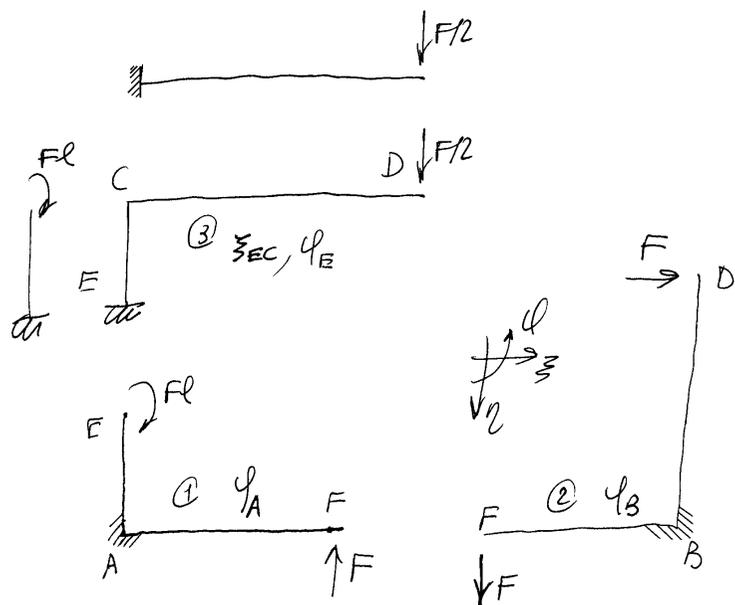
$$\left. \begin{aligned} M(z_1) &= \frac{1}{l} z_1 \\ M(z_2) &= 2 \\ M(z_3) &= \frac{1}{l} z_3 \end{aligned} \right\} (F)$$



$$\Delta \varphi_F = \varphi_{FB} - \varphi_{FA}$$

$$= - \int_0^{2l} \frac{F}{2lEJ} z^2 dz - \int_0^l \frac{2Fl}{EJ} dz + \int_0^{2l} \frac{F}{EJ} z dz - \int_0^{2l} \frac{F}{lEJ} z^2 dz$$

$$= \left(-\frac{4}{3} - 2 + 2 - \frac{8}{3} \right) \frac{Fl^2}{EJ} = -4 \frac{Fl^2}{EJ}$$



$$\varphi_E = \frac{7}{6} \frac{Fl^2}{EJ}$$

$$\varphi_A = \frac{5}{3} \frac{Fl^2}{EJ}$$

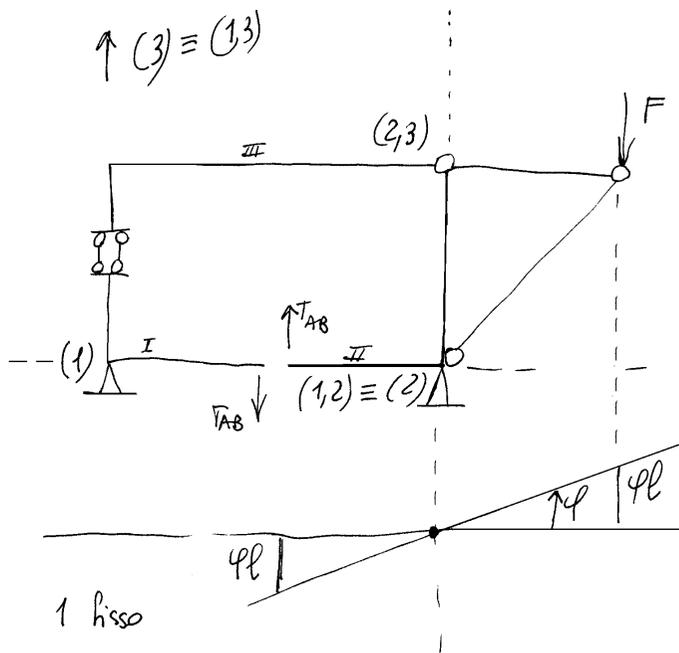
$$\varphi_B = -\frac{7}{3} \frac{Fl^2}{EJ}$$

$$\varphi_{FA} = \frac{Fl^2}{2EJ} + \frac{5Fl^2}{3EJ}$$

$$\varphi_{FB} = \frac{Fl^2}{2EJ} - \frac{7Fl^2}{3EJ}$$

$$\Delta\varphi_F = \varphi_{FB} - \varphi_{FA} = -\frac{12}{3} \frac{Fl^2}{EJ} = -4 \frac{Fl^2}{EJ}$$

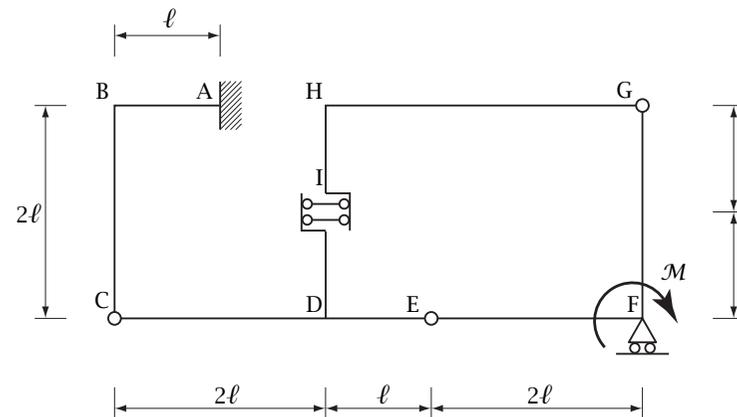
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_A^{\textcircled{1}} = \varphi_B^{\textcircled{2}} &\Rightarrow -\frac{Fl^3}{3EJ} - \varphi_A l = \frac{Fl^3}{3EJ} + \varphi_B l \\ \varphi_E^{\textcircled{1}} = \varphi_B^{\textcircled{2}} &\Rightarrow -\frac{Fl}{EJ} \frac{l}{2} + \varphi_A = \varphi_B \\ \xi_D^{\textcircled{3}} = \xi_D^{\textcircled{2}} &\Rightarrow \xi_{EC} + \frac{(Fl)(\frac{l}{2})^3}{3EJ} - \varphi_E \frac{l}{2} = \\ &= \frac{Fl^3}{3EJ} - \varphi_B l \\ \varphi_D^{\textcircled{2}} = 0 &\Rightarrow \frac{(F/2)(2l)^3}{3EJ} + \frac{(Fl)(\frac{l}{2})}{EJ} 2l - \varphi_E 2l = 0 \end{aligned} \right.$$



$$-T_{AB}l - Fl = 0$$

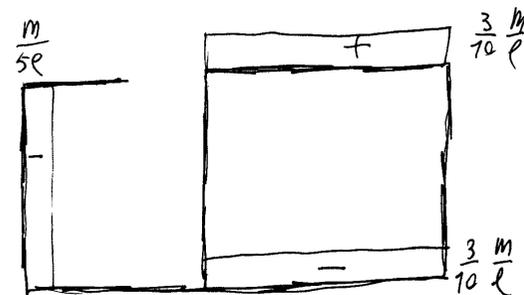
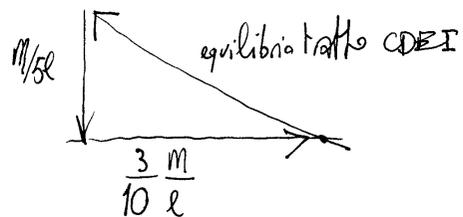
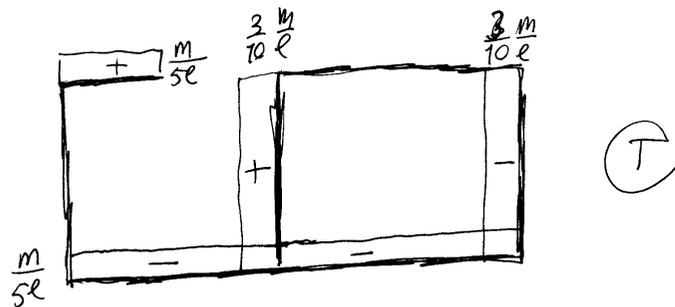
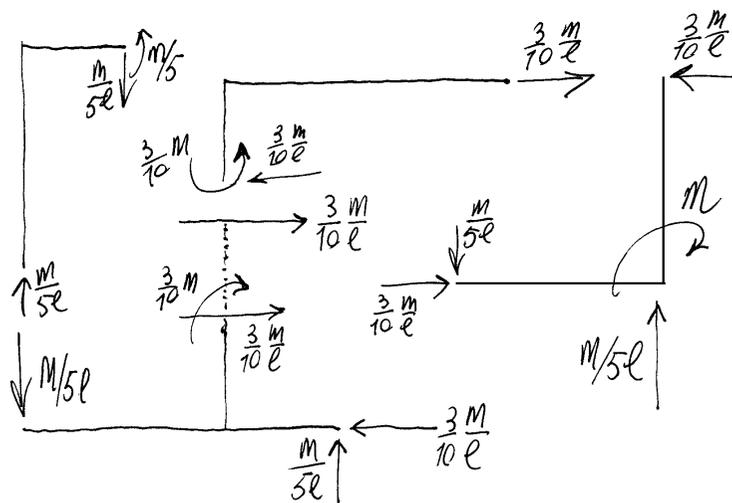
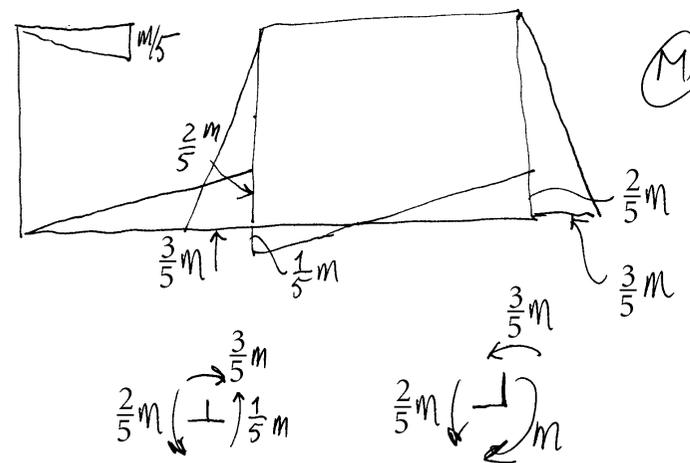
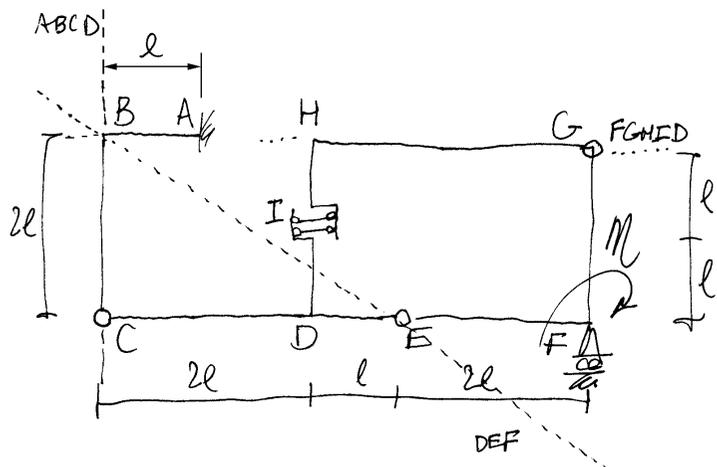
$$T_{AB} = -F$$

4.30 Esercizio 63

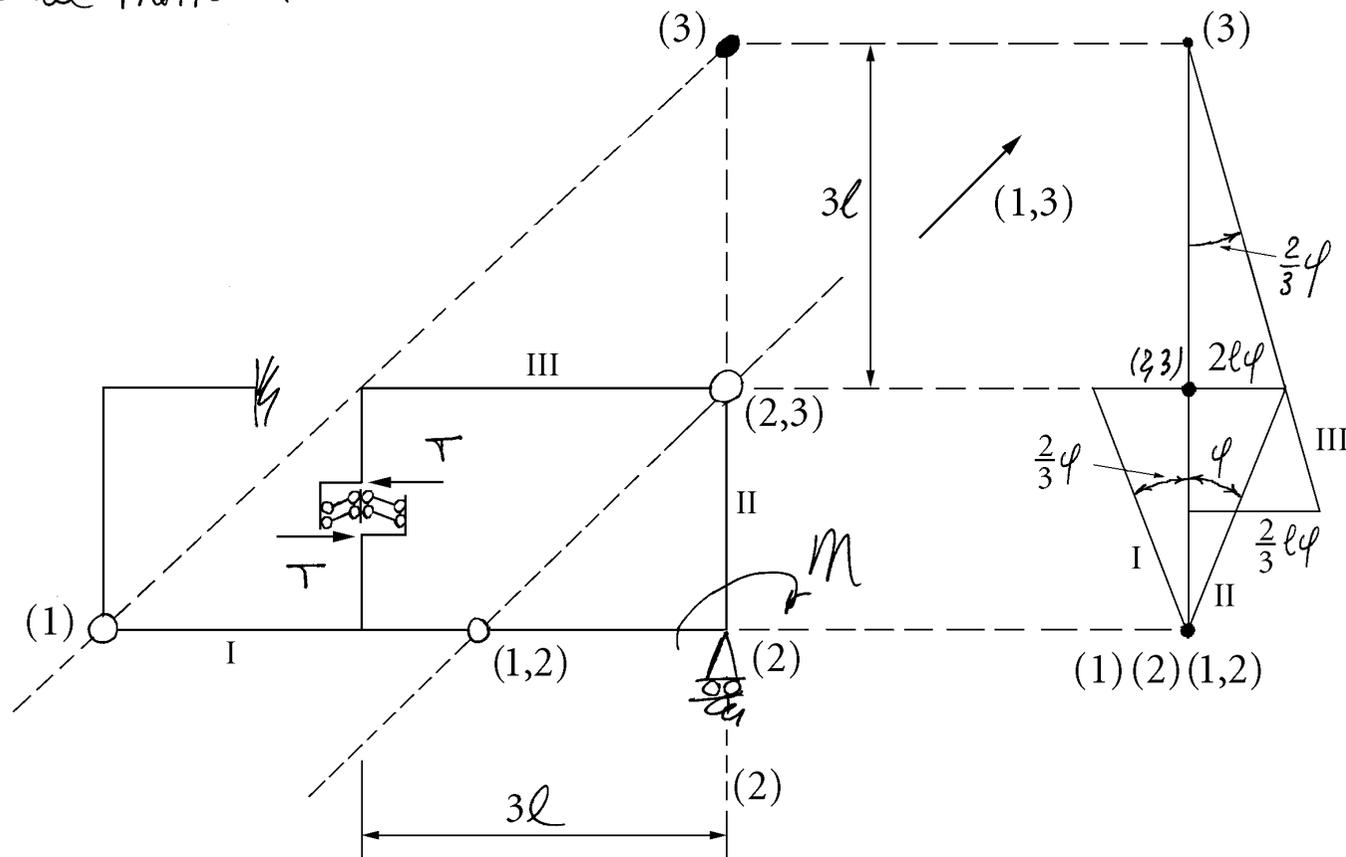


Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad una coppia agente nel nodo F:

1. Verificare l'isostaticità della struttura;
 2. Disegnare la curva delle pressioni;
 3. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 5. Impostare formalmente il calcolo dello spostamento relativo nel doppio pendolo I utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
-
6. Determinare lo sforzo di taglio nel tratto HID utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 7. Completare il punto 4, calcolando lo spostamento relativo nel doppio pendolo I;
 8. Calcolare lo spostamento relativo nel doppio pendolo I utilizzando il metodo cinematico (aiuto: bloccare il nodo D).

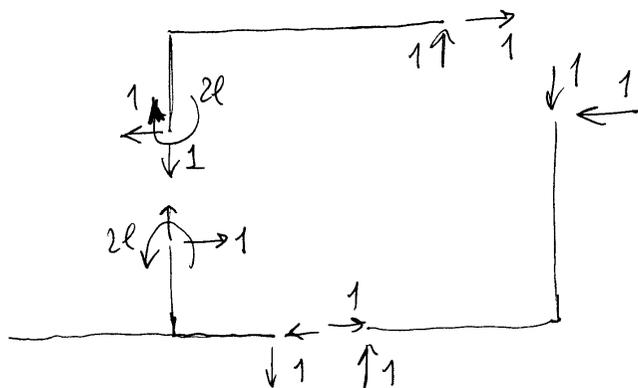
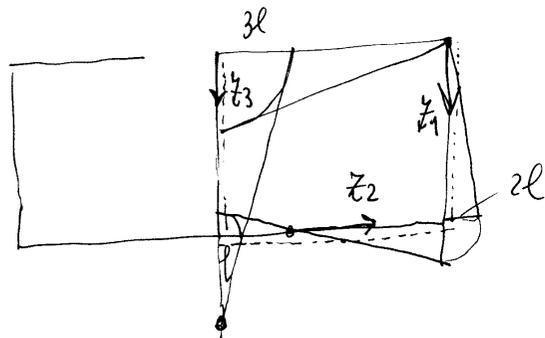
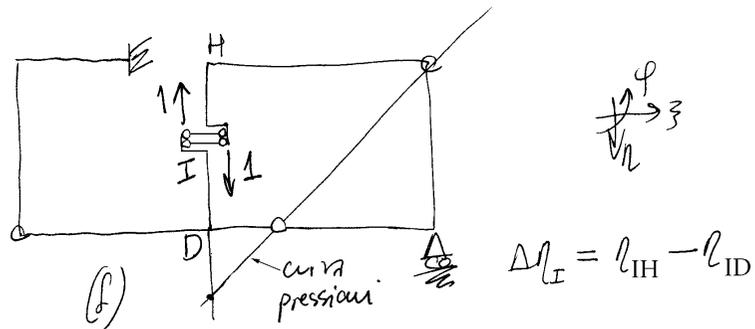


Taglio nel tratto HD



$$L_{ve} = M\varphi - T\left(\frac{2}{3}\varphi l\right) - T\left(\frac{8}{3}\varphi l\right) \quad L_{ve} = 0 \Rightarrow T = \frac{3}{10} \frac{M}{l}$$

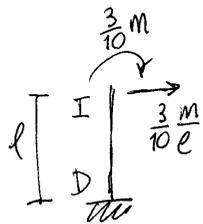
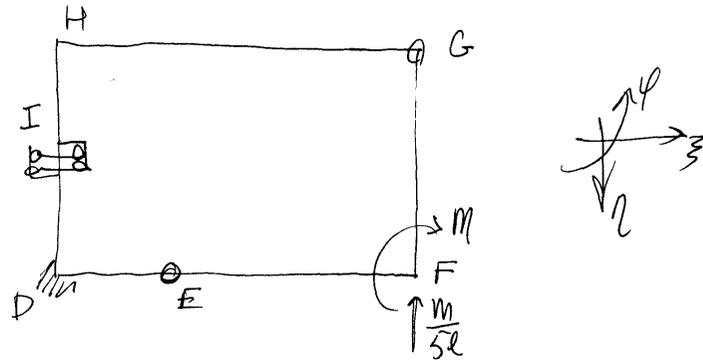
Spostamento verticale relativo in I



	$M^{(1)}$	$M^{(r)}/(ml)$	$L_{vi}/(\frac{m}{EJ})$
①	$1 \cdot z_1$	$\frac{3}{10} z_1$	$\frac{3}{10} \int_0^{2l} z_1^2 dz_1$
②	$1 \cdot z_2$	$-\frac{1}{5} z_2$	$-\frac{1}{5} \int_{-l}^{2l} z_2^2 dz_2$
③	$3l - 1 \cdot z_3$	$-\frac{3}{10} z_3$	$-\frac{9l}{10} \int_0^{2l} z_3 dz_3 + \frac{3}{10} \int_0^{2l} z_3^2 dz_3$

$$\begin{aligned}
 L_{vi}/\frac{m}{EJ} &= \\
 &= \frac{4}{5} l^3 - \frac{8}{15} l^3 - \frac{1}{15} l^3 - \frac{9}{5} l^3 + \frac{4}{5} l^3 = \\
 &= -\frac{12}{15} l^3 = -\frac{4}{5} l^3
 \end{aligned}$$

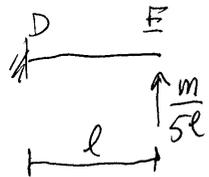
$$\Delta l_I = -\frac{4}{5} \frac{ml^2}{EJ}$$



$$\eta_{ID} = 0$$

$$\xi_I = \frac{3ml^2}{20EJ} + \frac{ml^2}{10EJ} = \frac{ml^2}{4EJ}$$

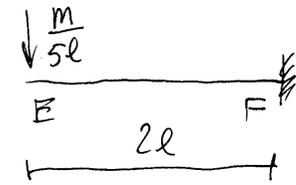
$$\varphi_I = -\frac{3ml}{10EJ} - \frac{3ml}{20EJ} = -\frac{9ml}{20EJ}$$



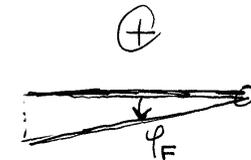
$$\xi_E = 0$$

$$\eta_E = -\frac{ml^2}{15EJ}$$

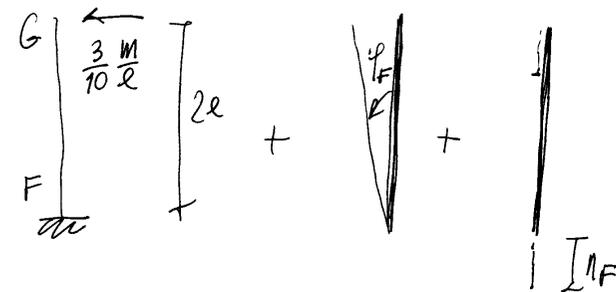
$$\varphi_{ED} = \frac{ml}{10EJ}$$



$$\eta_E = \frac{8ml^2}{15EJ} + 2\varphi_F l + \eta_F \Rightarrow$$



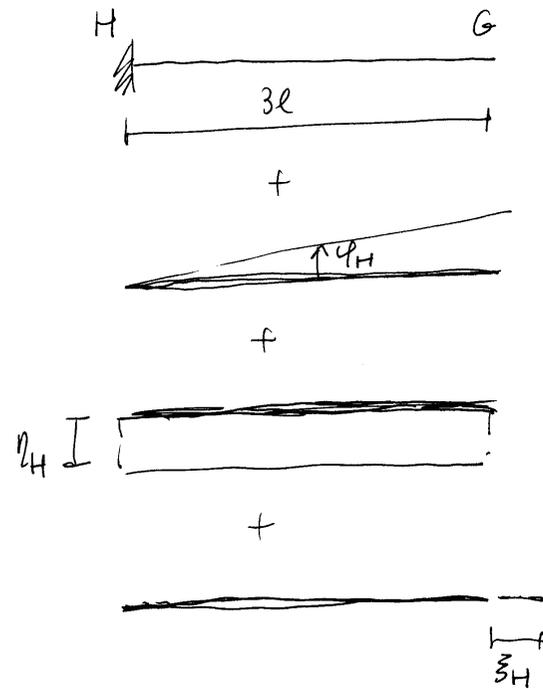
$$2l\varphi_F + \eta_F = -\frac{3ml^2}{5EJ} \quad (1)$$



$$\xi_G = -\frac{8ml^2}{10EJ} - 2l\varphi_F$$

$$\eta_G = \eta_F$$

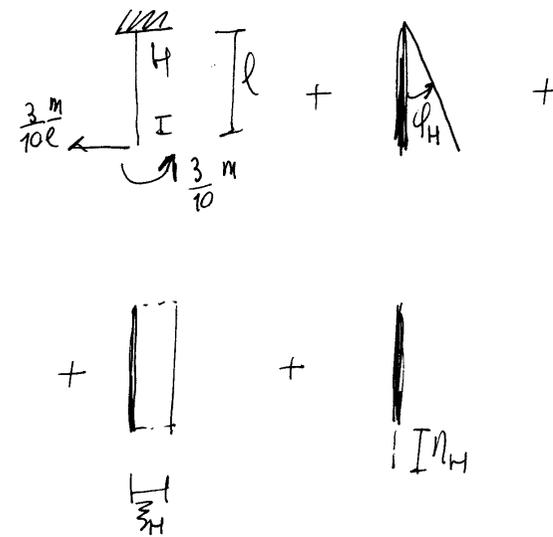
$$\varphi_{GF} = \frac{3ml}{15EJ} + \varphi_F$$



$$z_G = z_H \Rightarrow \boxed{z_H + 2l\varphi_H = -\frac{4ml^2}{5EJ}} \quad ②$$

$$z_G = -3\varphi_H l + z_H \Rightarrow \boxed{z_H = -3\varphi_H l + z_H} \quad ③$$

$$\varphi_G = \varphi_H$$



$$z_{IH} = z_H \quad 4 \quad ① \quad ② \quad ③ \quad ⑤ \quad ⑥$$

$$z_I = +\frac{3ml^2}{20EJ} - \frac{1ml^2}{10EJ} + \varphi_H l + z_H$$

$$= \varphi_H l + z_H + \frac{1ml^2}{20EJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_H l + z_H = \frac{1ml^2}{5EJ}} \quad ④$$

$$\varphi_I = \frac{3ml}{10EJ} - \frac{3ml}{20EJ} + \varphi_H = \varphi_H + \frac{3ml}{20EJ}$$

$$\varphi_H = -\frac{12}{20} \frac{ml}{EJ} = -\frac{3}{5} \frac{ml}{EJ}$$

$$\xi_H = \frac{4}{5} \frac{ml}{EJ}$$

$$\varphi_F = -\frac{4}{5} \frac{ml}{EJ}$$

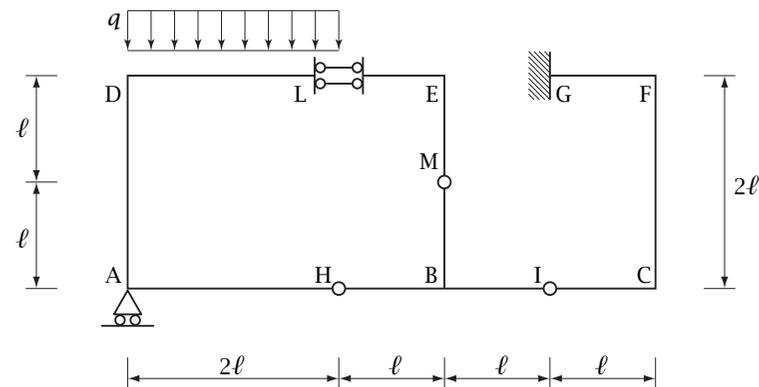
$$r_F = \frac{ml^2}{EJ}$$

$$r_H = -\frac{4}{5} \frac{ml^2}{EJ}$$

$$r_{IH} = -\frac{4}{5} \frac{ml^2}{EJ}$$

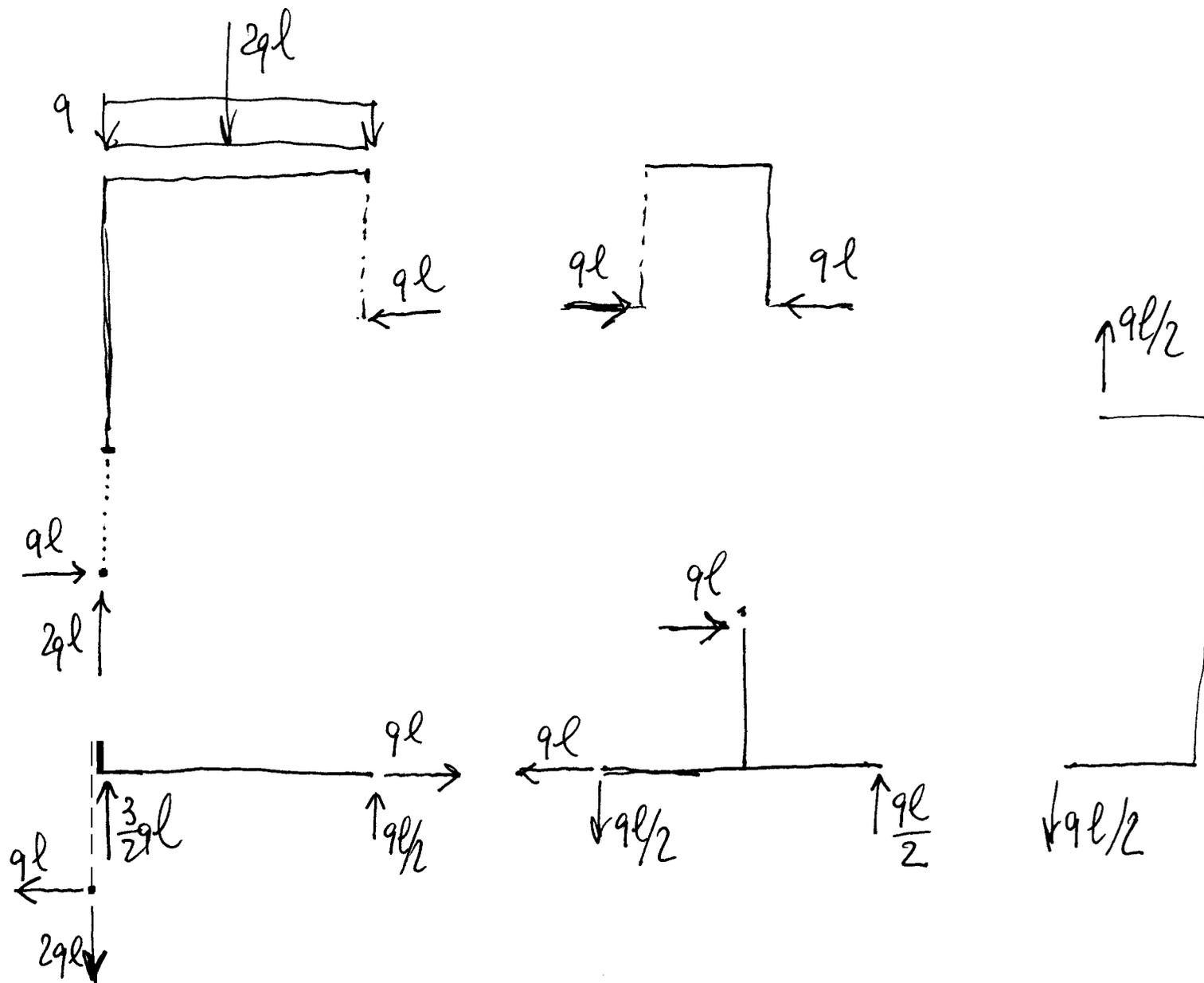
$$r_{IH} - r_{ID} = -\frac{4}{5} \frac{ml^2}{EJ}$$

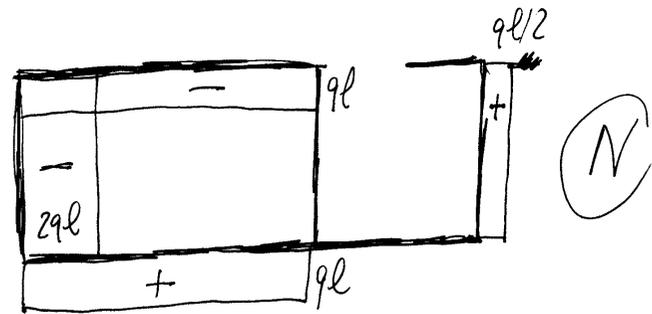
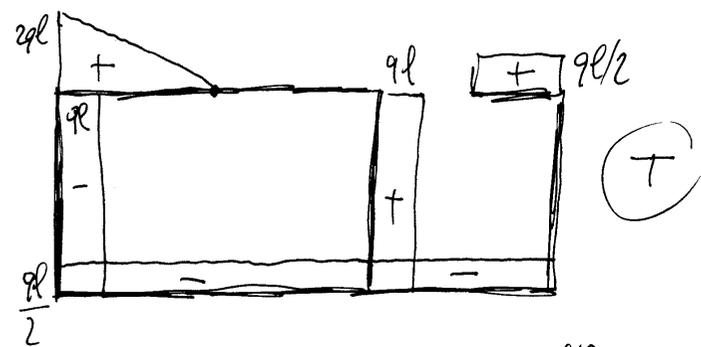
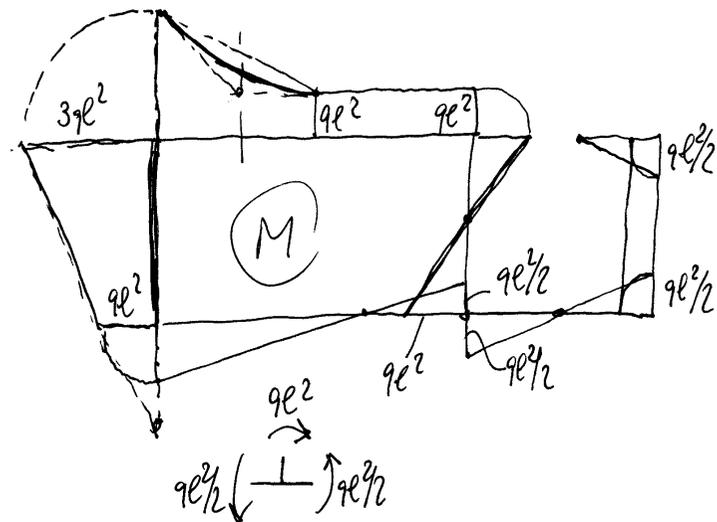
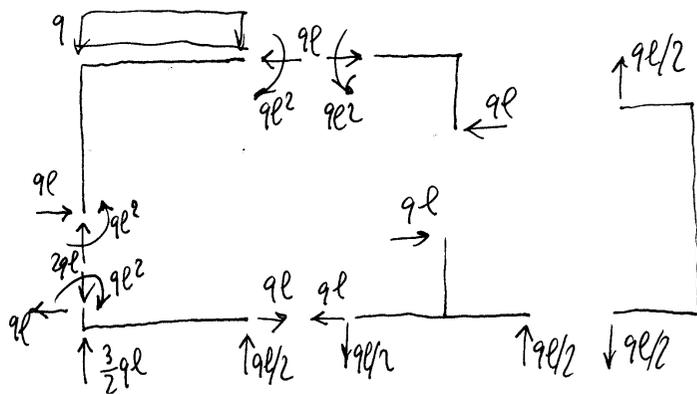
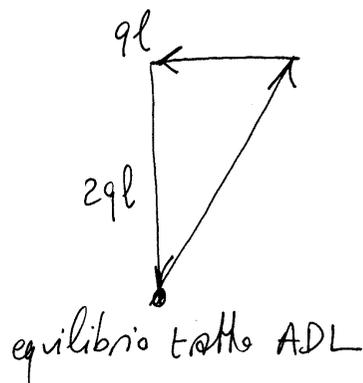
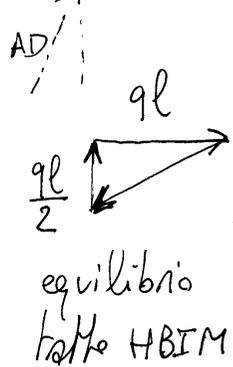
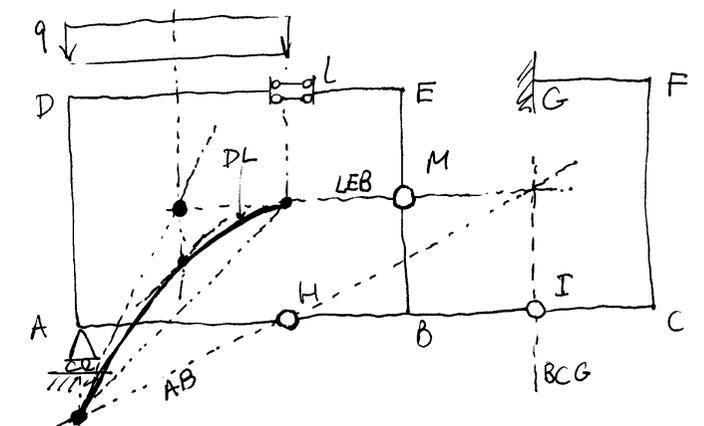
4.31 Esercizio 64

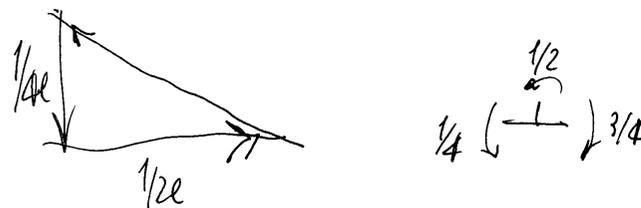
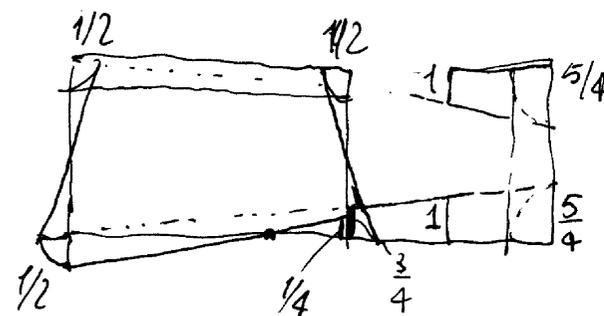
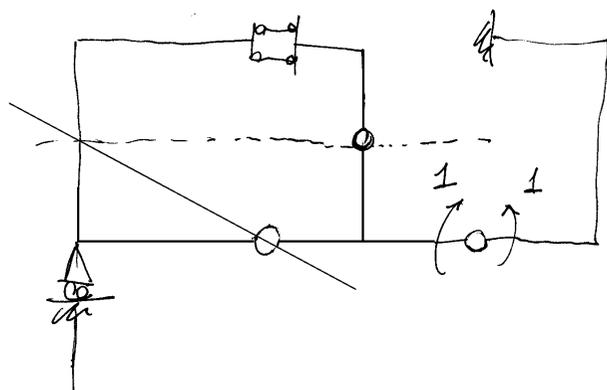
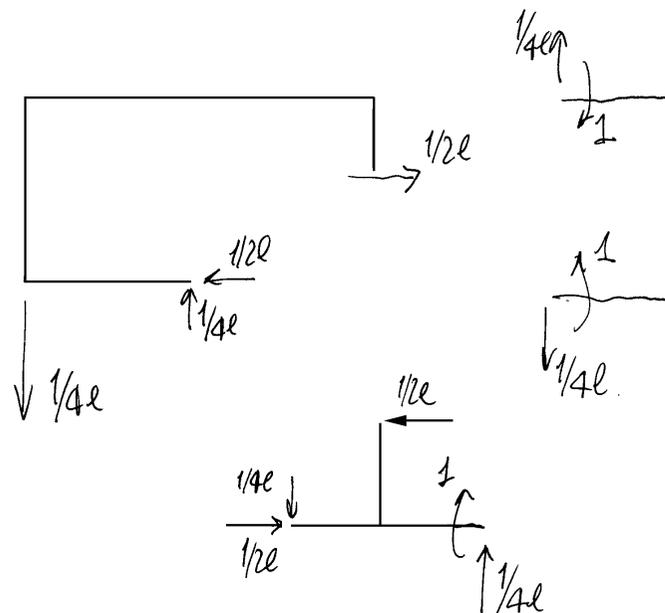
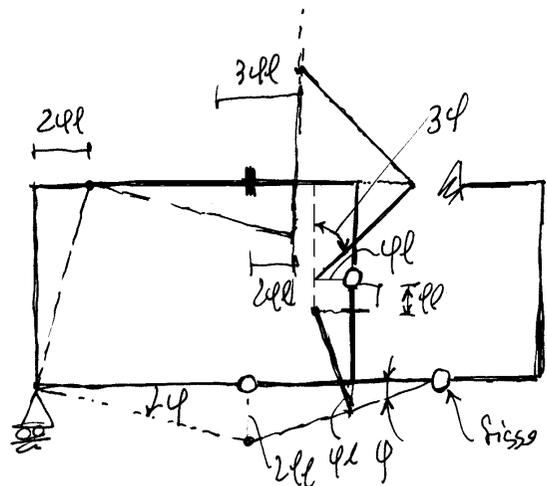


Data la struttura isostatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto DL:

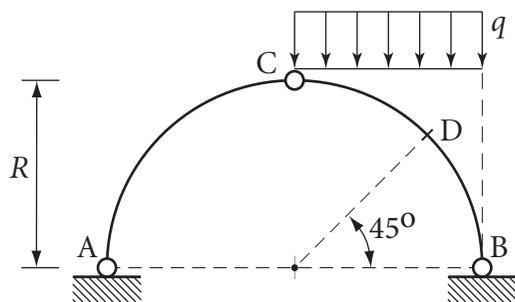
1. Verificare l'isostaticità della struttura;
 2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
 3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 4. Impostare formalmente il calcolo della rotazione relativa nella cerniera I utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi deformabili;
-
5. Disegnare la curva delle pressioni;
 6. Determinare il momento flettente nel tratto BIC utilizzando il principio dei lavori virtuali per i corpi rigidi;
 7. Completare il punto 4, calcolando la rotazione relativa nella cerniera I;
 8. Impostare il calcolo della rotazione relativa nella cerniera I utilizzando il metodo cinematico.





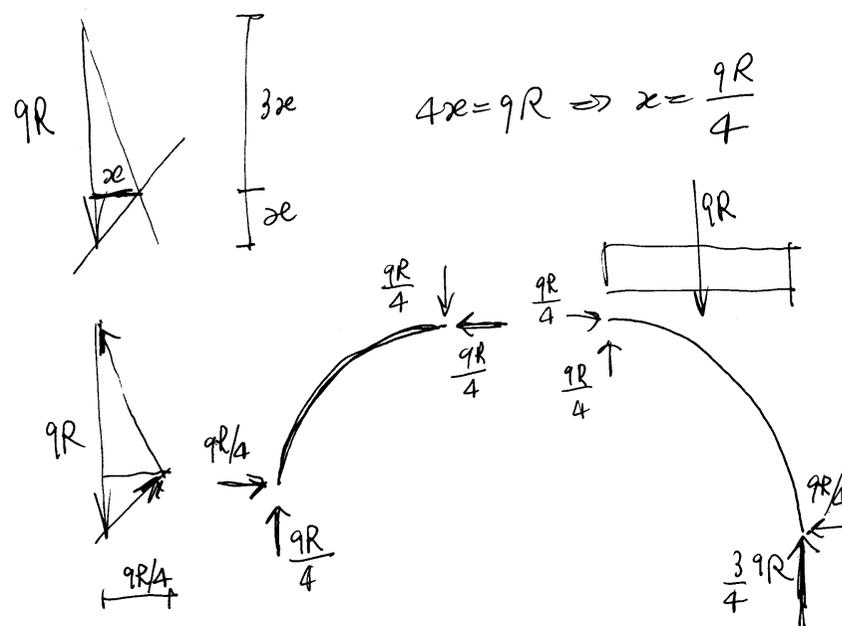
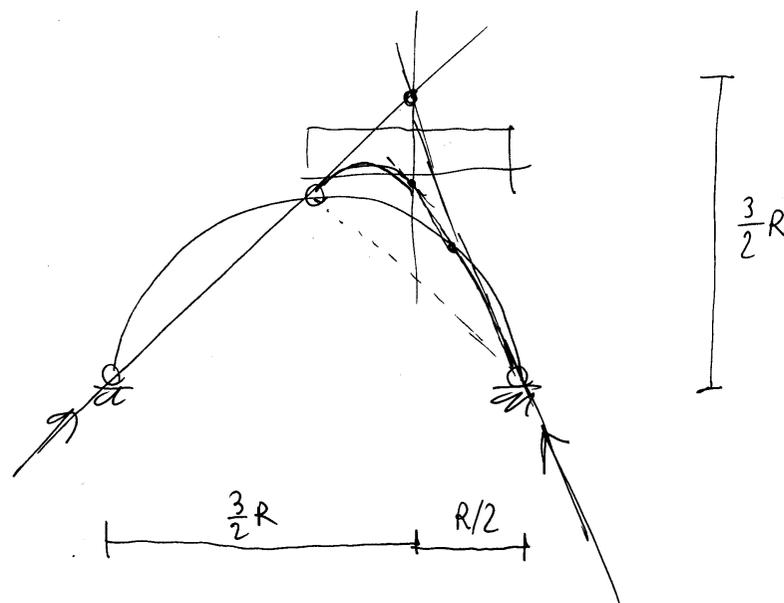


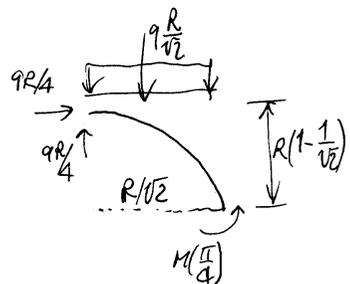
4.32 Esercizio 65



Dato l'arco circolare isostatico a tre cerniere di figura soggetto ad una forza distribuita verticale costante per unità di proiezione orizzontale nel tratto CB:

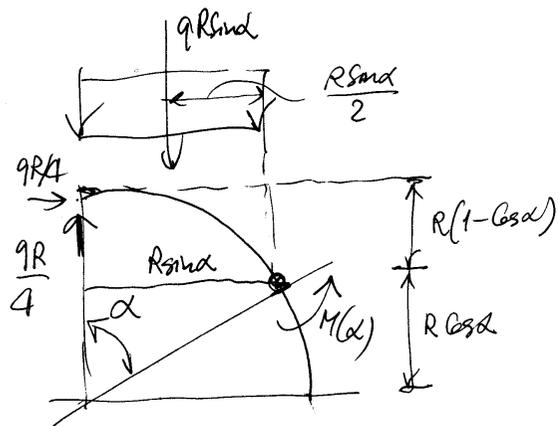
1. Risolvere la struttura;
2. Impostare il calcolo dello spostamento orizzontale della sezione C utilizzando il principio dei lavori virtuali (disegnare la struttura fittizia e la struttura reale; dire chi, tra la struttura fittizia e la struttura reale, rappresenta lo schema delle forze e chi quello degli spostamenti; scrivere in modo formale le espressioni dei lavori virtuali esterno ed interno relativi al caso di struttura inflessa, indicando chi sono le varie quantità che intervengono);
3. Calcolare il momento flettente nella sezione D, posto a metà del tratto CB;
4. Disegnare il diagramma qualitativo del momento flettente, riportandolo sulla linea d'asse in direzione radiale dalla parte delle fibre tese (aiuto: basarsi sulla curva delle pressioni oppure sulla curva delle pressioni per il tratto AC e sul risultato del punto precedente per il tratto CB).





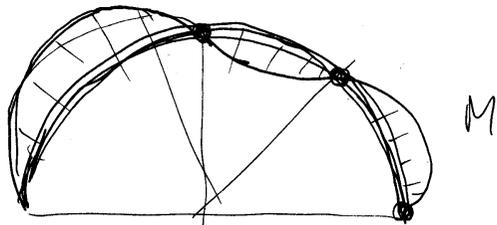
$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{qR}{4} \frac{R}{\sqrt{2}} + \frac{qR}{4} R \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - q \frac{R}{\sqrt{2}} \left(\frac{R}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4}\right) qR^2 = 0$$

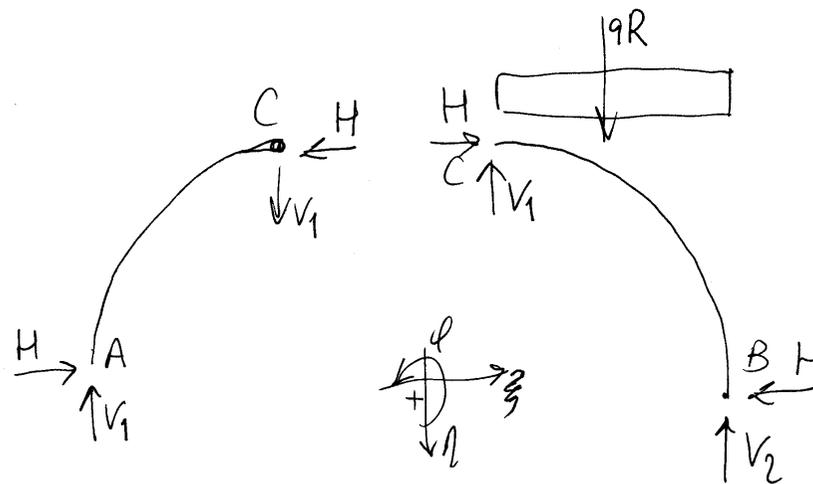


$$M(\alpha) = -\frac{qR^2}{2} \sin^2 \alpha + \frac{qR^2}{4} (\sin \alpha + 1 - \cos \alpha)$$

$$M\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{qR^2}{2} \frac{1}{2} + \frac{qR^2}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$



$$\alpha \text{ piccolo} : -\frac{qR^2}{2} \alpha^2 + \frac{qR^2}{4} \alpha = \frac{qR^2}{4} \alpha (-2\alpha + 1) > 0$$



Rotazione AC : $HR - V_1 R = 0 \Rightarrow V_1 = H$

Rotazione BC
Polo B : $-HR - V_1 R + \frac{qR^2}{2} = 0$

$$\Rightarrow -2HR + \frac{qR^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow H = V_1 = \frac{qR^2}{4}$$

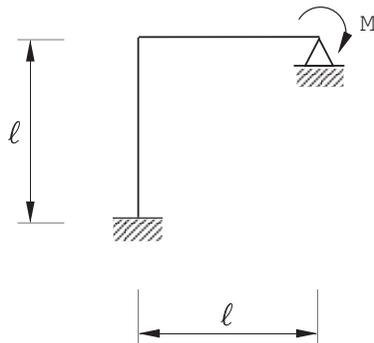
Equilibrio
verticale BC : $-V_1 - V_2 + qR = 0$

$$\Rightarrow -\frac{qR^2}{4} - V_2 + qR = 0$$

$$\Rightarrow V_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\right) qR = \frac{3}{4} qR$$

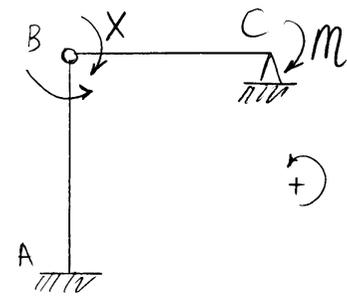
ESERCIZI SU SISTEMI DI TRAVI IPERSTATICHE

5.1 Esercizio 66



- Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle forze
- Tracciare il diagramma del momento flettente e del taglio
- Disegnare la deformata elastica della struttura
- Disegnare la curva delle pressioni
- Risolvere la struttura iperstatica con il metodo delle deformazioni

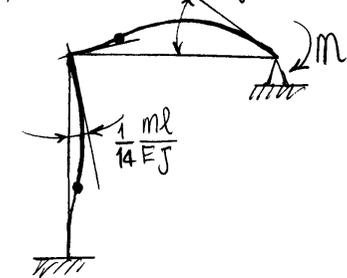
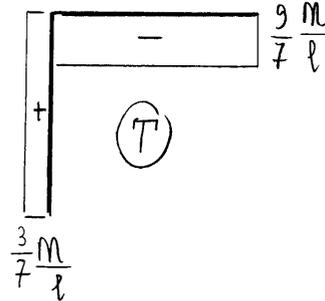
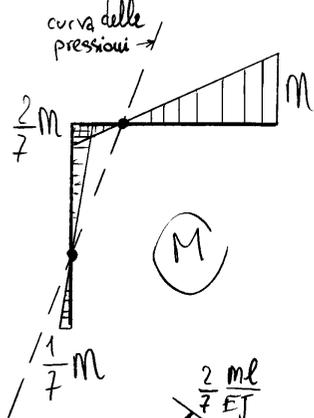
Metodo delle forze



Metodo delle forze

$$\frac{Xl}{4EJ} = -\frac{Xl}{3EJ} + \frac{Ml}{6EJ}$$

$$X = \frac{2}{7} M$$

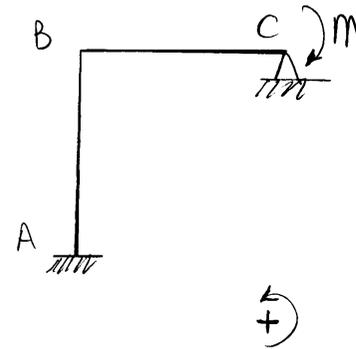


$$\varphi_B = \frac{ml}{6EJ} - \frac{(\frac{2}{7}M)l}{3EJ}$$

$$= \frac{1}{14} \frac{ml}{EJ}$$

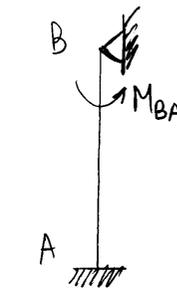
$$\varphi_C = -\frac{ml}{3EJ} + \frac{(\frac{2}{7}M)l}{6EJ} = -\frac{2}{7} \frac{ml}{EJ}$$

Metodo delle deformazioni



Metodo delle deformazioni

Inognita la rotazione φ_B del nodo B

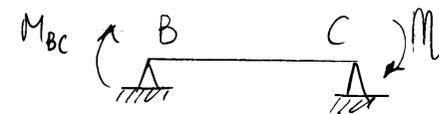


$$\varphi_B = \frac{M_{BA}l}{4EJ}$$

$$M_{BA} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B$$

Equilibrio nodo B

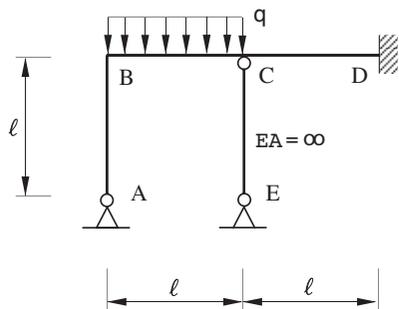
$$M_{BA} = M_{BC} \Rightarrow \varphi_B = \frac{Ml}{14EJ} \Rightarrow M_{BA} = \frac{2}{7} M$$



$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{M_{BC}l}{3EJ} + \frac{Ml}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{M_{BC}l}{6EJ} - \frac{Ml}{3EJ} \end{cases}$$

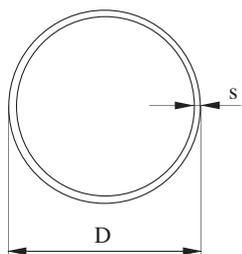
$$M_{BC} = -\frac{3EJ}{l} \varphi_B + \frac{M}{2}$$

5.2 Esercizio 67



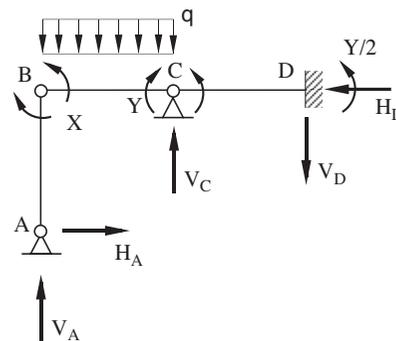
- a) Risolvere la struttura iperstatica
- b) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale
- c) Disegnare la deformata elastica della struttura, quotando le rotazioni dei nodi B e C
- d) Calcolare il carico q massimo compatibile con la resistenza a carico di punta del pendolo CE
- e) Disegnare la curva delle pressioni

Caratteristiche del pendolo CE



$l = 4.00\text{m}$
 Profilato cavo circolare
 76.1x5.0 UNI 7811
 Acciaio per carpenteria
 metallica tipo Fe360

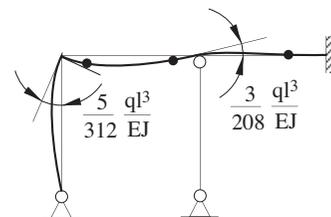
Metodo delle forze e deformata



$$\left\{ \begin{aligned} H_A = H_D &= \frac{5}{104} ql \\ V_A &= \frac{51}{104} ql \\ V_C &= \frac{31}{52} ql \\ V_D &= \frac{9}{104} ql \end{aligned} \right.$$

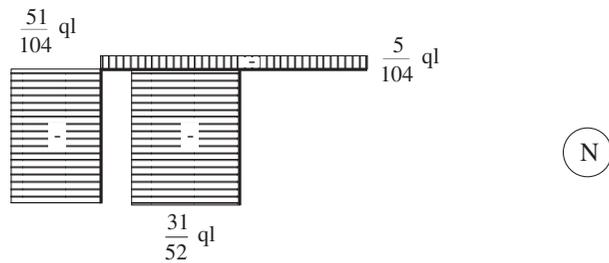
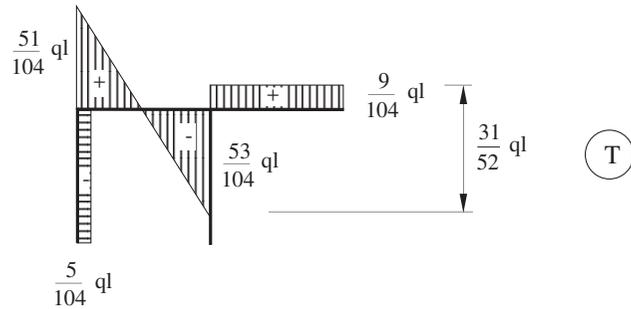
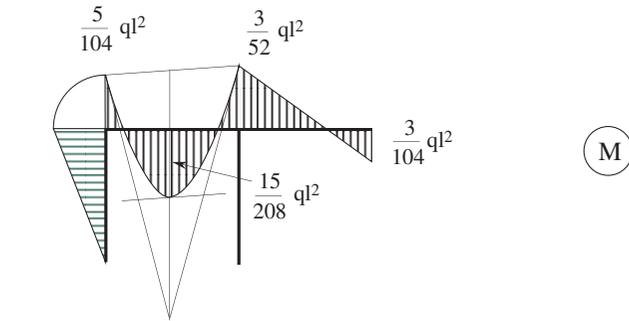
$$\left\{ \begin{aligned} \varphi_{BA} = \varphi_{BC} &\Rightarrow -\frac{Xl}{3EJ} = \frac{Xl}{3EJ} + \frac{Yl}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{CB} = \varphi_{CD} &\Rightarrow -\frac{Yl}{3EJ} - \frac{Xl}{6EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} = \frac{Yl}{4EJ} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} 16X + 4Y &= ql^2 \\ 4X + 14Y &= ql^2 \end{aligned} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{5}{104} ql^2 \\ Y &= \frac{3}{52} ql^2 \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \varphi_B &= -\frac{5}{312} \frac{ql^3}{EJ} \\ \varphi_C &= \frac{3}{208} \frac{ql^3}{EJ} \end{aligned} \right.$$



• = punti di flesso

Diagrammi del momento flettente, del taglio e della forza normale

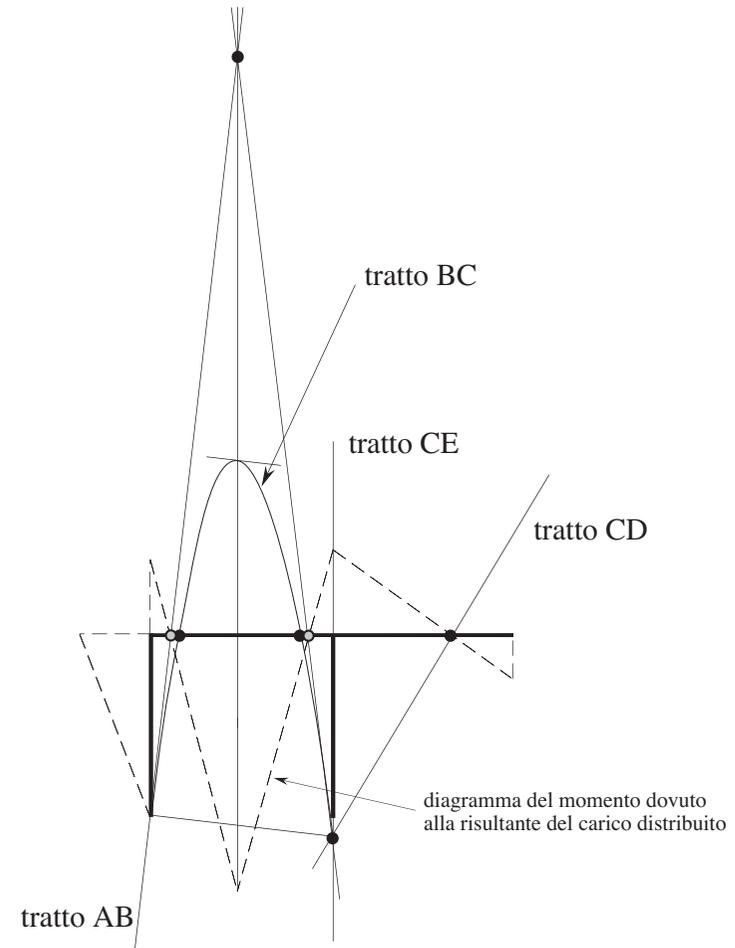


Carico massimo e curva delle pressioni

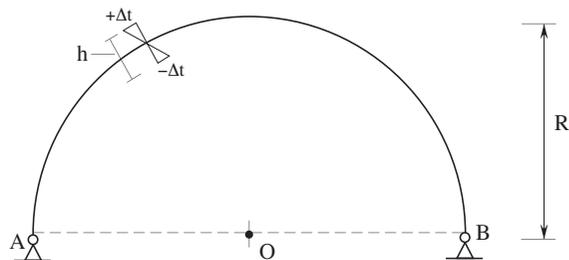
$$i=2.520\text{cm} \Rightarrow \lambda=400/2.520=159 \Rightarrow \omega=3.30$$

acciaio Fe360, spessore minore di 40mm: $\sigma_{adm}=160\text{N/mm}^2$

$$\omega \frac{31}{52} q_{max} \ell = \sigma_{adm} \quad A=11.17\text{cm}^2 \Rightarrow q_{max} = 22.7 \text{ N/mm} = 2270\text{Kg/m}$$

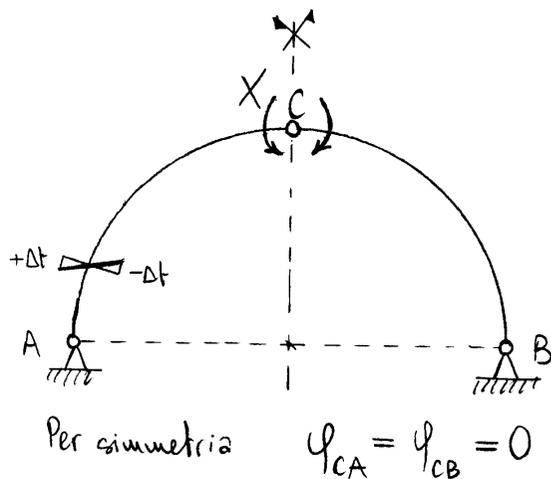


5.3 Esercizio 68



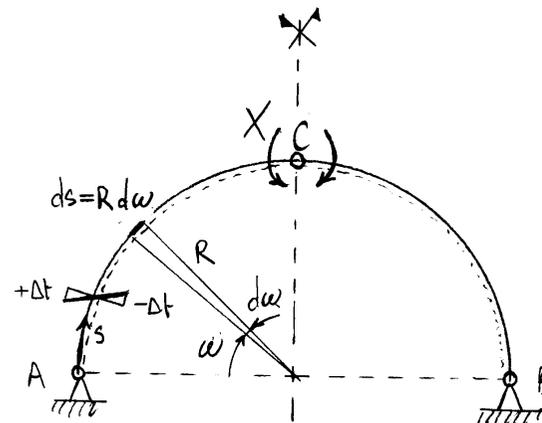
- a) Risolvere la struttura iperstatica
- b) Scrivere le equazioni del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale e disegnare i relativi diagrammi, usando quale fondamentale la linea AB orizzontale
- c) Verificare le equazioni indefinite di equilibrio

Metodo delle forze

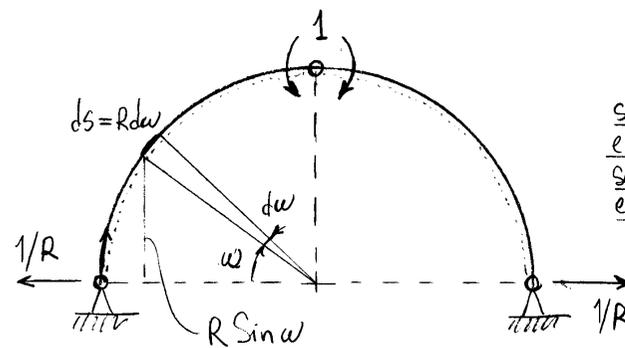


Principio dei lavori virtuali

Calcolo di φ_{CA} con il principio dei lavori virtuali



(r)
schema degli spostamenti e deformazioni congruenti



(f)
schema delle forze e caratteristiche della sollecitazione equilibrata

$$\begin{cases} M^{(f)} = \frac{1}{R} R \sin \omega = \sin \omega \\ K^{(r)} = X \frac{M^{(f)}}{EJ} - \frac{2\alpha \Delta t}{h} \end{cases}$$

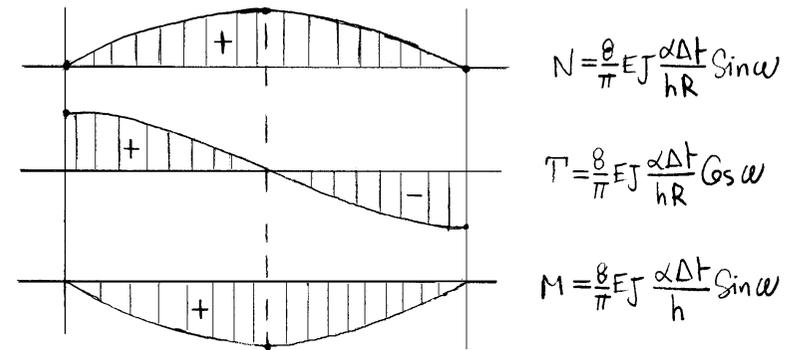
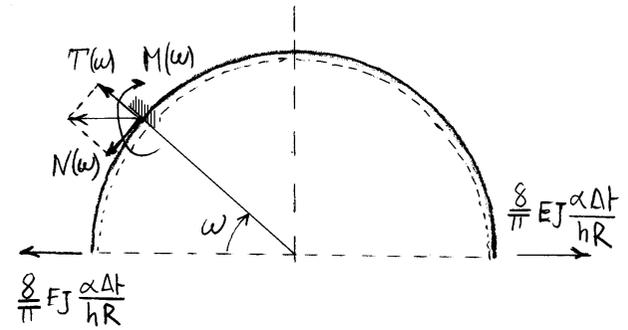
$$\int_0^{\pi/2} M^{(F)} \left\{ X \frac{M^{(F)}}{EJ} - \frac{2\alpha\Delta t}{h} \right\} R d\omega = 0$$

$$\frac{XR}{EJ} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \omega d\omega - 2\alpha\Delta t \frac{R}{h} = 0$$

$$\frac{XR}{EJ} \left[\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{4}\sin 2\omega \right]_0^{\pi/2} = 2\alpha\Delta t \frac{R}{h}$$

$$X = \frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h}$$

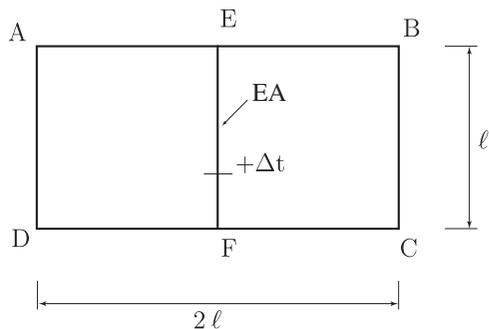
Diagrammi e verifica delle equazioni indefinite di equilibrio



Equazioni indefinite di equilibrio (carichi distribuiti nulli):

$$\begin{cases} \frac{dN}{ds} - \frac{1}{R} T = 0 & \frac{dN}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dN}{d\omega} = \frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{hR^2} \cos \omega \\ \frac{dT}{ds} + \frac{1}{R} N = 0 & \frac{dT}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dT}{d\omega} = -\frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{hR^2} \sin \omega \\ \frac{dM}{ds} - T = 0 & \frac{dM}{ds} = \frac{1}{R} \frac{dM}{d\omega} = \frac{8}{\pi} EJ \frac{\alpha\Delta t}{hR} \cos \omega \end{cases}$$

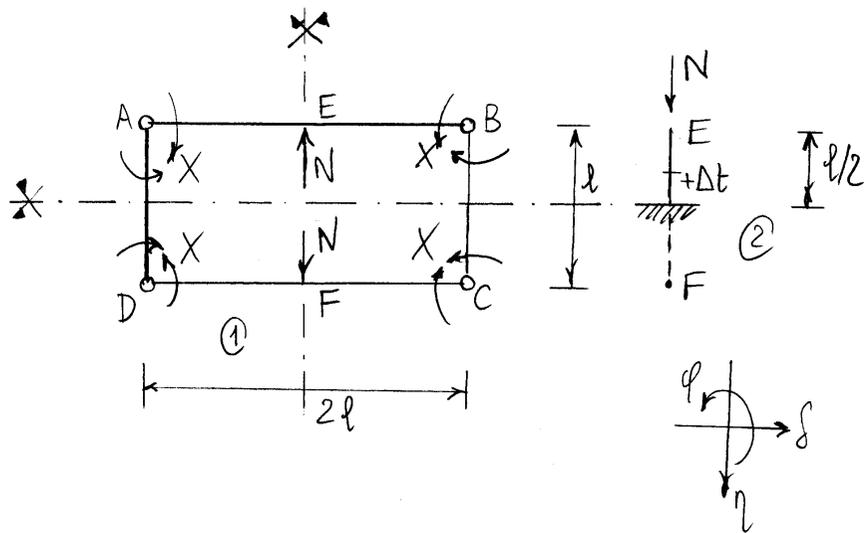
5.4 Esercizio 69



Risolvere la struttura assegnata, soggetta ad una variazione termica uniforme sul ritto EF, tenendo conto della deformabilità assiale di tale ritto.

Disegnare i diagrammi del momento, del taglio e dello sforzo normale.

Disegnare la deformata della struttura.



Congruenza:

$$\varphi_{AD}^{(1)} = \varphi_{AB}^{(1)} \Rightarrow \frac{Xl}{2EJ} = -\frac{X(2l)}{2EJ} + \frac{N(2l)^2}{16EJ}$$

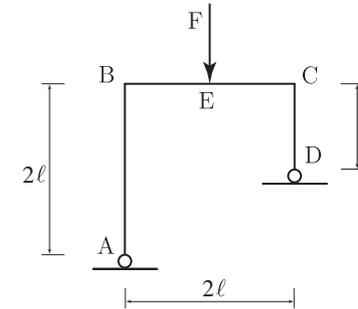
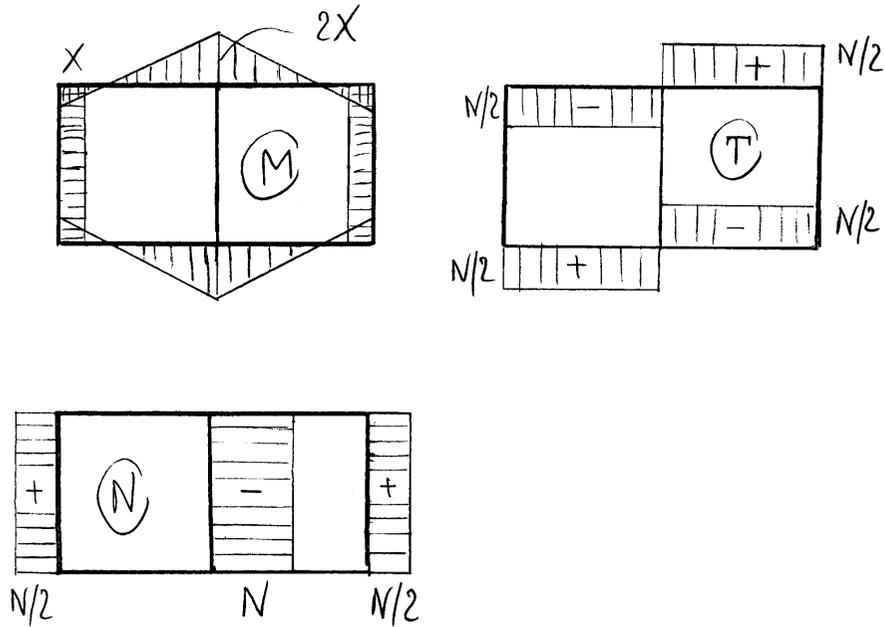
$$l_E^{(1)} = l_E^{(2)} \Rightarrow \frac{X(2l)^2}{8EJ} - \frac{N(2l)^3}{48EJ} = \frac{N(l/2)}{EA} - \alpha\Delta t \frac{l}{2}$$

$$\left\{ \begin{aligned} X &= Nl/6 \\ \frac{4Nl^3}{48EJ} - \frac{8Nl^3}{48EJ} &= \frac{Nl}{2EA} - \alpha\Delta t \frac{l}{2} \end{aligned} \right.$$

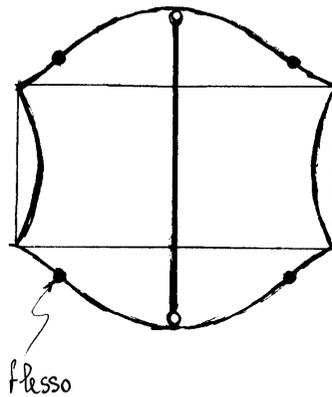
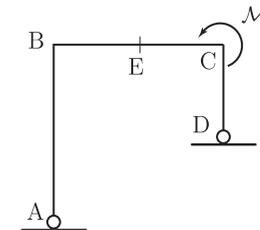
$$\frac{Nl^3}{12EJ} + \frac{Nl}{2EA} = \alpha\Delta t \frac{l}{2}$$

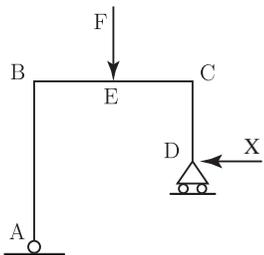
$$\left\{ \begin{aligned} N &= \frac{6EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l^2} \\ X &= \frac{EJ\alpha\Delta t}{\left(1 + \frac{6J}{Al^2}\right)l} \end{aligned} \right.$$

5.5 Esercizio 70



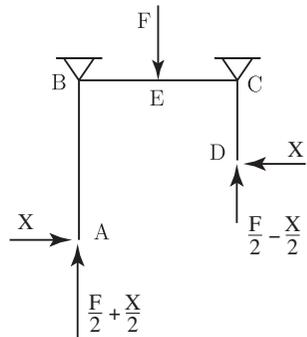
- 1) Risolvere la struttura iperstatica;
 - 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 - 3) Calcolare le rotazioni dei nodi B e C, lo spostamento orizzontale della travata e lo spostamento verticale del punto di applicazione del carico concentrato;
 - 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) disegnare la curva delle pressioni;
 - 6) Calcolare il lavoro di deformazione in funzione della forza concentrata F ;
 - 7) Assumendo quale zero dell'energia dei carichi esterni quella che si ha nella configurazione indeformata, calcolare il minimo dell'energia potenziale totale;
 - 8) Utilizzando il teorema di Betti, calcolare lo spostamento verticale del punto E di mezzeria della travata nel caso la struttura sia soggetta ad una coppia concentrata nel punto C, come illustrato qui di fianco.





Struttura principale isostatica

Congruenza: $\xi_D = 0$

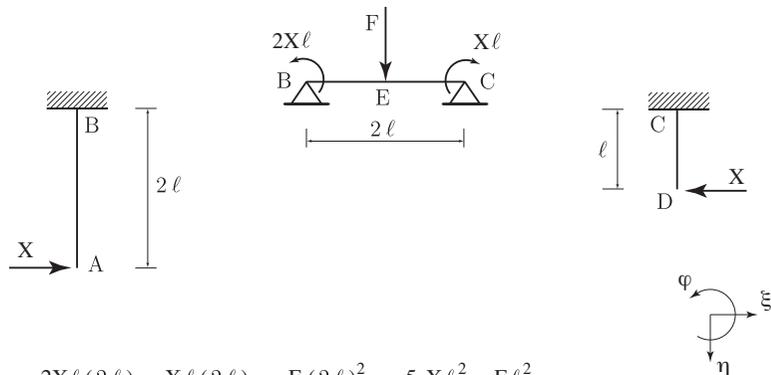
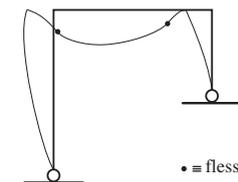
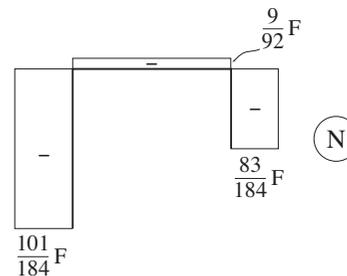


Struttura equivalente
(a meno di una traslazione orizzontale)

Congruenza: $\xi_D = \xi_A$

$$\xi_A = \xi_D \implies 6 \frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ} = -\frac{5}{3} \frac{Xl^3}{EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ} \implies \frac{23}{3} \frac{Xl^3}{EJ} = \frac{3}{4} \frac{Fl^3}{EJ}$$

$$X = \frac{9}{92} F$$

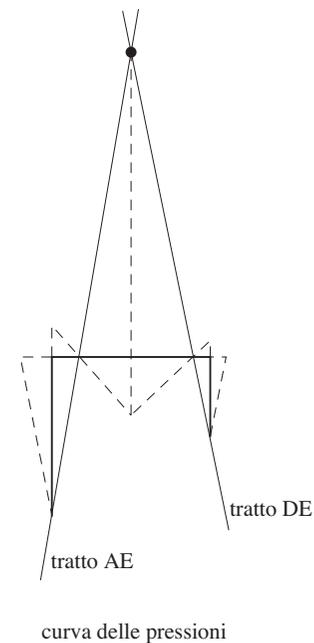
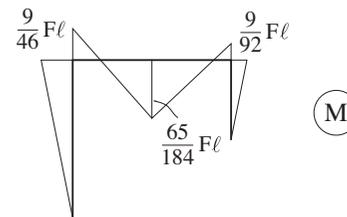
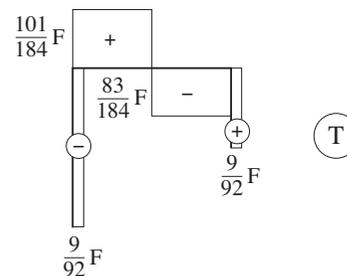


$$\varphi_B = \frac{2Xl(2l)}{3EJ} + \frac{Xl(2l)}{6EJ} - \frac{F(2l)^2}{16EJ} = \frac{5}{3} \frac{Xl^2}{EJ} - \frac{Fl^2}{4EJ}$$

$$\varphi_C = -\frac{2Xl(2l)}{6EJ} - \frac{Xl(2l)}{3EJ} + \frac{F(2l)^2}{16EJ} = -\frac{4}{3} \frac{Xl^2}{EJ} + \frac{Fl^2}{4EJ}$$

$$\xi_A = \frac{X(2l)^3}{3EJ} + \varphi_B(2l) = 6 \frac{Xl^3}{EJ} - \frac{Fl^3}{2EJ}$$

$$\xi_D = -\frac{Xl^3}{3EJ} + \varphi_C l = -\frac{5}{3} \frac{Xl^3}{EJ} + \frac{Fl^3}{4EJ}$$



Spostamenti e rotazioni:

$$\varphi_B = -\frac{2}{23} \frac{F\ell^2}{EJ}$$

$$\varphi_C = \frac{11}{92} \frac{F\ell^2}{EJ}$$

$$\xi_B = \xi_C = -\frac{2}{23} \frac{F\ell^3}{EJ}$$

$$\eta_E = -\frac{2X\ell(2\ell)^2}{16EJ} - \frac{X\ell(2\ell)^2}{16EJ} + \frac{F(2\ell)^3}{48EJ} = \frac{103}{1104} \frac{F\ell^3}{EJ} = .093 \frac{F\ell^3}{EJ}$$

Lavoro di deformazione (teorema di Clapeyron):

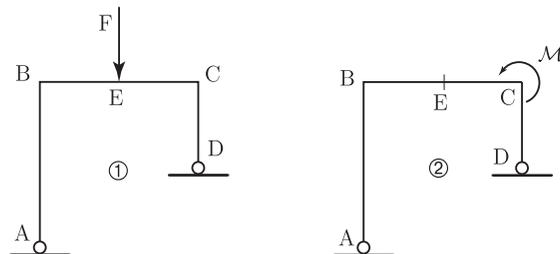
$$L_d = \frac{1}{2} F \eta_E = \frac{103}{2208} \frac{F^2\ell^3}{EJ} = .047 \frac{F^2\ell^3}{EJ}$$

Minimo dell'energia potenziale totale:

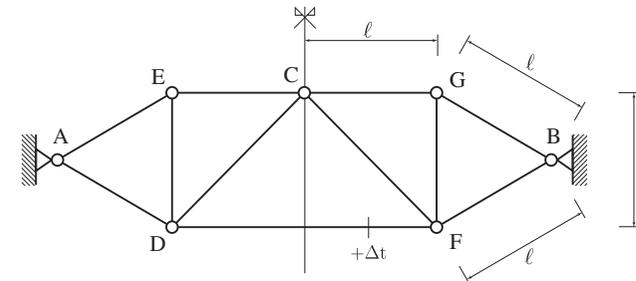
$$\Pi_{\min} = -F\eta_E + L_d = -\frac{1}{2} F\eta_E = -\frac{103}{2208} \frac{F^2\ell^3}{EJ} = -.047 \frac{F^2\ell^3}{EJ}$$

Spostamento verticale del punto E dovuto alla coppia \mathcal{M} applicata in C (teorema di Betti):

$$F\eta_E^{\textcircled{2}} = \mathcal{M}\varphi_C^{\textcircled{1}} \implies \eta_E^{\textcircled{2}} = \frac{11}{92} \frac{\mathcal{M}\ell^2}{EJ}$$



5.6 Esercizio 71



- 1) Risolvere la struttura iperstatica illustrata soggetta ad una variazione termica uniforme nell'asta DF, supponendo che tutte le aste abbiano area uguale;
- 2) Compilare una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
- 3) Calcolare lo spostamento verticale del nodo C;
- 4) Valutare la variazione termica minima che rende instabile per flessione laterale l'asta DF, supponendo che le cerniere in corrispondenza dei nodi siano sferiche (i valori numerici necessari per il calcolo sono riportati di seguito).
- 5) Disegnare la deformata elastica della struttura;

Valori numerici (da utilizzare esclusivamente per il quesito no 4):

$$\ell = 2.00\text{m}$$

$$\alpha = 0.000012\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

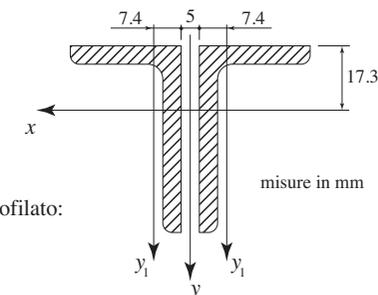
2 Profilati accoppiati
L UNI EU 57 - 50x30x5

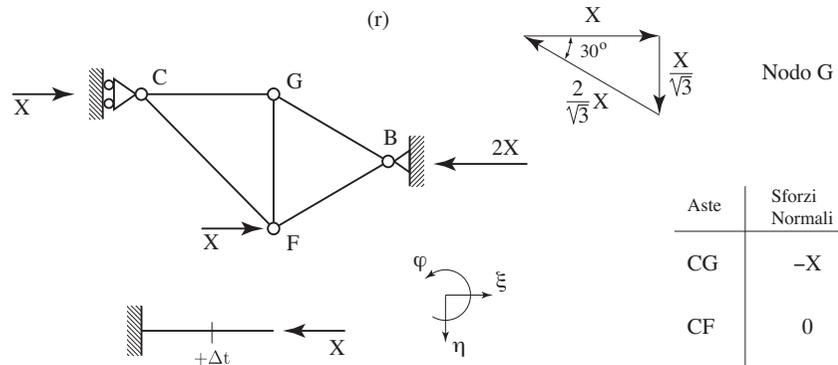
Valori relativi al singolo profilato:

$$A = 3.78\text{ cm}^2$$

$$J_x = 9.36\text{ cm}^4$$

$$J_{y_1} = 2.51\text{ cm}^4$$

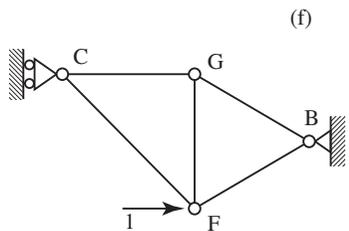




Struttura principale isostatica

Congruenza: $\xi_F = \alpha \Delta t \ell - \frac{X \ell}{EA}$

Aste	Sforzi Normali
CG	$-X$
CF	0
GF	$\frac{X}{\sqrt{3}}$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}X$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}X$

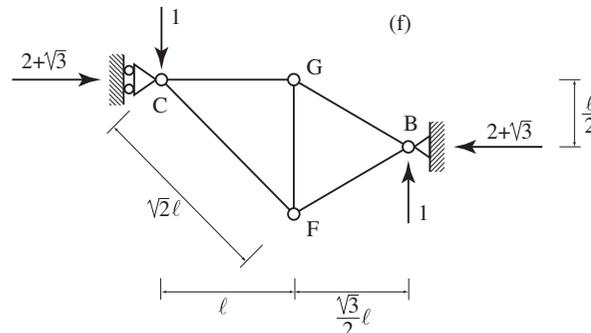


Schema delle forze per il calcolo dello spostamento ξ_F con il principio dei lavori virtuali

Aste	Sforzi Normali
CG	-1
CF	0
GF	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$

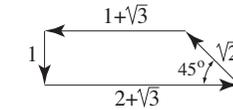
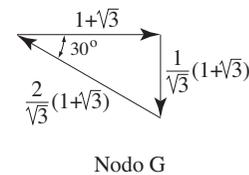
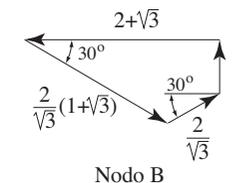
$L_e = \xi_F, \quad L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} \ell_h}{EA} = \frac{X \ell}{EA} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} \right) = 4 \frac{X \ell}{EA}$

Congruenza: $4 \frac{X \ell}{EA} = \alpha \Delta t \ell - \frac{X \ell}{EA} \implies X = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t$



Schema delle forze per il calcolo dello spostamento η_C con il principio dei lavori virtuali

Aste	Sforzi Normali
CG	$-(1+\sqrt{3})$
CF	$-\sqrt{2}$
GF	$\frac{1}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BG	$-\frac{2}{\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})$
BF	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$



$L_e = \eta_C$

$L_i = \sum_h N_h^{(f)} \frac{N_h^{(r)} \ell_h}{EA} = \frac{X \ell}{EA} \left\{ (1+\sqrt{3}) + \frac{1}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\}$
 $= \frac{X \ell}{EA} \left\{ \frac{8}{3}(1+\sqrt{3}) + \frac{4}{3} \right\} = \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \frac{X \ell}{EA}$

$\eta_C = \frac{1}{5} \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}} \right) \alpha \Delta t \ell$

Aste	Tipo	Sforzi Normali (a meno di $EA\alpha\Delta t$)
CG	Puntone	$\frac{1}{5}$
CF	=====	0
GF	Tirante	$\frac{1}{5\sqrt{3}}$
BG	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
BF	Puntone	$\frac{2}{5\sqrt{3}}$
DF	Puntone	$\frac{1}{5}$

$\ell = 2.00\text{m}$
 $\alpha = 0.000012\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

2 Profilati accoppiati
 L UNI EU 57 - 50x30x5

Valori relativi al singolo profilato:

$A = 3.78\text{ cm}^2$
 $J_x = 9.36\text{ cm}^4$
 $J_{y1} = 2.51\text{ cm}^4$

Valori relativi ai due profilati accoppiati:

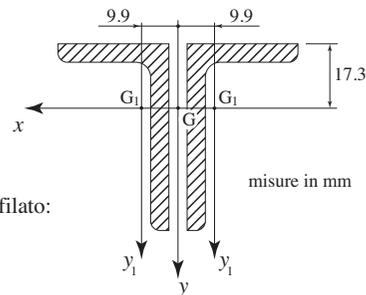
$A = 2 \times 3.78 = 7.56\text{ cm}^2$
 $J_x = 2 \times 9.36 = 18.7\text{ cm}^4$
 $J_y = 2 \times (2.51 + 3.78 \times 0.99^2) = 12.4\text{ cm}^4$

Equazione determinatrice della variazione critica di temperatura:

$$\pi^2 \frac{EJ_y}{(2\ell)^2} = \frac{1}{5} EA \alpha \Delta t_{cr}$$

$$\Delta t_{cr} = \frac{5}{4} \frac{\pi^2 J_y}{\alpha \ell^2 A} = \frac{5 \times \pi^2 \times 12.4}{4 \times 0.000012 \times (200)^2 \times 7.56}$$

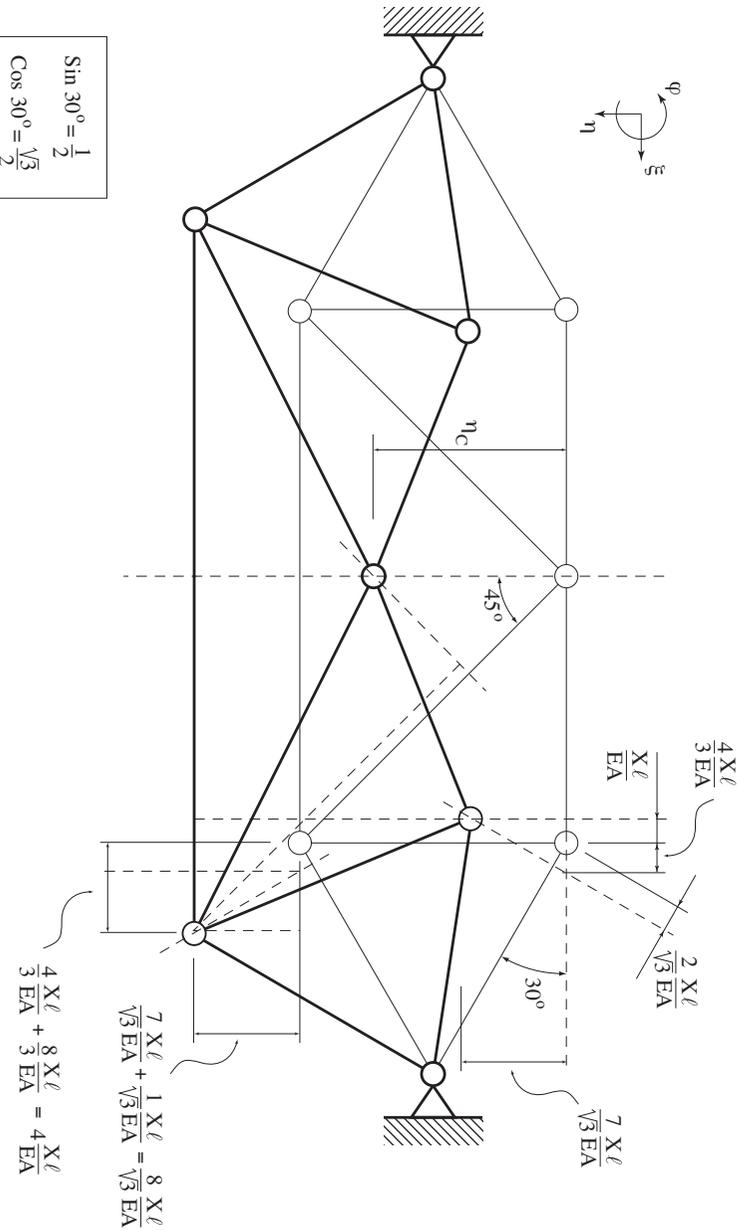
$\Delta t_{cr} = 42\text{ }^\circ\text{C}$



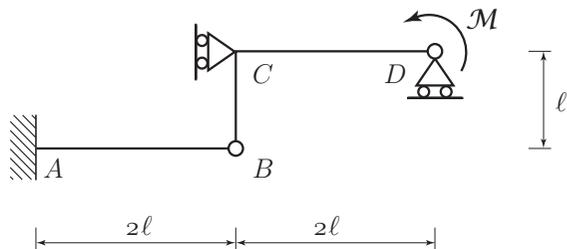
$$\begin{aligned} \sin 30^\circ &= \frac{1}{2} \\ \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\frac{\eta_c}{12} = \frac{4}{12} \frac{X\ell}{EA} + \frac{8}{12\sqrt{3}} \frac{X\ell}{EA} \implies$$

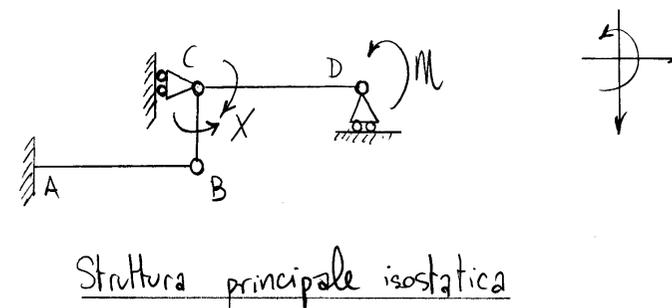
$$\eta_c = \left(4 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \frac{X\ell}{EA}$$



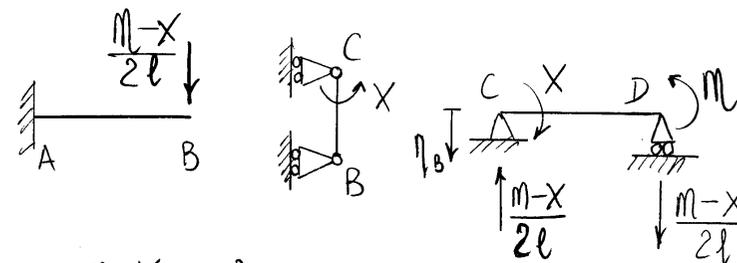
5.7 Esercizio 72



- 1) Risolvere la struttura una volta iperstatica con il metodo delle forze, utilizzando il metodo cinematico per la scrittura dell'equazione di congruenza;
- 2) Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni e disegnare la curva delle pressioni;
- 3) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) Calcolare la rotazione e lo spostamento verticale del nodo C;
- 6) Calcolare la rigidezza alla rotazione del nodo D;
- 7) Risolvere la struttura utilizzando il principio dei lavori virtuali per la scrittura dell'equazione di congruenza.



Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CB}$

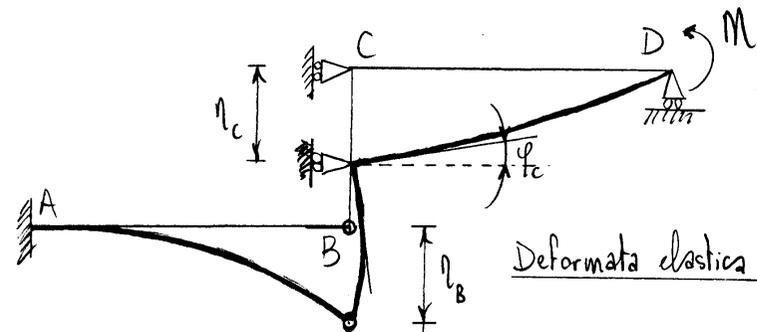
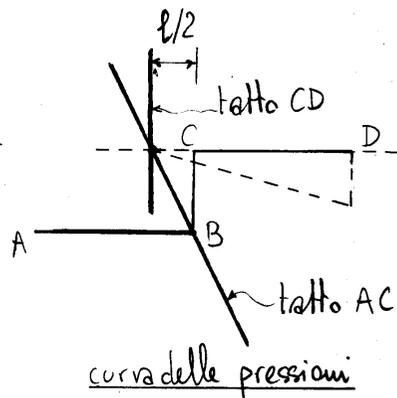
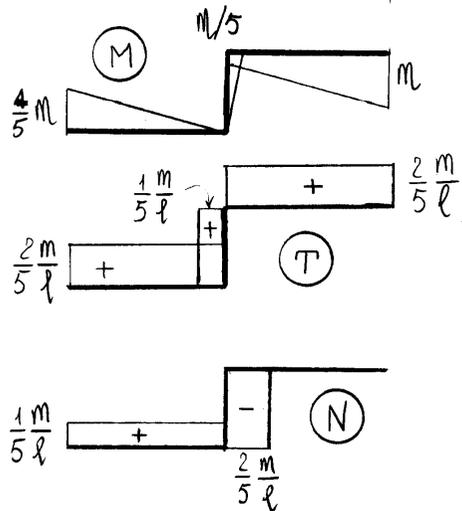
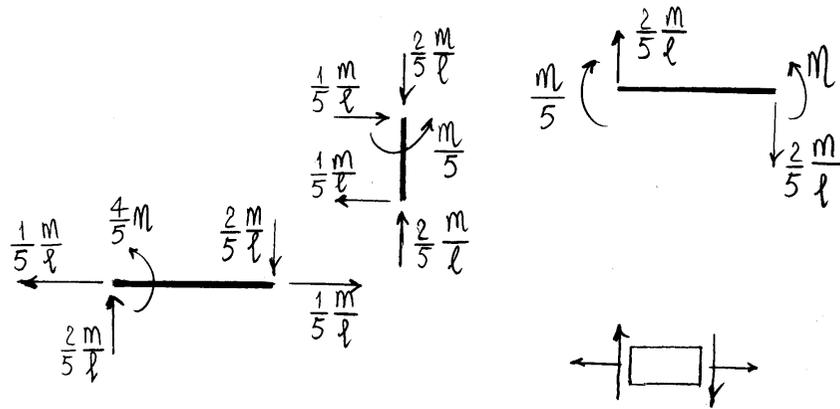


$$\left\{ \begin{aligned} \eta_B &= \frac{\frac{M-X}{2l} (2l)^3}{3EJ} \\ \varphi_{CB} &= \frac{Xl}{3EJ} \\ \varphi_{CD} &= -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{M(2l)}{6EJ} + \frac{\eta_B}{2l} \end{aligned} \right.$$

Equazione risolvente:

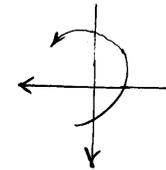
$$-\frac{2 \times l}{3 EJ} - \frac{1 \times ml}{3 EJ} + \frac{2 \times ml}{3 EJ} - \frac{2 \times l}{3 EJ} = \frac{1 \times l}{3 EJ}$$

$$\frac{5}{3} X = \frac{1}{3} M \Rightarrow X = \frac{1}{5} M$$



$$\eta_c = \eta_b = \frac{\frac{2}{5} \frac{M}{l} (2l)^3}{3 EJ} = \frac{16}{15} \frac{M l^2}{EJ}$$

$$\varphi_c = \frac{(M/5) l}{3 EJ} = \frac{1}{15} \frac{M l}{EJ}$$

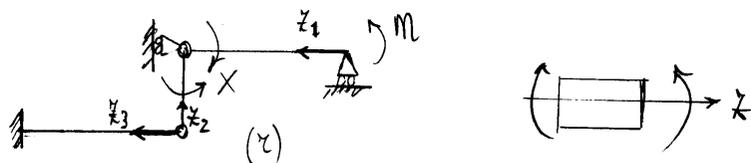


La rigidezza alla rotazione K_D rappresenta la coppia che occorre applicare in D per ottenere la rotazione unitaria:

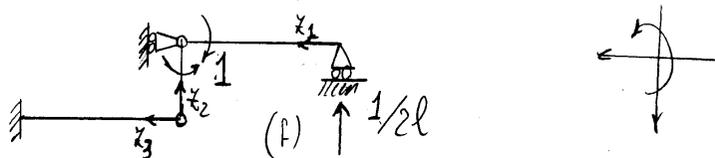
$$\varphi_D = \frac{M(2l)}{3 EJ} + \frac{(M/5)(2l)}{6 EJ} + \frac{\eta_c}{2l} = \frac{19}{15} \frac{M l}{EJ}$$

$$K_D = \frac{15 EJ}{19 l}$$

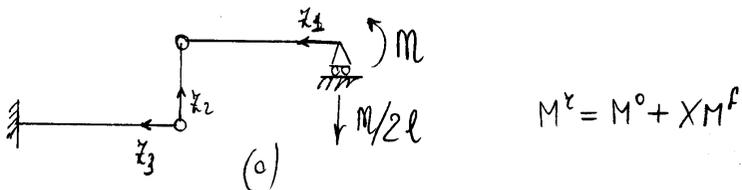
Principio dei lavori virtuali



struttura principale (spostamenti-deformazioni)



schema delle forze-caratteristiche della sollecitazione

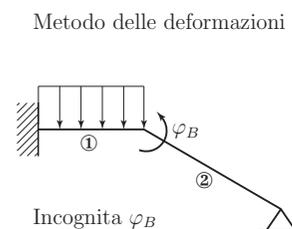
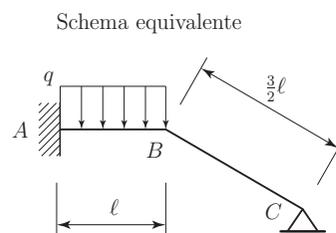
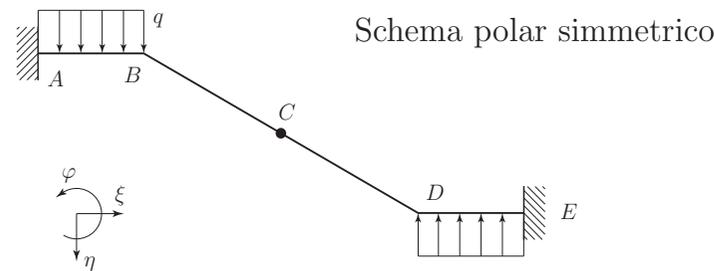
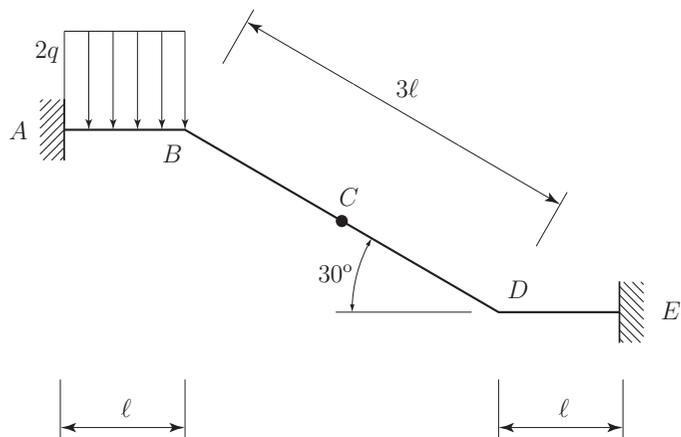


schema dei carichi

$$\left\{ \begin{array}{l} M^f(z_1) = -\frac{1}{2l} z_1 \\ M^o(z_1) = \frac{M}{2l} z_1 - M \\ M^v(z_1) = \frac{M-X}{2l} z_1 - M \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} M^f(z_2) = \frac{1}{l} z_2 \\ M^o(z_2) = 0 \\ M^v(z_2) = \frac{X}{l} z_2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} M^f(z_3) = -\frac{1}{2l} z_3 \\ M^o(z_3) = \frac{M}{2l} z_3 \\ M^v(z_3) = \frac{M-X}{2l} z_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \varphi_{CB} - \varphi_{CD} \\ L_{vi} &= \int_0^{2l} \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{M}{2l} z_1 - \frac{M-X}{4l^2} z_1^2 \right\} dz_1 \\ &+ \int_0^l \frac{X}{EJl^2} z_2^2 dz_2 \\ &- \int_0^{2l} \frac{M-X}{EJ4l^2} z_3^2 dz_3 \\ &= \frac{1}{EJ} \left\{ \frac{M}{4l} (2l)^2 - \frac{M-X}{12l^2} (2l)^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{X}{3l^2} l^3 - \frac{M-X}{12l^2} (2l)^3 \right\} \\ &= \frac{l}{EJ} \left\{ M - \frac{4}{3}(M-X) + \frac{1}{3}X \right\} \\ &= \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3}M + \frac{5}{3}X \right\} \\ L_{ve} = L_{vi} &\Rightarrow \varphi_{CB} - \varphi_{CD} = \frac{l}{EJ} \left\{ -\frac{1}{3}M + \frac{5}{3}X \right\} \end{aligned}$$

5.8 Esercizio 73



Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C, e in particolare:

- 1) Risolvere lo schema polar simmetrico con il metodo delle deformazioni;
- 2) Risolvere lo schema polar emisimmetrico con il metodo delle forze.

Per i due schemi polar simmetrico e polar emisimmetrico

- 1) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 2) Calcolare rotazione e spostamento verticale del nodo B e disegnare la deformata elastica;
- 3) Disegnare la curva delle pressioni.

Per lo schema complessivo

- 1) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale.

Rigidezze alla rotazione nodo B:

$$\begin{cases} K_B^{(1)} = \frac{4EJ}{l} \\ K_B^{(2)} = \frac{3EJ}{\frac{3}{2}l} = \frac{2EJ}{l} \end{cases} \Rightarrow K_B^{tot} = \frac{6EJ}{l}$$

Coefficienti di ripartizione:

$$\rho^{(1)} = \frac{2}{3} \quad \rho^{(2)} = \frac{1}{3}$$

Rotazione nodo B:

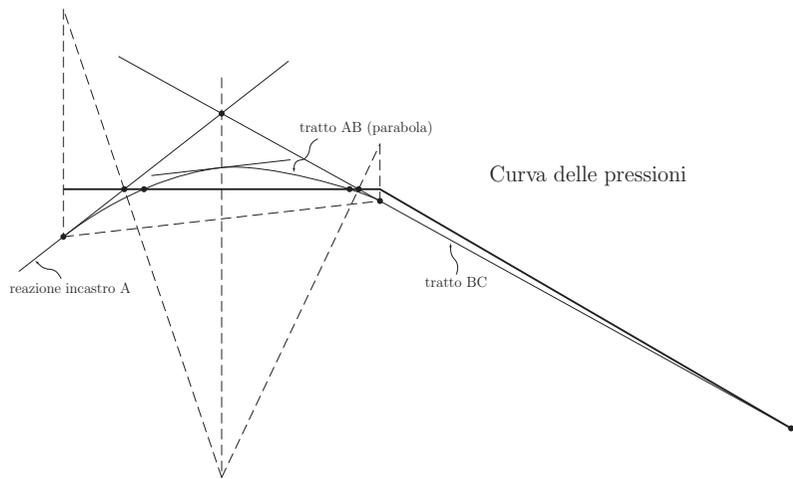
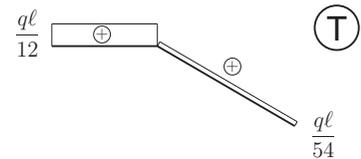
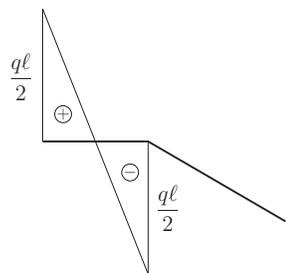
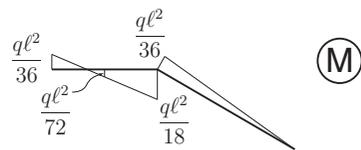
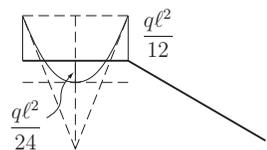
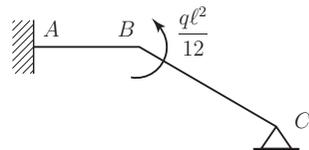
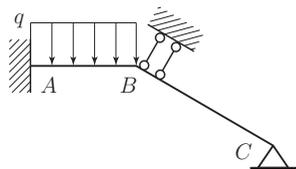
$$\frac{6EJ}{l} \varphi_B = \frac{q l^2}{12} \Rightarrow \varphi_B = \frac{q l^3}{72EJ}$$

Spostamento verticale nodo B:

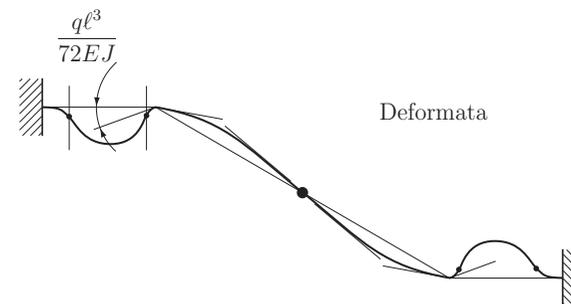
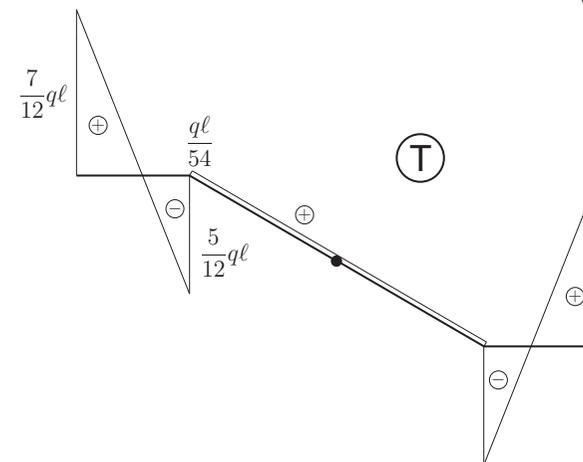
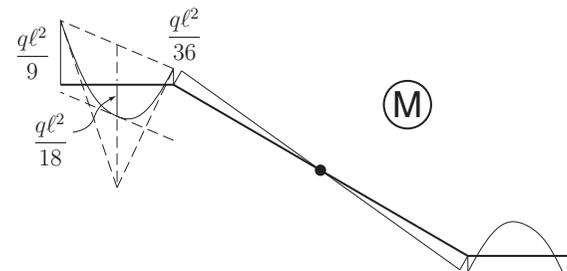
$$\eta_B = 0$$

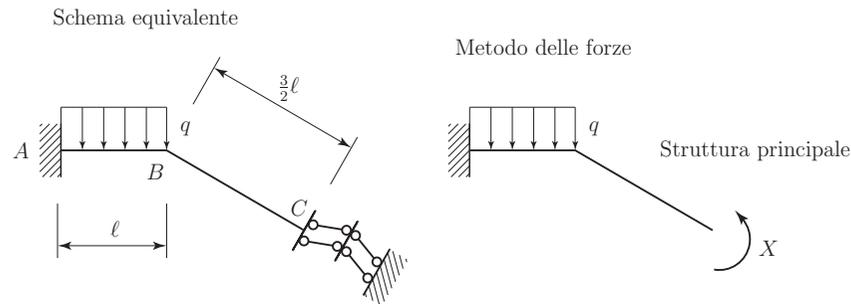
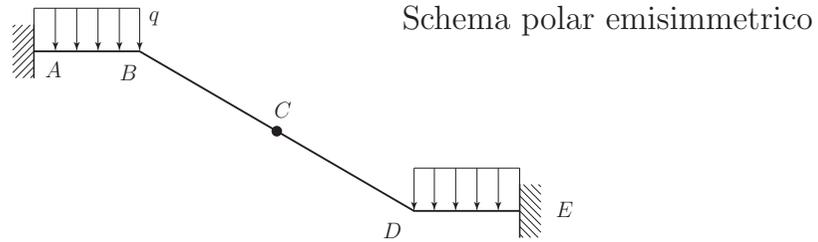
Incastro perfetto in B

Reazione di incastro perfetto cambiata di segno



diagrammi totali





Congruenza: $\varphi_C = 0$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{Xl}{EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \\ \varphi_C = \frac{X(\frac{3}{2}l)}{EJ} + \varphi_B = \frac{5Xl}{2EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} \end{cases}$$

$$\varphi_C = 0 \Rightarrow X = \frac{ql^2}{15}$$

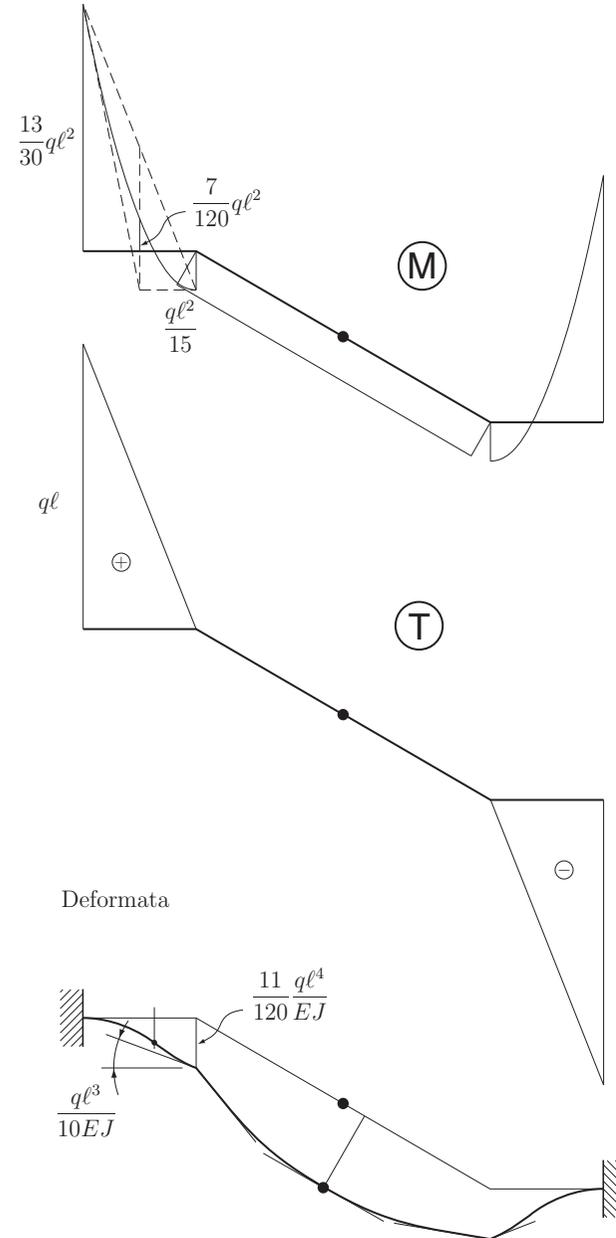
Rotazione nodo B:

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{15EJ} - \frac{ql^3}{6EJ} = -\frac{ql^3}{10EJ}$$

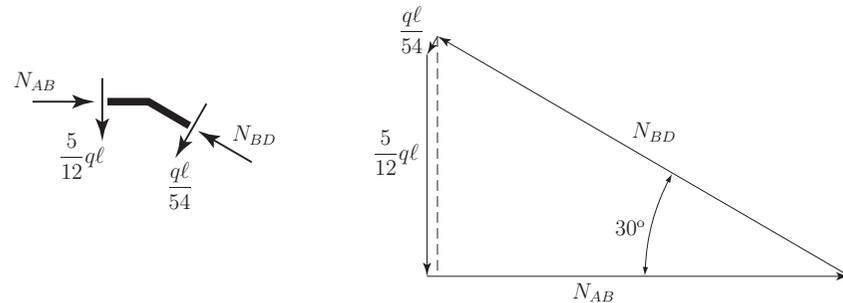
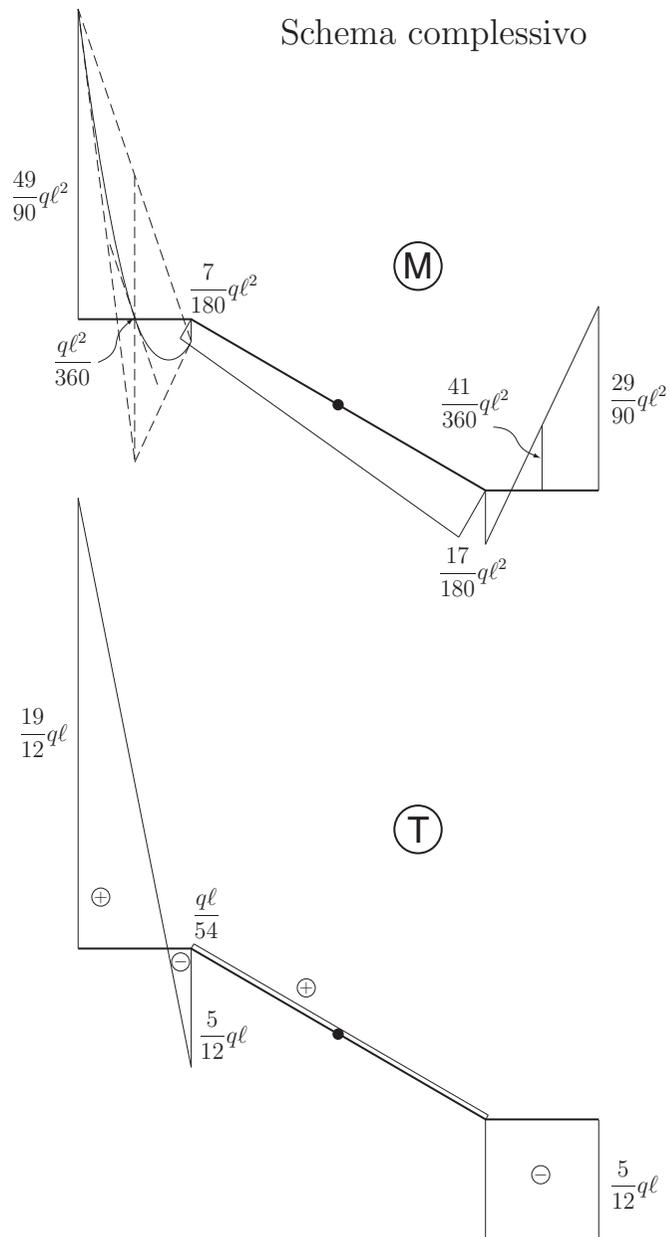
Spostamento verticale nodo B:

$$\eta_B = -\frac{Xl^2}{2EJ} + \frac{ql^4}{8EJ} = \frac{11}{120} \frac{ql^4}{EJ}$$

La curva delle pressioni degenera in un fascio di rette parallele nel tratto AB e non esiste nel tratto BC

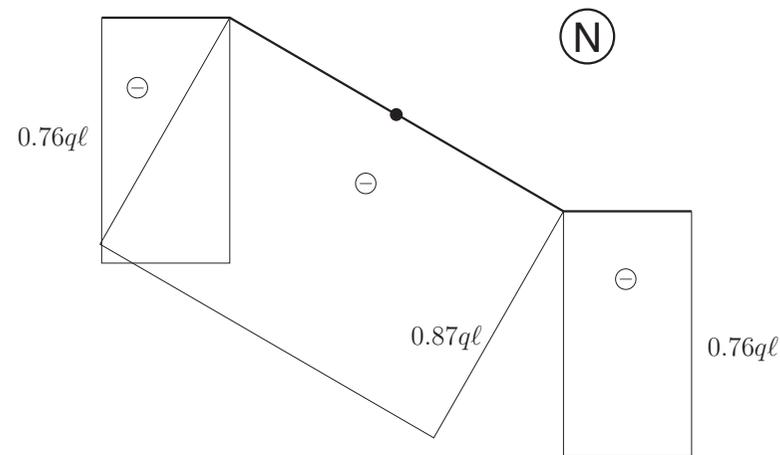


Schema complessivo

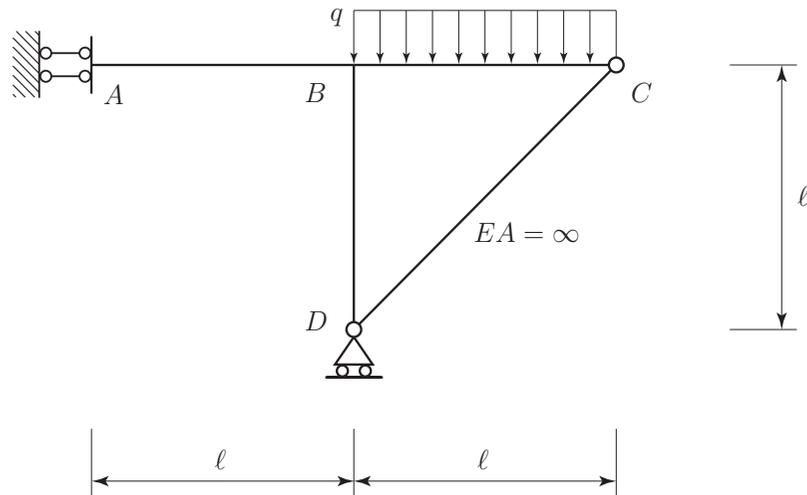


Equilibrio del nodo B per il calcolo della forza normale ($\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$):

$$\begin{cases} N_{BD} = \frac{q\ell}{\sin 30^\circ} \left(\frac{5}{12} + \frac{\cos 30^\circ}{54} \right) = \frac{45 + \sqrt{3}}{54} q\ell = 0.87q\ell \\ N_{AB} = N_{BD} \cos 30^\circ + \frac{q\ell}{54} \sin 30^\circ = \frac{4 + 45\sqrt{3}}{108} q\ell = 0.76q\ell \end{cases}$$



5.9 Esercizio 74

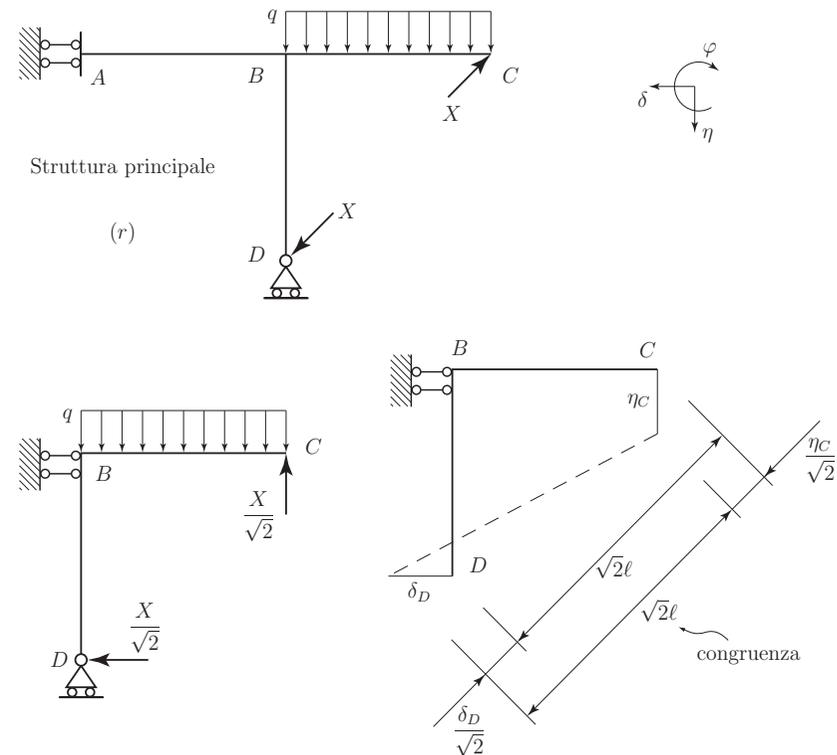


- 1) Analizzare cinematicamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura con il metodo delle forze, utilizzando, per il calcolo degli spostamenti che rientrano nell'equazione di congruenza, il metodo cinematico oppure il principio dei lavori virtuali a seconda delle preferenze personali;
- 3) Calcolare le reazioni interne ed esterne e disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) Individuare la curva delle pressioni;
- 6) Calcolare la rotazione del nodo B, gli spostamenti dei nodi C e D e la rotazione del pendolo CD;

Solo se si è risposto a tutte le domande precedenti:

- 7) Scrivere l'equazione di congruenza con il metodo non utilizzato al punto 2.

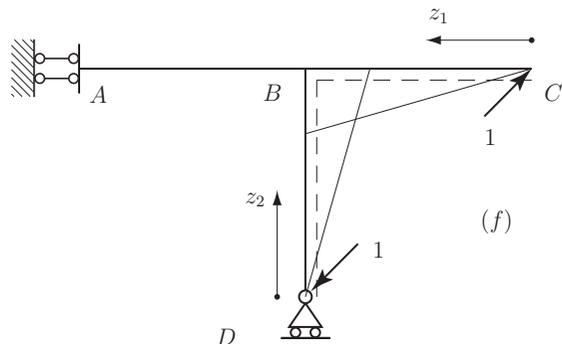
Tenuto conto dell'indeformabilità assiale del pendolo CD , la congruenza richiede che la distanza dei punti C e D resti pari a $\sqrt{2}\ell$ anche dopo la deformazione. Il punto B è un punto fisso e la sua rotazione non influisce sulla condizione di congruenza. Si può allora scrivere la condizione di congruenza facendo riferimento alla struttura con il nodo B vincolato a non ruotare.



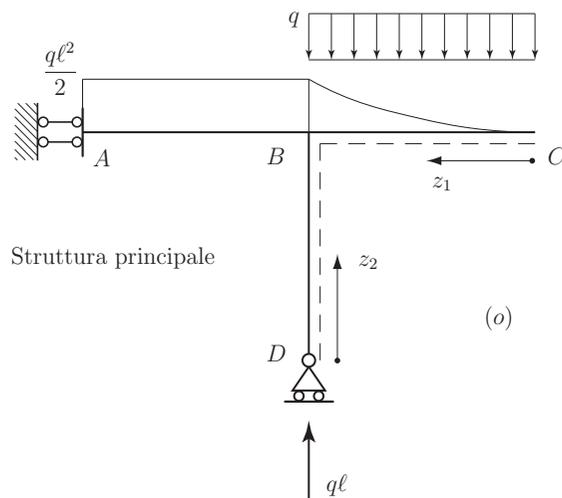
Congruenza: $\frac{\delta_D}{\sqrt{2}} = \frac{\eta_C}{\sqrt{2}}$ da cui: $\delta_D = \eta_C$

$$\begin{cases} \delta_D = \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} \\ \eta_C = -\frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} + \frac{q\ell^4}{8EJ} \end{cases} \Rightarrow 2 \frac{X}{\sqrt{2}} \frac{\ell^3}{3EJ} = \frac{q\ell^4}{8EJ} \Rightarrow X = \frac{3\sqrt{2}}{16} q\ell$$

Principio dei lavori virtuali



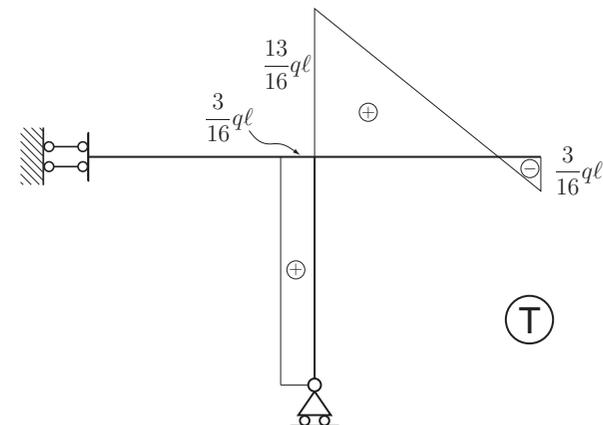
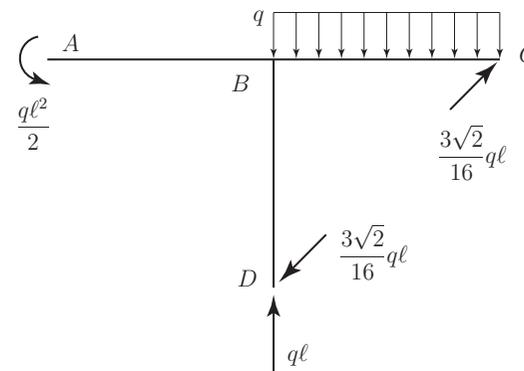
$$\begin{cases} M^f(z_1) = \frac{z_1}{\sqrt{2}} \\ M^f(z_2) = \frac{z_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$



Struttura principale

$$\begin{cases} M^o(z_1) = -\frac{qz_1^2}{\sqrt{2}} \\ M^o(z_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M^r(z_1) = \frac{X}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{qz_1^2}{\sqrt{2}} \\ M^r(z_2) = \frac{X}{\sqrt{2}}z_2 \end{cases}$$

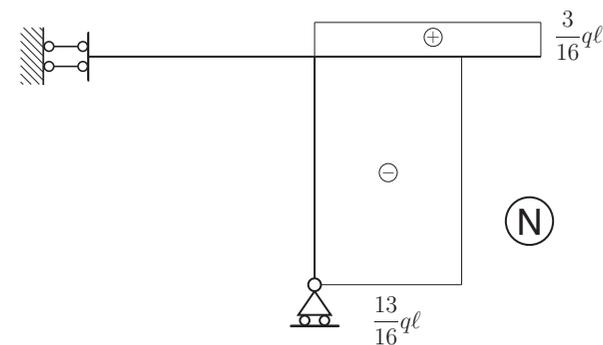


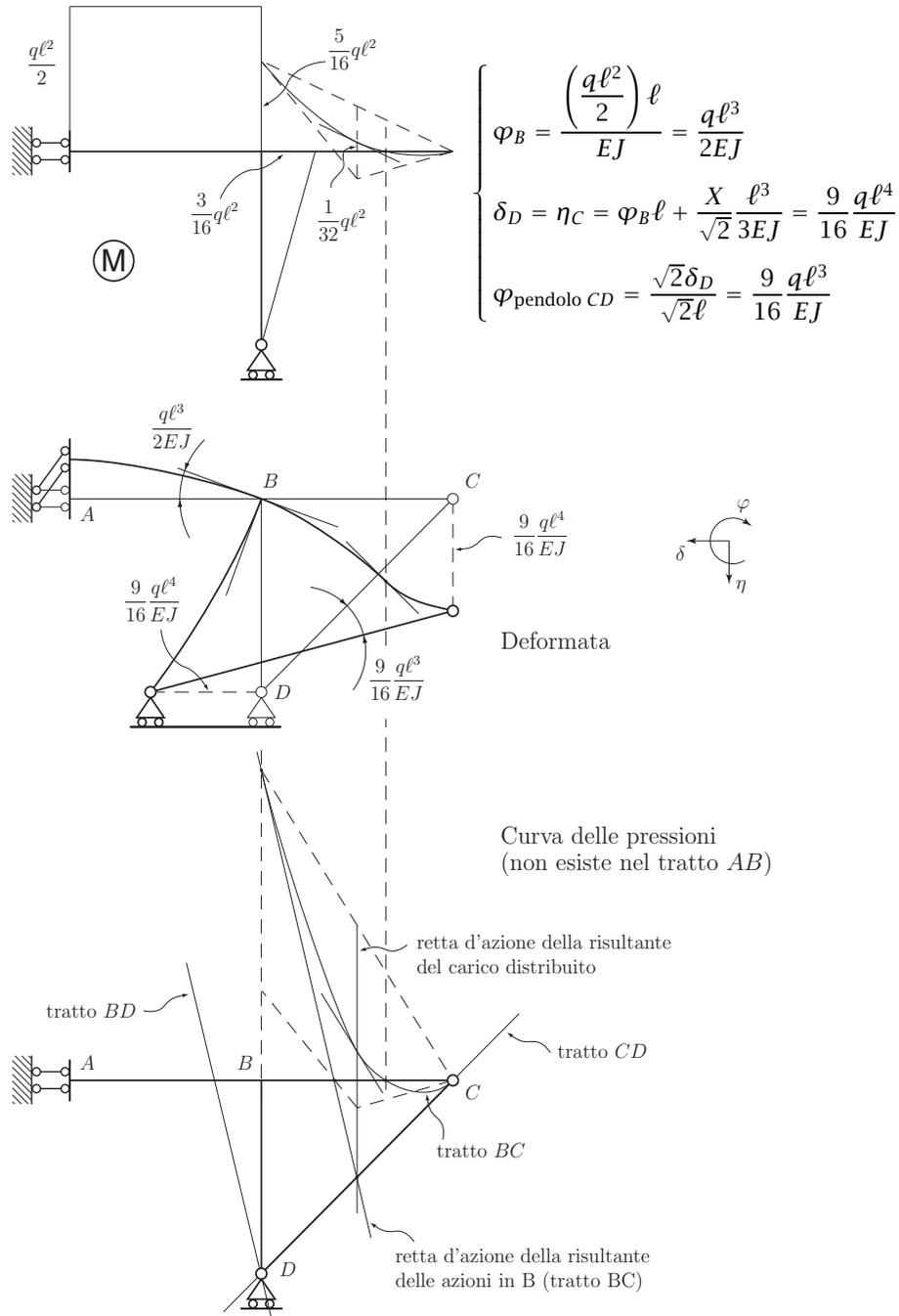
Congruenza:

$$\int_0^\ell \frac{z_1}{\sqrt{2}} \left(\frac{X}{\sqrt{2}}z_1 - \frac{qz_1^2}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{EJ} dz_1 + \int_0^\ell \frac{z_2}{\sqrt{2}} \frac{X}{\sqrt{2}}z_2 \frac{1}{EJ} dz_2 = 0$$

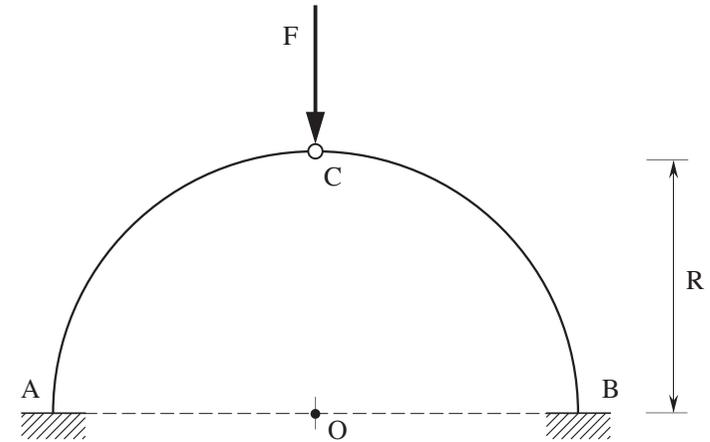
$$\Rightarrow 2 \frac{X}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^\ell - \frac{q}{2\sqrt{2}} \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^\ell = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X\ell^3}{3} = \frac{q\ell^4}{8\sqrt{2}} \Rightarrow X = \frac{3}{8\sqrt{2}}q\ell$$



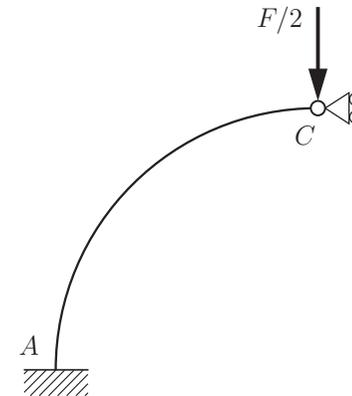


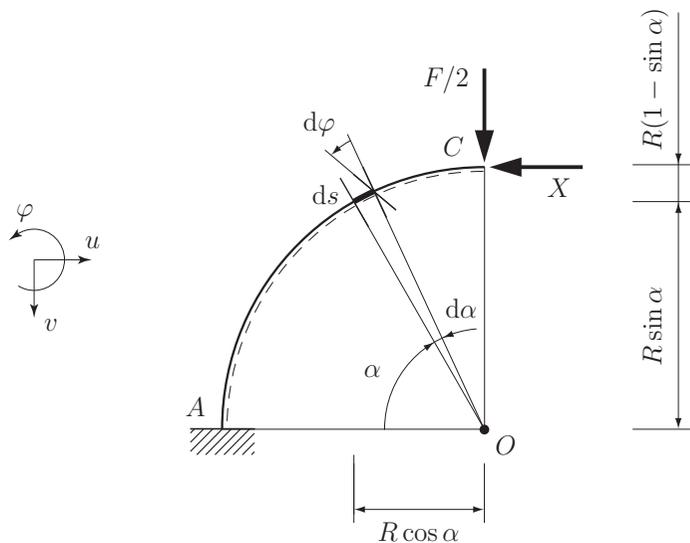
5.10 Esercizio 75



Risolvere la struttura iperstatica

Simmetria





Congruenza:

$$u_C = 0$$

Differenziale dello spostamento orizzontale di C:

$$d\phi = \frac{M}{EJ} R d\alpha$$

$$du_C = -d\phi R(1 - \sin \alpha)$$

Spostamento orizzontale di C:

$$u_C = - \int_0^{\pi/2} \frac{M}{EJ} R^2 (1 - \sin \alpha) d\alpha$$

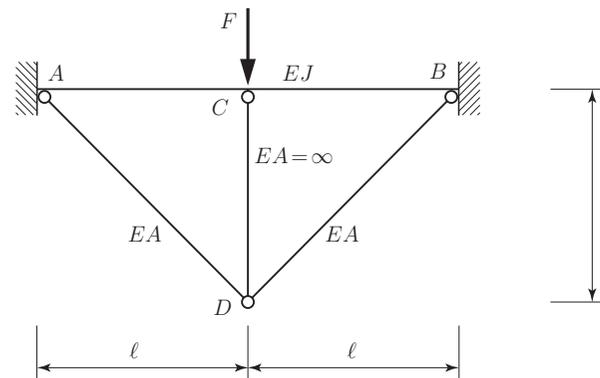
Momento flettente:

$$M = -\frac{F}{2} R \cos \alpha + XR(1 - \sin \alpha)$$

Equazione di congruenza:

$$\frac{F}{2} \int_0^{\pi/2} \cos \alpha (1 - \sin \alpha) d\alpha - X \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \alpha)^2 d\alpha = 0$$

5.11 Esercizio 76



- 1) Risolvere formalmente la struttura tenendo conto della deformabilità assiale dei pendoli AD e BD;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Individuare la curva delle pressioni.

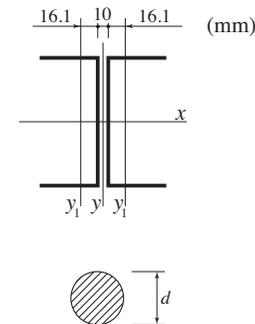
Posto:

$F = 150 \text{ kN}$
 $l = 3 \text{ m}$
 $E = 200 \text{ kN/mm}^2$
 $\sigma_{adm} = 160 \text{ N/mm}^2$

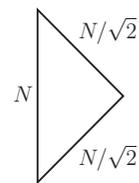
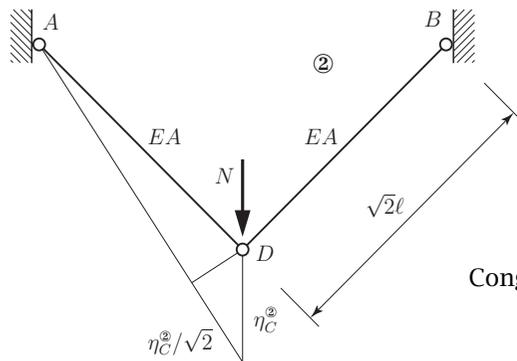
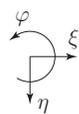
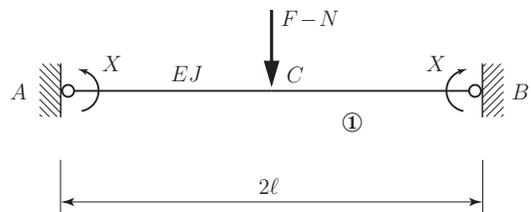
Asta AB (IPE 300):
 $J = 8356 \text{ cm}^4$
 $W = 557 \text{ cm}^3$

Pendolo CD (2 UPN 120):
 Caratteristiche del singolo profilato:
 $J_x = 364 \text{ cm}^4$
 $J_y = 43.1 \text{ cm}^4$
 $A = 17 \text{ cm}^2$

Pendoli AD e BD (tondi):



- 5) Dimensionare il diametro d dei pendoli AD e DB, da realizzarsi in ferro tondo (scegliere per il diametro una dimensione in mm intera e pari);
- 6) Eseguire la verifica di sicurezza dell'asta AB, trascurando l'influenza dello sforzo di taglio;
- 7) Verificare l'asta CD a carico di punta.



equilibrio nodo D

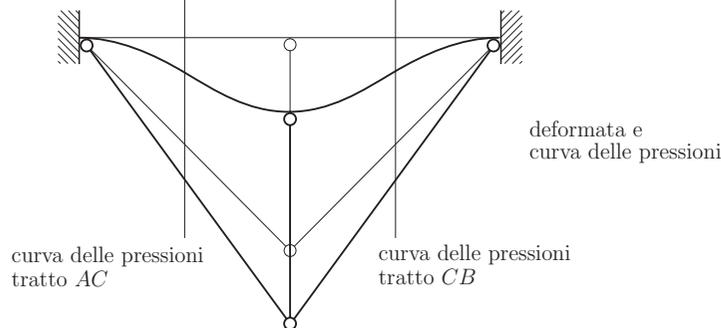
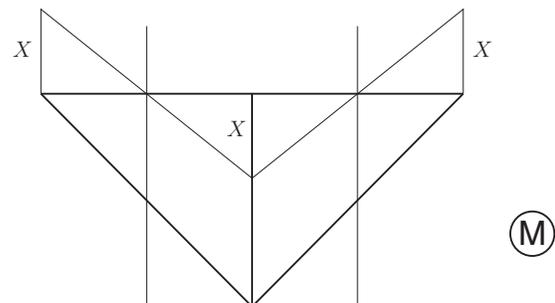
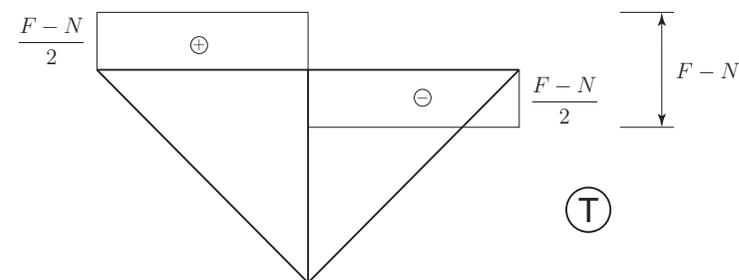
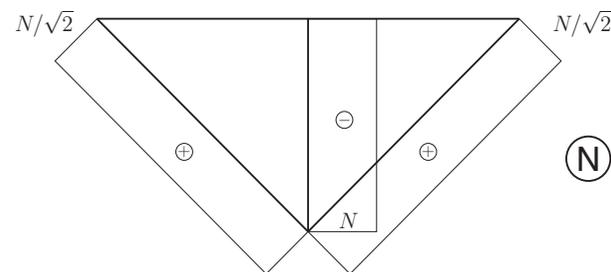
Congruenza: $\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \eta_C^1 = \eta_D^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \varphi_A = \frac{X(2l)}{2EJ} - \frac{(F-N)(2l)^2}{16EJ} \\ \eta_C^1 = \frac{(F-N)(2l)^3}{48EJ} - 2\frac{X(2l)^2}{16EJ} \\ \frac{\eta_D^2}{\sqrt{2}} = \left(\frac{N}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sqrt{2}l}{EA} \Rightarrow \eta_D^2 = \sqrt{2} \frac{Nl}{EA} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \Rightarrow X = (F-N) \frac{l}{4} \Rightarrow \eta_C^1 = \frac{2}{3} \frac{Xl^2}{EJ} - \frac{Xl^2}{2EJ} = \frac{Xl^2}{6EJ} \\ \eta_C^1 = \eta_D^2 \Rightarrow \frac{Xl^2}{6EJ} = \sqrt{2} \frac{Nl}{EA} \Rightarrow X = \beta Nl \text{ dove } \beta = 6\sqrt{2} \frac{J}{A\ell^2} \end{cases}$$

Si ottiene infine:

$$\begin{cases} N = \frac{F}{1+4\beta} \\ X = \frac{\beta}{1+4\beta} F\ell \end{cases}$$



Dimensionamento dei pendoli AD e BD

Per dimensionare i pendoli AD e BD occorre determinare l'area minima necessaria imponendo il rispetto della verifica di sicurezza:

$$\begin{aligned} \frac{N/\sqrt{2}}{A} \leq \sigma_{adm} &\Rightarrow \frac{F}{\sqrt{2}A} \leq \left(1 - 24\sqrt{2}\frac{J}{A\ell^2}\right) \sigma_{adm} \\ &\Rightarrow \frac{1}{A} \left(\frac{F}{\sqrt{2}} + 24\sqrt{2}\frac{J}{\ell^2}\sigma_{adm}\right) \leq \sigma_{adm} \\ &\Rightarrow A \geq \frac{F - 48\frac{J}{\ell^2}\sigma_{adm}}{\sqrt{2}\sigma_{adm}} \\ &\Rightarrow A_{\min} = \frac{150\,000 - 48\frac{83\,560\,000}{3\,000^2}160}{\sqrt{2}160} = 348 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

È ora possibile dimensionare il diametro del tondo:

$$d \geq 2\sqrt{A_{\min}/\pi} \Rightarrow d = 22 \text{ mm} \Rightarrow A = 380 \text{ mm}^2.$$

Nota l'area del tondo componente i pendoli AD e BD, restano determinati il coefficiente β e le reazioni N e X :

$$\beta = 6\sqrt{2}\frac{83\,560\,000}{380 \times 3\,000^2} = 0.207 \Rightarrow \begin{cases} N = 82 \text{ kN} \\ X = 51 \text{ kN}\times\text{m} \end{cases}.$$

Verifica dell'asta AB

$$\sigma_{\max} = \frac{X}{W} = 92 \text{ N/mm}^2.$$

Verifica a carico di punta dell'asta CD

$$J_y = 2 \left(431\,000 + 1\,700(16.1 + 5)^2\right) = 2\,375\,714 \text{ mm}^4,$$

$$\rho_y = \sqrt{2\,375\,714/2 \times 1\,700} = 26.43 \text{ mm},$$

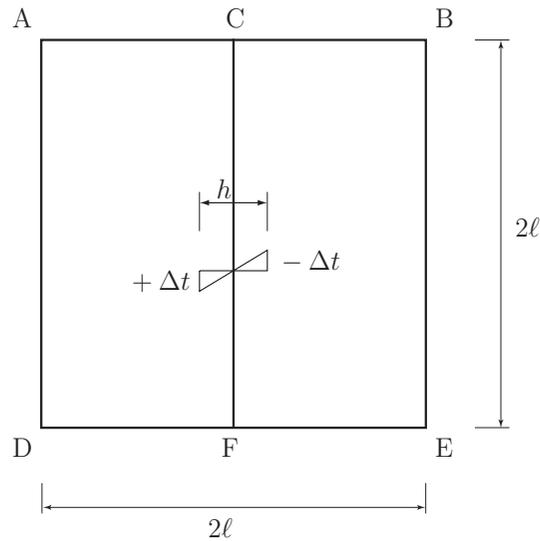
luce libera di inflessione = ℓ ,

$$\text{snellezza} = \frac{3\,000}{26.43} = 113.5.$$

Dal prospetto 7-Ic delle Istruzioni CNR-UNI 10011/88 (relativo ad una sezione generica con spessori inferiori ai 40 mm). Si ottiene il valore $\omega = 2.34$, da cui consegue:

$$\sigma_{\max} = 2.34 \frac{82\,000}{2 \times 1\,700} = 57 \text{ N/mm}^2.$$

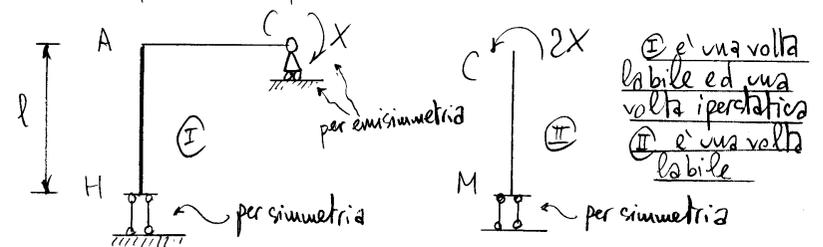
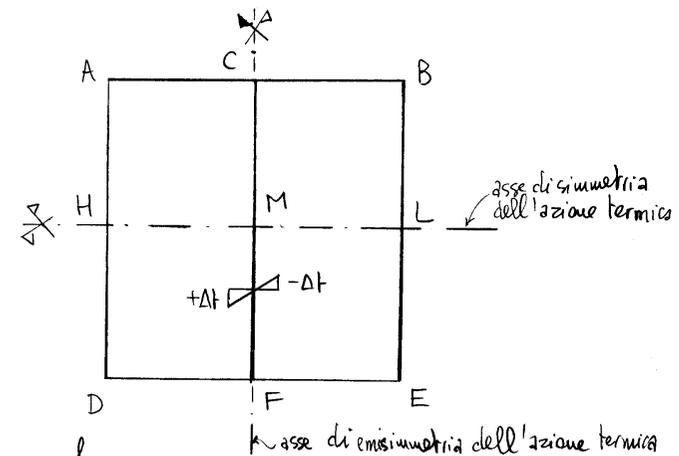
5.12 Esercizio 77



La struttura inflessa di figura è soggetta ad una distorsione termica a farfalla nel montante centrale:

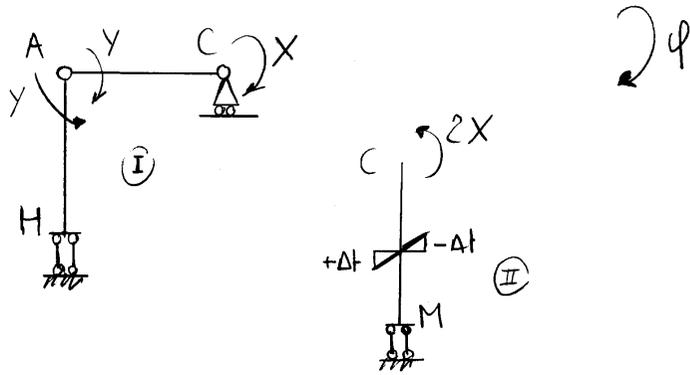
- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale per la struttura complessiva;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni per la struttura complessiva;
- 5) Calcolare la rotazione dei nodi A e C;
- 6) Disegnare la deformata della struttura complessiva;
- 7) Calcolare l'energia elastica di deformazione della struttura complessiva.

La struttura risulta 3 volte labile e sei volte iperstatica. Presenta inoltre 2 assi di simmetria, 1 verticale rispetto al quale la distorsione termica è emisimmetrica, 1 orizzontale rispetto al quale la distorsione termica è simmetrica.



Per emisimmetria lo sforzo normale in C di II è nullo
 Per equilibrio alla traslazione orizzontale di III il taglio in C è nullo

Ⓐ è una volta labile ed una volta iperstatica
 Ⓑ è una volta labile



$$\varphi_c^{(I)} = \frac{Xl}{3EJ} - \frac{Yl}{6EJ}$$

$$\varphi_c^{(II)} = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h} - \frac{2Xl}{EJ}$$

$$\varphi_{AC} = -\frac{Xl}{6EJ} + \frac{Yl}{3EJ}$$

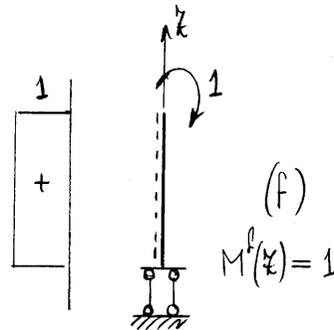
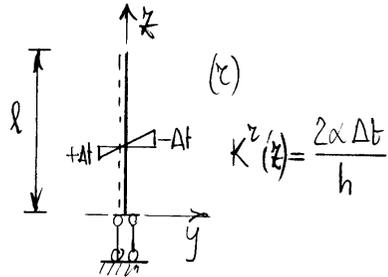
$$\varphi_{AH} = -\frac{Yl}{EJ}$$

Congruenza :

$$\begin{cases} \varphi_c^{(I)} = \varphi_c^{(II)} \\ \varphi_{AC} = \varphi_{AH} \end{cases}$$

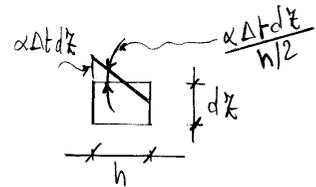
Congruenza (moltiplicando per $6EJ/l$):

$$\varphi_c^{(II)} = \varphi_c^{(II)}(\Delta t) + \varphi_c^{(II)}(X)$$



$$\begin{cases} 2X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} - 12X \\ -X + 2Y = -6Y \end{cases} \Rightarrow$$

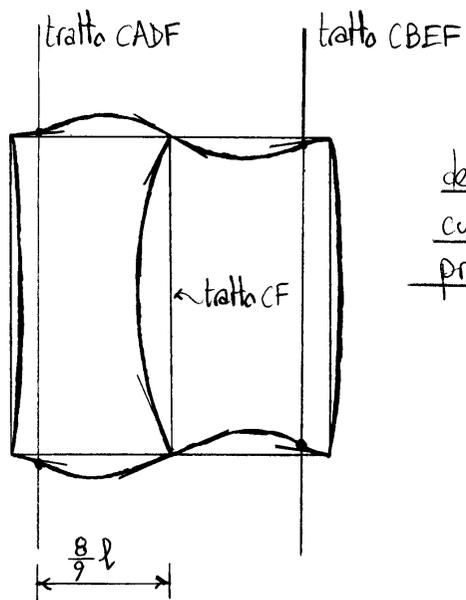
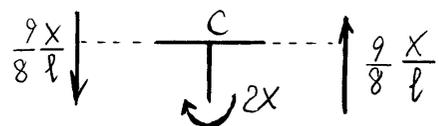
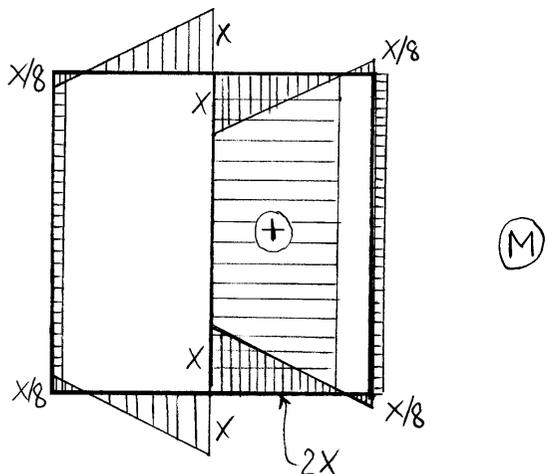
$$\Rightarrow \begin{cases} 14X - Y = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{X}{8} \end{cases}$$



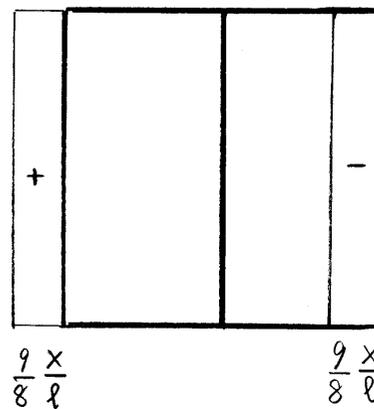
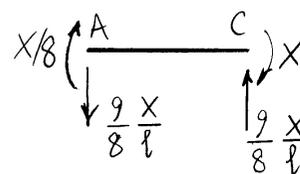
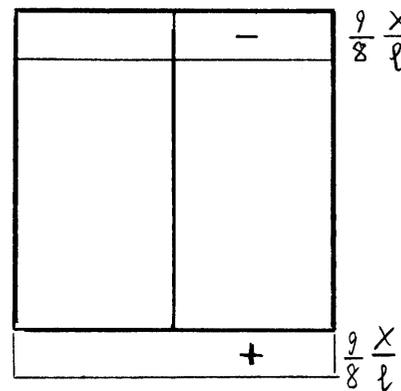
Principio dei lavori virtuali :

$$\varphi_c^{(II)}(\Delta t) = \int_0^l 1 \frac{2\alpha\Delta t}{h} dz = 2\alpha\Delta t \frac{l}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{111}{8} X = 12EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{32}{37} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \\ Y = \frac{4}{37} EJ \frac{\alpha\Delta t}{h} \end{cases}$$

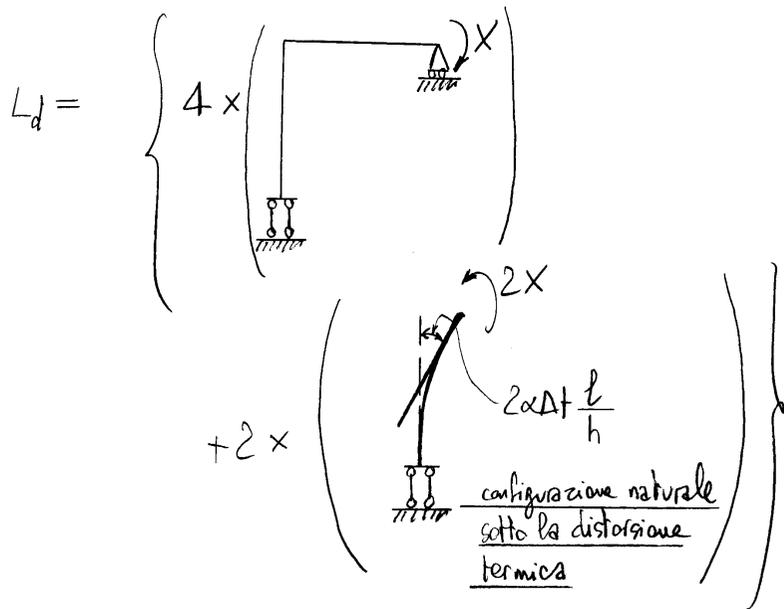


deformata e
curva delle
pressioni



$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{Yl}{EJ} = -\frac{4}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \\ \varphi_C = 2\alpha \Delta t \frac{l}{h} - \frac{2Xl}{EJ} = \frac{10}{37} \alpha \Delta t \frac{l}{h} \end{cases}$$

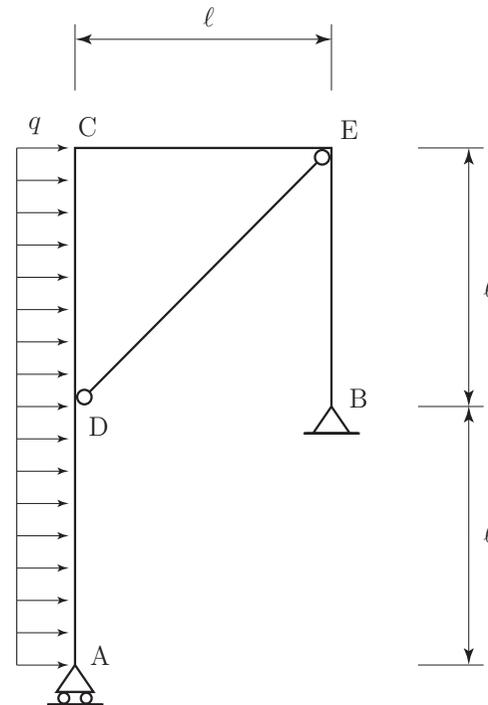
Energia elastica di deformazione



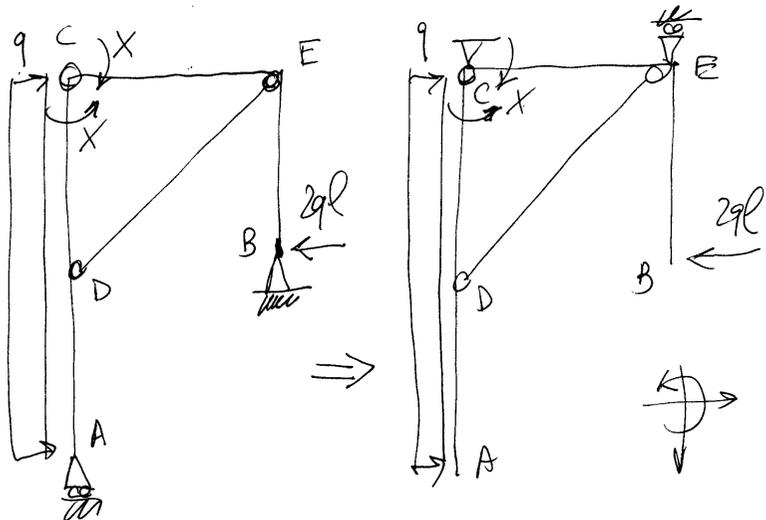
$$L_d = 4 \left(\frac{1}{2} \times \varphi_C \right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 2X \frac{2Xl}{EJ} \right) =$$

$$= \left(2 \frac{32}{37} \frac{10}{37} + 4 \frac{32}{37} \frac{32}{37} \right) EJl \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2 = \frac{128}{37} EJl \left(\frac{\alpha \Delta t}{h} \right)^2$$

5.13 Esercizio 78



- 1) Risolvere la struttura supponendo il pendolo ED indeformabile assialmente;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Calcolare le rotazioni dei nodi E, C, D e lo spostamento della travata;
- 4) Disegnare la curva delle pressioni;
- 5) Disegnare la deformata elastica della struttura.



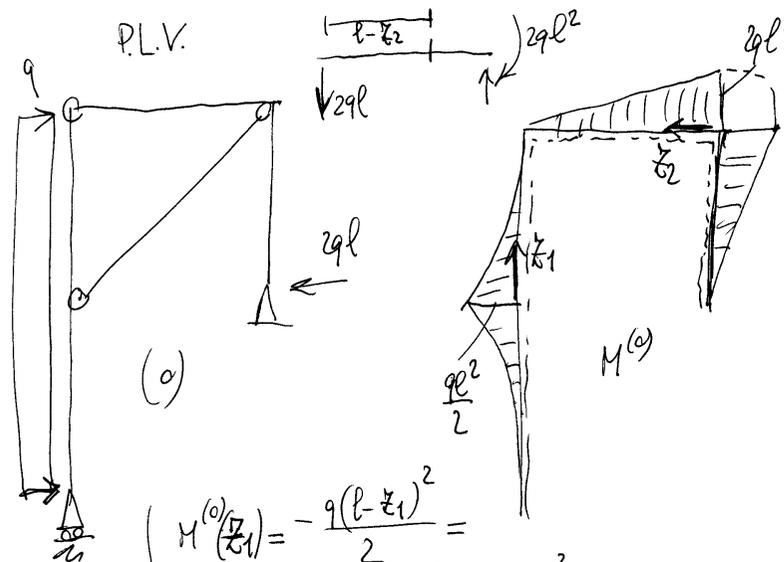
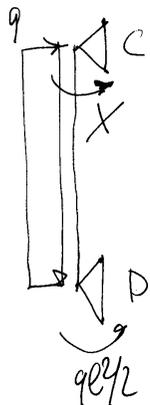
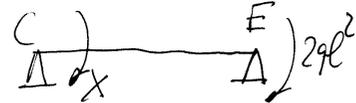
Congruenza: $\varphi_{CD} = \varphi_{CE}$

$$\varphi_{CD} = -\frac{ql^3}{24EJ} + \frac{Xl}{3EJ}$$

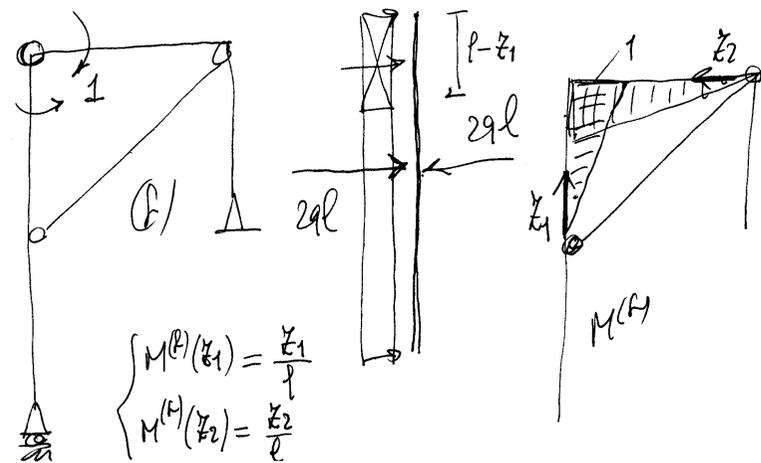
$$\varphi_{CE} = \frac{(2ql^2)l}{6EJ} - \frac{Xl}{3EJ}$$

$$\frac{2}{3}X \frac{l}{EJ} = \frac{9}{24}ql^2 \frac{l}{EJ}$$

$$X = \frac{9}{16}ql^2$$

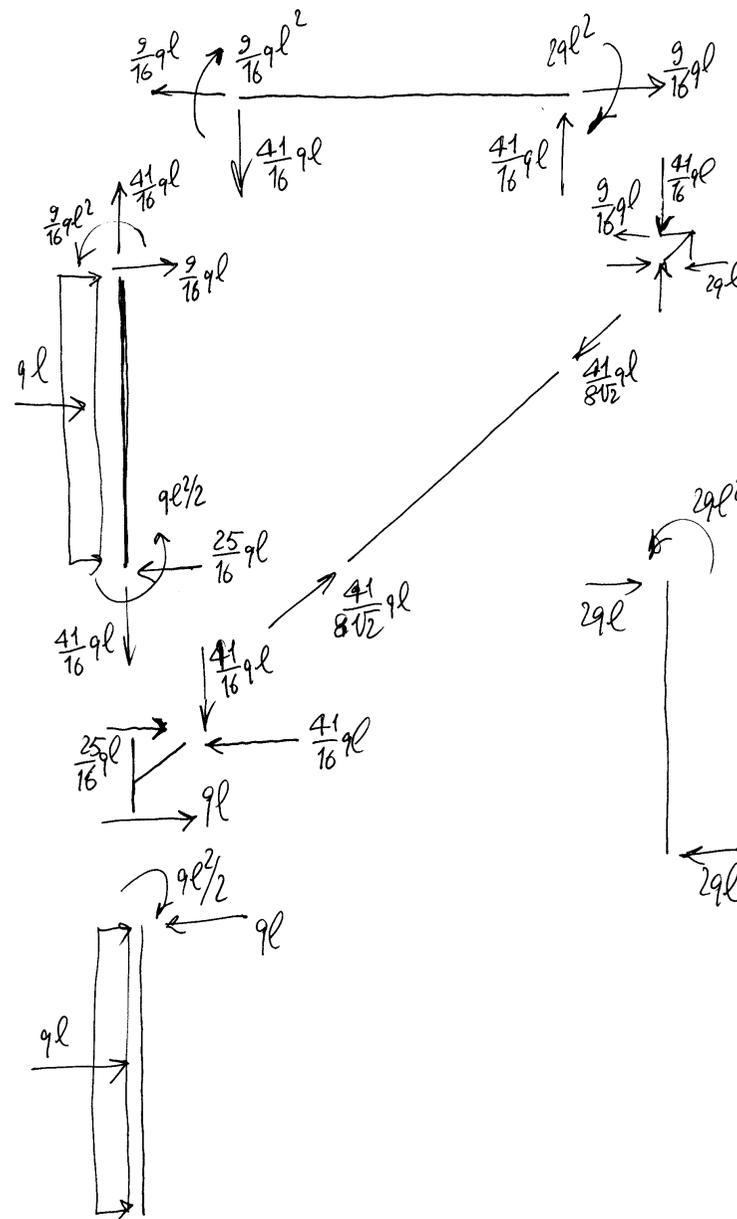


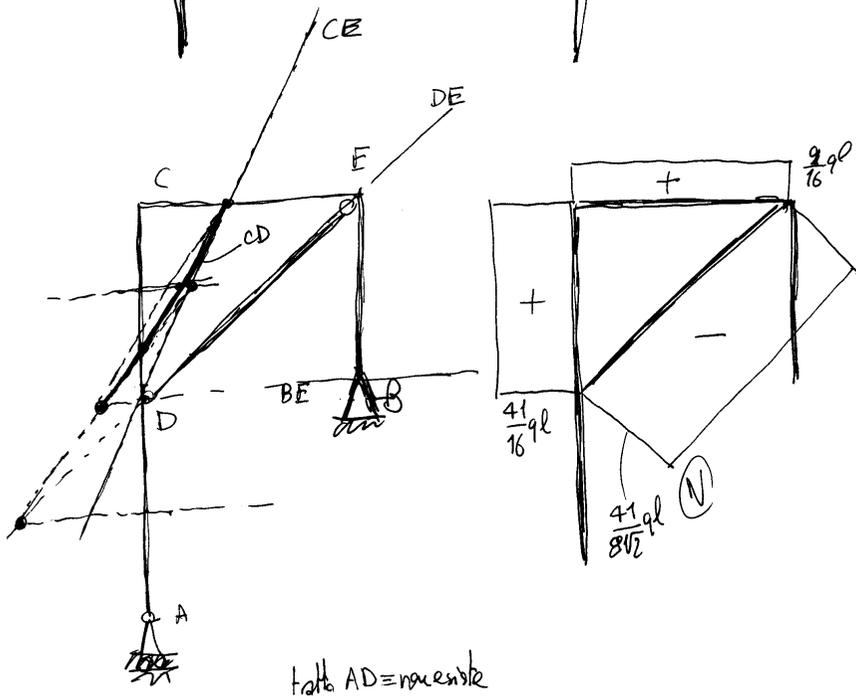
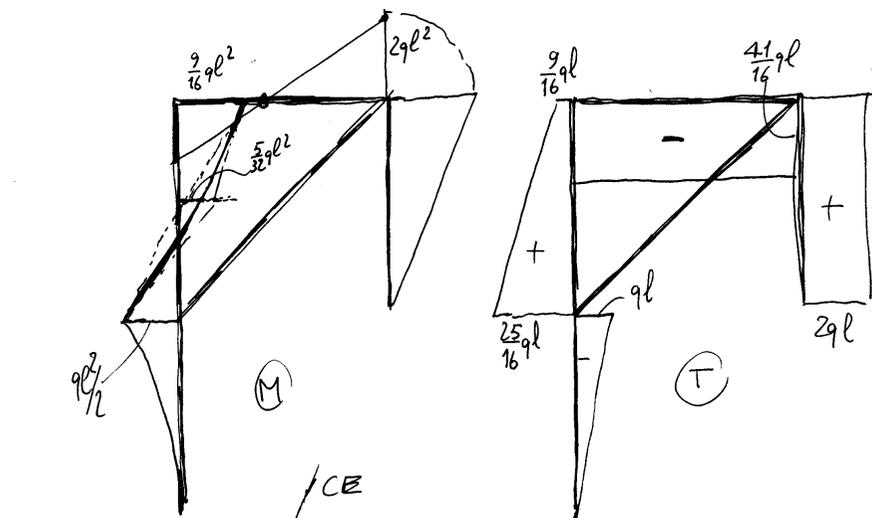
$$\begin{cases} M^{(0)}(z_1) = -\frac{q(l-z_1)^2}{2} = \\ = -\frac{ql^2}{2} + qlz_1 - \frac{qz_1^2}{2} \\ M^{(0)}(z_2) = -2ql(l-z_2) = -2ql^2 + 2qlz_2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} M^{(1)}(z_1) = \frac{z_1}{l} \\ M^{(1)}(z_2) = \frac{z_2}{l} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 L_i &= \int_0^l \frac{z_1}{l} \left\{ -\frac{ql^2}{2} + qlz_1 - \frac{9z_1^2}{2} + X \frac{z_1}{l} \right\} \frac{dz_1}{EJ} \\
 &+ \int_0^l \frac{z_2}{l} \left\{ -2ql^2 + 2qlz_2 + X \frac{z_2}{l} \right\} \frac{dz_2}{EJ} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{Xl}{EJ} + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right\} \frac{ql^3}{EJ} \\
 &+ \frac{1}{3} \frac{Xl}{EJ} + \left\{ -1 + \frac{2}{3} \right\} \frac{ql^3}{EJ} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} + \frac{-6+8-3-24+16}{24} \frac{ql^3}{EJ} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} - \frac{9}{24} \frac{ql^3}{EJ} \\
 L_i = 0 &\Rightarrow \boxed{X = \frac{9}{16} ql^2}
 \end{aligned}$$



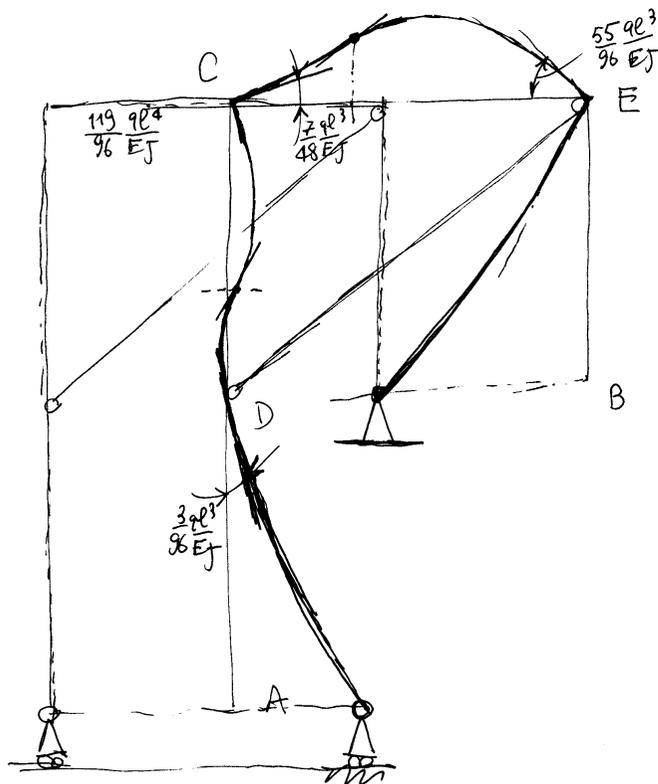


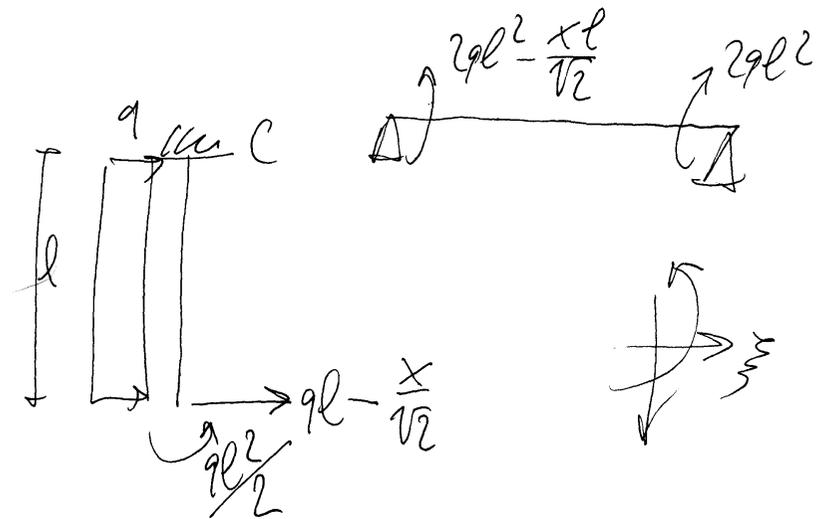
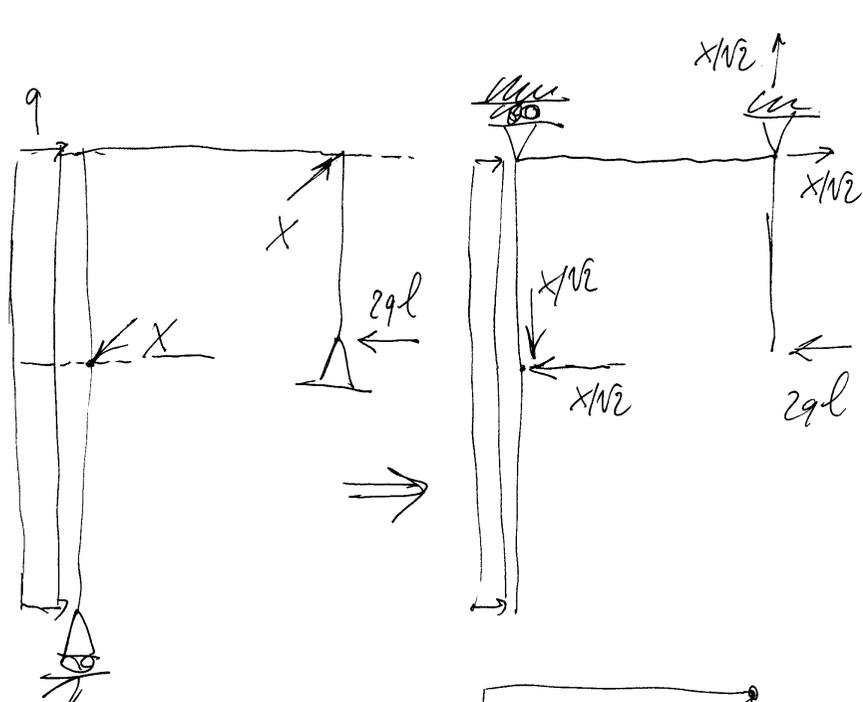
$$\varphi_C = -\frac{\left(\frac{9}{16}ql^2\right)l}{3EJ} + \frac{(29l^2)l}{6EJ} = \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_E = \frac{\left(\frac{9}{16}ql^2\right)l}{6EJ} - \frac{(29l^2)l}{3EJ} = -\frac{55}{96} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$\varphi_D = \frac{\left(\frac{9}{16}ql^2\right)l}{3EJ} - \frac{\left(\frac{9}{16}ql^2\right)l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = \frac{3}{96} \frac{ql^3}{EJ}$$

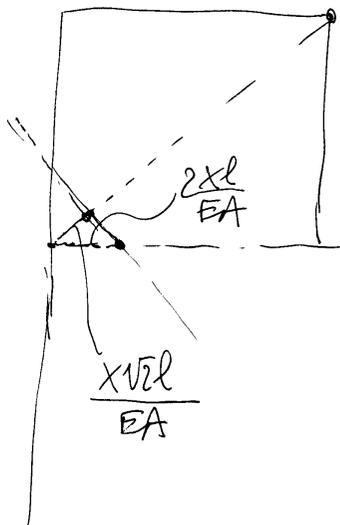
$$\sum_{CE} = +\frac{(29l)l^3}{3EJ} + \frac{5}{96} \frac{ql^3}{EJ} l = +\frac{119}{96} \frac{ql^4}{EJ}$$





$$\Delta_{DE} = \frac{x\sqrt{2}l}{EA}$$

$$\xi_D = \frac{2xl}{EA}$$



$$\xi_D = \frac{(ql^2)l^2}{2EJ} + \frac{(ql - \frac{x}{\sqrt{2}})l^3}{3EJ} + \frac{ql^4}{8EJ} + \varphi_C l$$

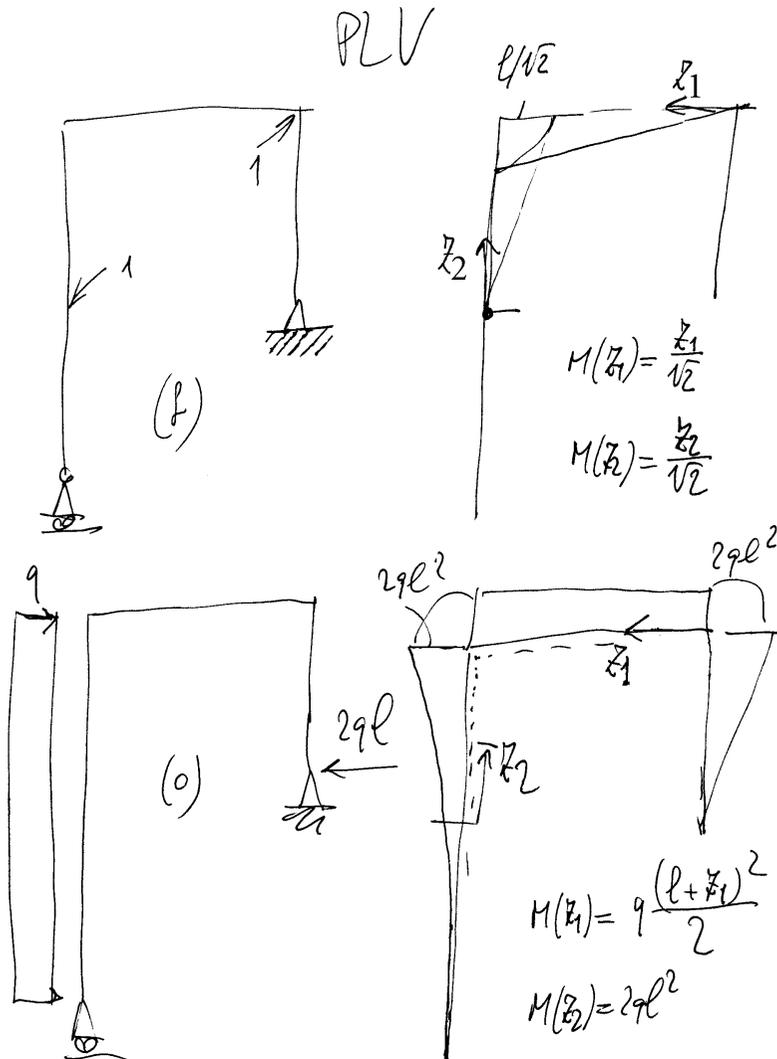
$$\varphi_C = \frac{(2ql^2)l}{2EJ} - \frac{(x/\sqrt{2})l}{3EJ}$$

$$\xi_D = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + 1\right) \frac{ql^4}{EJ} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) \frac{x l^3}{12EJ}$$

$$= \frac{16+8+3+24}{24} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{x l^3}{EJ}$$

$$= \frac{41}{24} \frac{ql^4}{EJ} - \frac{2}{3\sqrt{2}} \frac{x l^3}{EJ}$$

$$EA = \infty \Rightarrow X = \frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{41}{24} ql = \frac{41}{8\sqrt{2}} ql$$



$$L_i = \int_0^l \frac{z_1}{\sqrt{2} EJ} \left(-2ql^2 + \frac{Xz_1}{\sqrt{2}} \right) dz_1$$

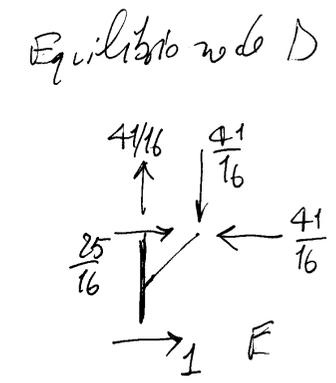
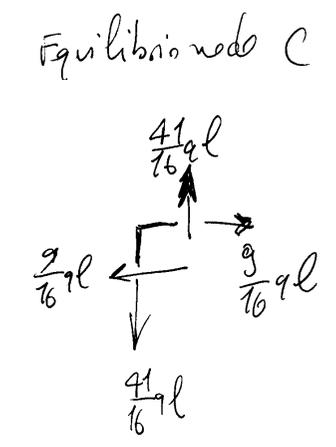
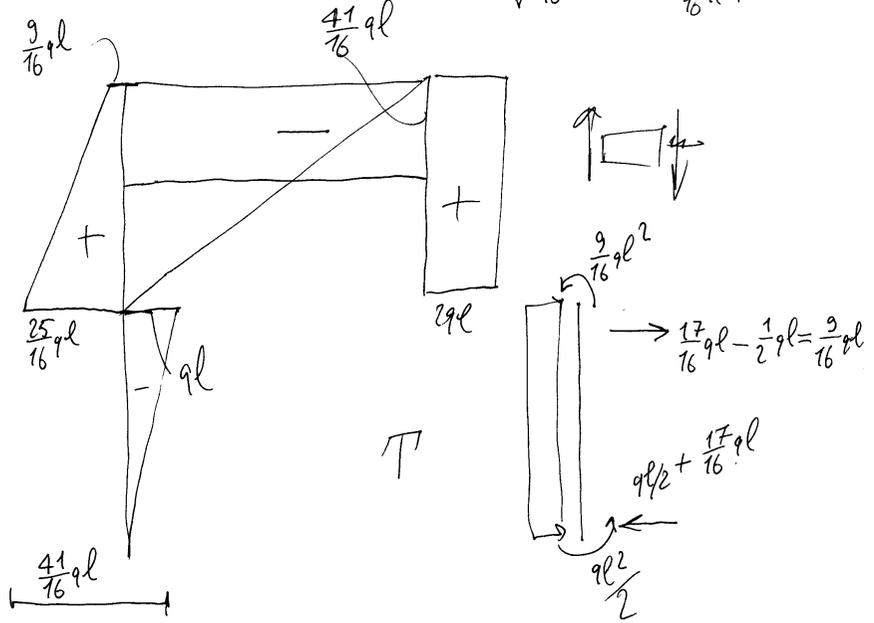
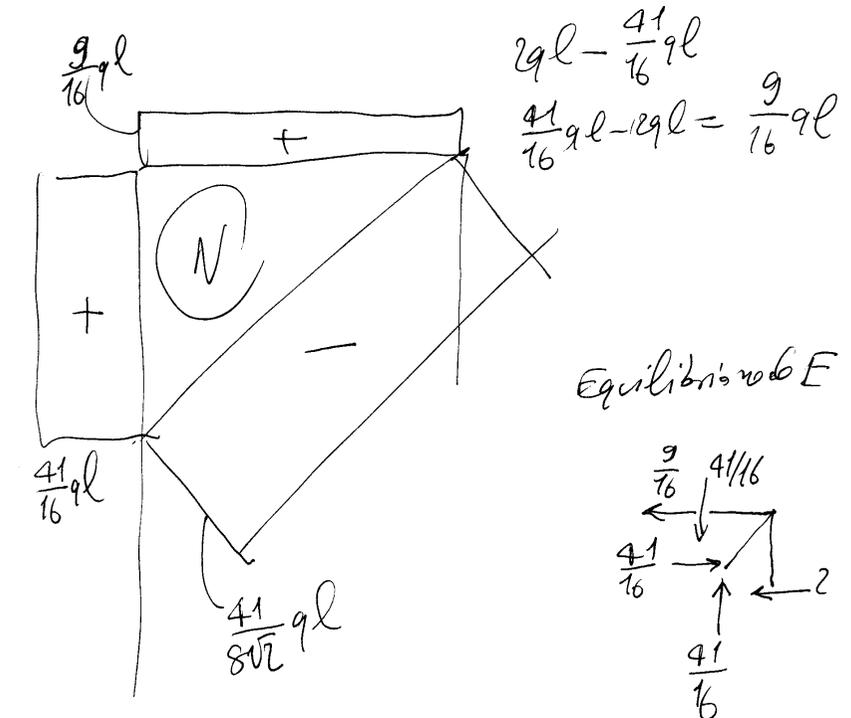
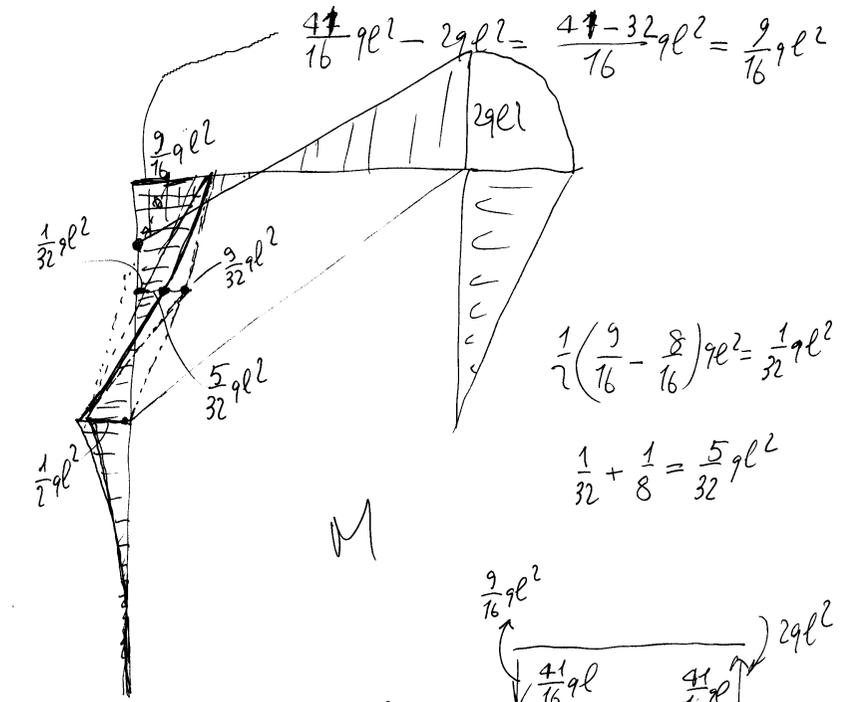
$$+ \int_0^l \frac{z_2}{EJ\sqrt{2}} \left(-q \frac{(l+z_2)^2}{2} + \frac{Xz_2}{\sqrt{2}} \right) dz_2$$

$$- \frac{ql^2}{2} - \frac{qz_2^2}{2} - qlz_2 + \frac{Xz_2}{\sqrt{2}}$$

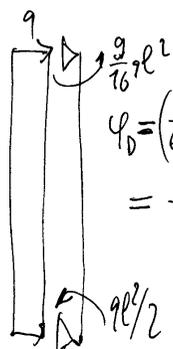
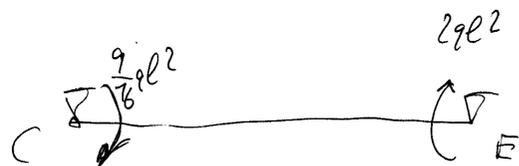
$$= \left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{3} \right) \frac{ql^4}{\sqrt{2} EJ}$$

$$+ \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) \frac{Xl^3}{EJ}$$

$$= - \frac{41}{24} \frac{ql^4}{\sqrt{2} EJ} + \frac{1}{3} \frac{Xl^3}{EJ}$$



$$\sum_{CE} = \frac{2ql^3}{3EJ} + \varphi_E l = \frac{119}{96} \frac{ql^4}{EJ}$$



$$\varphi_D = \left(\frac{1}{6} - \frac{3}{32} - \frac{1}{24} \right) \frac{ql^3}{EJ}$$

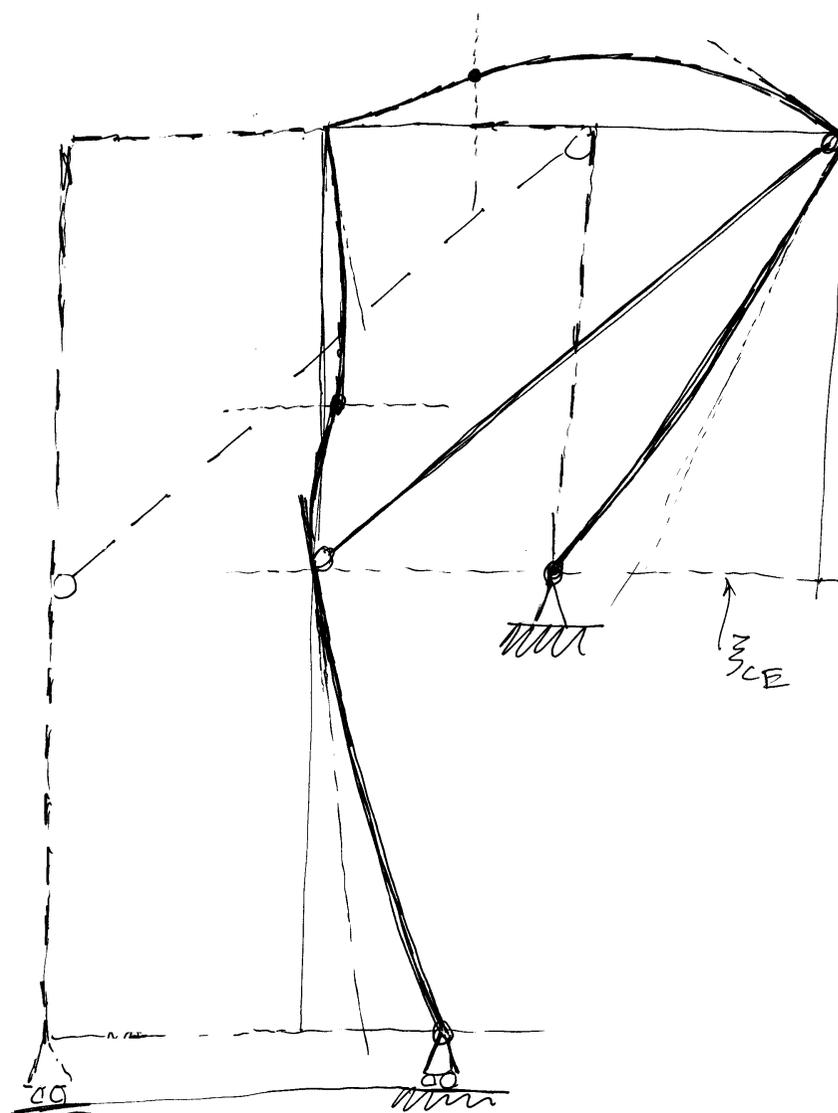
$$= \frac{9^3}{96} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{3^1}{32} \frac{ql^3}{EJ}$$

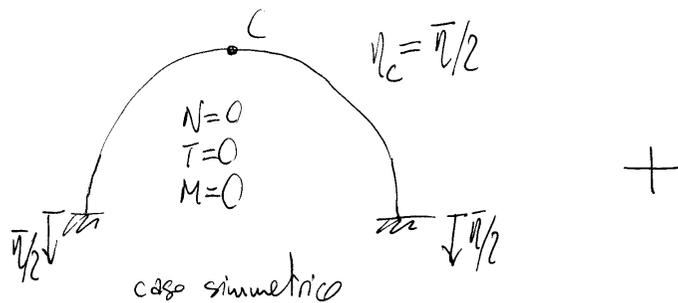
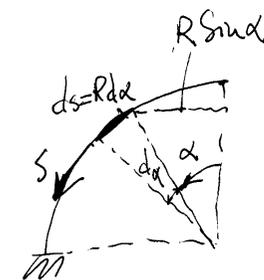
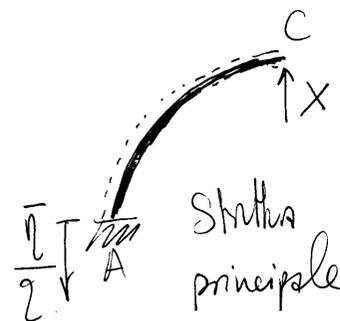
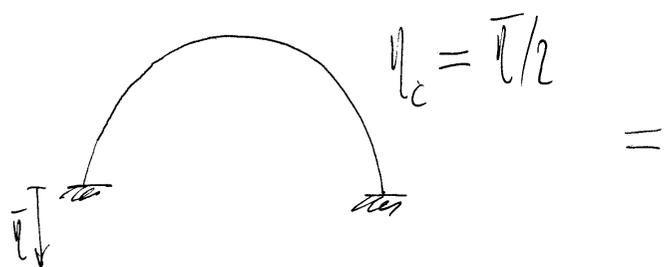


$$\varphi_C = -\frac{3}{16} \frac{ql^3}{EJ} + \frac{1}{3} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{7}{48} \frac{ql^3}{EJ}$$

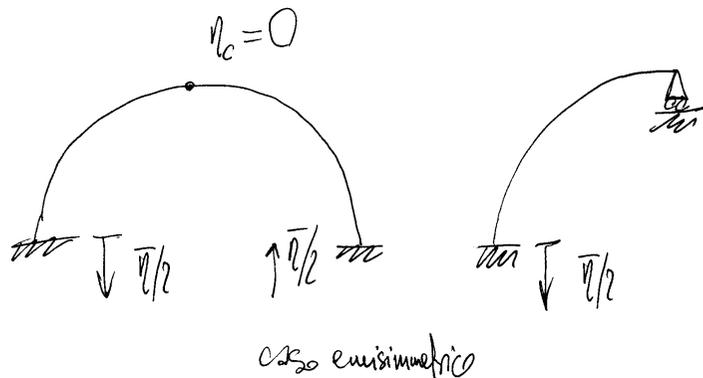
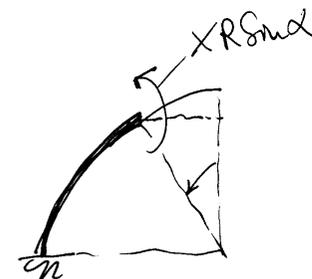
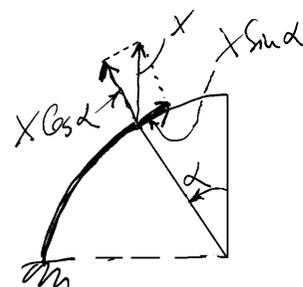
$$\varphi_E = -\frac{2}{3} \frac{ql^3}{EJ} + \frac{3}{32} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{55}{96} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$= \frac{25}{32} \frac{ql^3}{EJ}$$



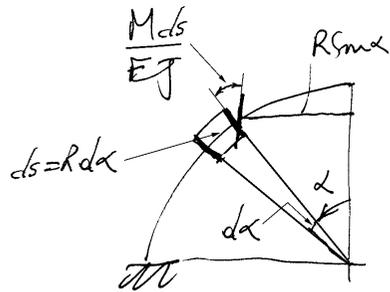


equazione di congruenza $\eta_c = 0$



$$\begin{cases} N(\alpha) = X \sin \alpha \\ T(\alpha) = -X \cos \alpha \\ M(\alpha) = -X R \sin \alpha \end{cases}$$





$$d\eta_c = - \frac{M(Rd\alpha)}{EJ} R \sin\alpha = \frac{XR^3}{EJ} \sin^2\alpha d\alpha$$

(dovuto alla deformazione)

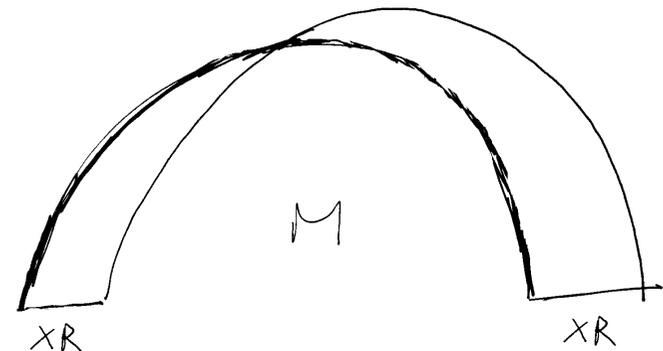
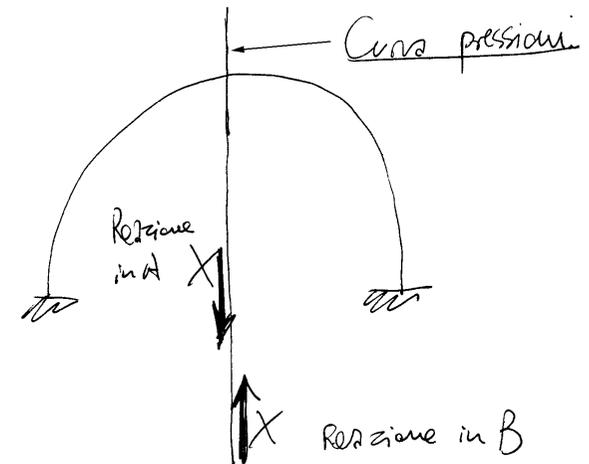
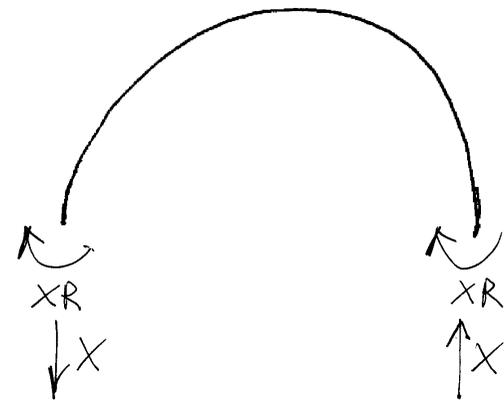
$$\eta_c = - \frac{\bar{\eta}}{2} + \frac{XR^3}{EJ} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha d\alpha = \frac{\pi XR^3}{4EJ} - \frac{\bar{\eta}}{2}$$

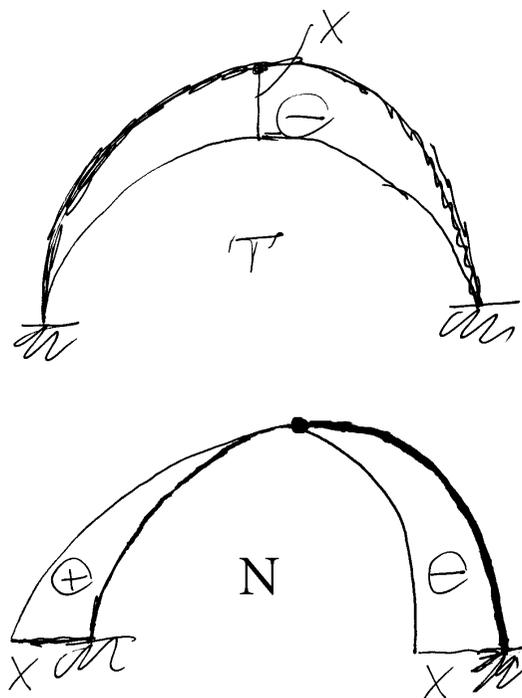
$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\int \sin^2\alpha d\alpha = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\alpha d\alpha = \left[\frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sin 2\alpha \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\eta_c = 0 \Rightarrow X = \frac{2}{\pi} \frac{EJ}{R^3} \bar{\eta}$$



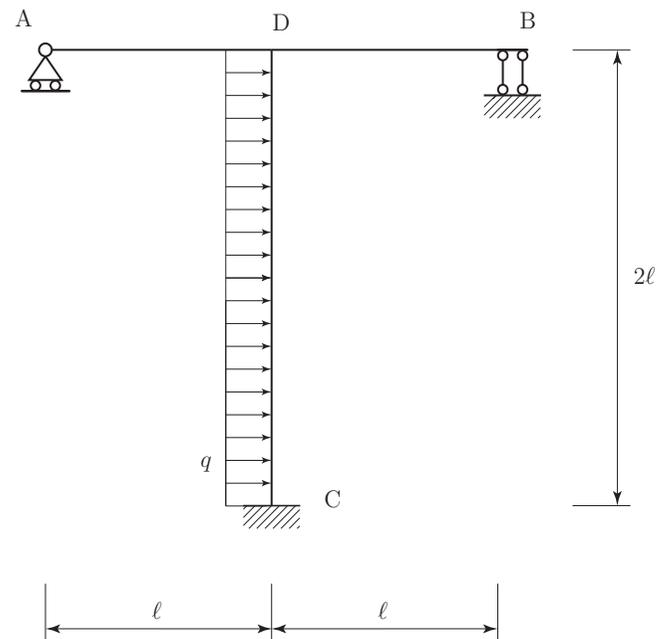


$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R} X \cos\alpha = T$$

$$\frac{dT}{ds} - \frac{N}{R} = \frac{1}{R} X \sin\alpha - \frac{1}{R} X \sin\alpha = 0$$

$$\frac{dN}{ds} + \frac{T}{R} = 0 \quad \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{R}$$

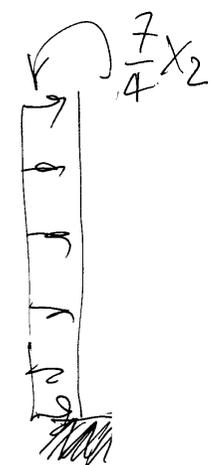
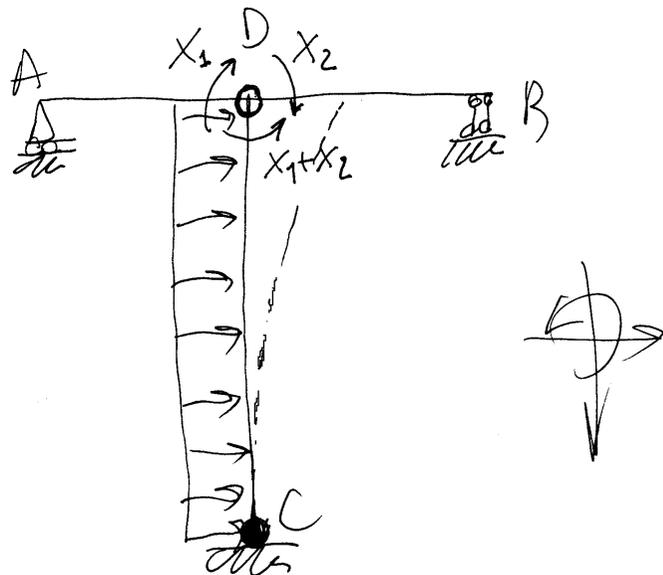
5.15 Esercizio 80



La struttura inflessa di figura è soggetta ad una forza distribuita lungo il montante centrale:

- 1) Analizzare cinematicamente e staticamente la struttura;
- 2) Risolvere la struttura;
- 3) Disegnare i diagrammi del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 4) Calcolare la rotazione del nodo D e lo spostamento orizzontale della travata;
- 5) Individuare la curva delle pressioni;
- 6) Disegnare la deformata della struttura;
- 7) Determinare la matrice delle rigidezze, necessaria per la soluzione col metodo delle deformazioni.

Metodo forze



$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC}$$

$$-\frac{X_1 l}{3EJ} = \frac{7 X_2 l}{4EJ} - \frac{q(l)^3}{6EJ}$$

$$-4X_1 = 42X_2 - 16ql^2$$

$$-3X_2 = 42X_2 - 16ql^2$$

$$45X_2 = 16ql^2$$

$$X_2 = \frac{16}{45} ql^2 \Rightarrow X_1 = \frac{4}{15} ql^2$$

$$X_1 + X_2 = \frac{28}{45} ql^2$$

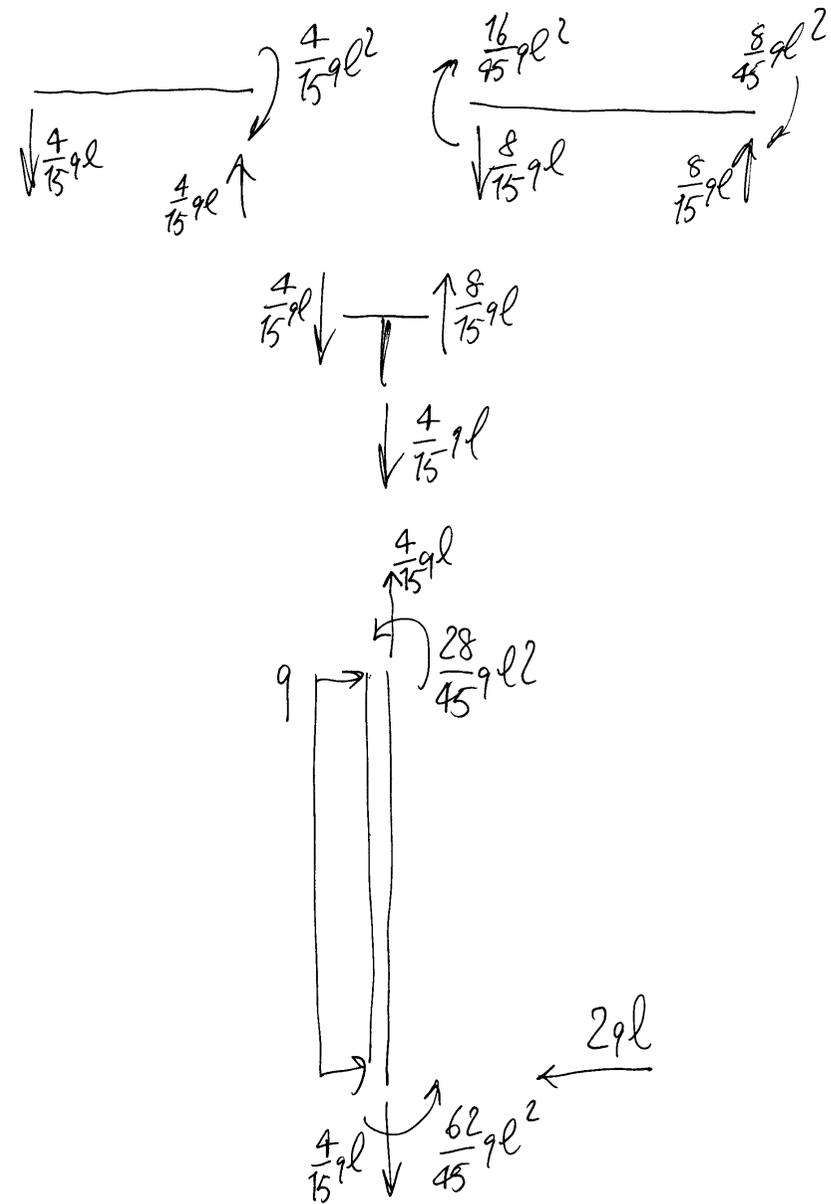
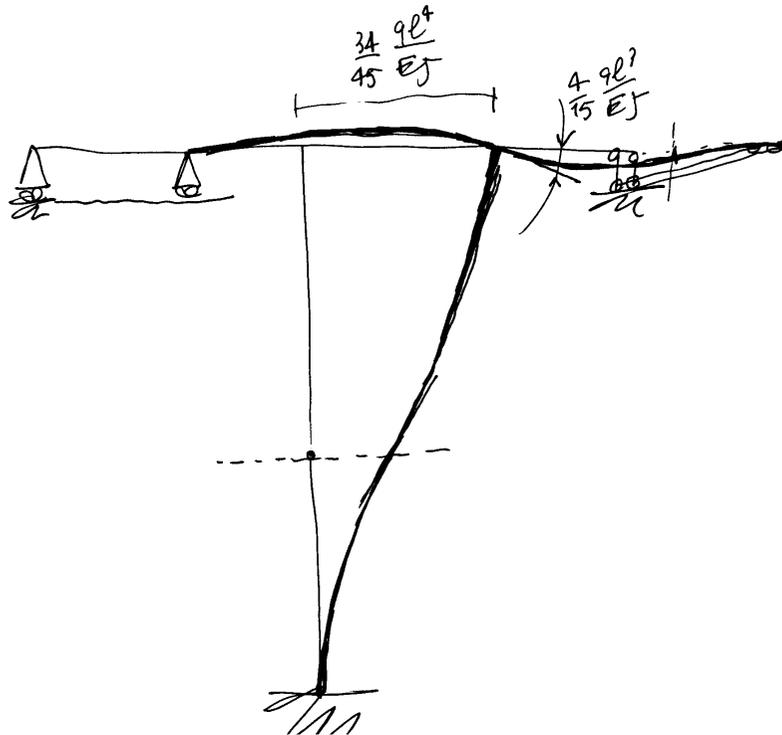
$$M_c = 2ql^2 - \frac{28}{45} ql^2 = \frac{62}{45} ql^2$$

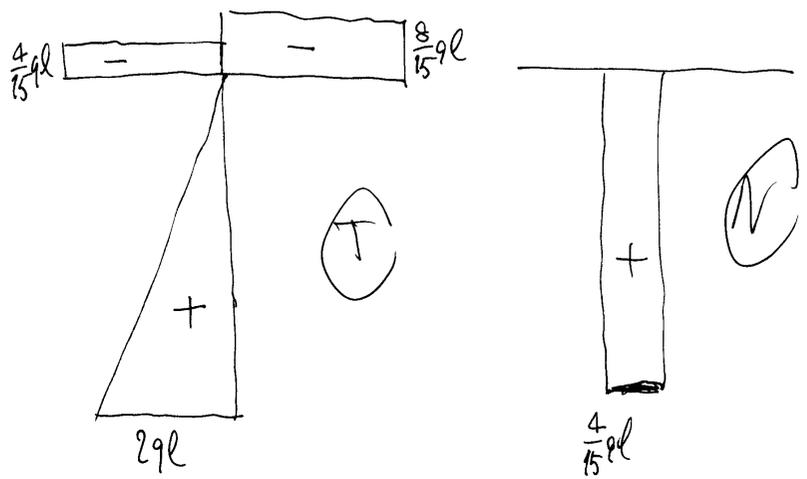
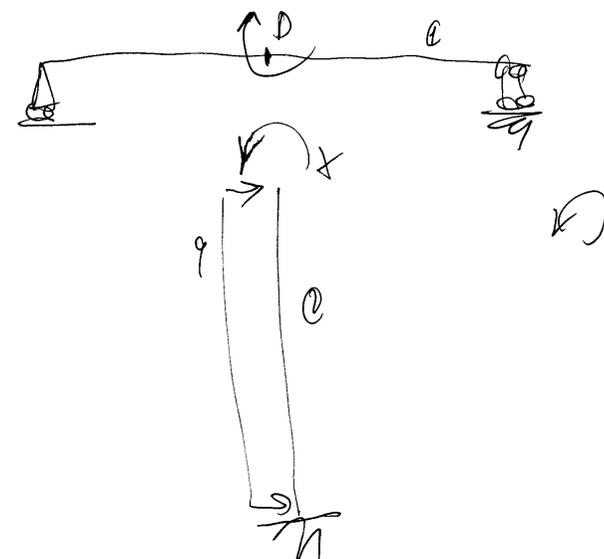
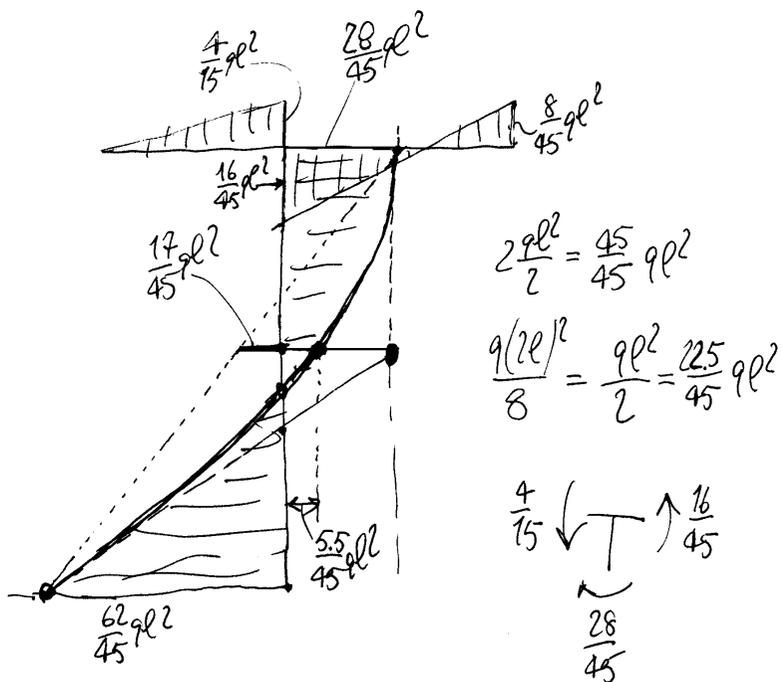
$$\varphi_{DA} = \varphi_{DB} \Rightarrow \frac{X_1 l}{3EJ} = -\frac{X_2 l}{4EJ}$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{3}{4} X_2$$

$$\Rightarrow X_1 + X_2 = \frac{7}{4} X_2$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -\left(\frac{28}{45} q l^2\right) \frac{(2l)^2}{2EJ} + \frac{q(2l)^4}{8EJ} \\ &= -\frac{56}{45} \frac{q l^4}{EJ} + 2 \frac{q l^4}{EJ} = \frac{34}{45} \frac{q l^4}{EJ} \\ \varphi_D &= -\frac{x_1 l}{3EJ} = -\frac{4}{45} \frac{q l^3}{EJ} \end{aligned}$$



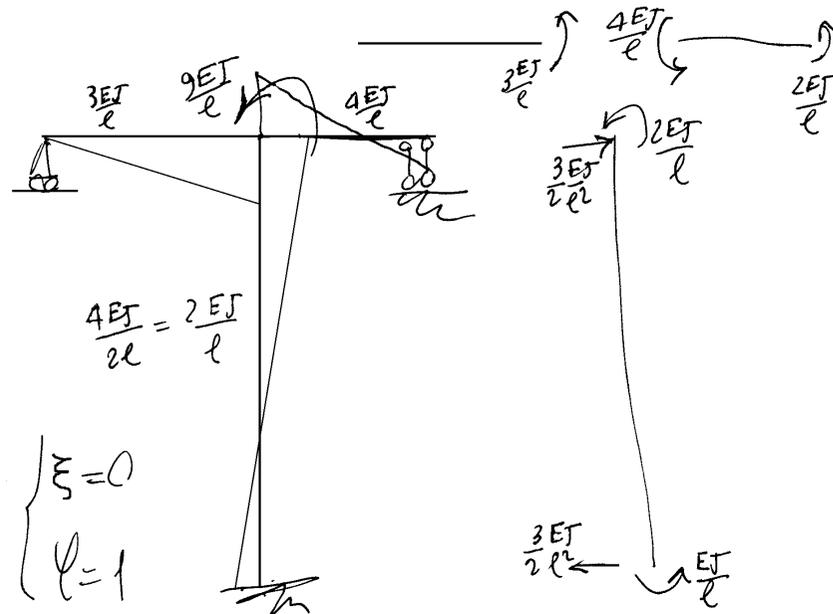
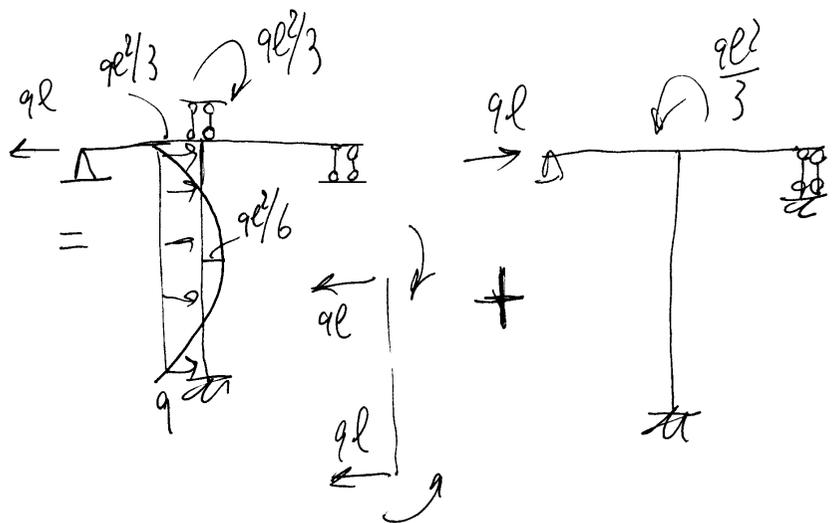
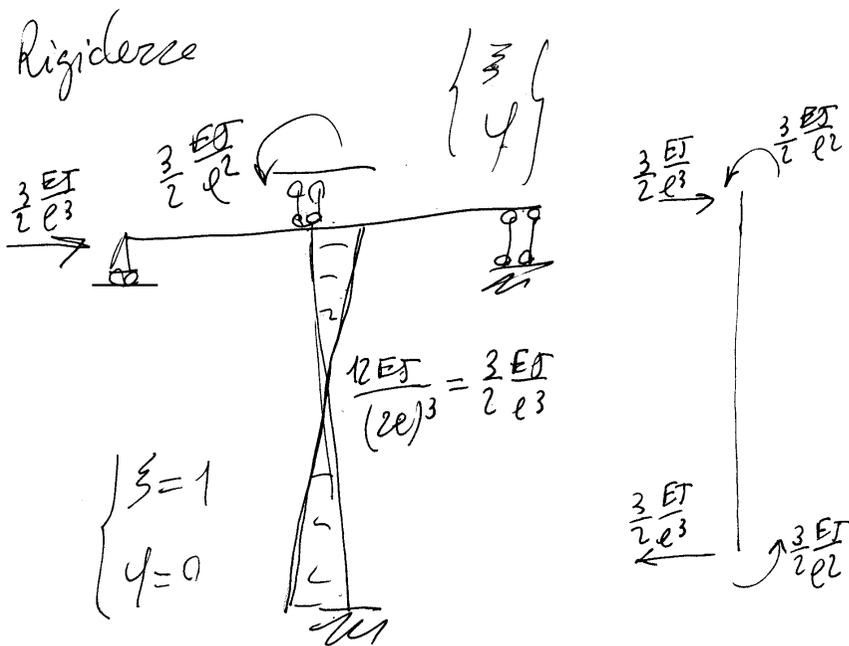
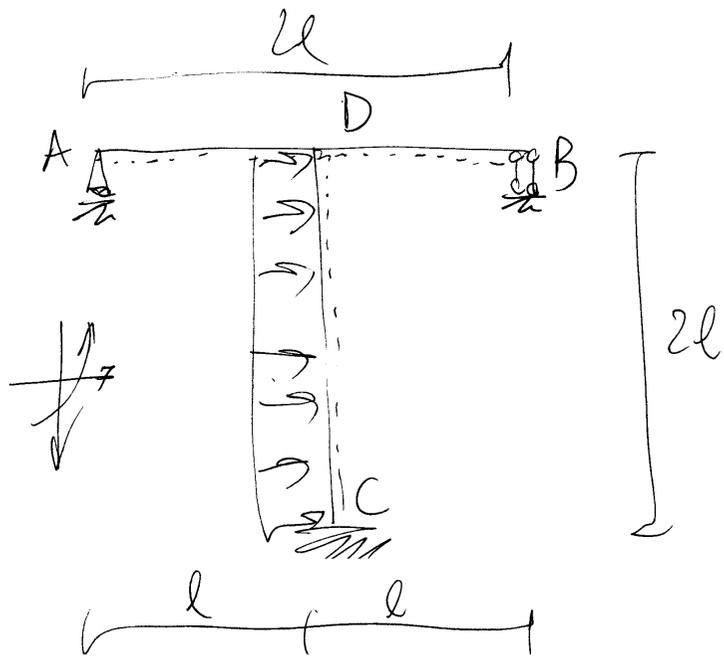


$$\varphi_b^a = \frac{-Xl}{7EJ}$$

$$\varphi_b^a = \frac{X2l}{EJ} - \frac{9(l)^3}{6EJ}$$

$$\frac{15}{7} \frac{Xl}{EJ} = \frac{4}{3} \frac{9l^3}{EJ}$$

$$X = \frac{28}{45} ql^2$$



$$K = \frac{3EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & 6l^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{3EJ}{2l^3} \begin{bmatrix} 1 & l \\ l & 6l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix} \frac{ql}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & l \\ l & 6l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 9 \end{Bmatrix} \frac{2}{9} \frac{ql^4}{EJ}$$

$$\begin{cases} \xi + \varphi l = 3 \frac{2}{9} \frac{ql^4}{EJ} \\ \xi l + 6l^2 \varphi = 9 \frac{2}{9} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\varphi l = -2 \frac{2}{9} \frac{ql^4}{EJ} \\ 5\xi = 14 \frac{2}{9} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} \\ \xi = \frac{34}{45} \frac{ql^4}{EJ} \end{cases}$$

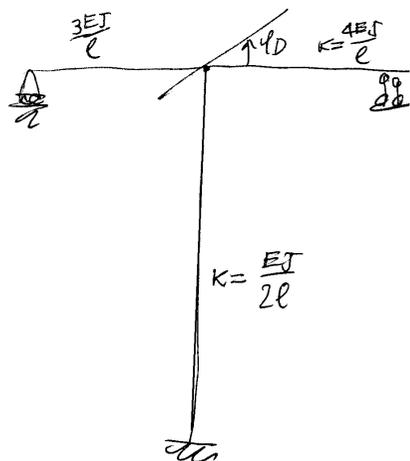
$$M_{DA} = \left(\frac{3EJ}{l} \right) \left(-\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} \right) = -\frac{4}{15} ql^2$$

$$M_{DB} = \left(-\frac{4EJ}{l} \right) \left(-\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} \right) = \frac{16}{45} ql^2$$

$$\begin{aligned} M_{DC} &= \left(\frac{2EJ}{l} \right) \left(-\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} \right) \\ &+ \left(\frac{3EJ}{2l^2} \right) \left(\frac{34}{45} \frac{ql^4}{EJ} \right) - \frac{ql^2}{3} \\ &= \left(-\frac{8}{45} + \frac{17}{15} - \frac{1}{3} \right) ql^2 = \frac{28}{45} ql^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_C &= \left(-\frac{EJ}{l} \right) \left(-\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} \right) \\ &+ \left(-\frac{3EJ}{2l^2} \right) \left(\frac{34}{45} \frac{ql^4}{EJ} \right) - \frac{ql^2}{3} = \frac{62}{45} ql^2 \end{aligned}$$

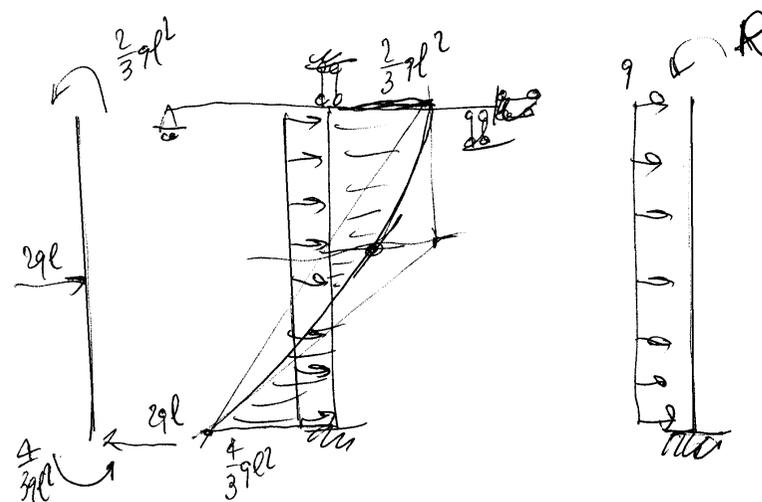
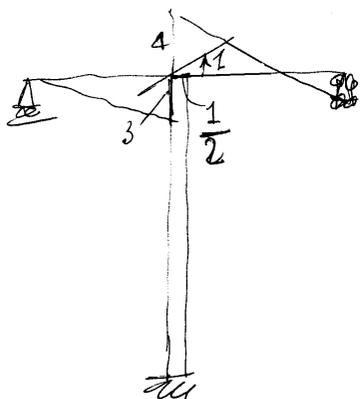
Metodo spostamenti (1 grado di libertà)



$$F = 0$$

$$R = \frac{2}{3} q l^2$$

$$k = \frac{15 EI}{2 l}$$



$$x \cdot \frac{15 EI}{2 l} = \frac{q(2l)^3}{6}$$

$$x = \frac{2}{3} q l^2$$

$$R = \frac{2}{3} q l^2$$

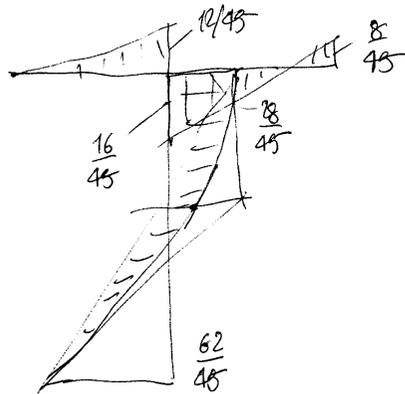
$$k \delta = -R$$

$$\delta = - \frac{2 \cdot \frac{2}{3} q l^3}{\frac{15 EI}{2}} = - \frac{4}{45} \frac{q l^3}{EI}$$

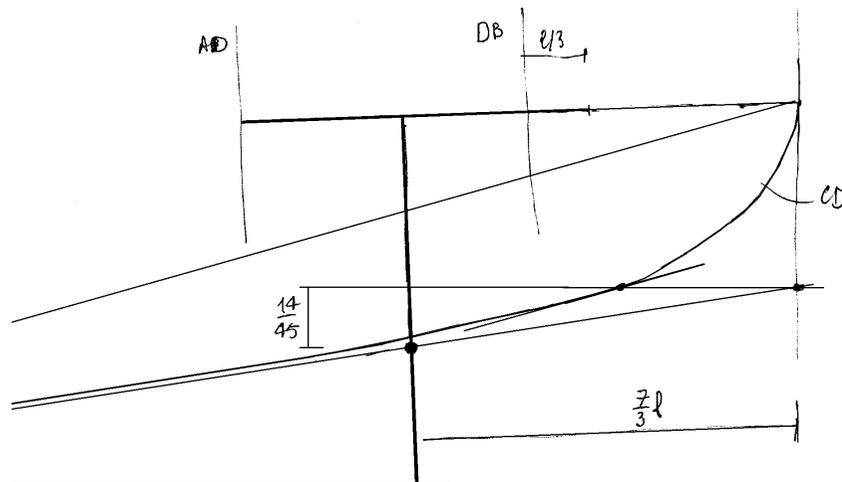
$$\xi = \frac{q l^4}{8 EI} - \frac{(\frac{2}{3} q l^2)^2}{3 EI} = \frac{q l^4}{9 EI}$$

$$M_{DC} = \frac{2}{3}ql^2 - \frac{1}{2l} \frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{28}{45} ql^2$$

$$M_C = \frac{4}{3}ql^2 + \frac{1}{2} \frac{EJ}{l} \frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{62}{45} ql^2$$



Curva delle pressioni



$u = \varphi_D \quad F = 0$

Il taglio in D
estremità del tratto
DC è nullo per
equilibrio dell'asta
ADC

Attenzione!
 $\sum_D \neq 0$

$$\frac{X(2l)}{EJ} - \frac{q(2l)^3}{6EJ} = 0 \Rightarrow X = \frac{2}{3}ql^2$$

$R = X = \frac{2}{3}ql^2$

$\varphi_D = 1$

Attenzione!
 $\sum_D \neq 0$

Rigidezza globale:
 $K = \frac{15}{2} \frac{EJ}{l}$

Rigidezza K
della mensola:
 $\frac{K \cdot 2l}{EJ} = 1$

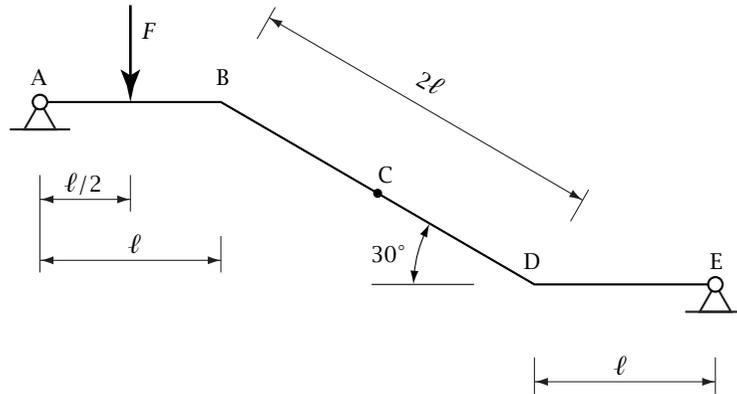
$$Ku + R = F$$

$$\frac{15}{2} \frac{EJ}{l} \varphi_D + \frac{2}{3}ql^2 = 0 \Rightarrow \varphi_D = -\frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ}$$

$$M_{DC} = \frac{2}{3}ql^2 - \left(\frac{EJ}{2l}\right) \frac{4}{45} \frac{ql^3}{EJ} = \frac{28}{45}ql^2 \Rightarrow$$

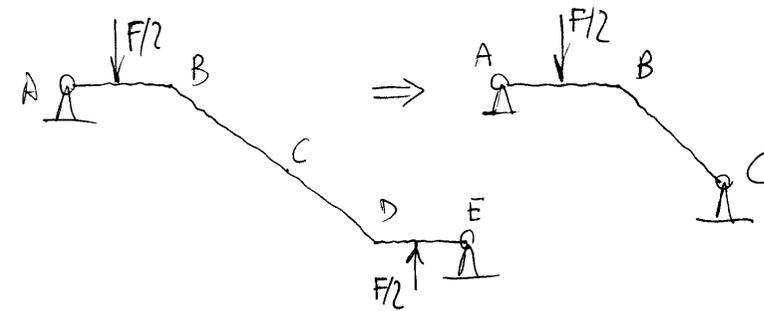
$$\Rightarrow \sum_D = -\frac{(28ql^2)(2l)^2}{2EJ} + \frac{q(2l)^4}{8EJ} = \frac{34}{45} \frac{ql^4}{EJ}$$

5.16 Esercizio 81

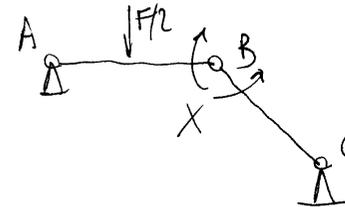


- Risolvere la struttura tenendo conto della sua polar simmetria geometrica e materiale rispetto al polo C.
- Per i due schemi, polar simmetrico e polar emisimmetrico:
 - Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
 - Disegnare il diagramma dello sforzo normale;
 - Disegnare la curva delle pressioni;
 - Calcolare la rotazione del nodo B;
- Disegnare la deformata elastica per il solo schema polar simmetrico.

Schemi polar simmetrico



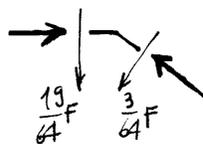
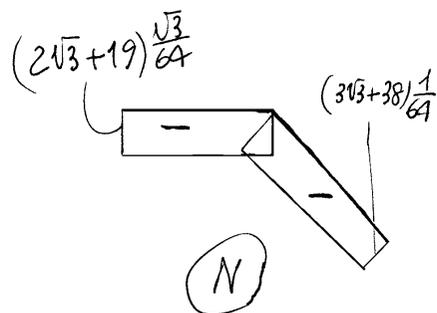
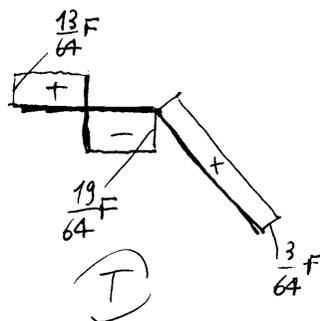
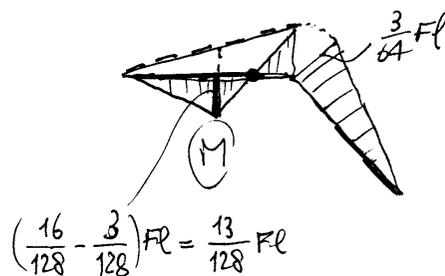
struttura principale



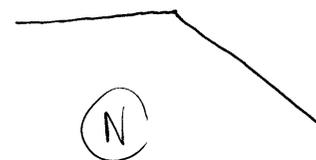
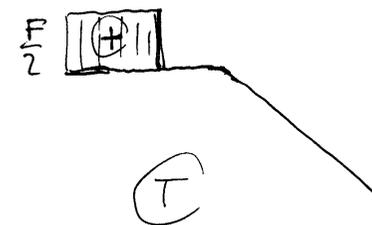
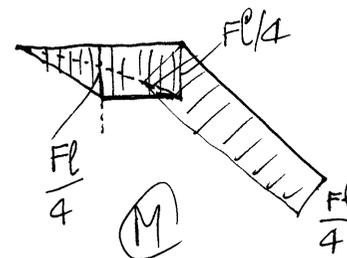
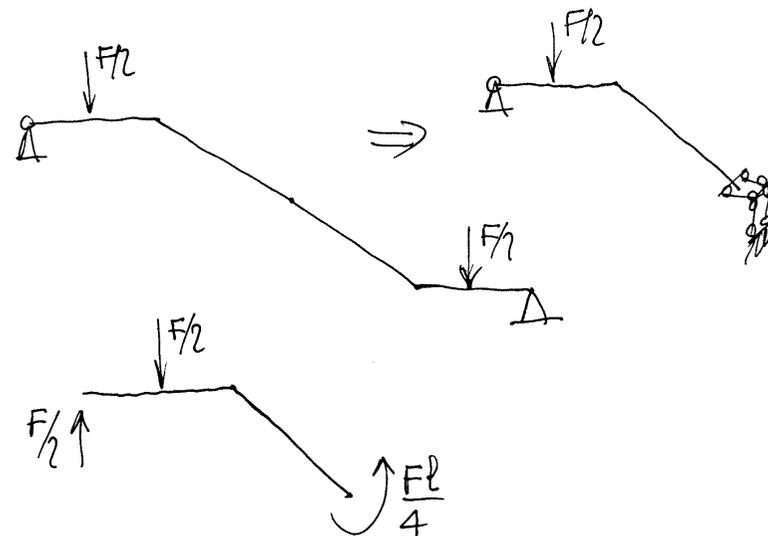
$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC} \Rightarrow -\frac{Xl}{3EJ} + \frac{(F/2)l^2}{16EJ} = \frac{Xl}{3EJ}$$

$$\frac{2}{3}X = \frac{1}{32}Fl \Rightarrow \boxed{X = \frac{3}{64}Fl}$$

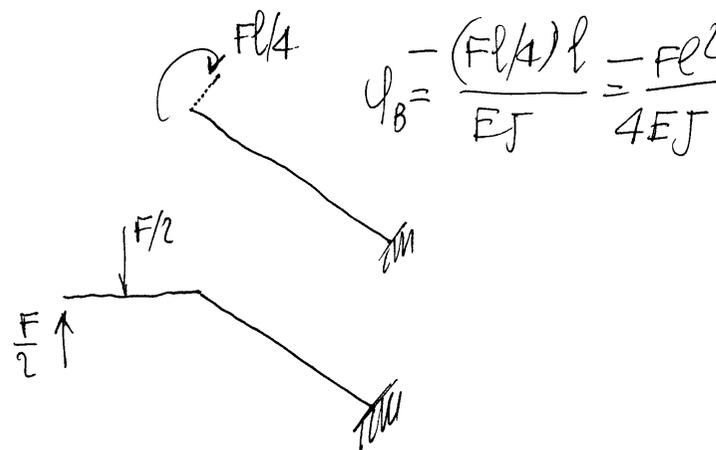
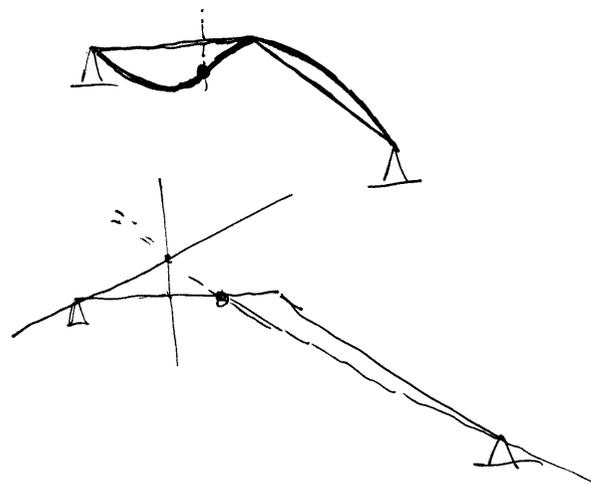
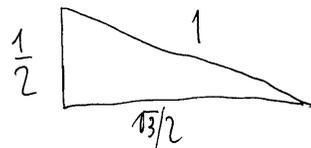
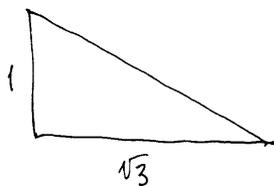
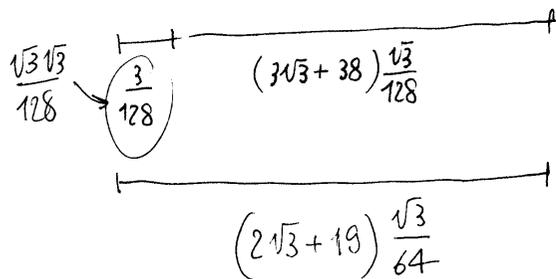
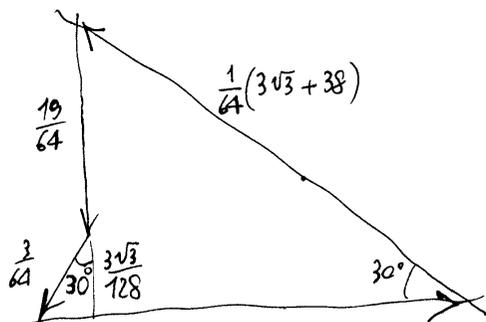
$$\begin{cases} \varphi_B = 0 \\ \varphi_B = \frac{\left(\frac{3}{64}Fl\right)l}{3EJ} = \frac{Fl^2}{64EJ} \end{cases}$$



Schemi Polso emisimmetrico



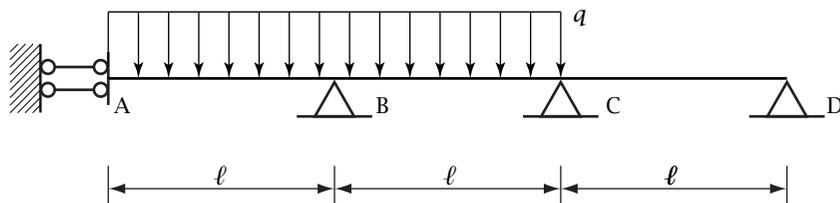
sforzamento normale (sollecitazioni simmetriche)



$$\varphi_B = \frac{(Fl/4)l}{EJ} = \frac{Fl^2}{4EJ}$$

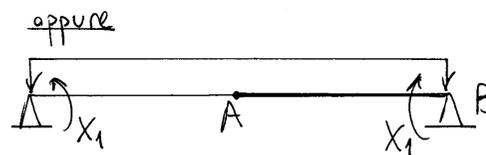
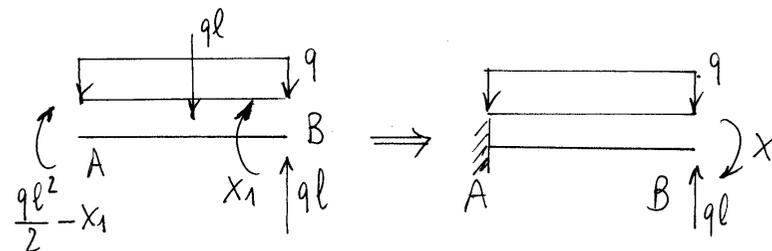
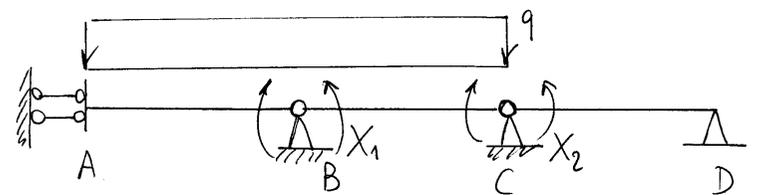
$$\varphi_B = \frac{15 Fl^2}{64 EJ}$$

5.17 Esercizio 82



Data la trave continua di figura:

1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
4. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
6. Calcolare la matrice delle rigidezze;
7. Calcolare le rotazioni delle sezioni B e C utilizzando la matrice delle rigidezze.



(+)

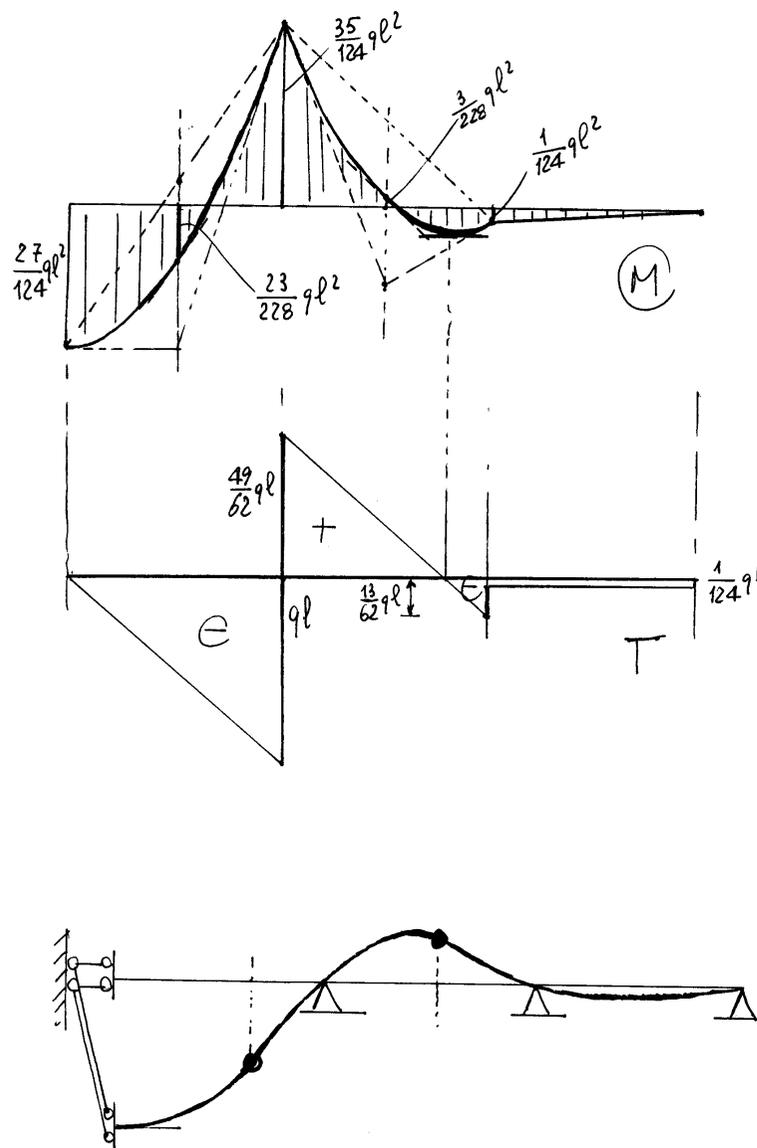
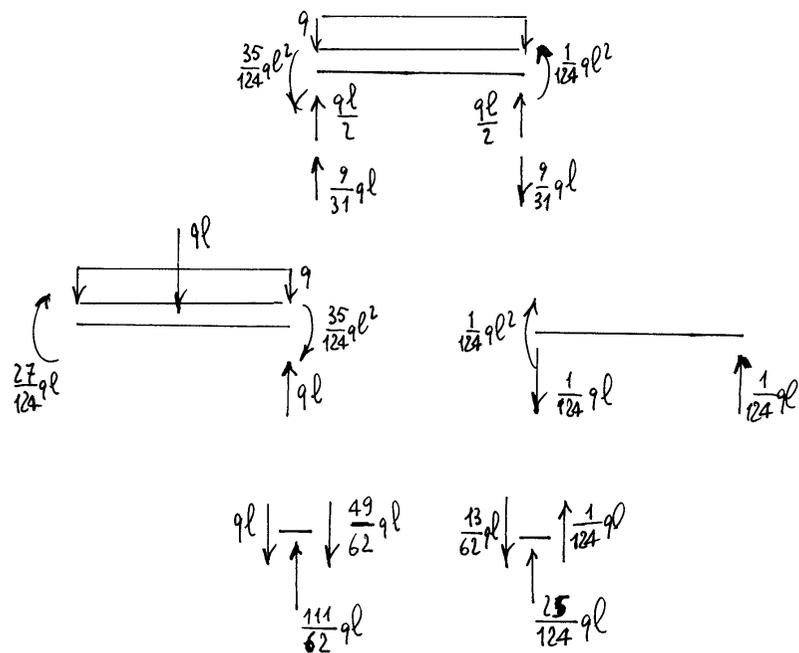
$$\begin{cases} \varphi_{BA} = -\frac{X_1 l}{EJ} + \frac{ql^3}{3EJ} \\ \varphi_{BC} = \frac{X_1 l}{3EJ} + \frac{X_2 l}{6EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} \end{cases}$$

$$\varphi_{BA} = \varphi_{BC} \Rightarrow 32X_1 + 4X_2 = 9ql^2$$

$$\begin{cases} \varphi_{CB} = -\frac{X_1 l}{6EJ} - \frac{X_2 l}{3EJ} + \frac{ql^3}{24EJ} \\ \varphi_{CD} = \frac{X_2 l}{3EJ} \end{cases}$$

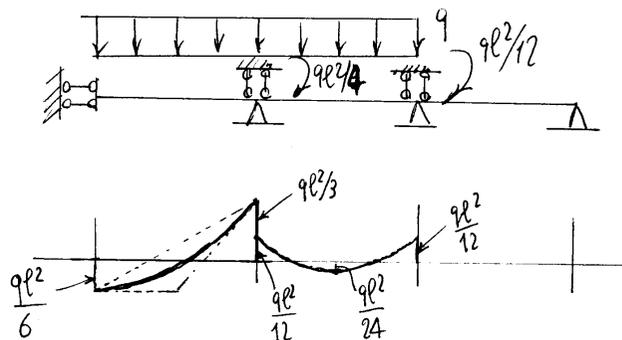
$$\varphi_{CB} = \varphi_{CD} \Rightarrow 4X_1 + 16X_2 = 9l^2$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{35}{124} 9l^2 \\ X_2 = -\frac{1}{124} 9l^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varphi_B = \left(-\frac{35}{124} + \frac{1}{3} \right) \frac{ql^3}{EJ} = \frac{19}{372} \frac{ql^3}{EJ} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

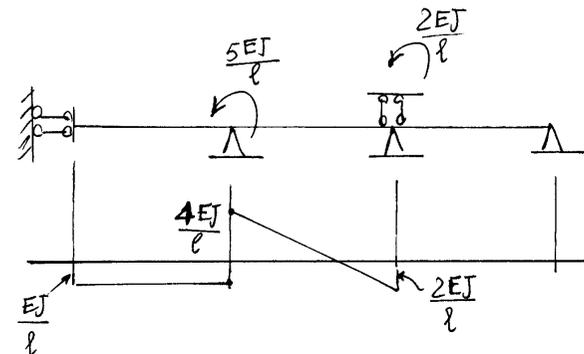
Momenti di incastro perfetta



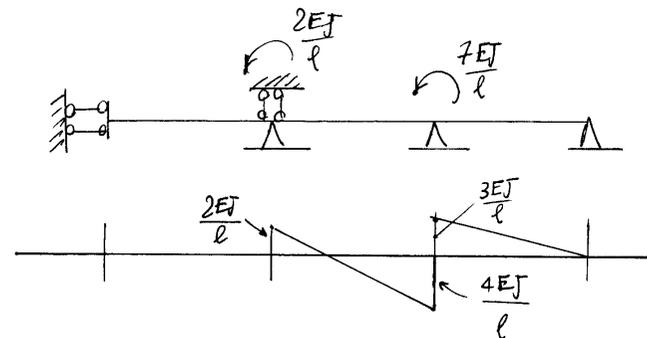
$$\begin{cases} M_A = -\frac{ql^2}{4} \\ M_B = -\frac{ql^2}{12} \end{cases}$$

Rigidzze

① $\varphi_B = 1$ $\varphi_C = 0$ (↻+)



② $\varphi_B = 0$ $\varphi_C = 1$



$$K = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l}$$

5.18 Esercizio 83

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{ql^3}{12EJ} \Rightarrow$$

A meno di $ql^3/12EJ$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5\varphi_B + 2\varphi_C = 3 \\ 2\varphi_B + 7\varphi_C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 31\varphi_C = -1 \\ 31\varphi_B = 19 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_B = \frac{19}{372} \frac{ql^3}{EJ} \\ \varphi_C = -\frac{1}{372} \frac{ql^3}{EJ} \end{cases}$$

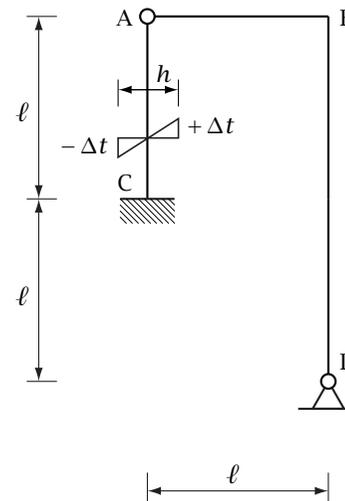
$$M_A = \left(\frac{1}{6} + \frac{19}{372} \right) ql^2 = \frac{81}{372} ql^2 = \frac{27}{124} ql^2$$

$$M_{BA} = \left(-\frac{1}{3} + \frac{19}{372} \right) ql^2 = -\frac{105}{372} ql^2 = \frac{35}{124} ql^2$$

$$M_{BC} = \left(-\frac{1}{12} - \frac{4 \times 19}{372} + \frac{2}{372} \right) ql^2 = -\frac{105}{372} ql^2 = \frac{35}{124} ql^2$$

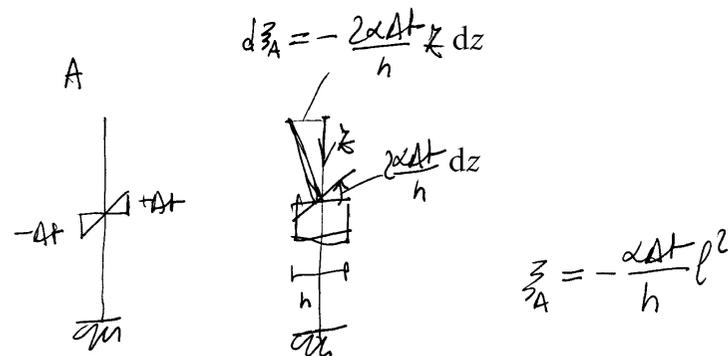
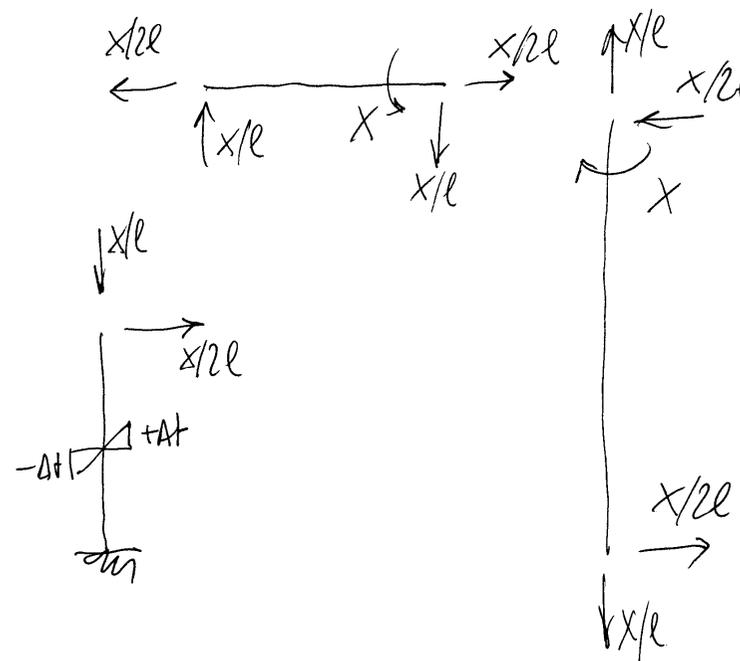
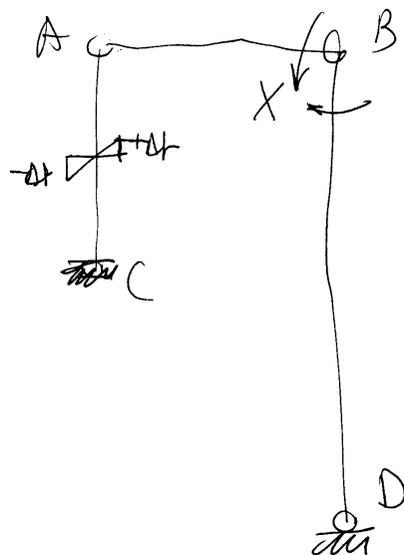
$$M_{CB} = \left(-\frac{1}{12} + \frac{2 \times 19}{372} - \frac{4}{372} \right) ql^2 = \frac{3}{372} ql^2 = \frac{1}{124} ql^2$$

$$M_{CD} = +\frac{3}{372} ql^2 = +\frac{1}{124} ql^2$$



Dato il telaio ad un nodo spostabile di figura:

1. Risolvere la struttura;
 2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 3. Calcolare la rotazione in B e lo spostamento della travata AB;
 4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
- * * * * *
5. Disegnare la curva delle pressioni;
 6. Calcolare la matrice delle rigidezze;
 7. Risolvere la struttura col metodo delle rigidezze;
 8. Calcolare l'energia elastica di deformazione.



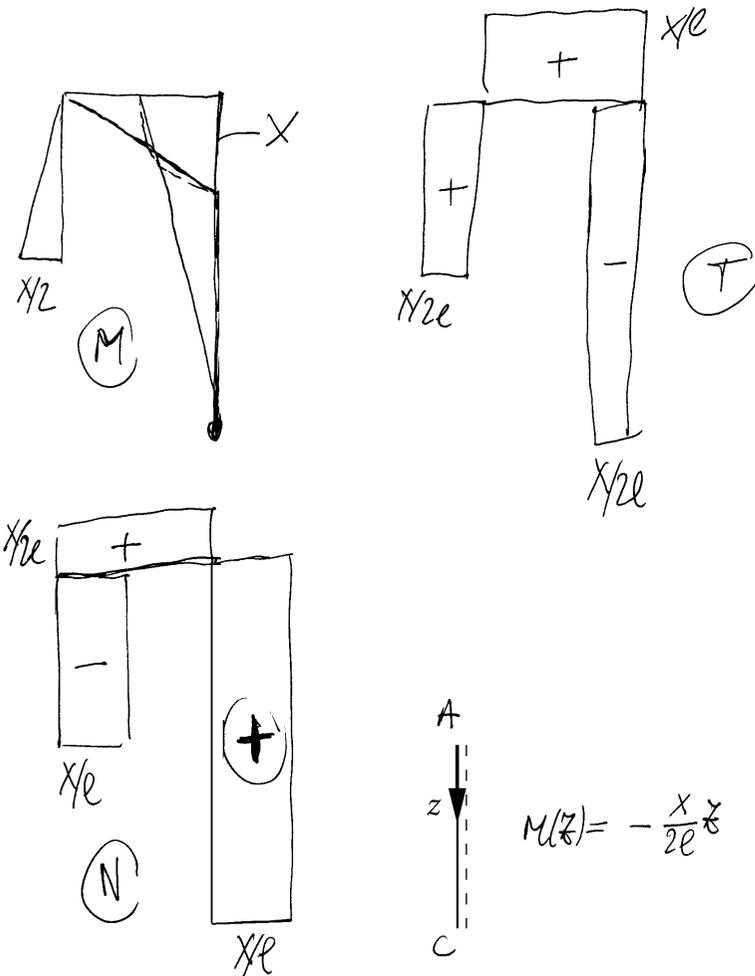
$$\xi_A = \left(\frac{X}{2l}\right) \frac{l^3}{3EI} - \alpha \Delta T \frac{l^2}{h} = \frac{Xl^2}{6EI} - \alpha \Delta T \frac{l^2}{h}$$

$$\varphi_{BA} = \frac{Xl}{3EJ}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{BD} &= -\frac{X(2l)}{3EJ} - \frac{\bar{\zeta}_A}{2l} = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{Xl}{EJ} - \frac{1}{12} \frac{Xl}{EJ} + \frac{\alpha\Delta T l}{2h} \\ &= -\frac{3}{4} \frac{Xl}{EJ} + \frac{\alpha\Delta T l}{2h} \end{aligned}$$

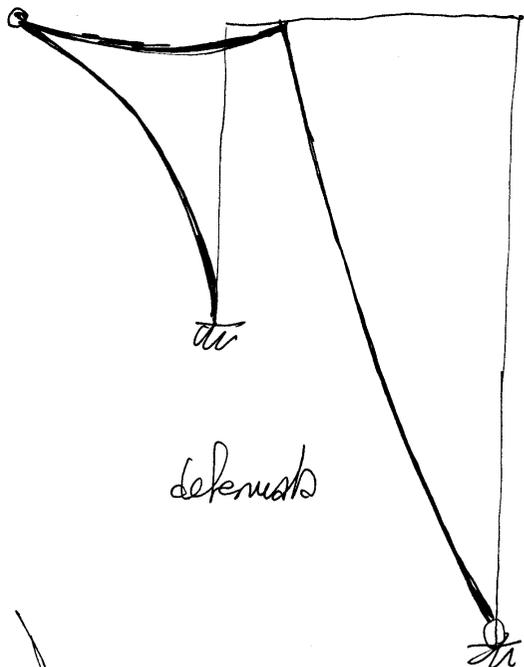
$$\begin{aligned} \varphi_{BA} = \varphi_{BD} &\Rightarrow \frac{13}{12} \frac{Xl}{EJ} = \frac{\alpha\Delta T l}{2h} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \boxed{X = \frac{6}{13} \frac{\alpha\Delta T EJ}{h}} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \varphi_B = \frac{2}{13} \alpha\Delta T \frac{l}{h} \\ \bar{\zeta}_A = -\frac{12}{13} \alpha\Delta T \frac{l^2}{h} \end{cases}$$

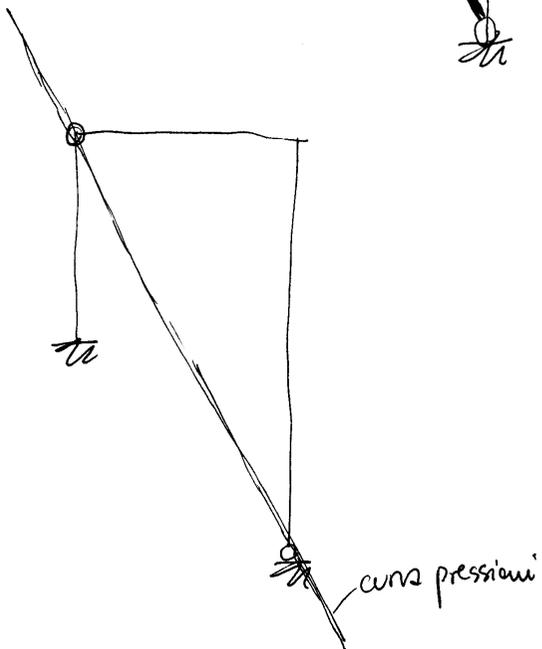


Curvatura nel tratto AC:

$$\kappa = \frac{2\alpha\Delta T}{h} + \frac{M}{EJ} = \frac{2\alpha\Delta T}{h} - \frac{X}{2EJ} \frac{z}{l} = \frac{\alpha\Delta T}{h} \left(2 - \frac{3}{13} \frac{z}{l} \right)$$

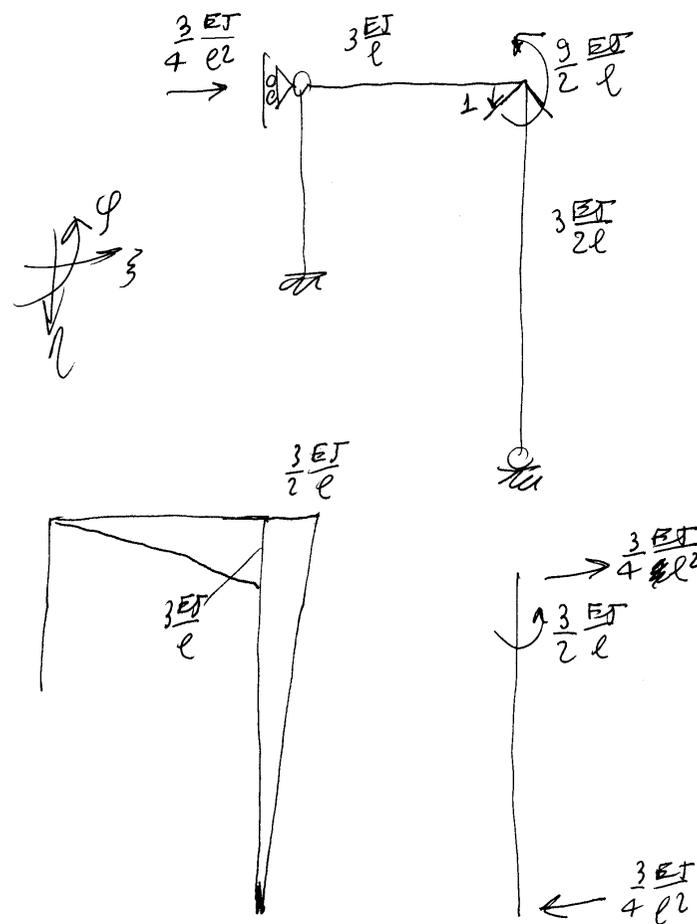


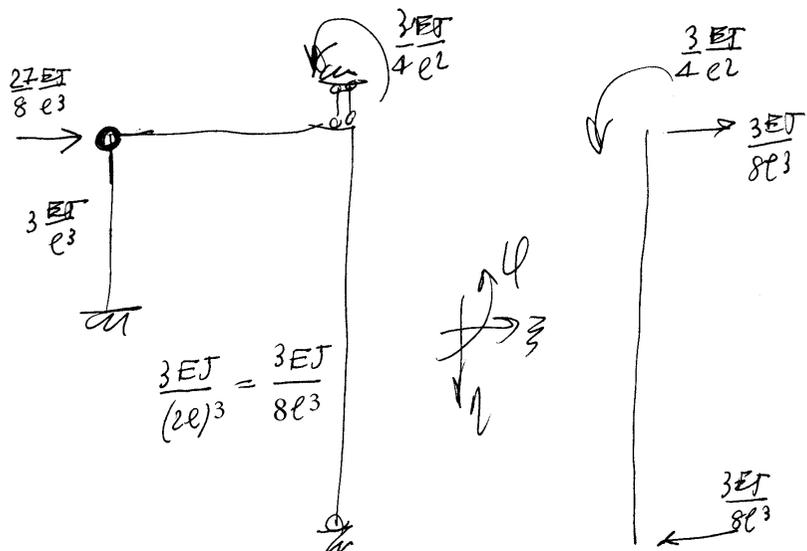
deformata



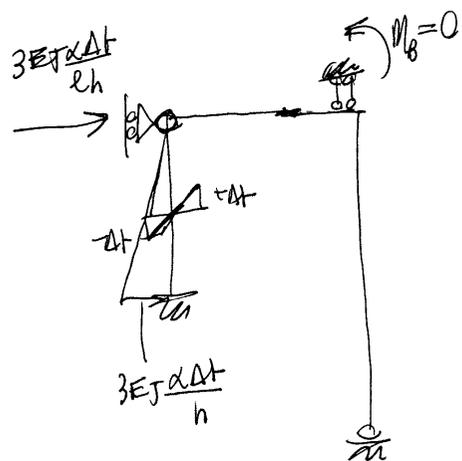
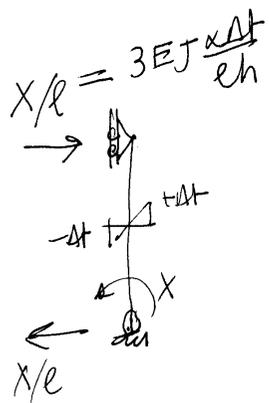
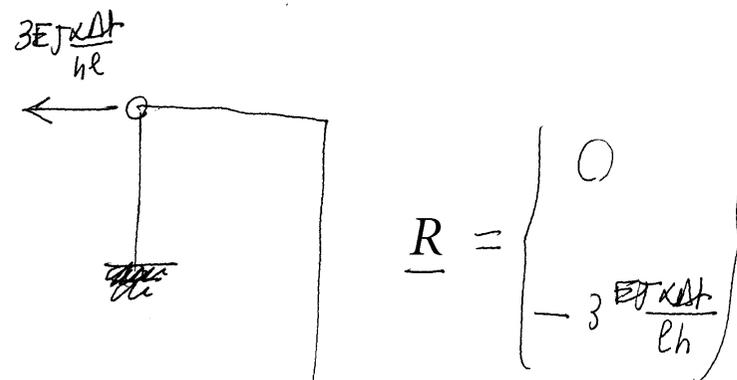
cune pressioni

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \sum_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_B \\ F_{AB} \end{Bmatrix}$$





$$K = \frac{3EJ}{8e^3} \begin{bmatrix} 12e^2 & 2l \\ 2l & 9 \end{bmatrix}$$



$$\frac{3EJ}{8e^3} \begin{bmatrix} 12e^2 & 2l \\ 2l & 9 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \sum_{AB} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3 \frac{EJ\alpha\Delta}{eh} \end{Bmatrix}$$

$$-\frac{\alpha\Delta l}{h} + \frac{Xl}{3EJ} = 0 \Rightarrow X = \frac{3EJ\alpha\Delta}{h}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 12\varphi_B + 2\ell \sum_{AB} = 0 \\ 2\ell \varphi_B + 3 \sum_{AB} = -8\alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h} \end{array} \right.$$

$$52 \sum_{AB} = -48 \alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h} \Rightarrow \sum_{AB} = -\frac{12}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h}$$

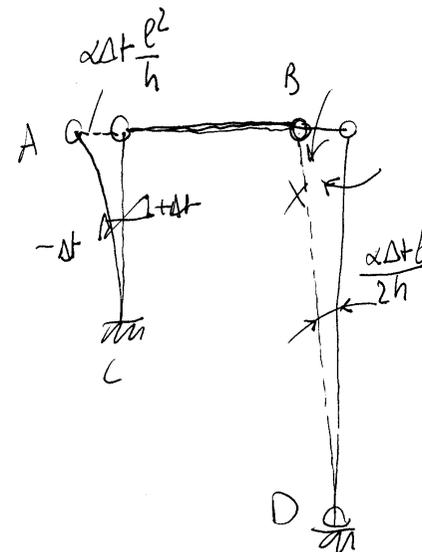
$$104 \ell \varphi_B = 16 \alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h} \Rightarrow \varphi_B = \frac{2}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell}{h}$$

$$M_{BA} = \left(3 \frac{EJ}{\ell} \right) \left(+ \frac{2}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell}{h} \right) = \frac{6}{13} \frac{EJ \alpha\Delta T}{h}$$

$$M_{CA} = 3EJ \frac{\alpha\Delta T}{h} + \left(3 \frac{EJ}{\ell^2} \right) \left(-\frac{12}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h} \right) = \frac{3}{13} \frac{EJ \alpha\Delta T}{h}$$

$$\begin{aligned} M_{BD} &= \left(-\frac{3}{2} \frac{EJ}{\ell} \right) \left(\frac{2}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell}{h} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{-3}{4} \frac{EJ}{\ell^2} \right) \left(-\frac{12}{13} \alpha\Delta T \frac{\ell^2}{h} \right) = \\ &= \left(\frac{9}{13} - \frac{3}{13} \right) \frac{EJ \alpha\Delta T}{h} = \frac{6}{13} \frac{EJ \alpha\Delta T}{h} \end{aligned}$$

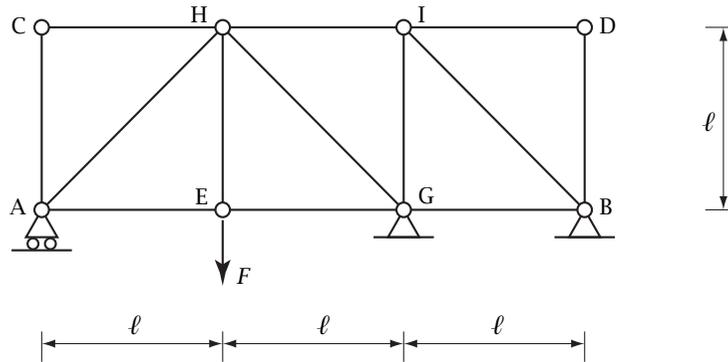
Configurazione naturale:



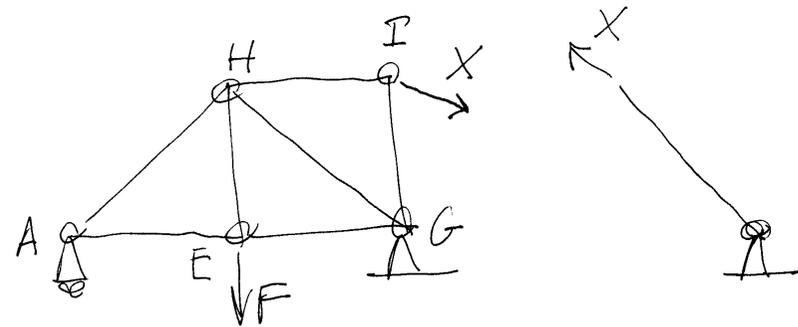
$$\Delta\varphi_B = \frac{\alpha\Delta T \ell}{2h} \Rightarrow L_d = \frac{1}{2} \times \frac{\alpha\Delta T \ell}{2h} = \frac{3}{26} \frac{EJ (\alpha\Delta T)^2}{h^2} \ell$$

$$\begin{aligned} L_d &= \frac{1}{EJ} \left\{ \int_0^\ell \frac{x^2}{4\ell^2} x^2 dx + \int_0^\ell \frac{x^2}{\ell^2} x^2 dx + \int_0^{2\ell} \frac{x^2}{4\ell^2} x^2 dx \right\} \\ &= \frac{1}{2EJ} \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) x^2 \ell = \frac{13}{24} \left(\frac{6}{13} \right)^2 \frac{(\alpha\Delta T)^2}{h^2} EJ \ell \\ &= \frac{3}{26} \frac{EJ (\alpha\Delta T)^2}{h^2} \ell \end{aligned}$$

5.19 Esercizio 84



Schema principale



Con riferimento alla figura e supponendo che le aste abbiano area A uguale:

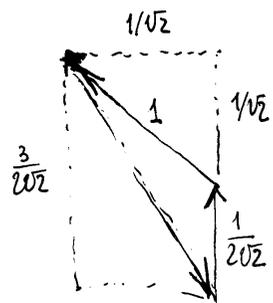
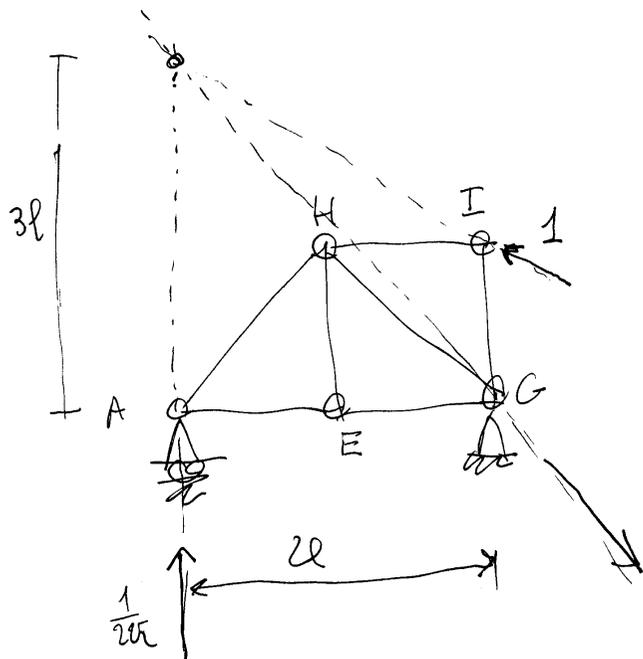
1. Risolvere la struttura reticolare iperstatica utilizzando il metodo delle forze e scrivendo l'equazione di congruenza con il principio dei lavori virtuali;
2. Compilare una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;

Posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200 \text{ GPa}$ e tensione ammissibile $\sigma_{\text{adm}} = 160 \text{ N/mm}^2$, e che inoltre sia $F = 150 \text{ kN}$, $l = 2 \text{ m}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{\text{max}} = 140 \text{ cm}^4$ e $J_{\text{min}} = 100 \text{ cm}^4$:

3. individuare l'asta compressa in condizioni peggiori dal punto di vista del carico di punta e verificarla utilizzando il metodo omega, nell'ipotesi che le cerniere siano sferiche;
4. Valutare il livello critico della forza F relativamente all'instabilità per flessione laterale delle aste compresse;
5. Calcolare l'energia elastica di deformazione (in joule), lo spostamento verticale del nodo E (in millimetri) e l'energia potenziale totale corrispondente alla soluzione (in joule).

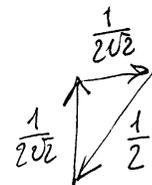
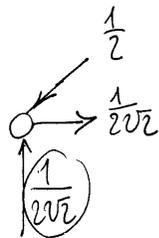
Asta	Area A	Raggio di inerzia minimo $\sqrt{J_{\min}/A}$	Luce ℓ	Snellezza $\ell\sqrt{A/J_{\min}}$	N^f 1	N^o F	N^r $(N^o - XN^f)$	$ N $ F	Tipo
AC	1	1	1	1	=	=	=	0	=
CH	1	1	1	1	=	=	=	0	=
BD	1	1	1	1	=	=	=	0	=
ID	1	1	1	1	=	=	=	0	=
GB	1	1	1	1	=	=	=	0	=
IB	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	=	=	=	0.1049	tirante
HI	1	1	1	1	$-1/\sqrt{2}$	0	$X/\sqrt{2}$	0.0742	tirante
GI	1	1	1	1	$1/\sqrt{2}$	0	$-X/\sqrt{2}$	0.0742	puntone
AE	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EG	1	1	1	1	$1/(2\sqrt{2})$	1/2	$F/2 - X/(2\sqrt{2})$	0.4629	tirante
EH	1	1	1	1	0	1	F	1	tirante
AH	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-1/2$	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} + X/2$	0.6547	puntone
HG	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1/2	$-1/\sqrt{2}$	$-F/\sqrt{2} - X/2$	0.7595	puntone

Schemi delle forze

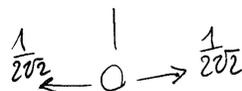


$$L_{ve} = 1 \times \frac{\sqrt{2}l}{EA}$$

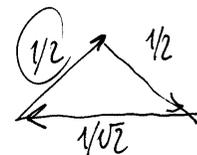
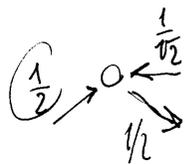
Soluzione schemi forze



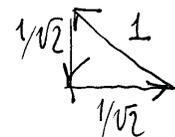
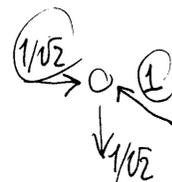
Nodo A



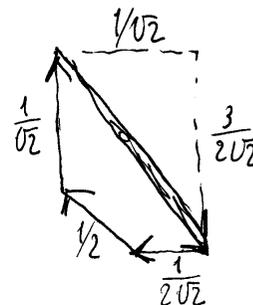
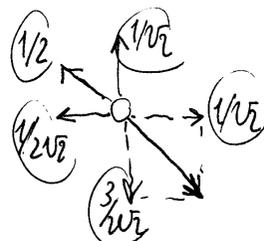
Nodo E



Nodo H

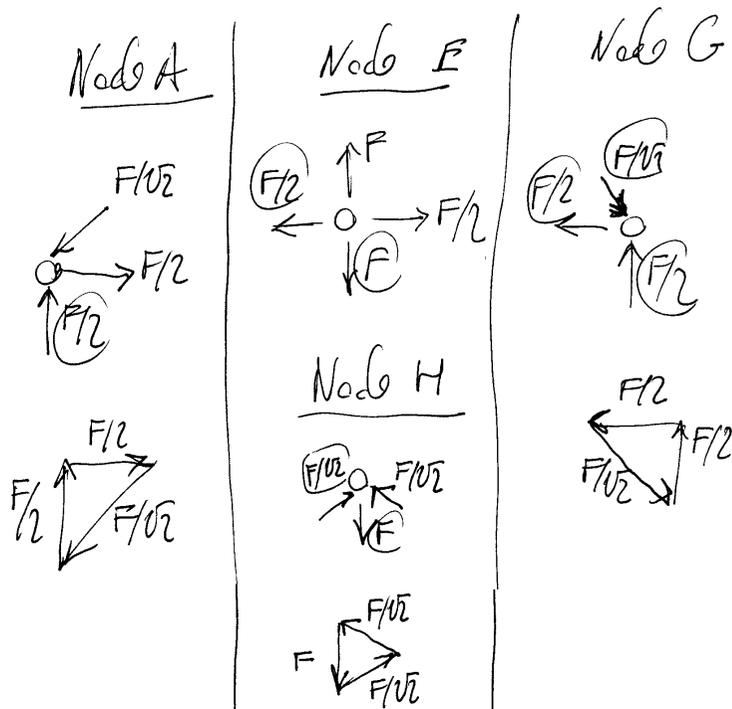
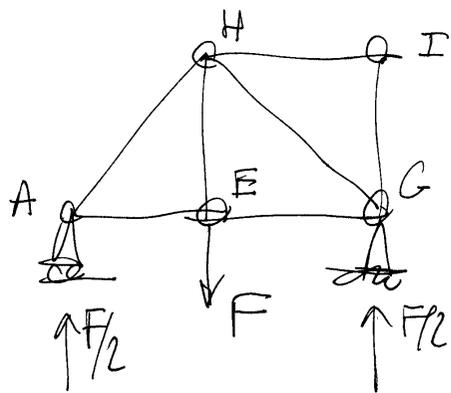


Nodo I

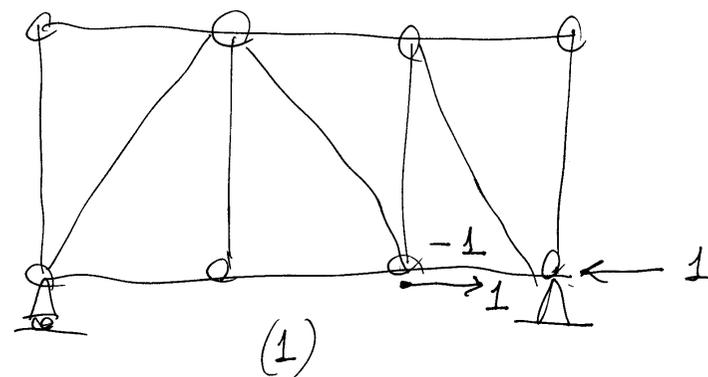
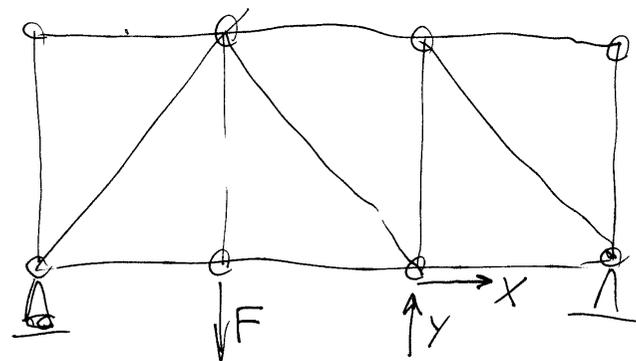


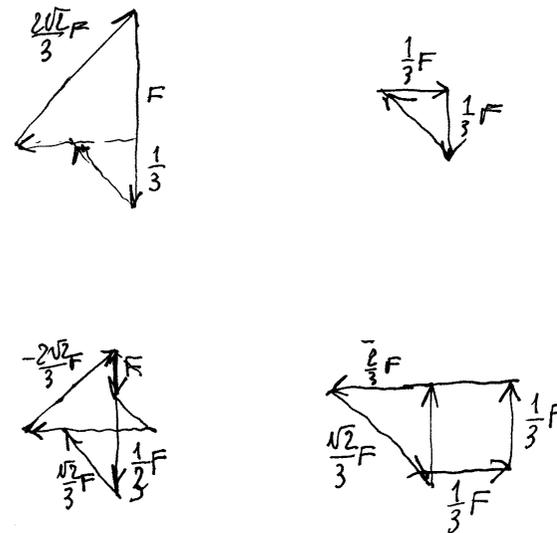
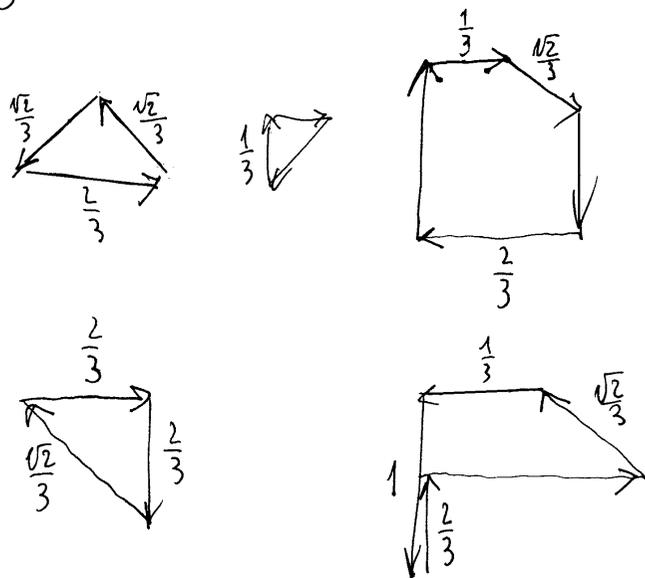
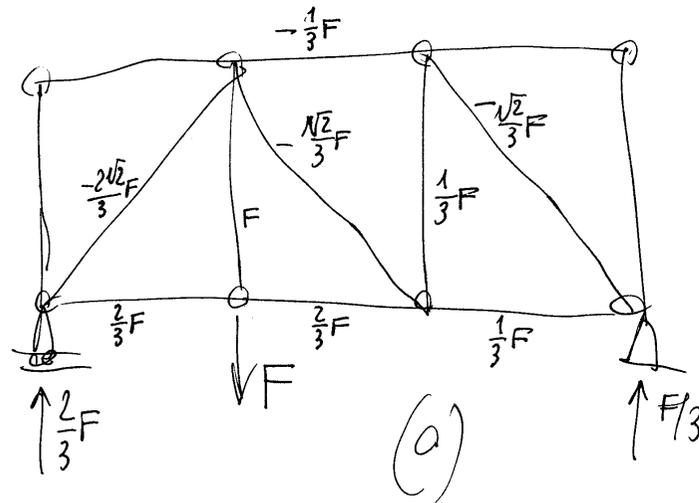
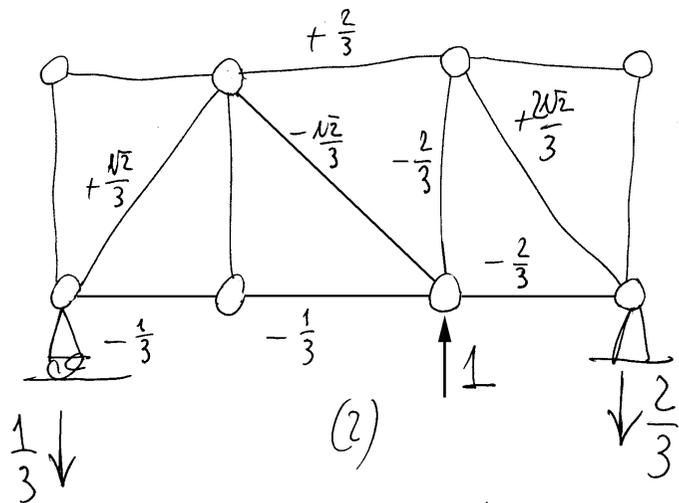
Nodo G

Schema dei nodi



Schema principale





$$-\frac{2}{3}Y - X + \frac{F}{3} = 0$$

$$L_{ve}^{(1)} = 0$$

$$L_{vi}^{(1)} = 1 \times \left(\frac{1}{3}F - X - \frac{2}{3}Y \right) \frac{l}{EA}$$

$$\Rightarrow \boxed{3X + 2Y = F}$$

$$L_{ve}^{(2)} = 0$$

$$L_{vi}^{(2)} = \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}F \right) - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}Y + \frac{2}{3}F \right) \\ & - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}Y - X + \frac{1}{3}F \right) \\ & + \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}Y - \frac{1}{3}F \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}Y - \frac{2\sqrt{2}}{3}F \right) \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}Y - \frac{\sqrt{2}}{3}F \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{2}{3}Y + \frac{1}{3}F \right) \\ & + \frac{4}{3} \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}Y - \frac{\sqrt{2}}{3}F \right) \end{aligned} \right\} \frac{l}{EA}$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} + \frac{4}{9} + \frac{8\sqrt{2}}{9} \right) Y$$

$$+ \left(-\frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{2\sqrt{2}}{9} - \frac{2}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \right) F$$

$$+ \frac{2}{3}X = 0$$

$$\left(\frac{14}{9} + \frac{12\sqrt{2}}{9} \right) Y + \frac{6}{9}X$$

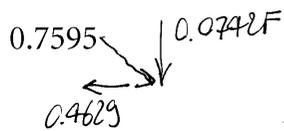
$$- \left(\frac{10}{9} + \frac{6\sqrt{2}}{9} \right) F = 0$$

$$\begin{cases} 6X + (14 + 12\sqrt{2})Y = (10 + 6\sqrt{2})F \\ 3X + 2Y = F \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = \frac{F}{3} - \frac{2}{3}Y \\ 6 \left(\frac{F}{3} - \frac{2}{3}Y \right) + (14 + 12\sqrt{2})Y = (10 + 6\sqrt{2})F \end{cases}$$

$$(10 + 12\sqrt{2})Y = (8 + 6\sqrt{2})F$$

$$\begin{cases} X = -0.0741 F \\ Y = \frac{8 + 6\sqrt{2}}{10 + 12\sqrt{2}} F = 0.6112 F \end{cases}$$



Asta HG

$$N = 0.7595 F = 113.9 \text{ kN}$$

$$l_0 = \sqrt{2} l = 2.83 \text{ m}$$

$$J_{\min} = 2.24 \text{ cm}^4$$

$$\lambda = \frac{l_0}{J_{\min}} = 126 \Rightarrow \omega = 2.68$$

$$\omega \frac{N}{A} = 2.68 \frac{113900}{2000} = 153 \text{ N/mm}^2$$

$$0.7595 F_{cr} = \pi^2 \frac{E J_{\min}}{l_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_{cr} = \frac{\pi^2}{0.7595} \frac{2 \times 10^5 \times 10^6}{2830^2}$$

$$= 324511 \text{ N} = 325 \text{ kN}$$

Energia elastica di deformazione

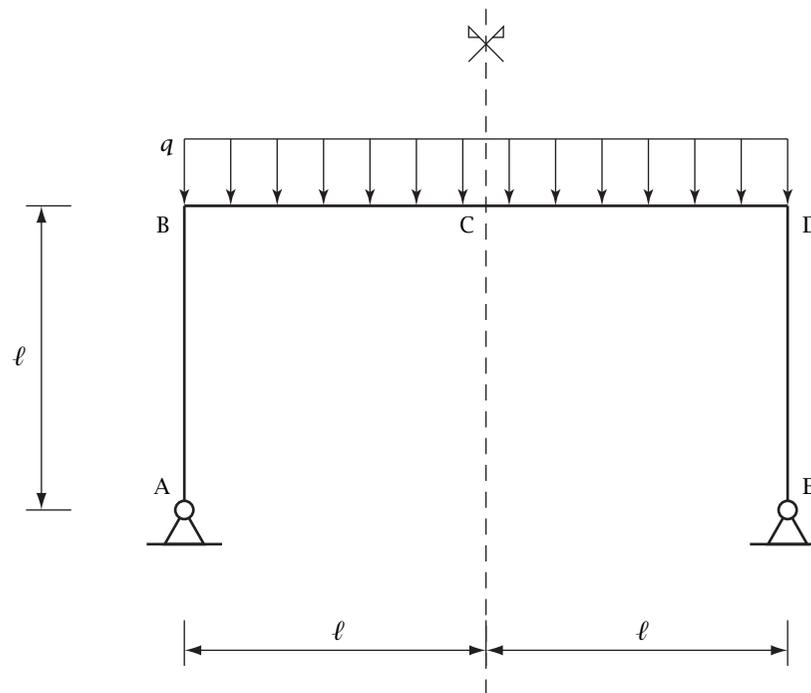
$$L_d = \sum_i \frac{N_i^2 l_i}{EA} = \frac{F^2 l}{EA} \left\{ \sqrt{2} \times 0.1049^2 + 2 \times 0.0742^2 \right. \\ \left. + 2 \times 0.4629^2 + 1 + \sqrt{2} \times 0.6547^2 + \sqrt{2} \times 0.7595^2 \right\} \\ = 2.8771 \frac{F^2 l}{EA} \\ = 2.8771 \times \frac{(1.5 \times 10^5 \text{ N})^2 \times 2 \text{ m}}{2 \times 10^{11} \text{ Pa} \times 20 \times 10^{-4} \text{ m}^2} = 32.37 \text{ J}$$

$$L_d = \frac{1}{2} F \eta_D \Rightarrow \eta_D = 2 \frac{L_d}{F}$$

$$\eta_D = 2 \frac{32.37}{1.5 \times 10^5} = 4.316 \times 10^{-4} \text{ m} = 4.316 \text{ mm}$$

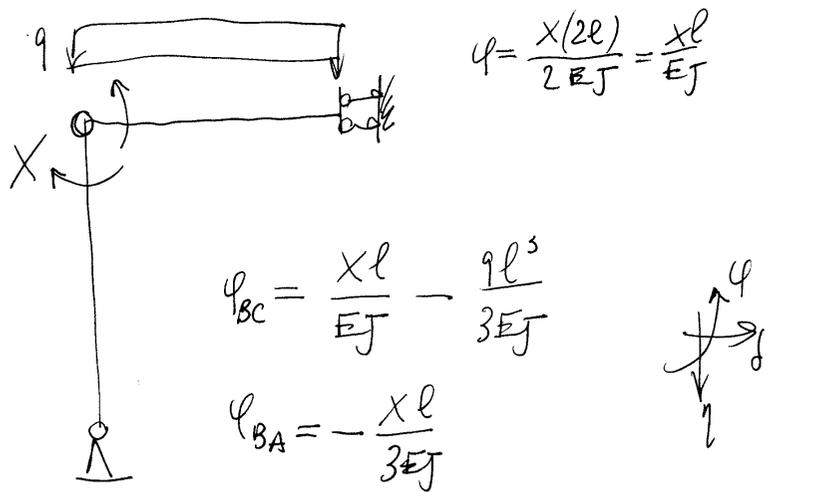
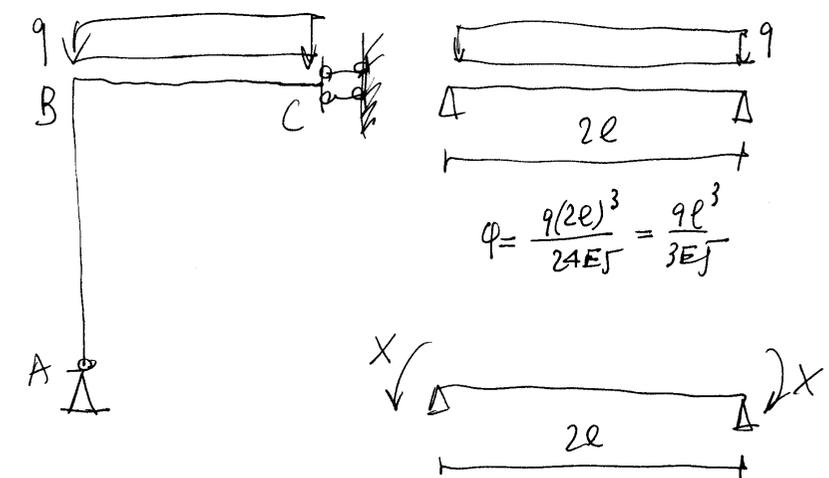
$$\overline{W}_{\text{tot}} = -F \eta_D + \frac{1}{2} F \eta_D \\ = -\frac{1}{2} F \eta_D = -32.37 \text{ J}$$

5.20 Esercizio 85



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto BCD:

1. Risolvere la struttura con il metodo delle forze;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Calcolare la rotazione del nodo B;
6. Disegnare la curva delle pressioni.



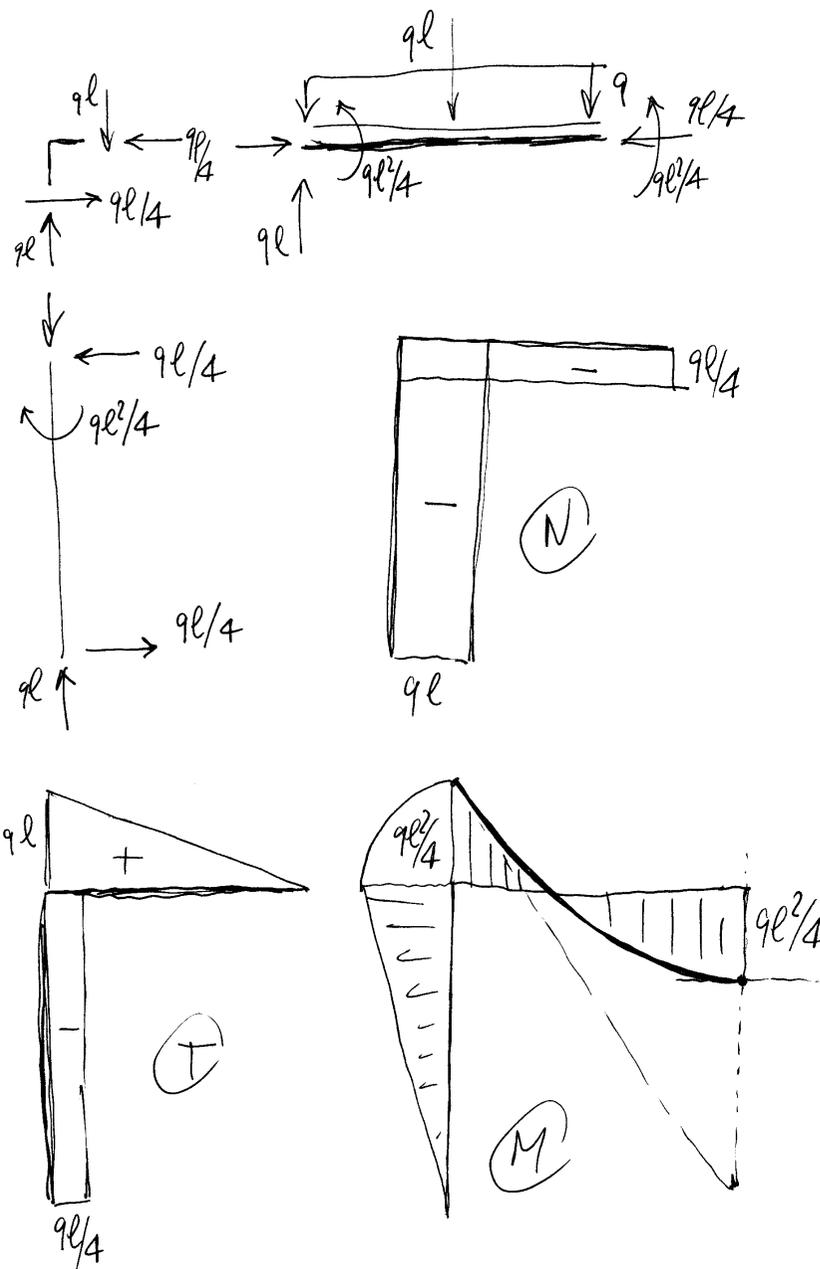
$$\varphi_{BC} = \frac{Xl}{EJ} - \frac{ql^3}{3EJ}$$

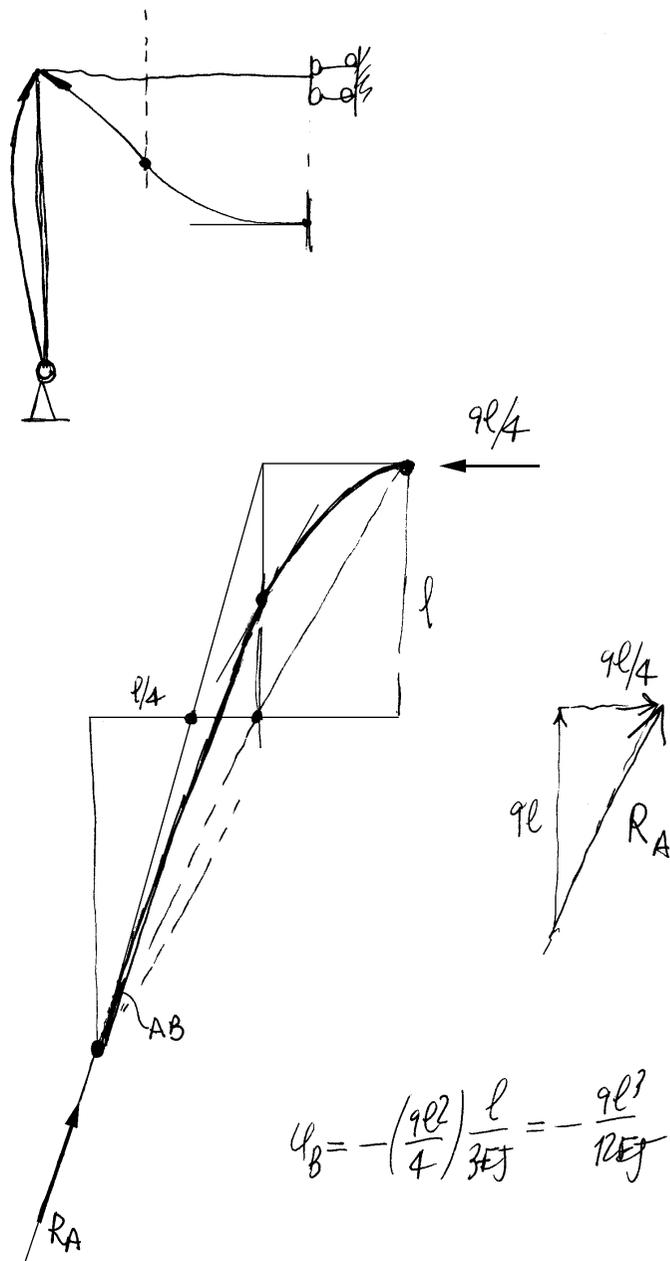
$$\varphi_{BA} = -\frac{Xl}{3EJ}$$



$$\varphi_{BC} = \varphi_{BA} \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{3}\right)X = \frac{ql^2}{3}$$

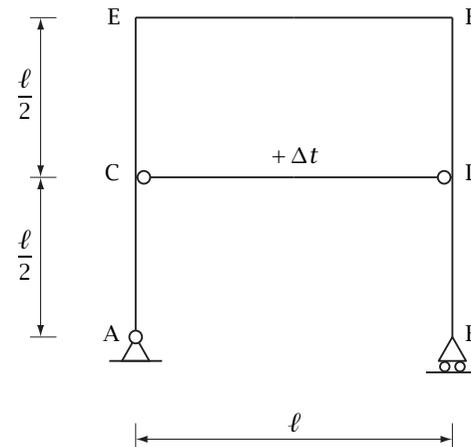
$$X = \frac{ql^2}{4}$$





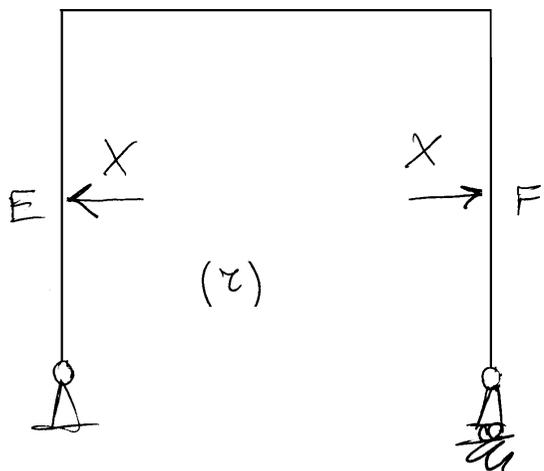
$$u_B = -\left(\frac{q l^2}{4}\right) \frac{l}{3 E J} = -\frac{q l^3}{12 E J}$$

5.21 Esercizio 86

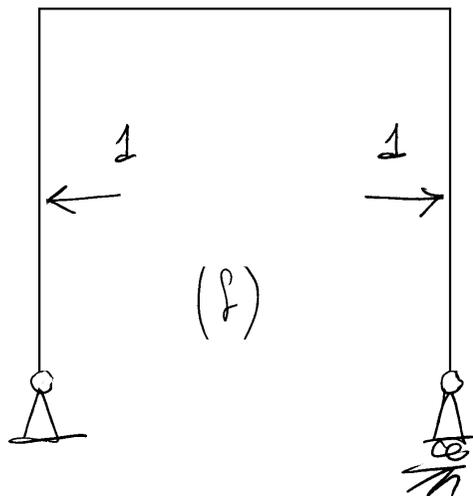
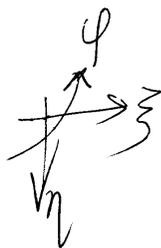


Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo il pendolo CD:

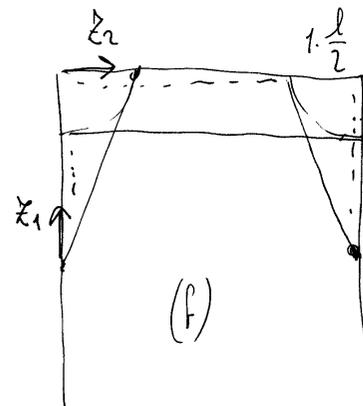
1. Risolvere la struttura trascurando l'effetto dello sforzo normale sulla deformazione del pendolo CD;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
3. Disegnare la curva delle pressioni;
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
5. Calcolare lo spostamento orizzontale del punto B utilizzando il metodo cinematico;
6. Valutare l'energia elastica di deformazione.



$$\sum_F - \sum_E = +\alpha \Delta t l$$



$$L_{ve} = \sum_F - \sum_E$$



$$M^{(c)} = X M^{(f)}$$

$$M^{(f)}(z_1) = 1 \cdot z_1$$

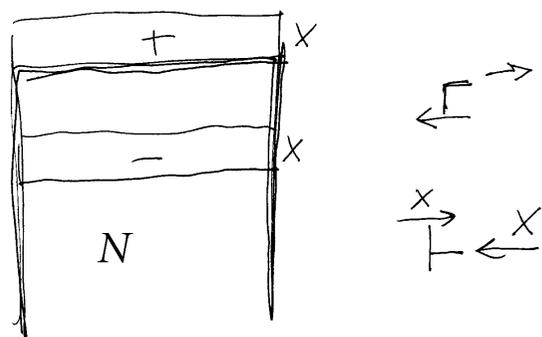
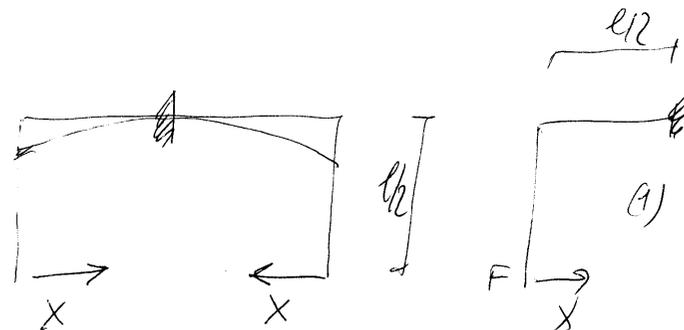
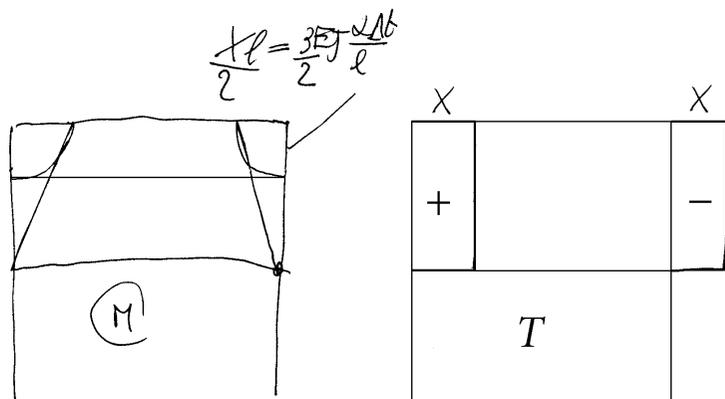
$$M^{(f)}(z_2) = 1 \cdot \frac{l}{2}$$

$$L_{vi} = \int X \frac{(M^f)^2}{EJ} ds =$$

$$= 2 \int_0^{l/2} \frac{X}{EJ} z_1^2 dz_1 + \int_0^l \frac{X}{EJ} \frac{l^2}{4} dz_2 =$$

$$= \frac{X l^3}{EJ} \left(\frac{2}{3} \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{8}{24} \frac{X l^3}{EJ} = \frac{X l^3}{3EJ}$$

$$X = 3EJ \frac{\alpha \Delta t}{l^2}$$



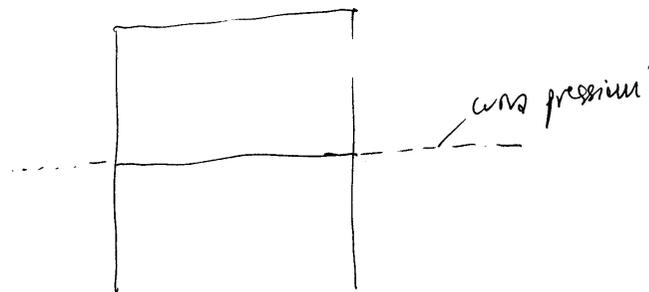
$$2 \sum F^{(1)} = \alpha \Delta t l$$

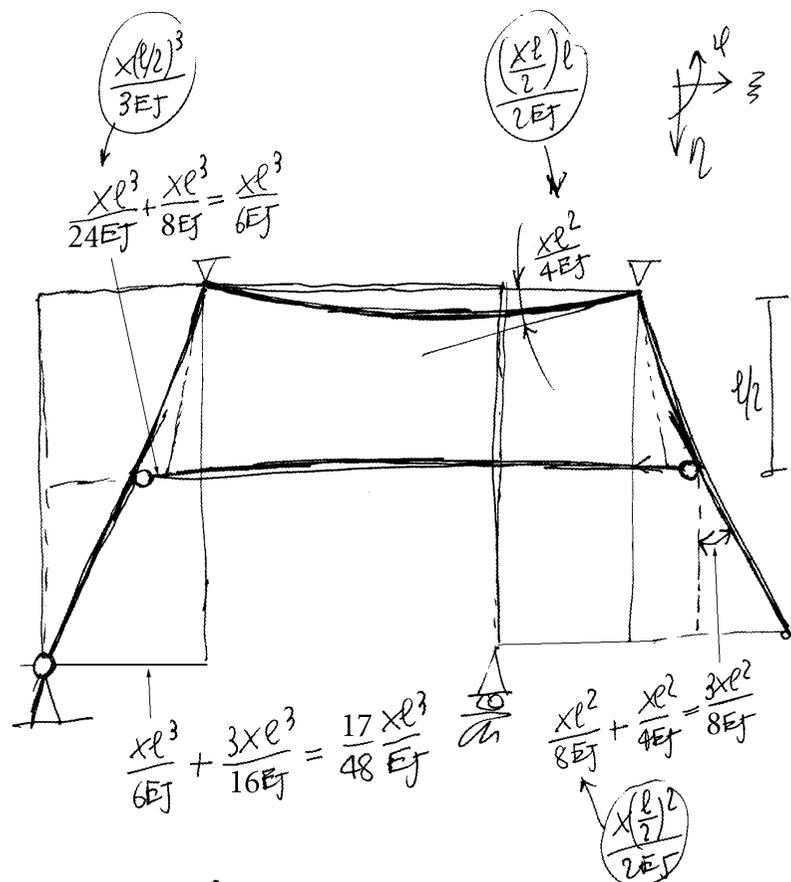


$$\sum F^{(1)} = \frac{X(l/2)^3}{3EJ} + \frac{(X \frac{l}{2}) \frac{l}{2}}{EJ} \cdot \frac{l}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right) \frac{Xl^3}{EJ} = \frac{Xl^3}{6EJ}$$

$$X = \frac{3EJ \alpha \Delta t}{l^2}$$



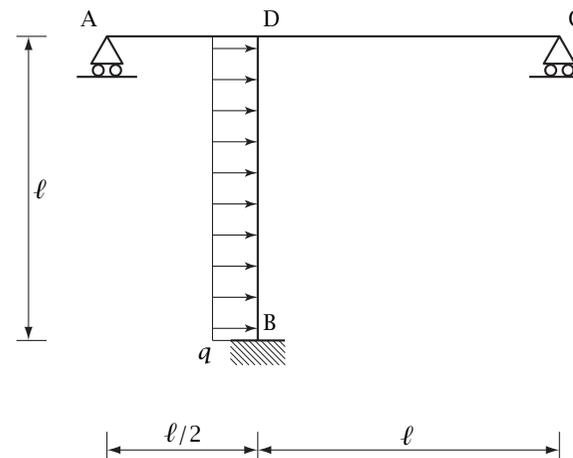


$$v_F = \frac{xl^3}{24EJ}$$

$$v_D = \frac{xl^3}{6EJ}$$

$$z_B = \frac{17}{24} \frac{xl^3}{EJ}$$

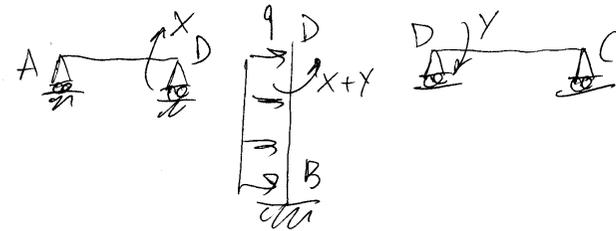
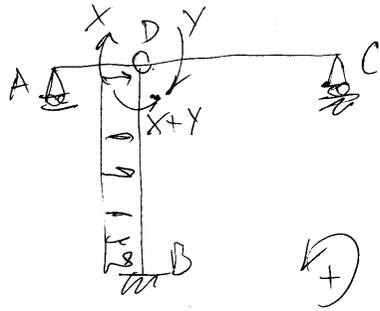
5.22 Esercizio 87



Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico ripartito nel montante BD:

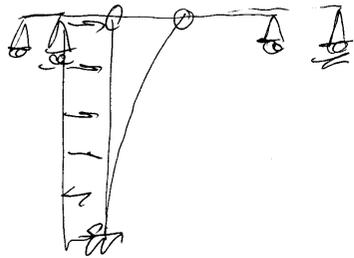
1. Risolvere la struttura;
2. Determinare le reazioni dei vincoli esterni ed interni;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
4. Disegnare la curva delle pressioni;
5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
6. Calcolare lo spostamento orizzontale della travata ADC utilizzando il principio dei lavori virtuali.

Metodo forze:

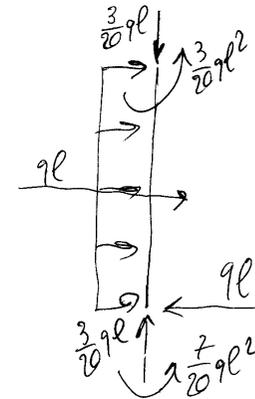
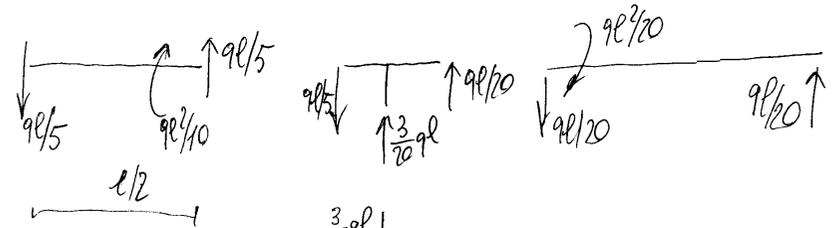


$$\begin{cases} X = 2Y \\ -X = -9l^2 + 6X + 6Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = 2Y \\ 7X + 6Y = 9l^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X = \frac{9l^2}{10} \\ Y = \frac{9l^2}{20} \end{cases} \Rightarrow X + Y = \frac{3}{20} 9l^2$$



effetto solo carico



$$M_B = \frac{9l^2}{2} - \frac{3}{20} 9l^2$$

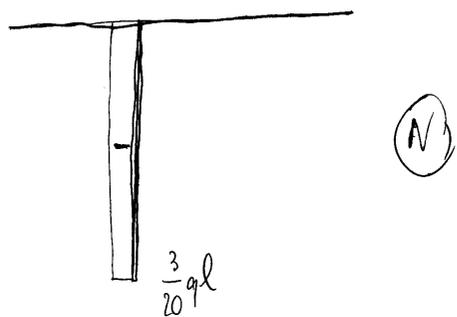
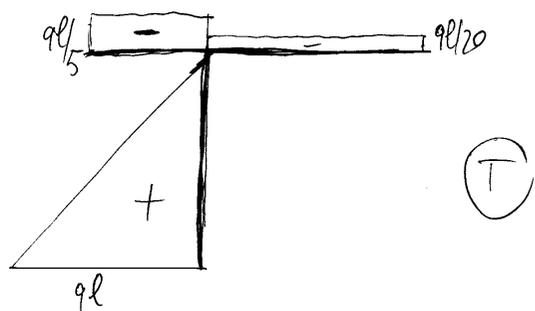
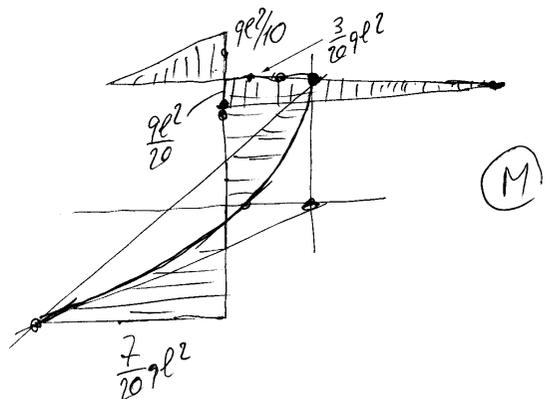
Compattezza:

$$\varphi_{DA} = \varphi_{DC} \Rightarrow -\frac{x(l/2)}{3EJ} = -\frac{y(l)}{3EJ}$$

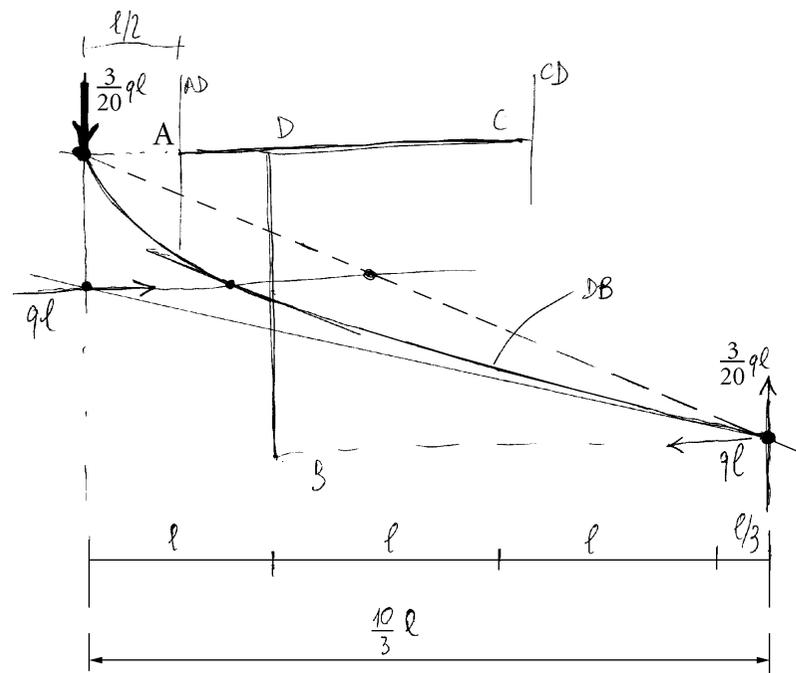
$$\varphi_{DA} = \varphi_{DB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x(l/2)}{3EJ} = -\frac{9l^3}{6EJ} + \frac{(x+y)l}{EJ}$$

Diagrammi



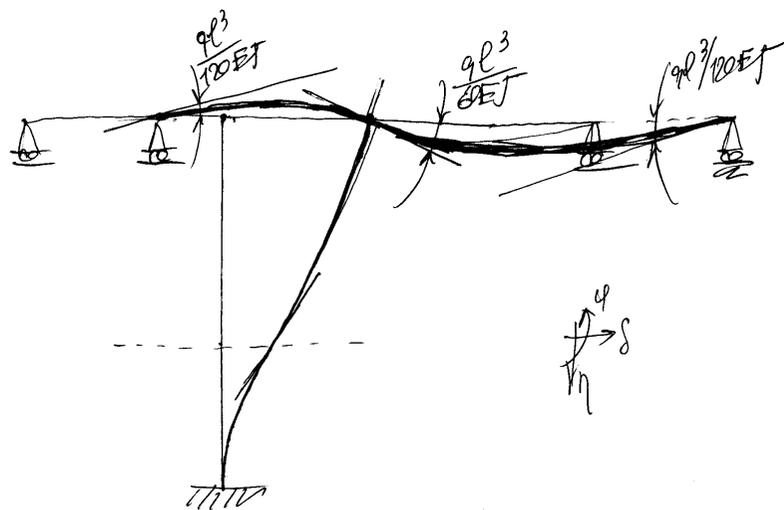
curva pressioni



$$\left(\frac{10}{39}\right) \left(\frac{3}{20} q l\right) = \frac{l}{2}$$

$$\frac{10}{39} (9 q l) = \frac{10}{3} l$$

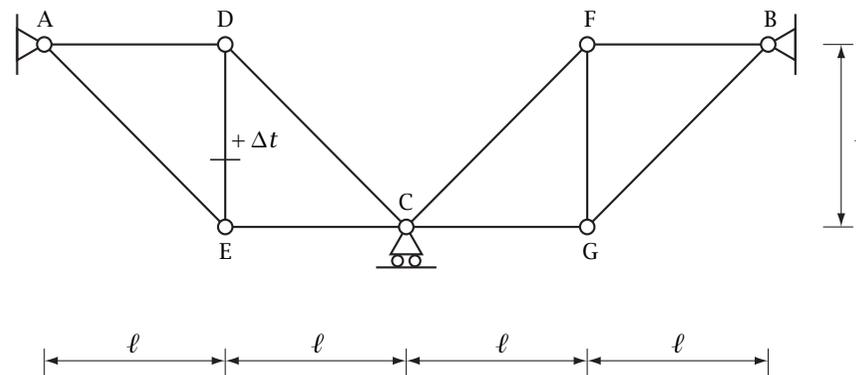
Deformata



$$\varphi_D = -\frac{yl}{3EJ} = -\frac{ql^3}{8EJ}$$

$$\begin{aligned} \delta_D &= \frac{ql^4}{8EJ} - \frac{(x+y)l^2}{2EJ} \\ &= \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{40}\right) \frac{ql^4}{EJ} = \frac{ql^4}{20EJ} \end{aligned}$$

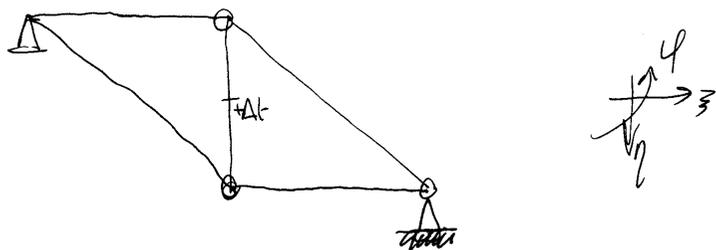
5.23 Esercizio 88



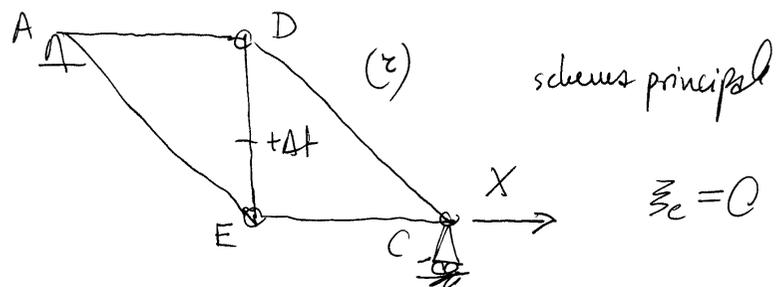
Data la travatura reticolare assialsimmetrica e iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme in corrispondenza dell'asta DE, e supponendo che le aste abbiano area A uguale:

1. Impostare la soluzione del problema tenendo conto della assialsimmetria della struttura;
 2. Risolvere lo schema simmetrico utilizzando il metodo delle forze, compilando una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
-
3. Relativamente allo schema emisimmetrico, valutare lo spostamento orizzontale del nodo C utilizzando il metodo cinematico.

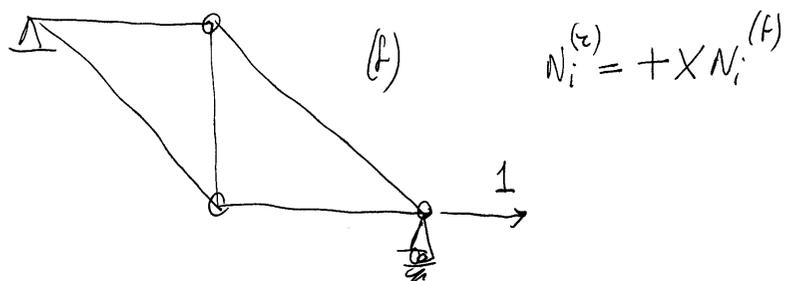
Schema simmetrico 1 volta iperstatico



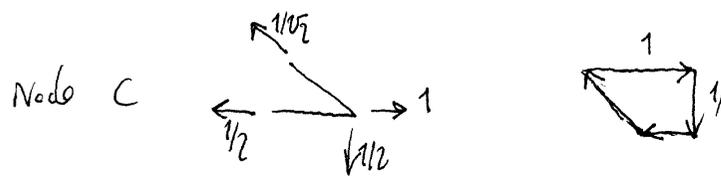
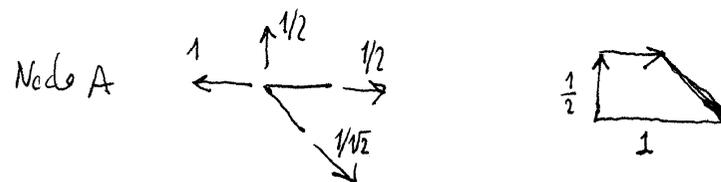
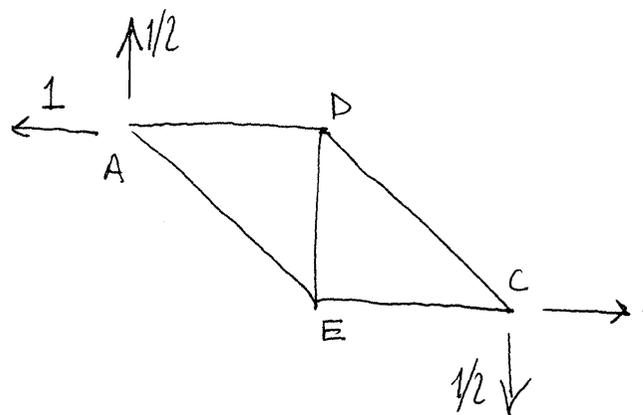
Metodo forze



Schema bilancio



$L_{re} = 1 \cdot \sum z_c$ $L_{ri} = \sum_i N_i^{(F)} \left(\frac{N_i^{(z)} l_i}{E_i A_i} + E_{di} l_i \right)$



Aste	l_i	$N_i^{(A)}$	$N_i^{(B)}$	$\varepsilon_d^{(B)}$	L_{vi}	$N_i^{(r)}/EA\alpha_t\Delta t$
AD	l	$1/2$	$X/2$	0	$\frac{xl}{4EA}$	0.11552
AE	$\sqrt{2}l$	$1/\sqrt{2}$	$X/\sqrt{2}$	0	$\frac{xl}{\sqrt{2}EA}$	0.16336
DE	l	$-1/2$	$X/2$	$\alpha_t\Delta t$	$\frac{xl}{4EA} - \frac{\alpha_t\Delta t l}{2}$	-0.11552
EC	l	$1/2$	$X/2$	0	$\frac{xl}{4EA}$	0.11552
DC	$\sqrt{2}l$	$1/\sqrt{2}$	$X/\sqrt{2}$	0	$\frac{xl}{\sqrt{2}EA}$	0.16336

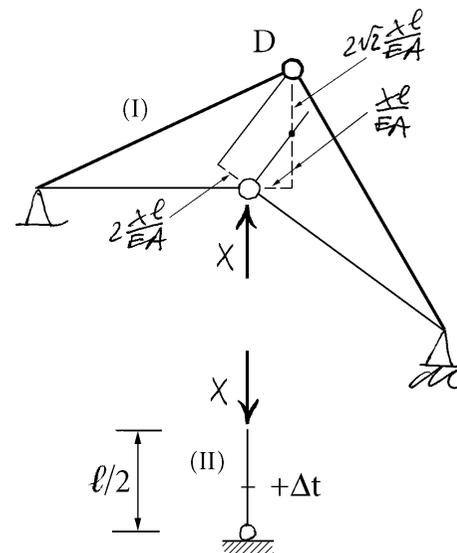
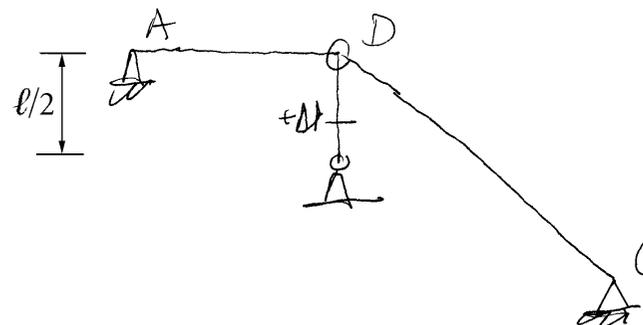
$$\xi_c = \left(\frac{3}{4} + \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \frac{xl}{EA} - \frac{\alpha_t\Delta t l}{2}$$

$$\xi_c = 0 \Rightarrow X = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 8} EA\alpha_t\Delta t$$

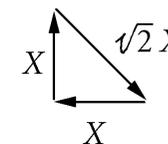
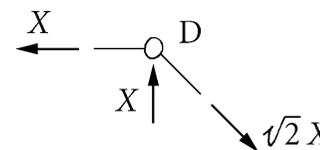
$$\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} + 8} = \frac{2}{3 + 4\sqrt{2}} = 0.23103$$

$$X = 0.23103 EA\alpha_t\Delta t$$

Tenendo conto della persione simmetria



$$\eta_D^{(I)} = \eta_D^{(II)}$$



$$\eta_D^{(II)} = \frac{X(l/2)}{EA} - \alpha_t \Delta t \frac{l}{2}$$

$$\Delta l_{AD} = \frac{Xl}{EA}$$

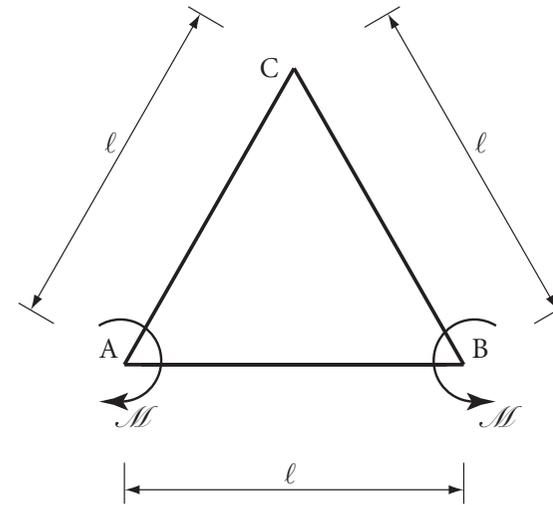
$$\Delta l_{DC} = \frac{(\sqrt{2}X)(\sqrt{2}l)}{EA} = 2 \frac{Xl}{EA}$$

$$\eta_D^{(I)} = (2\sqrt{2} + 1) \frac{Xl}{EA}$$

$$\eta_D^{(I)} = \eta_D^{(II)} \Rightarrow X = \frac{1}{3 + 4\sqrt{2}} EA \alpha_t \Delta t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_D = \frac{\alpha_t \Delta t l}{3 + 4\sqrt{2}} \\ \eta_D = - \frac{1 + 2\sqrt{2}}{3 + 4\sqrt{2}} \alpha_t \Delta t l \\ \xi_E = - \xi_D \\ \eta_E = - \eta_D \end{array} \right.$$

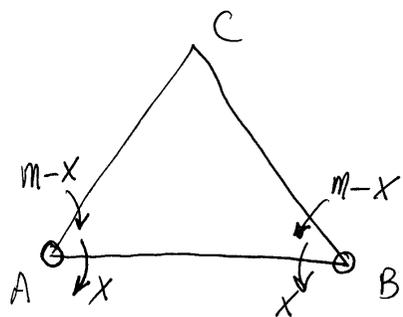
5.24 Esercizio 89



Data la struttura chiusa iperstatica assialsimmetrica di figura:

1. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche;
2. Scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Disegnare qualitativamente il diagramma del momento flettente;
4. Valutare le incognite iperstatiche.

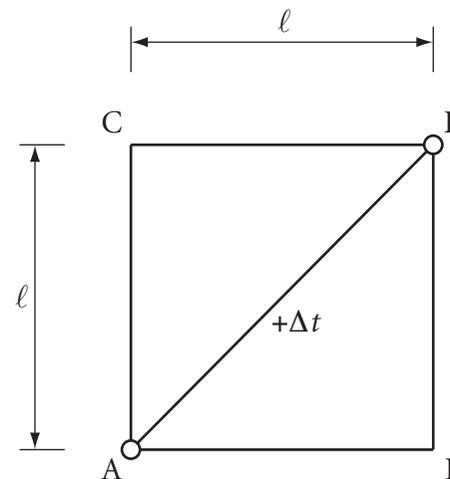
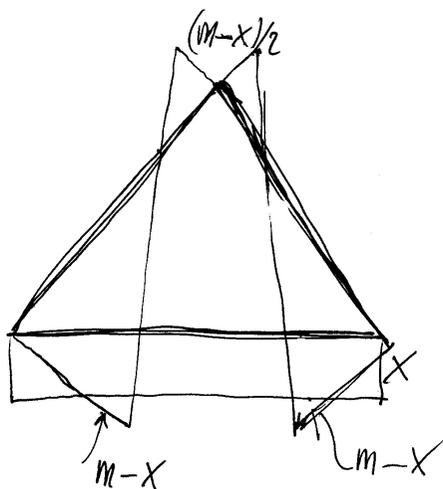
5.25 Esercizio 90



$$\varphi_A^{(AB)} = \varphi_A^{(AC)} \Rightarrow -\frac{Xl}{2EJ} = -\frac{(m-X)l}{4EJ}$$

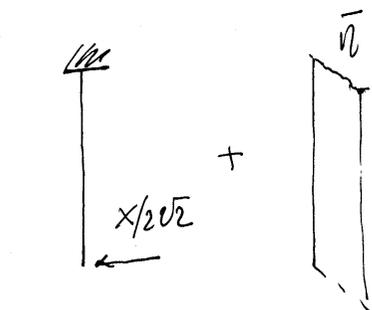
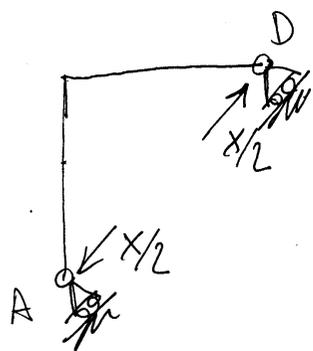
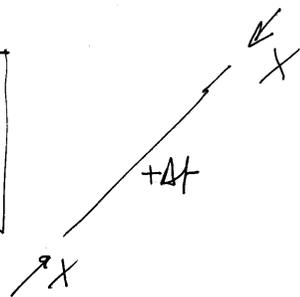
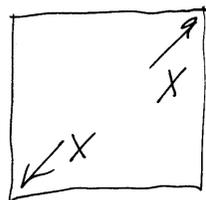
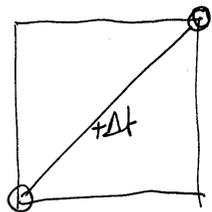
$$\Rightarrow \frac{3}{4} \frac{Xl}{EJ} = \frac{ml}{4EJ} \Rightarrow X = \frac{ml}{3}$$

$$m-X = \frac{2}{3} m$$



Data la struttura chiusa iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo il pendolo AD, da considerarsi indeformabile assialmente:

1. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche;
2. Scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Disegnare qualitativamente il diagramma del momento flettente;
4. Valutare le incognite iperstatiche.



non contribuisce al calcolo di \bar{z}_A

$$\Delta \bar{z}_{AD} = \alpha \Delta T \sqrt{2} l$$

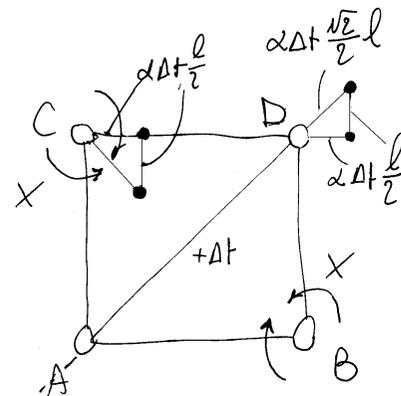
$$\bar{z}_A = \alpha \Delta T \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\bar{z}_A = \frac{x l^3}{12 E J}$$

$$x = \frac{12}{\sqrt{2}} E J \alpha \Delta T / l^2$$

$$l_A = - \frac{(x/2\sqrt{2}) l^3}{3\sqrt{2} E J} + \bar{1}$$

$$l_A = 0 \Rightarrow \bar{1} = \frac{x l^3}{12 E J}$$

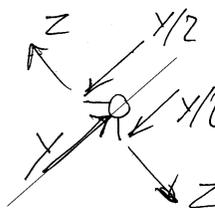


$$\varphi = - \frac{x l}{3 E J} + \alpha \Delta T$$

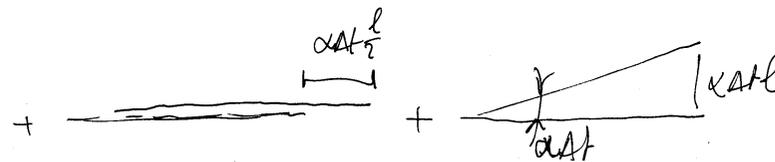
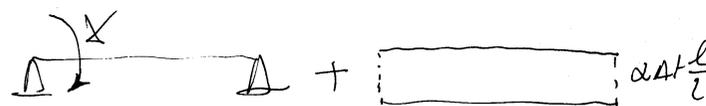
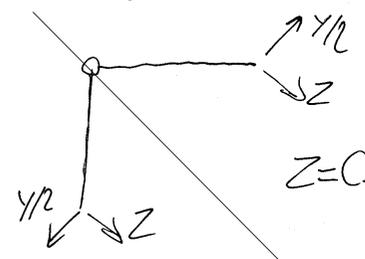
$$\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 3 E J \frac{\alpha \Delta T}{l}$$

1^a simmetria



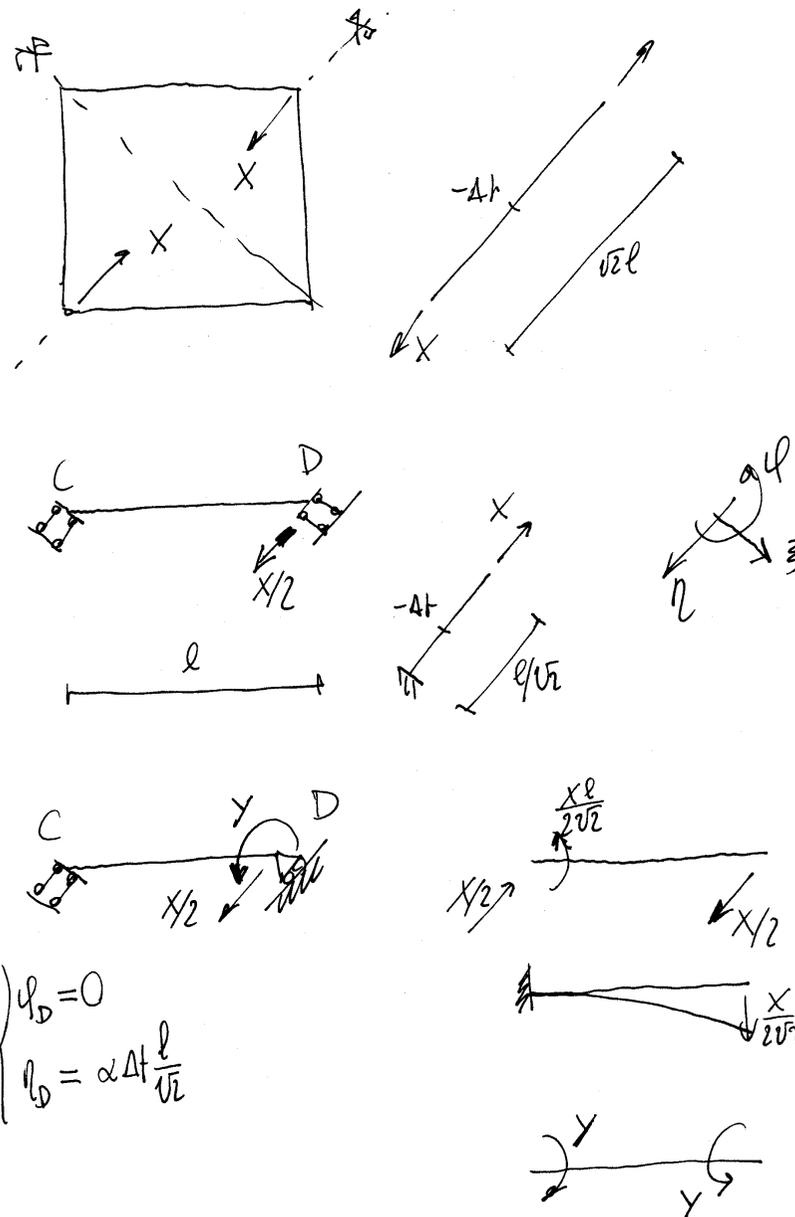
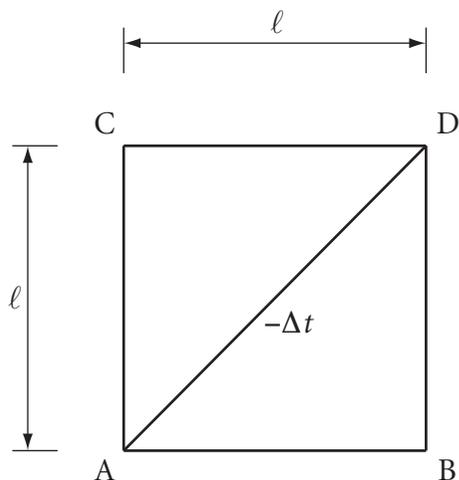
2^a simmetria



$$y/2 = \frac{x}{l} \sqrt{2}$$

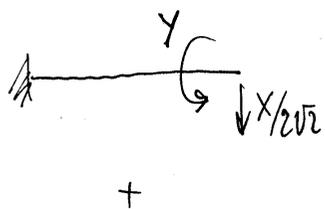
$$y = 2\sqrt{2} \frac{x}{l}$$

5.26 Esercizio 91



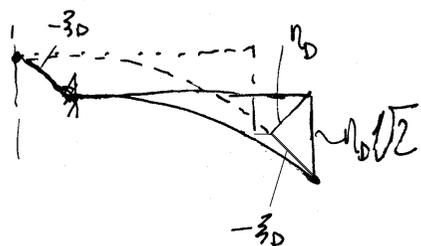
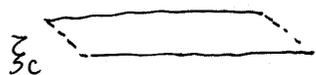
1. Analizzare cinematicamente la struttura;
2. Risolvere la struttura iperstatica;
3. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e della forza normale;
4. Disegnare la deformata della struttura;
5. Disegnare la curva delle pressioni.

$$\left. \begin{aligned} y_D &= 0 \\ y_D &= \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\}$$



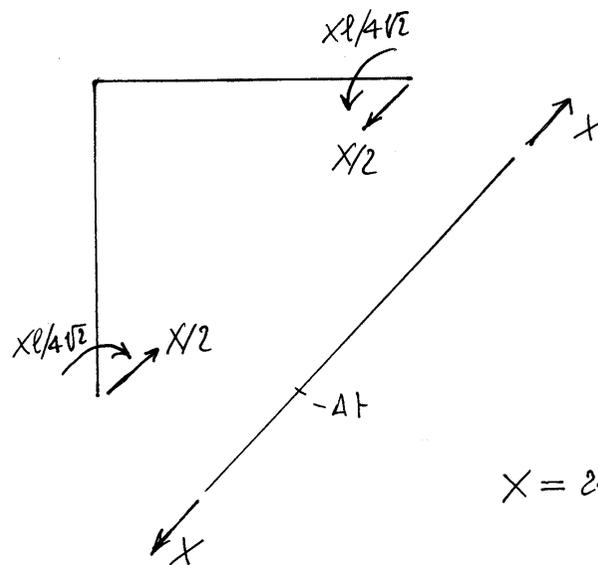
$$\rho_D = \frac{Yl}{EJ} - \frac{(X/2\sqrt{2})l^2}{2EJ}$$

$$\sqrt{2}\rho_D = -\frac{Yl^2}{2EJ} + \frac{(X/2\sqrt{2})l^3}{3EJ}$$



$$\rho_D = 0 \Rightarrow X = 4\sqrt{2} \frac{Y}{l}$$

$$Y = \frac{Xl}{4\sqrt{2}}$$

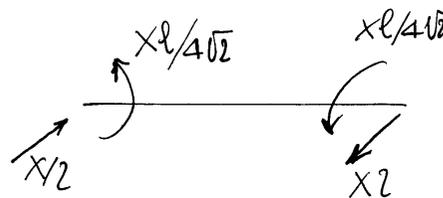


$$X = 24\sqrt{2} \frac{EJ\alpha\Delta T}{l^2}$$

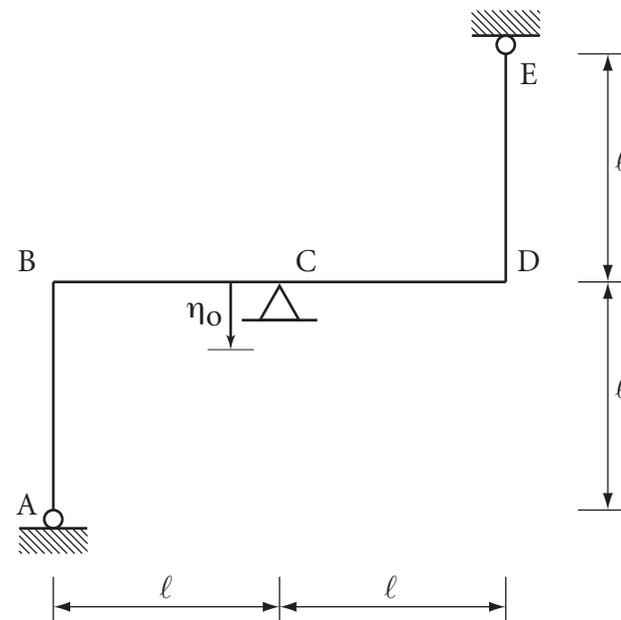
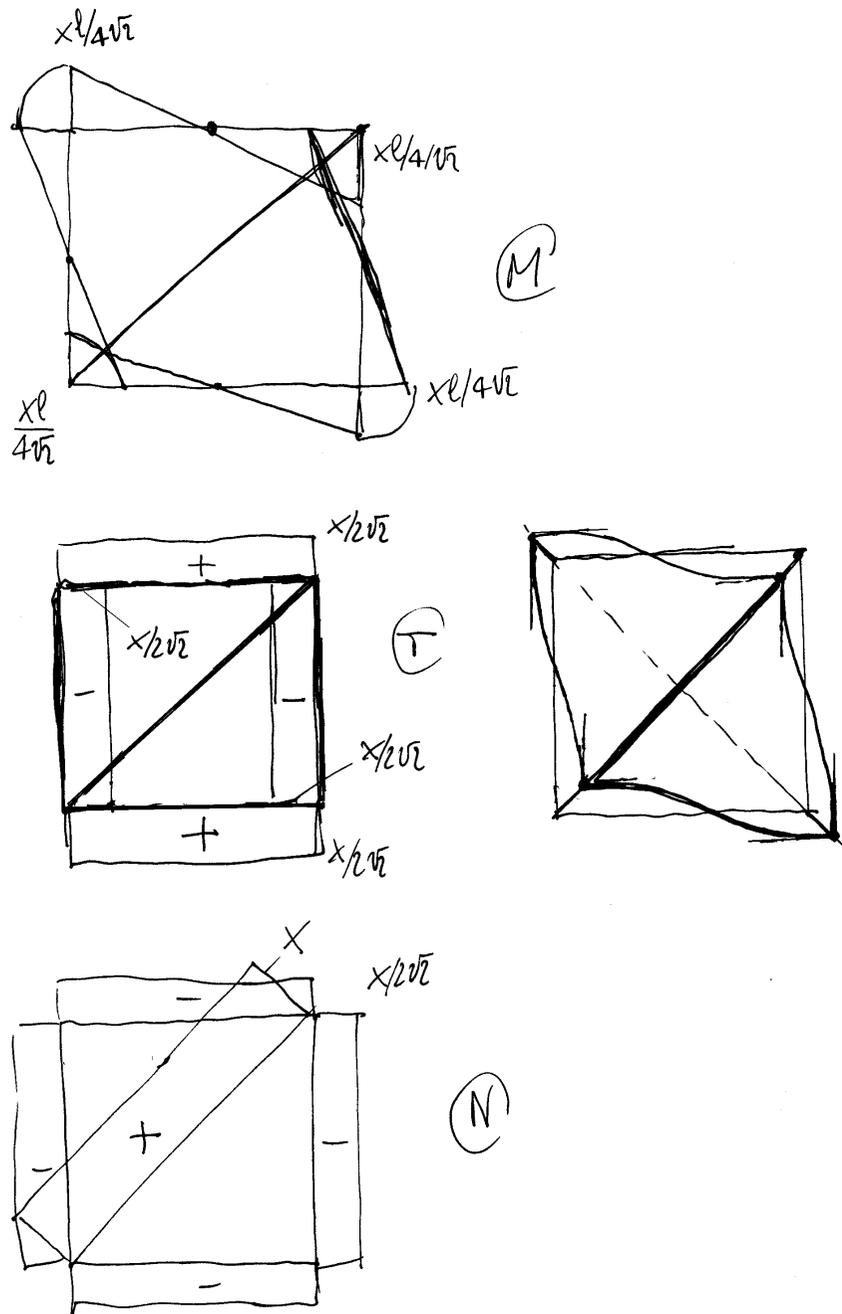
$$\sqrt{2}\rho_D = \alpha\Delta T l \Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{Y}{l} + \frac{X}{6\sqrt{2}} = \frac{\alpha\Delta T EJ}{l^2}$$

$$-\frac{1}{2} \frac{Y}{l} + \frac{2}{3} \frac{Y}{l} = \frac{\alpha\Delta T EJ}{l^2}$$

$$\left. \begin{aligned} Y &= 6 \frac{\alpha\Delta T EJ}{l} \\ X &= 24\sqrt{2} \frac{\alpha\Delta T EJ}{l^2} \end{aligned} \right\}$$

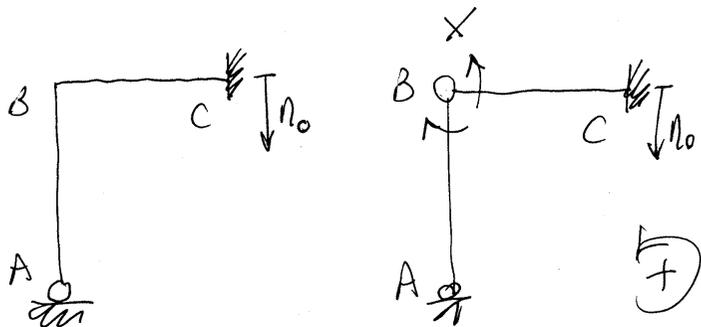


5.27 Esercizio 92



Dato il sistema iperstatico polarsimmetrico di figura (invariante per rotazioni di 180 gradi nel piano) soggetto ad un cedimento verticale dell'appoggio del polo C:

1. Dire se l'azione (il cedimento) è polarsimmetrico oppure polare-misimmetrico e ridursi alla soluzione di uno schema equivalente dimezzando la struttura;
2. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche e scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Determinare le incognite iperstatiche.

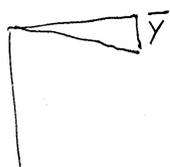
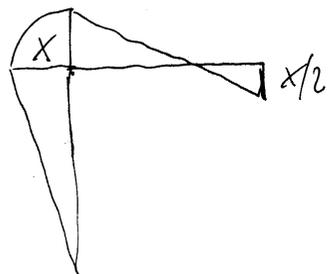


$$\varphi_B^{(AB)} = \varphi_B^{(CB)}$$

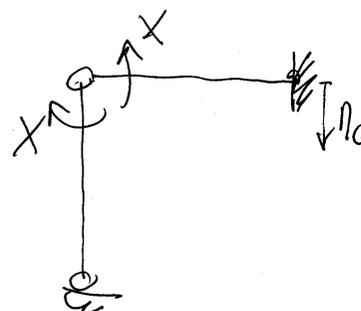
$$-\frac{Xl}{3EJ} = \frac{Xl}{4EJ} - \frac{(\bar{Y}l)^2}{2EJ} \Rightarrow \frac{7}{12}X = \frac{\bar{Y}}{2}$$

$$\Rightarrow X = \frac{6}{7}\bar{Y} = \frac{18EJ}{7l^2}N_0$$

$$Y = \frac{X}{2} + \bar{Y} = \frac{10}{7}\bar{Y} = \frac{30EJ}{7l^2}N_0$$

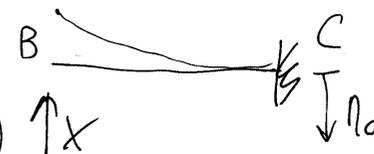


$$\frac{Yl}{3EJ} - \frac{N_0}{l} = 0 \Rightarrow \bar{Y} = \frac{3EJ}{l^2}N_0$$



$$-\frac{Xl}{3EJ} = \frac{Xl}{4EJ} - \frac{3}{2}\frac{N_0}{l}$$

$$X = \frac{18EJ}{7} \frac{N_0}{l}$$



$$N_B = 0$$

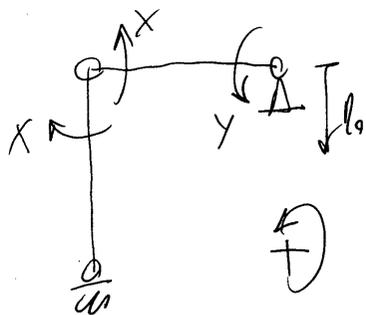
$$N_0 - \frac{Xl^3}{3EJ} = 0$$

$$X = 3EJ \frac{N_0}{l^3}$$

$$\varphi_B = -\frac{(3EJ \frac{N_0}{l^3}) l^2}{2EJ}$$

$$= \frac{3}{2} \frac{N_0}{l}$$

gcp
↓



$$-\frac{Xl}{3EI} = \frac{Xl}{3EI} - \frac{Yl}{6EI} - \frac{l_0}{l}$$

$$-\frac{Xl}{6EI} + \frac{Yl}{3EI} - \frac{l_0}{l} = 0$$

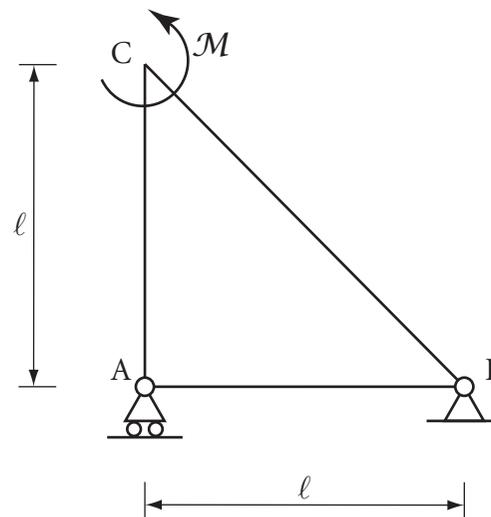
$$\textcircled{1} \left\{ \begin{array}{l} 4X - Y = 6 \frac{EI}{l^2} l_0 \\ -X + 2Y = 6 \frac{EI}{l^2} l_0 \end{array} \right.$$

$$2 \times \textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow 7X = 18 \frac{EI}{l^2} l_0$$

$$4 \times \textcircled{2} + \textcircled{1} \Rightarrow 7Y = 30 \frac{EI}{l^2} l_0$$

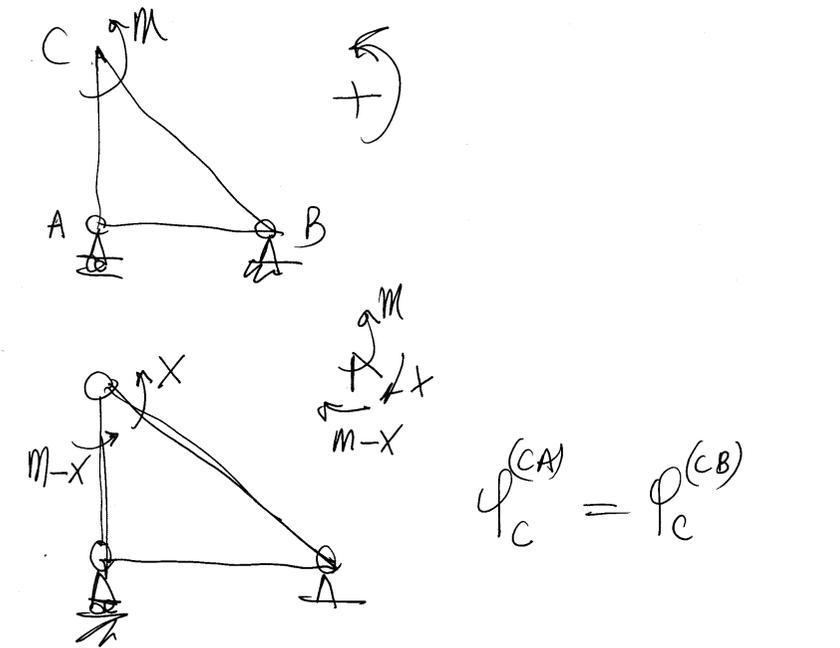
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{18}{7} \frac{EI}{l^2} l_0 \\ Y = \frac{30}{7} \frac{EI}{l^2} l_0 \end{array} \right.$$

5.28 Esercizio 93



1. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche;
2. Scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Disegnare qualitativamente il diagramma del momento flettente;
4. Valutare le incognite iperstatiche;

5.29 Esercizio 94

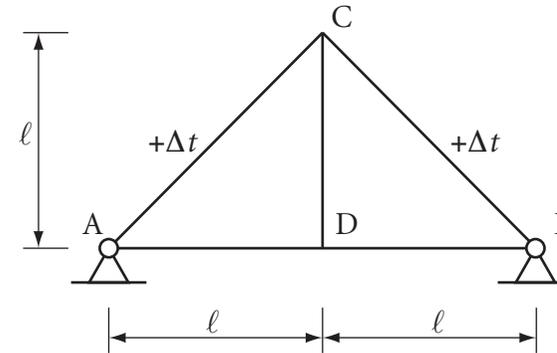
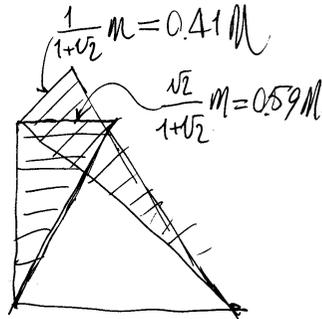


$$\varphi_C^{(CA)} = \varphi_C^{(CB)}$$

$$\frac{(M-X)l}{3EJ} = \frac{X\sqrt{2}l}{3EJ}$$

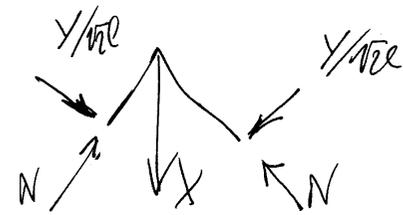
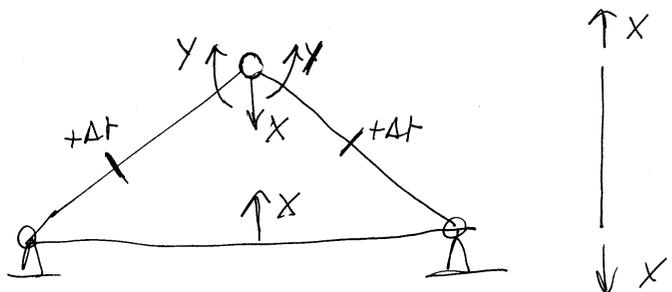
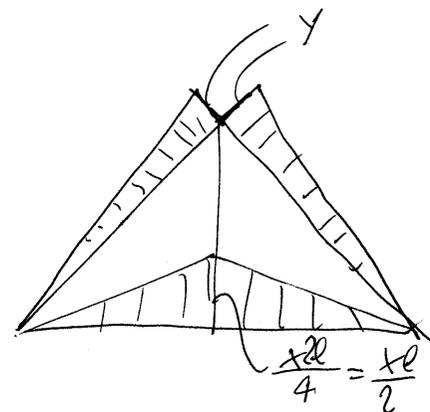
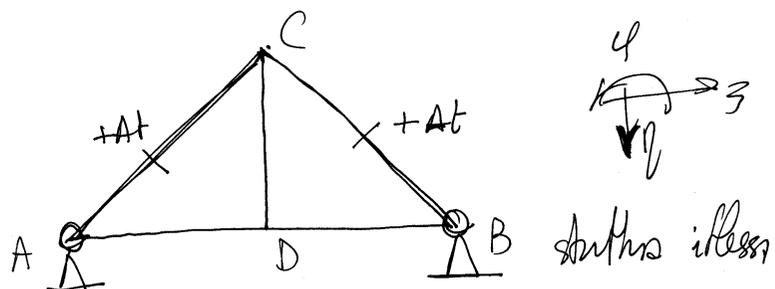
$$M - X = \sqrt{2}X$$

$$\begin{cases} X = \frac{1}{1+\sqrt{2}} M \\ M - X = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} M \end{cases}$$



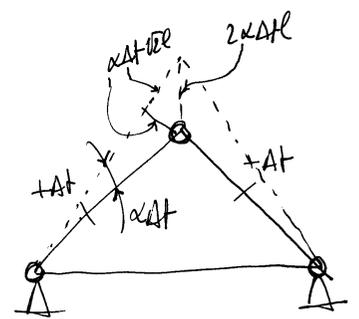
La struttura chiusa, iperstatica e assialsimmetrica di figura è soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo i tratti AC e BC. Trascurando la deformabilità assiale dovuta alla forza normale:

1. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche;
2. Scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Disegnare qualitativamente il diagramma del momento flettente;
4. Valutare le incognite iperstatiche.

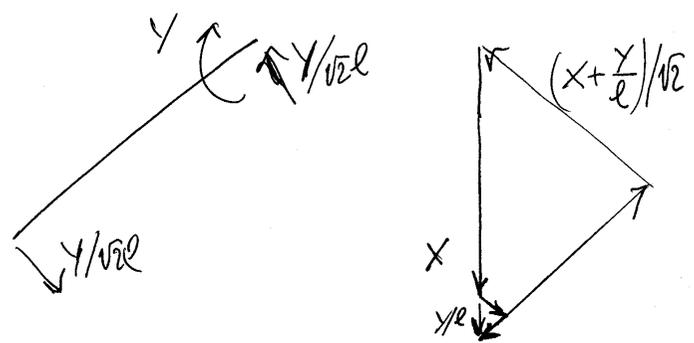


$\varphi_c^{(CA)} = 0$
 $\eta_c = \eta_D$

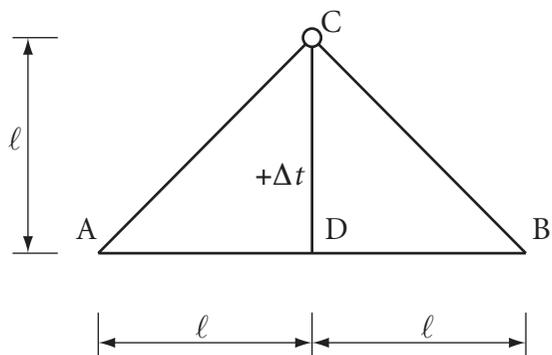
$\varphi_c^{(CA)} = -\frac{y l \sqrt{2}}{3 E J} + \alpha \Delta T$
 $-\frac{\eta_c}{\sqrt{2}} = \alpha \Delta T \sqrt{2} l \Rightarrow$
 $\Rightarrow \eta_c = -2 \alpha \Delta T l$



$\eta_D = -\frac{x (2l)^3}{48 E J}$
 $\eta_c = \eta_D \Rightarrow X = 12 E J \frac{\alpha \Delta T}{l^2}$
 $\varphi_c^{(CA)} = 0 \Rightarrow Y = \frac{3}{\sqrt{2}} E J \frac{\alpha \Delta T}{l}$

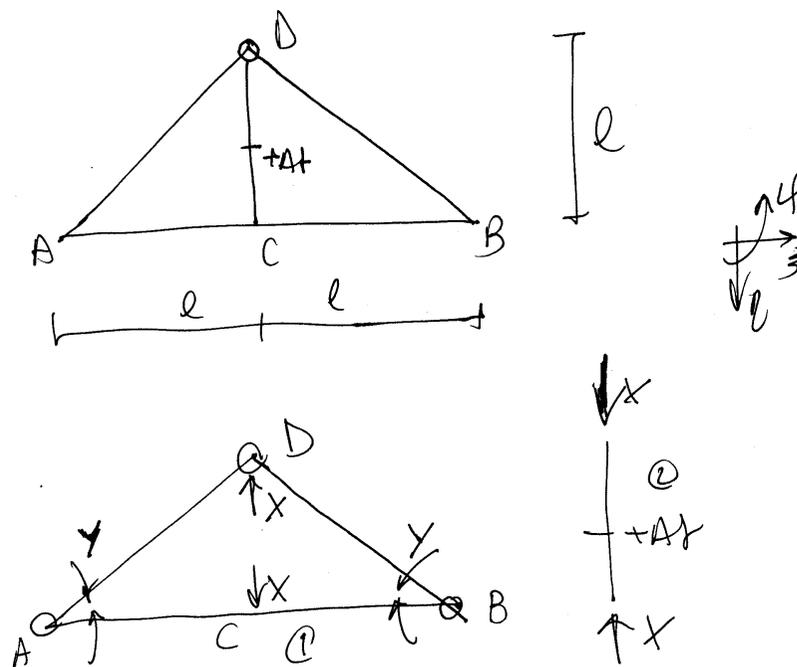


5.30 Esercizio 95



La struttura chiusa, iperstatica e assialsimmetrica di figura è soggetta ad una distorsione termica uniforme lungo il tratto DC. Trascurando la deformabilità assiale dovuta alla forza normale:

1. Scegliere una struttura principale e le incognite iperstatiche;
2. Scrivere in modo formale le equazioni di congruenza;
3. Disegnare qualitativamente il diagramma del momento flettente;
4. Valutare le incognite iperstatiche.



$$\varphi_C^{(1)} = \varphi_C^{(2)} \quad \varphi_A^{(AC)} = \varphi_A^{(AD)}$$

$$V_C^{(1)} = -\frac{Xl^2}{8EJ} + \frac{Yl^3}{48EJ}$$

$$V_C^{(2)} = -\alpha\Delta t l$$

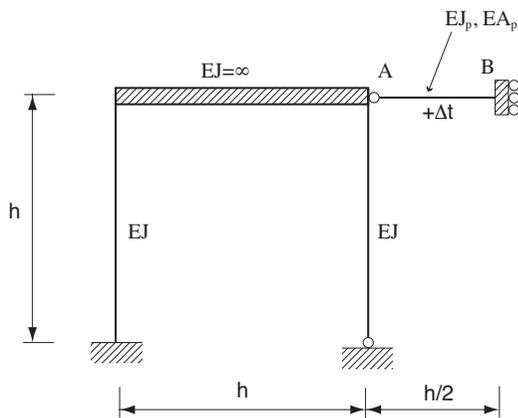
$$\varphi_A^{(AC)} = \frac{Xl^2}{2EJ} - \frac{Yl^2}{16EJ}$$

$$\varphi_A^{(AD)} = -\frac{Yl\sqrt{2}}{3EJ}$$

$$Y = \frac{3}{4} \frac{Fl}{\sqrt{2} + 3}$$

ESERCIZI SUL METODO DEGLI SPOSTAMENTI

6.1 Esercizio 96



- 1) Risolvere la struttura iperstatica considerando l'asta AB deformabile assialmente;
- 2) Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Determinare la variazione termica critica che provoca l'instabilità laterale dell'asta AB.

Soluzione e diagramma del momento flettente

Rigidezze taglianti

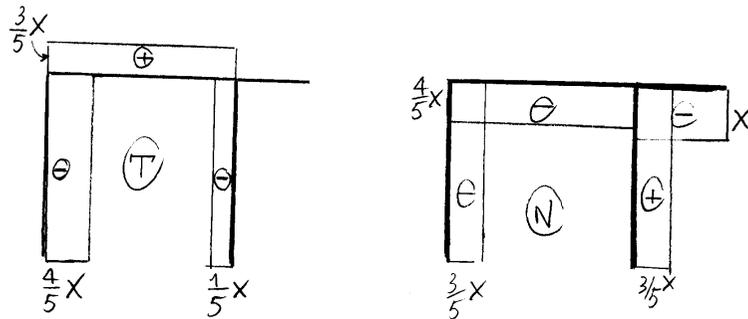
Ritta A $12EJ/h^3$

Ritta B $3EJ/h^3$

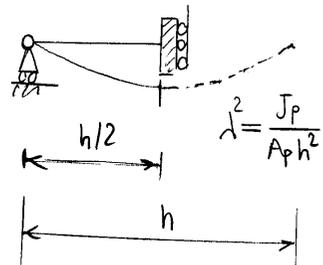
$EA_p = \infty \Rightarrow X = \frac{15}{2} EJ \frac{\Delta T}{h^2}$

$EA_p \neq \infty \Rightarrow X = \frac{EA_p \Delta T}{\frac{2 \Delta T^2}{15J} + 1}$

Diagrammi del taglio e della forza normale e variazione termica critica



Libera di inflessione dell'asta $AB \equiv 2(h/2) = h$



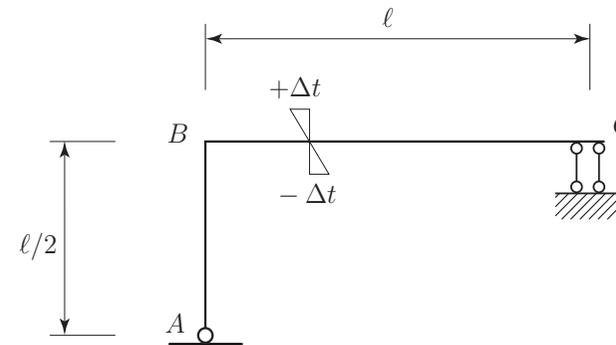
$$X_{cr} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2}$$

$$\frac{E A_p \alpha \Delta t_{cr}}{\frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J} + 1} = \frac{\pi^2 E J_P}{h^2}$$

$$\Delta t_{cr} = \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J}\right) \frac{\pi^2 J_P}{\alpha A_p h^2}$$

$$= \left(1 + \frac{2}{15} \frac{A_p h^2}{J}\right) \frac{\pi^2 \lambda^2}{\alpha}$$

6.2 Esercizio 97



1) Calcolare la matrice delle rigidità e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;

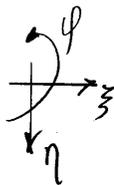
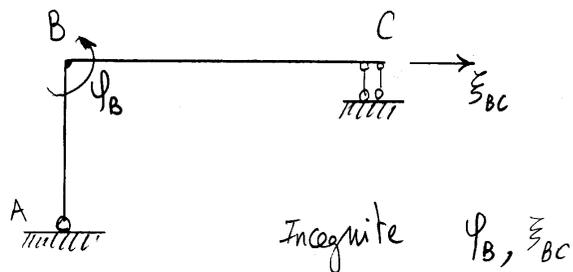
2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;

3) Disegnare la deformata elastica della struttura;

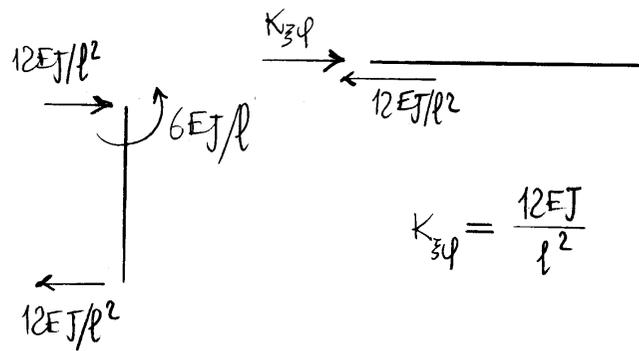
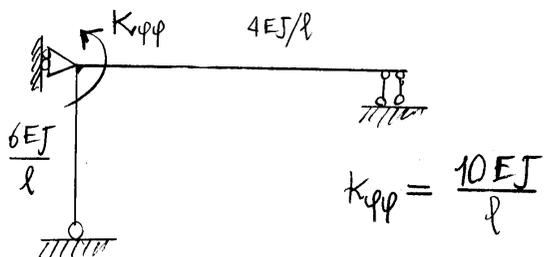
4) Disegnare la curva delle pressioni;

5) Calcolare l'energia elastica di deformazione.

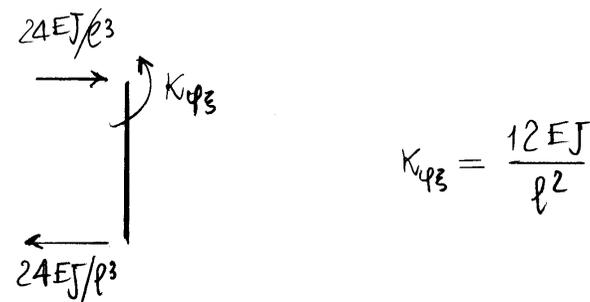
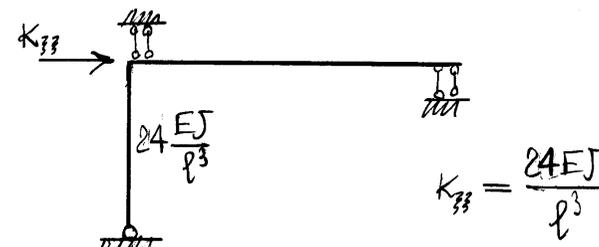
Matrice delle rigidezze



Prima colonna

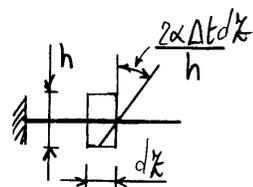
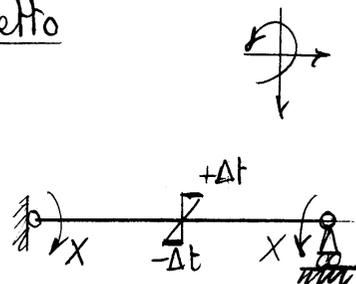
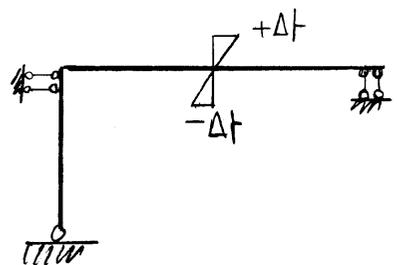


Seconda colonna



$$\underline{K} = 2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix}$$

Reazioni di incastro perfetto

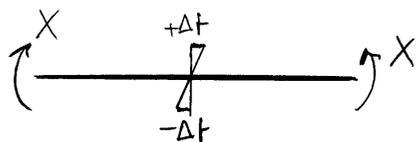
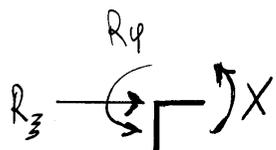


$$\frac{Xl}{2EJ} - \frac{\alpha\Delta t l}{h} = 0$$

$$X = \frac{2EJ\alpha\Delta t}{h}$$

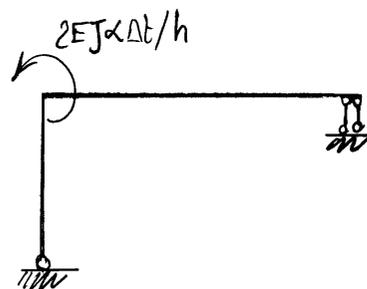
$$d\varphi = -2\alpha\Delta t dz/h$$

$$\varphi = \int_0^{l/2} d\varphi = -\frac{\alpha\Delta t l}{h}$$



$$\left. \begin{aligned} R_\varphi &= -\frac{2EJ\alpha\Delta t}{h} \\ R_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

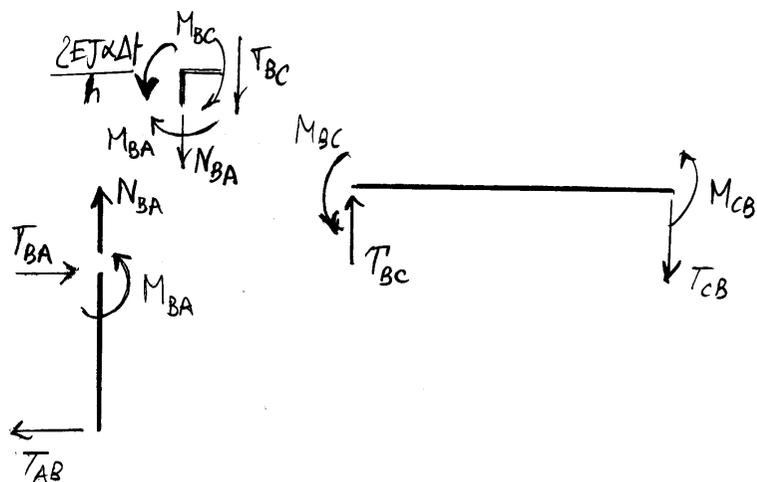
Reazioni di incastro perfetto cambiate di segno



$$2 \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 5l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \xi_{BC} \end{Bmatrix} = 2 \frac{EJ}{l^3} \frac{\alpha\Delta t}{h} \begin{Bmatrix} l^3 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 5l \varphi_B + 6 \xi_{BC} = \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \\ 6l \varphi_B + 12 \xi_{BC} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2 \times \text{①} - \text{②} &\Rightarrow 4l \varphi_B = 2 \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \varphi_B = \frac{\alpha\Delta t}{2h} l \\ 5 \times \text{②} - 6 \times \text{①} &\Rightarrow 24 \xi_{BC} = -6 \frac{\alpha\Delta t}{h} l^2 \Rightarrow \xi_{BC} = -\frac{\alpha\Delta t}{4h} l^2 \end{aligned}$$



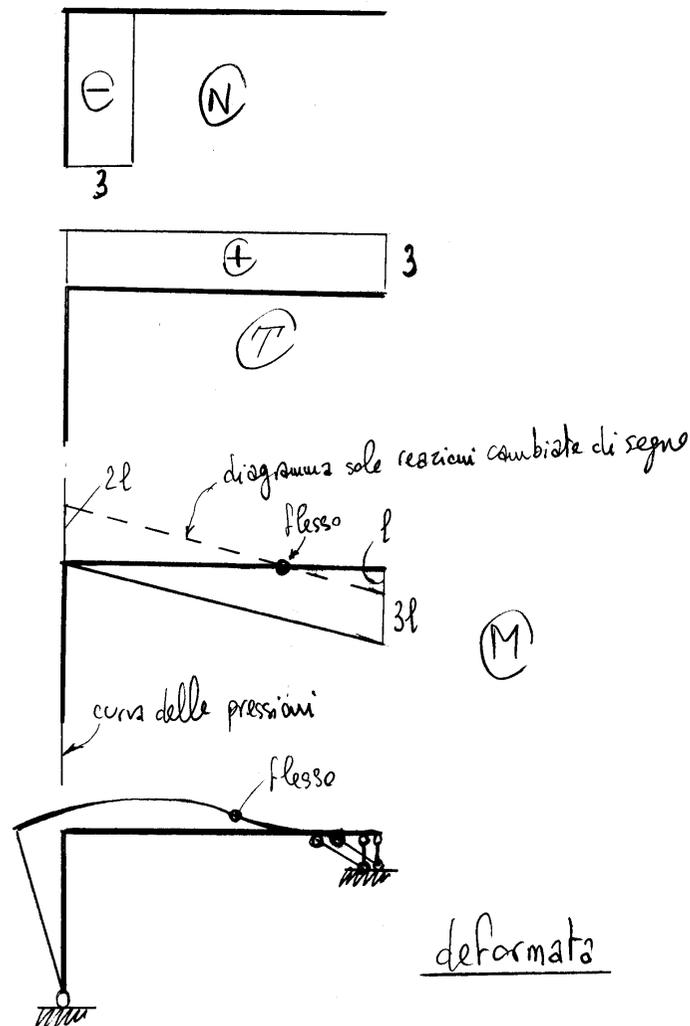
$$\begin{cases} M_{BA} = \frac{6EJ}{l} \varphi_B + \frac{12EJ}{l^2} \xi_{BC} = 0 \\ T_{AB} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{BC} = \frac{4EJ}{l} \varphi_B = \frac{2EJ \Delta T}{h} \\ M_{CB} = M_{BC} / 2 = \frac{EJ \Delta T}{h} \end{cases}$$

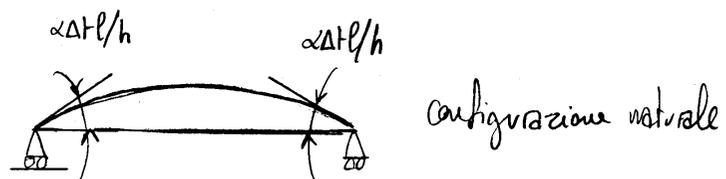
$$T_{BC} = \frac{M_{BC} + M_{CB}}{l} = \frac{3EJ \Delta T}{lh}$$

$$N_{BA} = - \frac{3EJ \Delta T}{lh}$$

Diagrammi (2 meno di $EJ \Delta T / hl$)



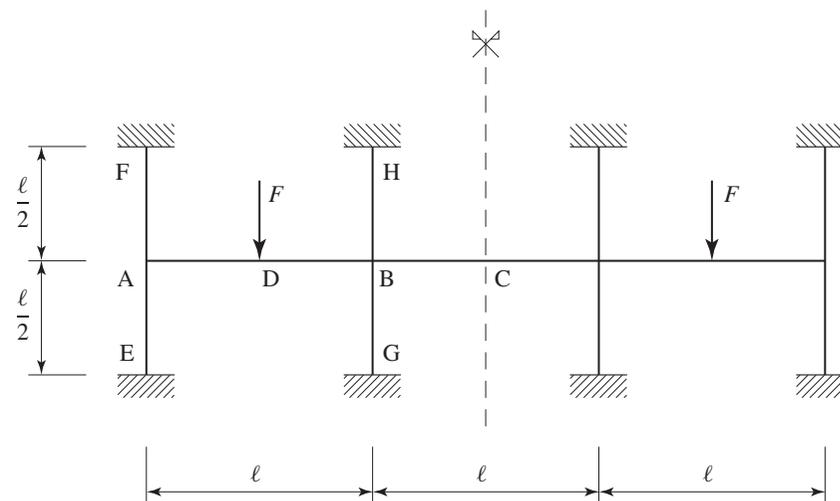
Energia elastica di deformazione



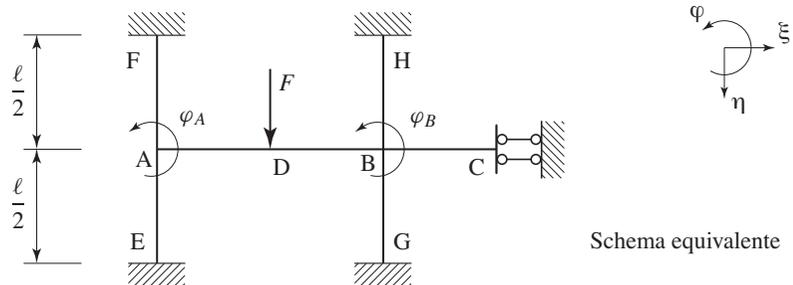
$$L_d = \frac{1}{2} \frac{EJ\alpha\Delta t}{hl} (3\ell) \frac{\alpha\Delta t\ell}{h}$$

$$= \frac{3}{2} EJ(\alpha\Delta T)^2 \frac{\ell}{h^2}$$

6.3 Esercizio 98

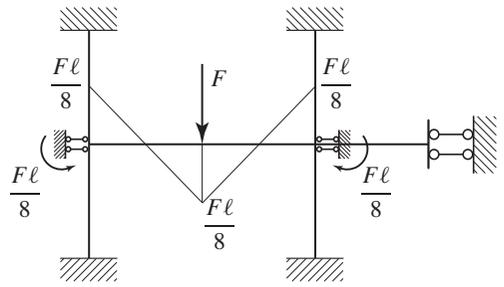


- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
- 3) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 4) Calcolare lo spostamento del punto D di applicazione della forza concentrata e l'energia elastica di deformazione.

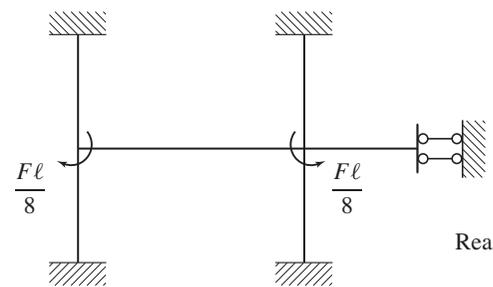


Schema equivalente

$$\begin{Bmatrix} \mathcal{M}_A \\ \mathcal{M}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix}$$

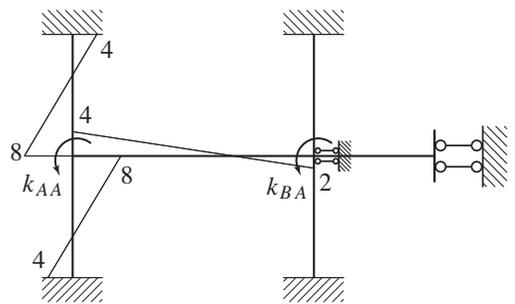


Incastri perfetti



Reazioni cambiate di segno

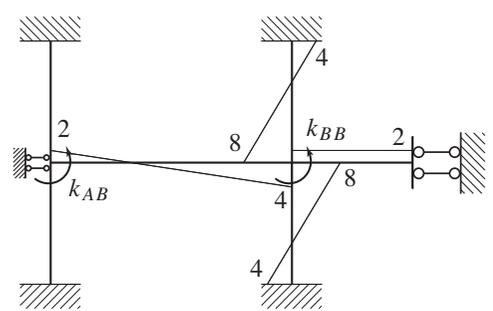
1ª colonna matrice di rigidezza



$$\begin{cases} \varphi_A = 1 \\ \varphi_B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{AA} = \frac{20EJ}{l} \\ k_{BA} = \frac{2EJ}{l} \end{cases}$$

2ª colonna matrice di rigidezza



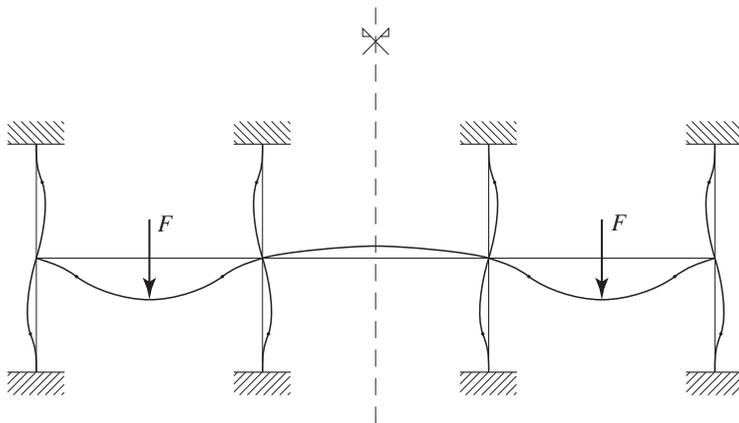
$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \varphi_B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_{BB} = \frac{22EJ}{l} \\ k_{AB} = \frac{2EJ}{l} \end{cases}$$

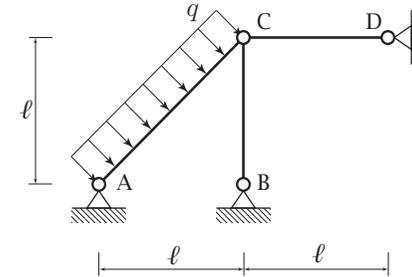
Rigidezze alla rotazione a meno di $\frac{EJ}{l}$

$$\frac{EJ}{\ell} \begin{bmatrix} 20 & 2 \\ 2 & 22 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{Bmatrix} = \frac{F\ell}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

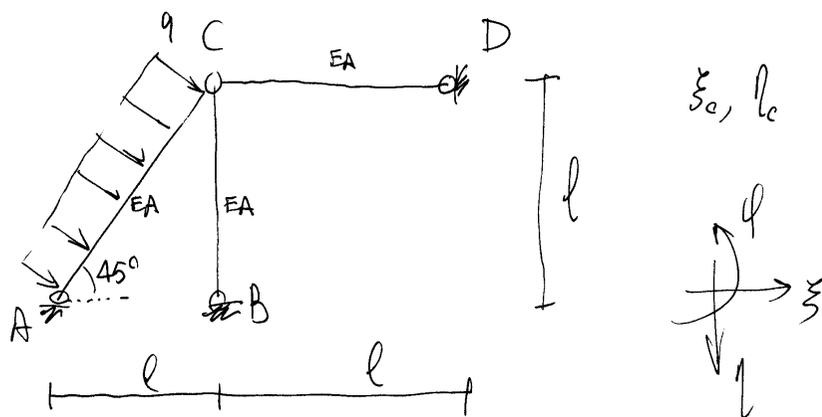
$$\begin{cases} \varphi_A = -\frac{3}{436} \frac{F\ell^2}{EJ} \\ \varphi_B = \frac{11}{4 \times 436} \frac{F\ell^2}{EJ} \end{cases}$$



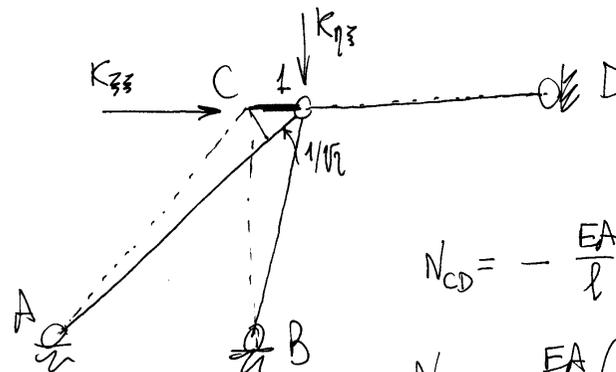
6.4 Esercizio 99



- 1) Calcolare la matrice delle rigidezze del sistema di pendoli sopra illustrato;
- 1) Risolvere la struttura utilizzando il metodo degli spostamenti;
- 2) Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
- 3) Calcolare la rotazione dell'estremità C dell'asta AC;
- 4) Disegnare la deformata elastica della struttura;
- 5) Determinare l'entità minima del carico distribuito q che provoca l'inflexione laterale per carico di punta in almeno uno dei pendoli del sistema.



Prima domanda



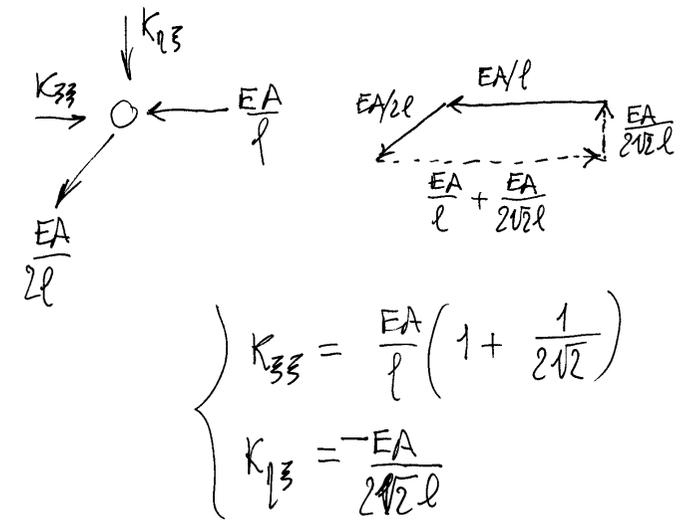
$$N_{CD} = -\frac{EA}{l}$$

$$N_{CA} = \frac{EA}{\sqrt{2}l} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{EA}{2l}$$

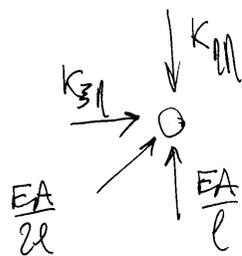
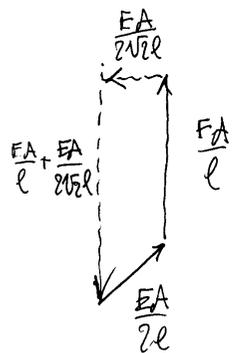
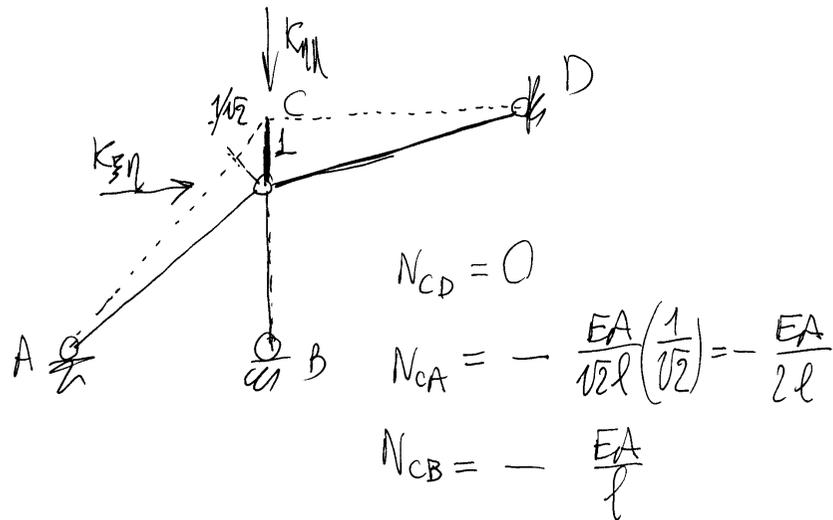
$$N_{CB} = 0$$

Matrice delle rigidità

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix}$$



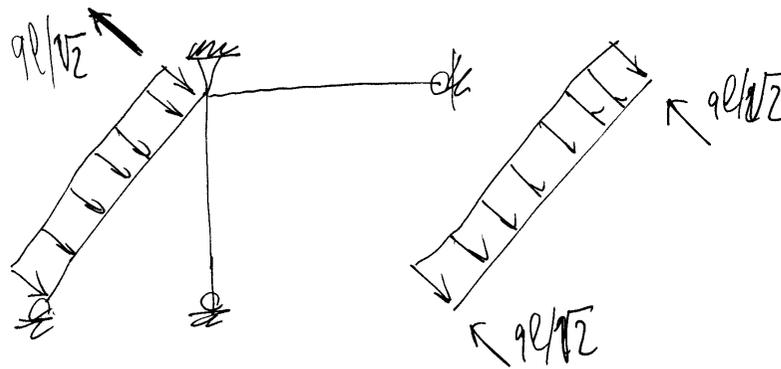
Seconda Colonna



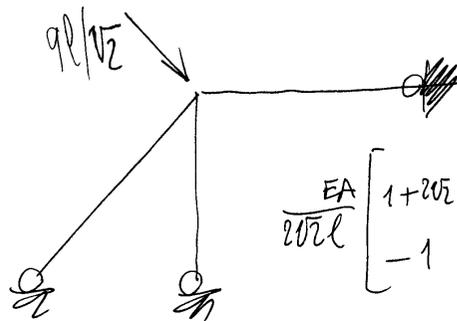
$$K_H = - \frac{EA}{2\sqrt{2}l}$$

$$K_M = \frac{EA}{l} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)$$

Vincoli Ausiliari



Reazioni cambiate di segno



$$\frac{EA}{2\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} 1+2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & 1+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \end{Bmatrix} = \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

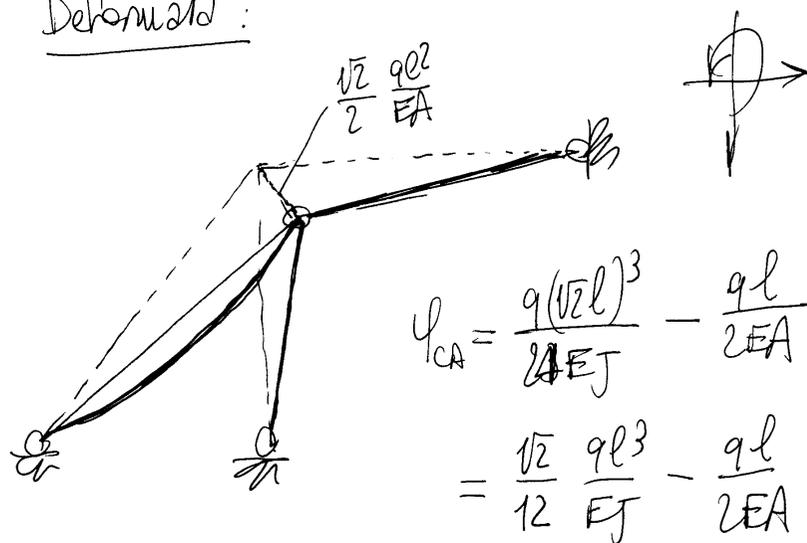
$$\begin{cases} (1+2\sqrt{2})\xi_c - \eta_c = \sqrt{2} \frac{ql^2}{EA} \\ -\xi_c + (1+2\sqrt{2})\eta_c = \sqrt{2} \frac{ql^2}{EA} \end{cases}$$

$$\xi_c = \eta_c = \frac{ql^2}{2EA}$$

Sforzi normali in soluzione

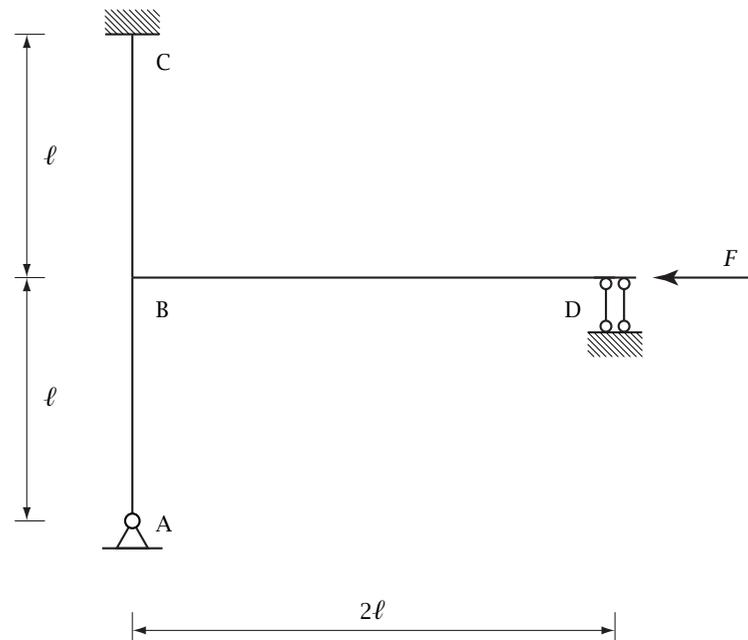
$$\begin{cases} N_{CD} = -\left(\frac{EA}{l}\right) \frac{ql^2}{2EA} = -\frac{ql}{2} \\ N_{CA} = 0 \\ N_{CB} = -\left(\frac{EA}{l}\right) \frac{ql^2}{2EA} = -\frac{ql}{2} \end{cases}$$

Deformato:



$$\frac{q_{cr} l}{2} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \Rightarrow q_{cr} = 2\pi^2 \frac{EJ}{l^3}$$

6.5 Esercizio 100

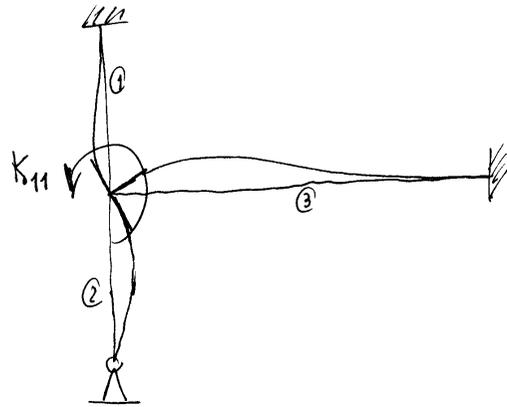


1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura;
7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \xi_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ F \end{Bmatrix}$$

1^a colonna: $\varphi_B = 1$
 $\xi_{BD} = 0$



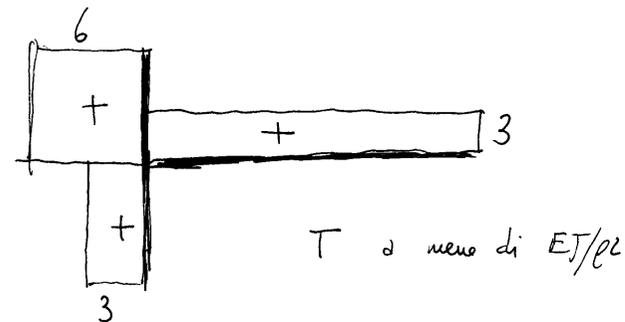
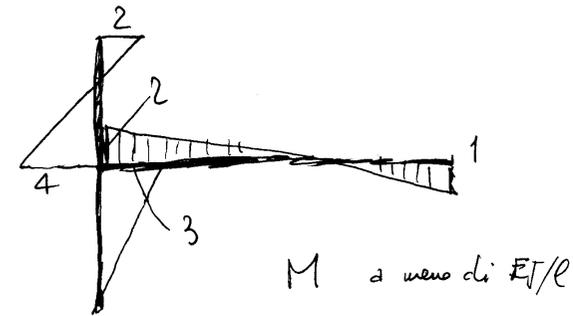
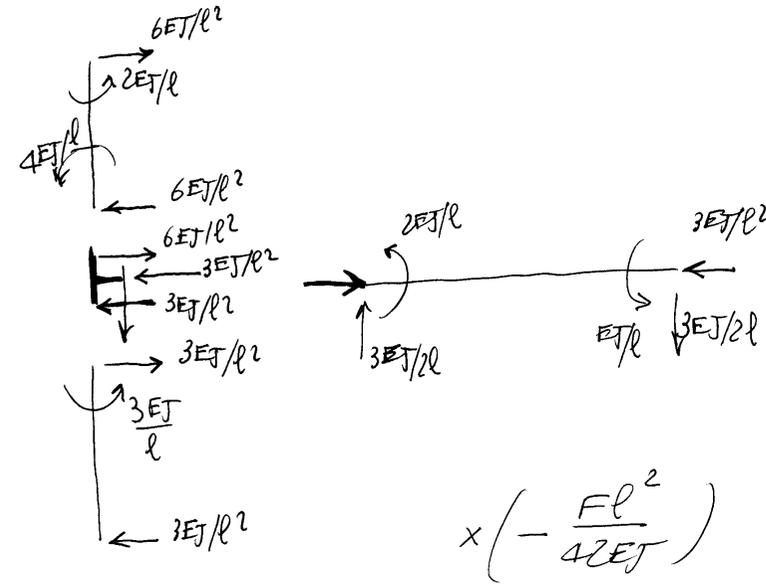


$$K_{A1} = \frac{4EJ}{l}$$

$$K_{A2} = \frac{3EJ}{l}$$

$$K_{A3} = \frac{4EJ}{2l} = \frac{2EJ}{l}$$

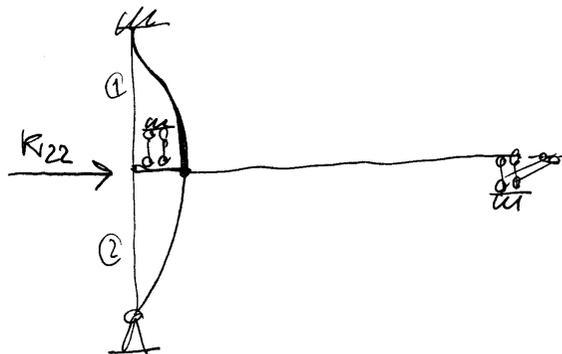
$$\Rightarrow \begin{aligned} K_{11} &= \frac{9EJ}{l} \\ K_{21} &= -\frac{3EJ}{l^2} \end{aligned}$$



2^a colonna

$$\varphi_B = 0$$

$$\xi_{BD} = 1$$



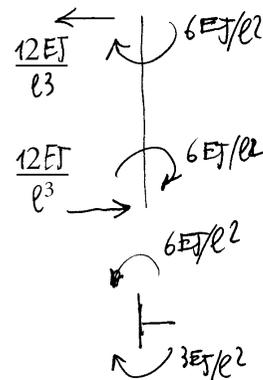
$$K_{BD}^{(1)} = \frac{12EJ}{l^3}$$

$$K_{BD}^{(2)} = \frac{3EJ}{l^3}$$

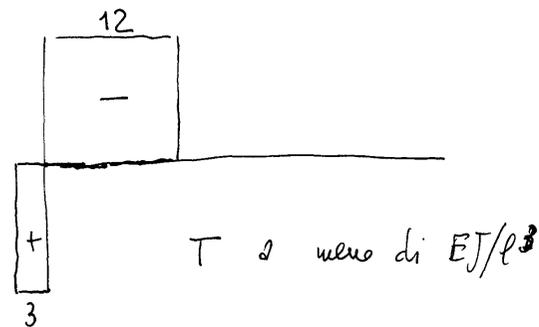
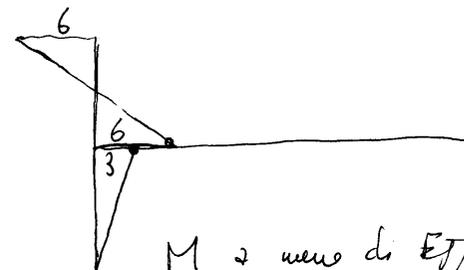
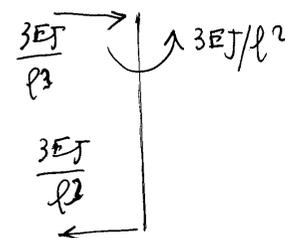
⇒

$$K_{22} = \frac{15EJ}{l^3}$$

$$K_{12} = -\frac{3EJ}{l^2}$$



$$\times \left(-\frac{Fl^3}{14EJ} \right)$$

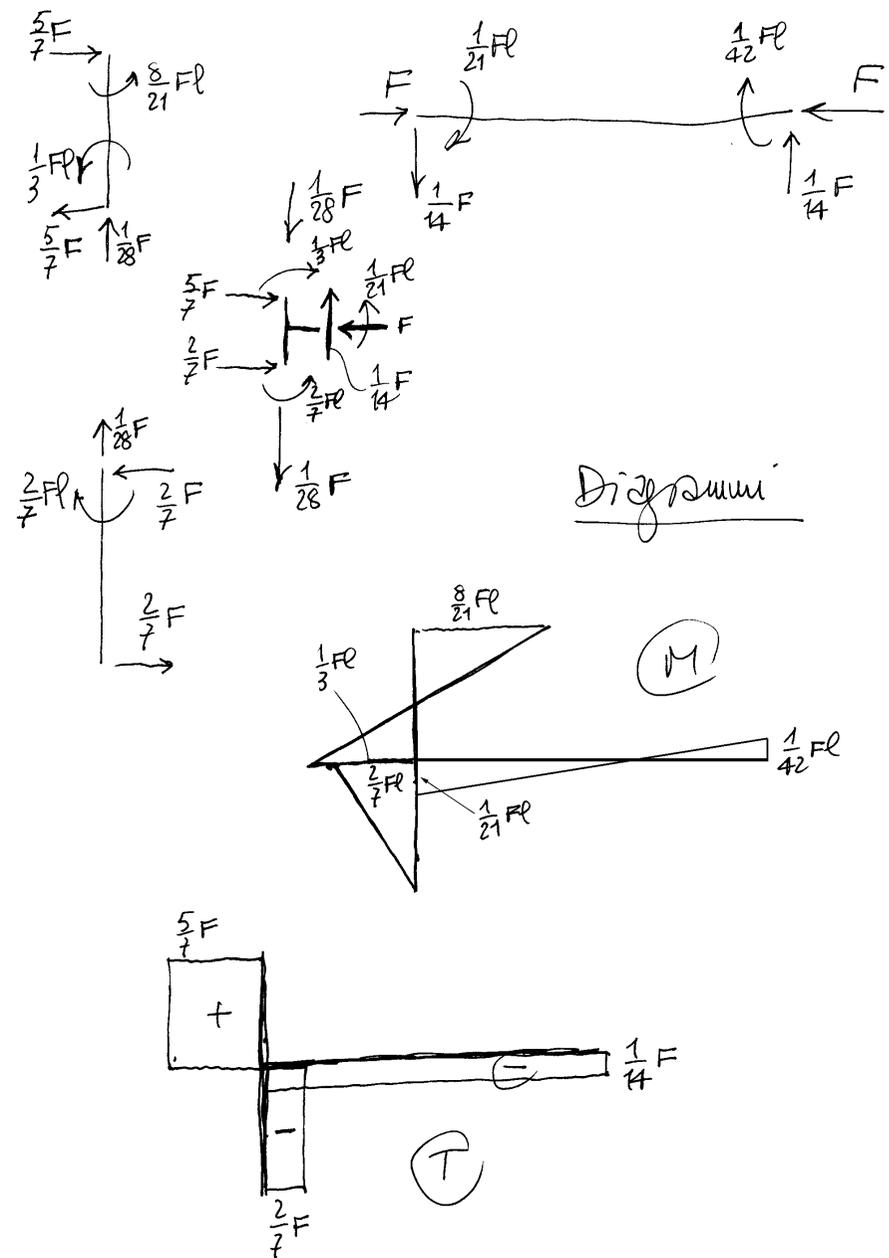


$$\frac{3EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 3l^2 & -l \\ -l & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \xi_{BD} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -F \end{Bmatrix}$$

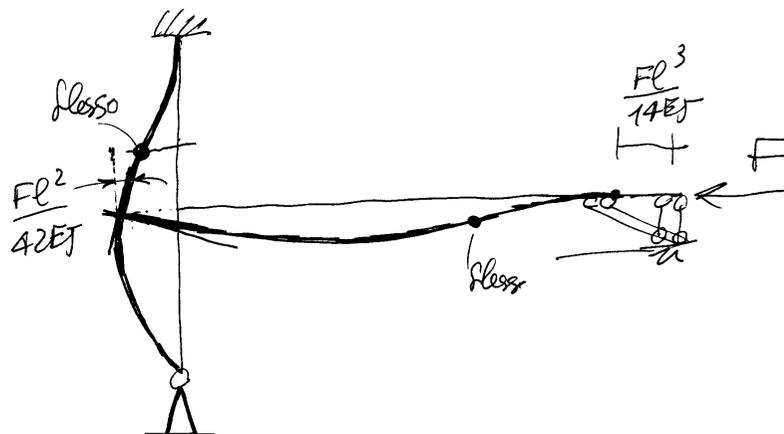
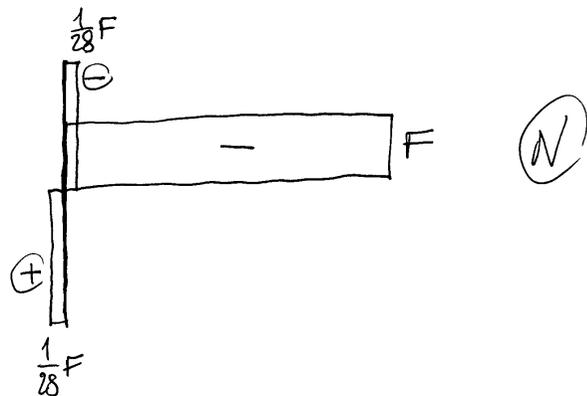
$$\begin{cases} 3l^2 \varphi_B - l \xi_{BD} = 0 \\ -l \varphi_B + 5 \xi_{BD} = -\frac{Fl^3}{3EJ} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3l \varphi_B - \xi_{BD} = 0 \\ l \varphi_B - 5 \xi_{BD} = \frac{Fl^3}{3EJ} \end{cases}$$

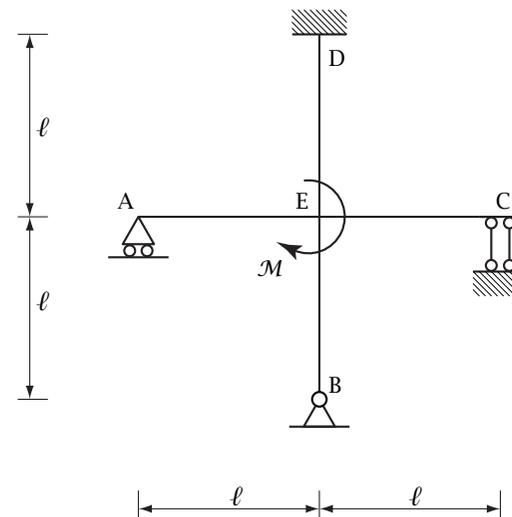
$$\begin{aligned} -14 \xi_{BD} &= \frac{Fl^3}{EJ} \Rightarrow \xi_{BD} = -\frac{Fl^3}{14EJ} \\ 14l \varphi_B &= \frac{-Fl^3}{3EJ} \Rightarrow \varphi_B = -\frac{Fl^2}{42EJ} \end{aligned}$$



6.6 Esercizio 101



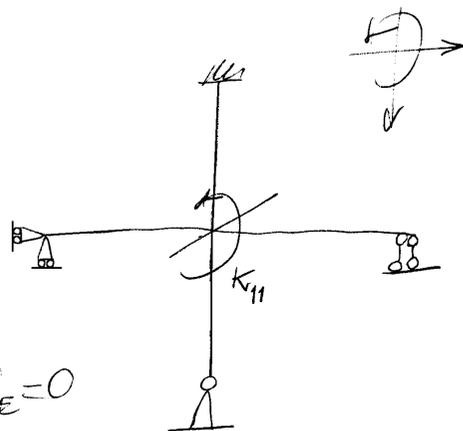
$$\text{Energia di deformazione} = \frac{F^2 l^3}{28EJ}$$



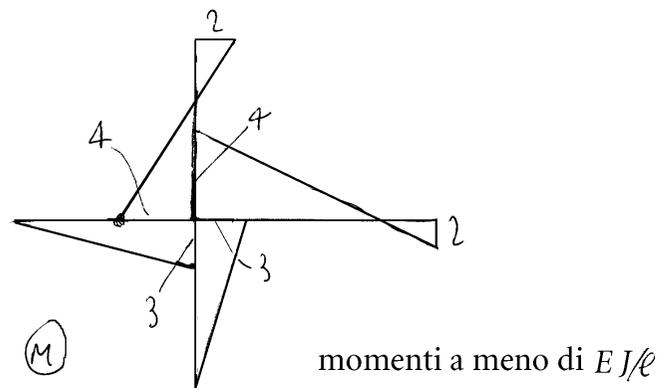
1. Calcolare la matrice delle rigidezze;
2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ai due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;

3. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
5. Disegnare il diagramma quotato dello sforzo normale;
6. Calcolare l'energia elastica di deformazione;
7. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.

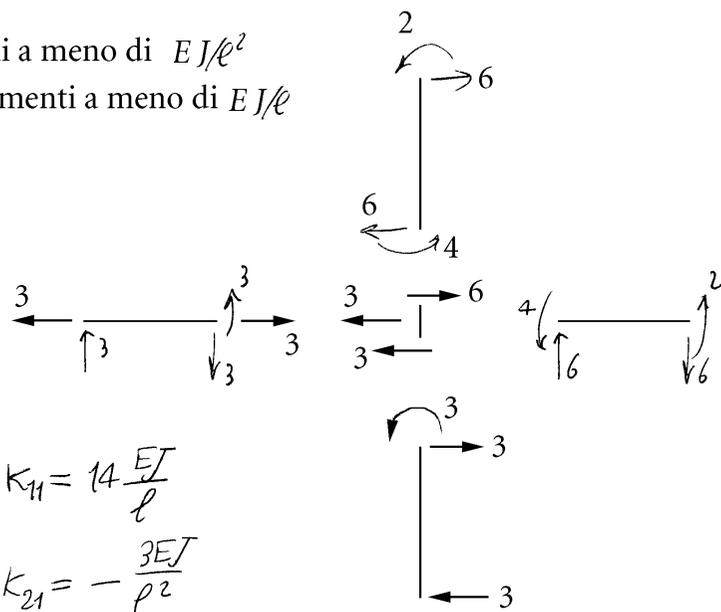
$$u \equiv \begin{Bmatrix} \varphi \\ \delta \end{Bmatrix}$$



$$\varphi_E = 1, \delta_E = 0$$

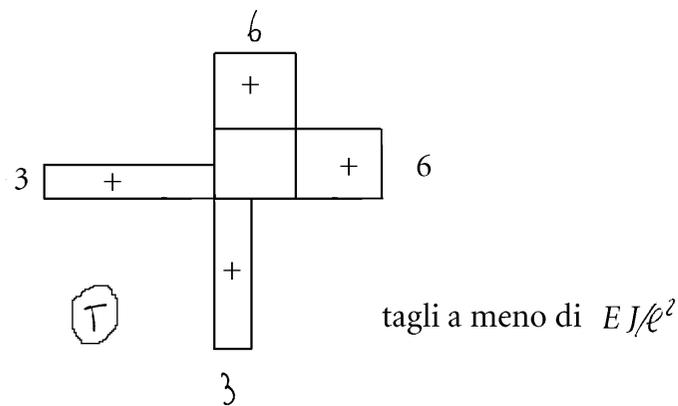


tagli a meno di EJ/l^2
momenti a meno di EJ/l



$$K_{11} = 14 \frac{EJ}{l}$$

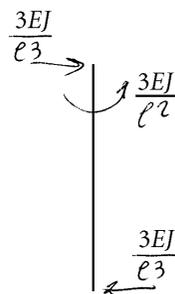
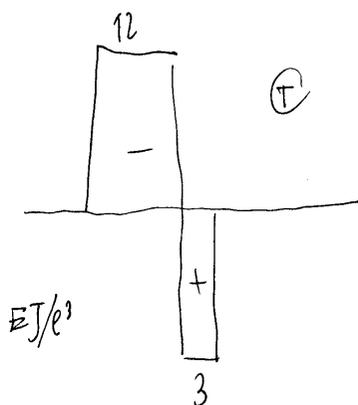
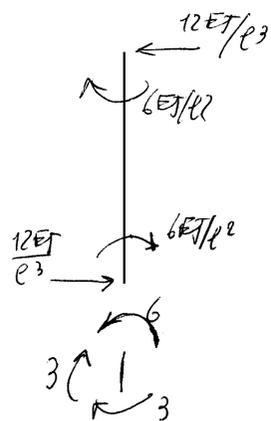
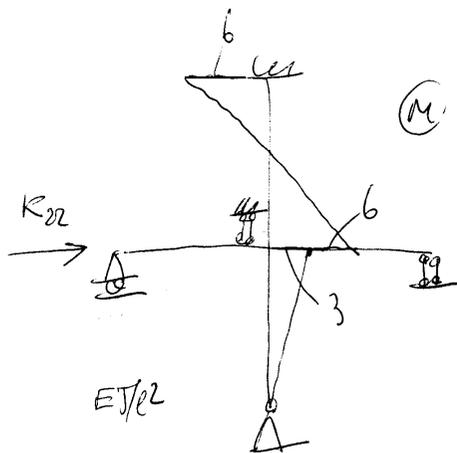
$$K_{21} = -\frac{3EJ}{l^2}$$



$\psi_E = 0, \delta_E = 1$

$k_{12} = -\frac{3EJ}{l^2}$

$k_{22} = \frac{15EJ}{l^3}$



$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 14l^2 & -3l \\ -3l & 15 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^3}, \quad \underline{F} = \begin{pmatrix} -m \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{K}\underline{U} = \underline{F}$

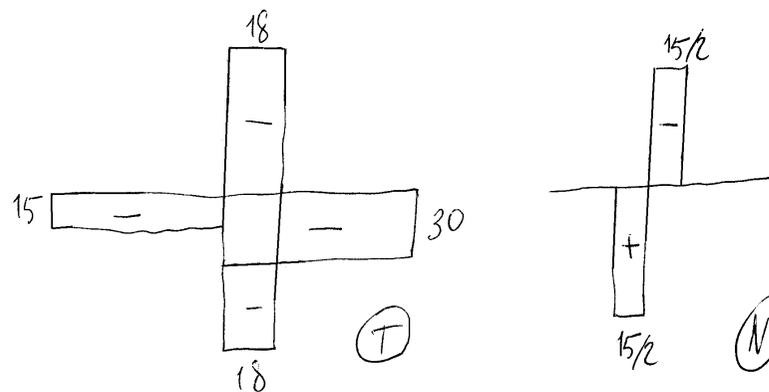
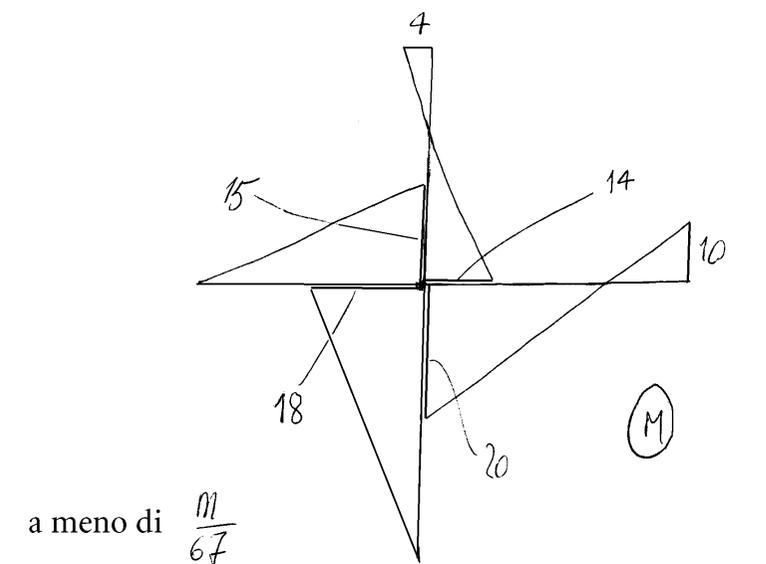
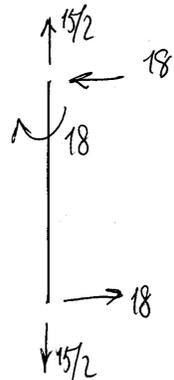
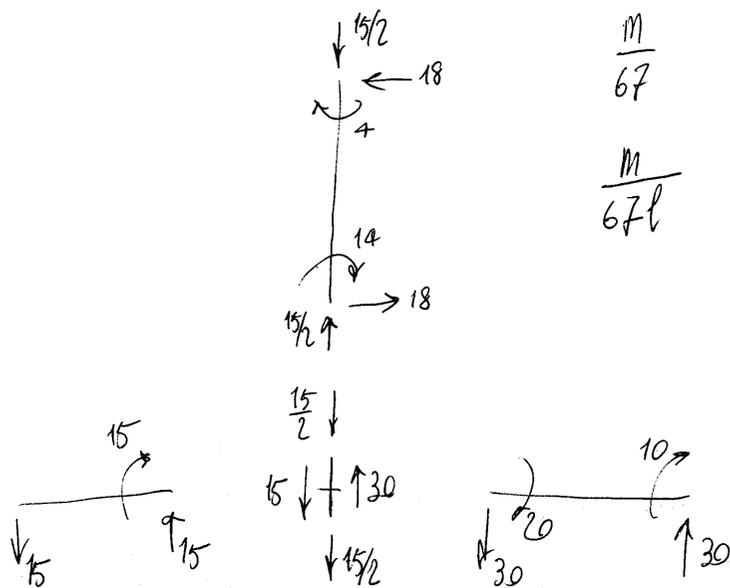
$$14l^2\varphi - 3l\delta = -\frac{ml^3}{EJ} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\varphi l - 3\delta = -\frac{ml^2}{EJ}$$

$$-3l\varphi + 15\delta = 0 \Rightarrow \varphi l - 5\delta = 0$$

$$70\delta - 3\delta = -\frac{ml^2}{EJ} \Rightarrow \delta = -\frac{ml^2}{67EJ}$$

$$\varphi = -\frac{5ml}{67EJ}$$



a meno di $\frac{M}{67l}$

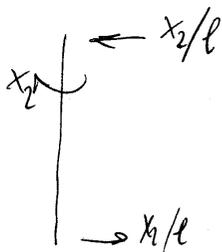
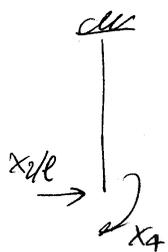
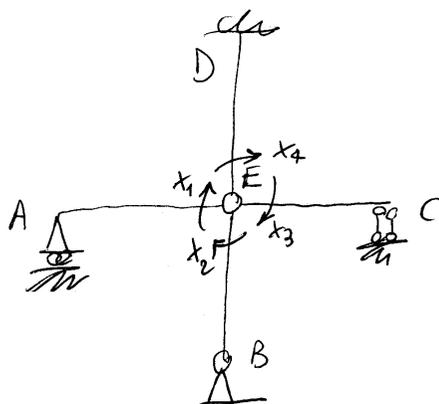
$i=5$

$i_a=1$

$i_b=4$



$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = M$



$$f_E = \frac{(x_2/l)^3}{3EJ} - \frac{x_4 l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_{EA} = \frac{x_1 l}{3EJ}$$

$$\varphi_{EC} = \frac{x_3 l}{4EJ}$$

$$\varphi_{ED} = \frac{x_2 l}{EJ} - \frac{(x_2/l) l^2}{2EJ}$$

$$\varphi_{EB} = \frac{x_2 l}{3EJ} + \frac{f_E}{l}$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{EC} \Rightarrow \frac{x_1}{3} = \frac{x_3}{4}$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{EB} \Rightarrow \frac{x_1}{3} = \frac{x_2}{3} + \frac{x_2}{3} - \frac{x_4}{2}$$

$$\varphi_{EA} = \varphi_{ED} \Rightarrow \frac{x_1}{3} = x_4 - \frac{x_2}{2}$$

- ① $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = M$
- ② $4x_1 - 3x_3 = 0$
- ③ $2x_1 - 4x_2 + 3x_4 = 0$
- ④ $2x_1 + 3x_2 - 6x_4 = 0$

$$\text{②} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{4} x_3$$

$$\text{④} - \text{③} \Rightarrow 7x_2 - 9x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{9}{7} x_4$$

$$3 \times \text{③} + 4 \times \text{④} \Rightarrow 14x_1 - 15x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{15}{14} x_4$$

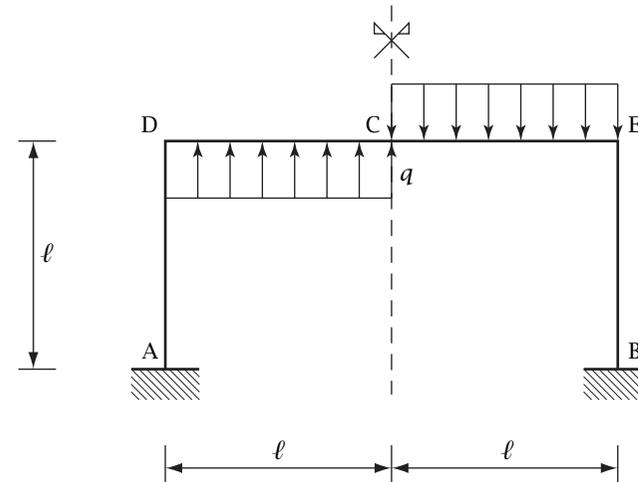
$$\text{②} \Rightarrow x_3 = \frac{10}{7} x_4$$

$$\left(\frac{15}{14} + \frac{9}{7} + \frac{10}{7} + 1 \right) x_4 = M$$

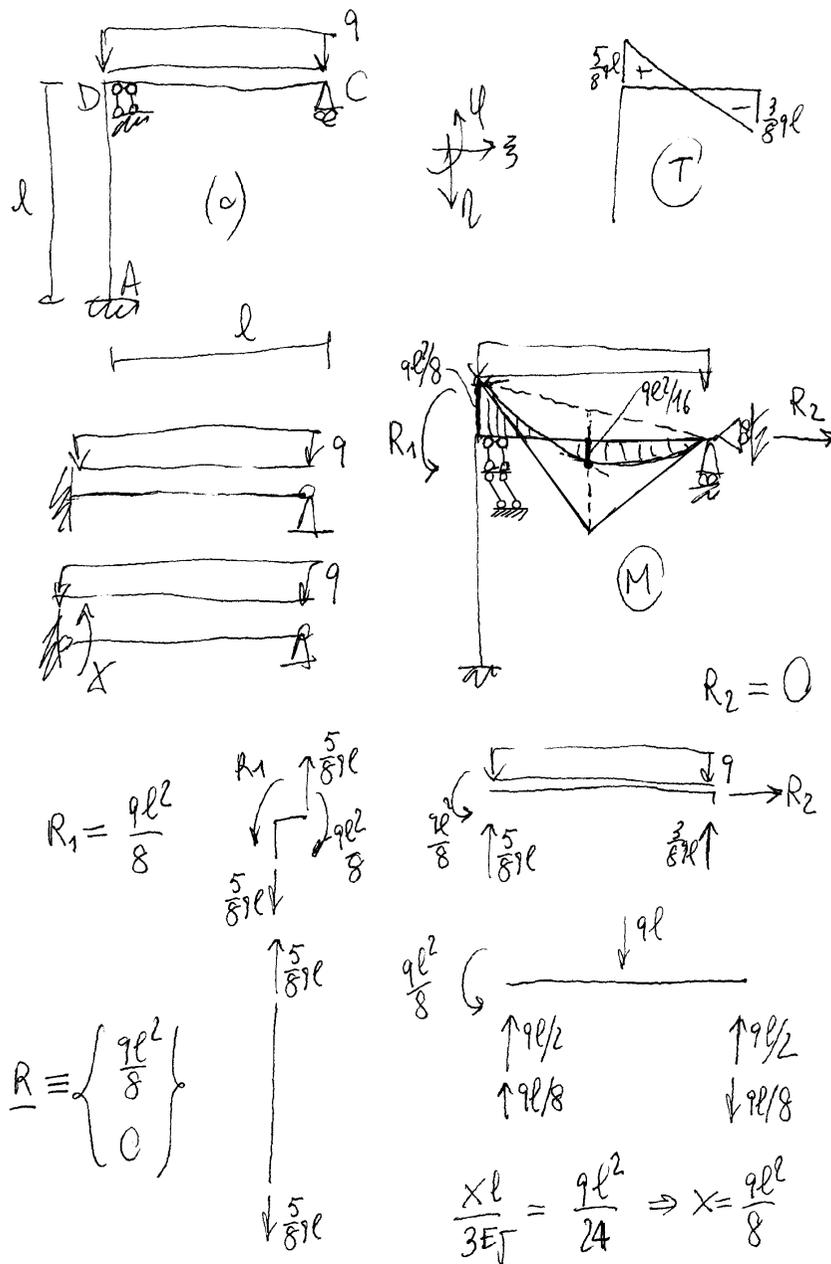
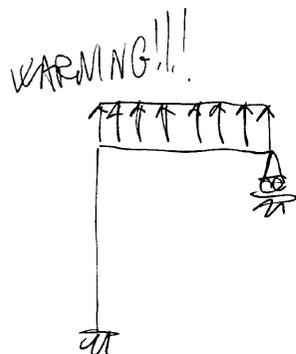
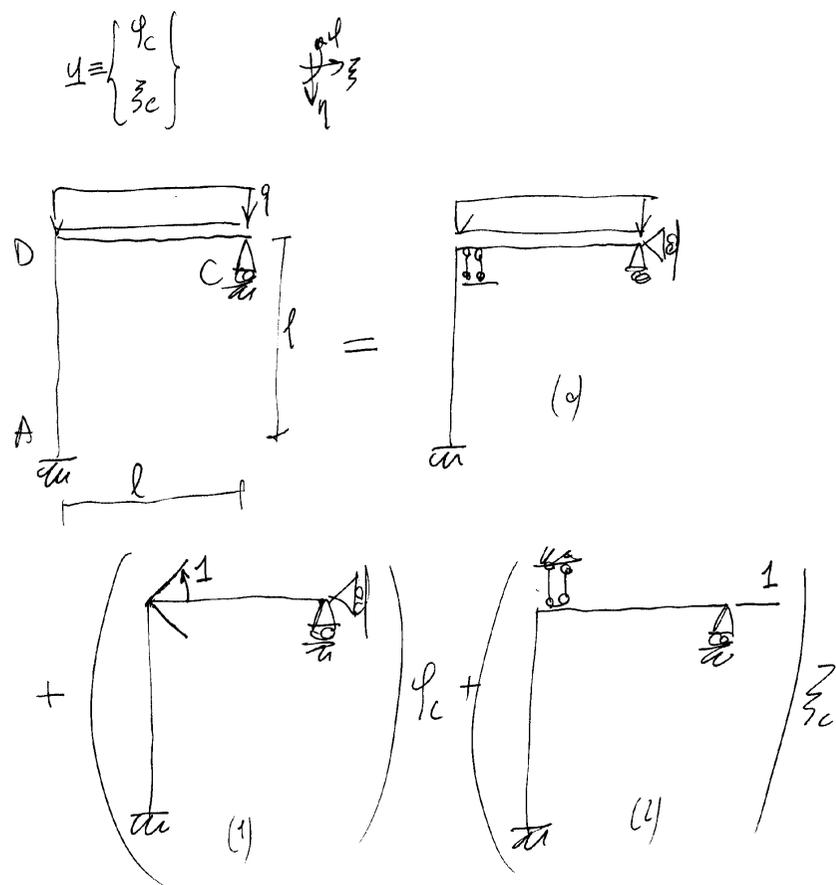
$$\frac{67}{14} x_4 = m \Rightarrow x_4 = \frac{14}{67} m$$

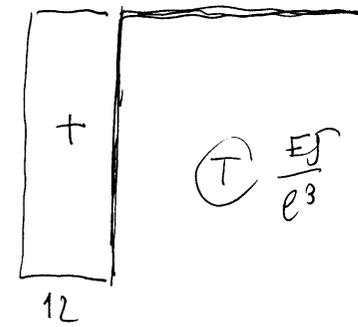
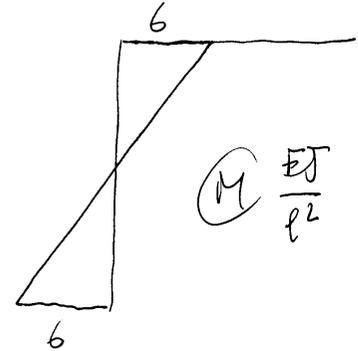
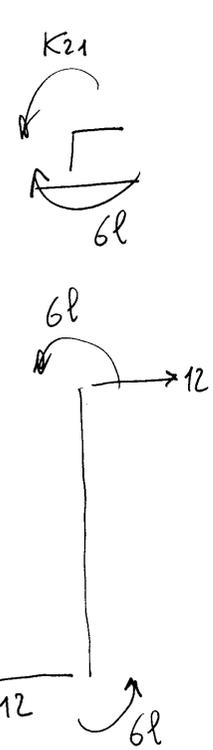
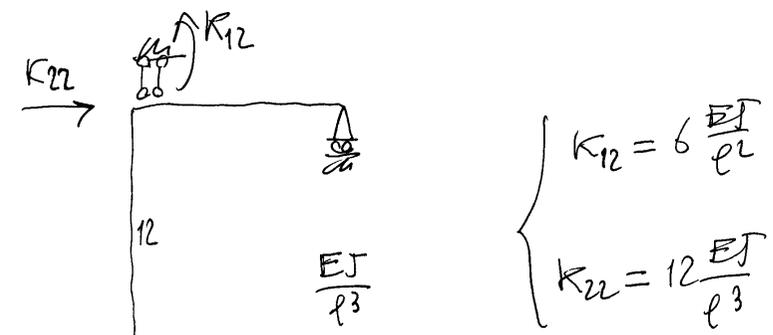
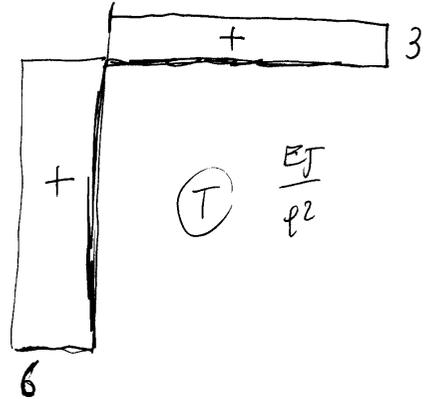
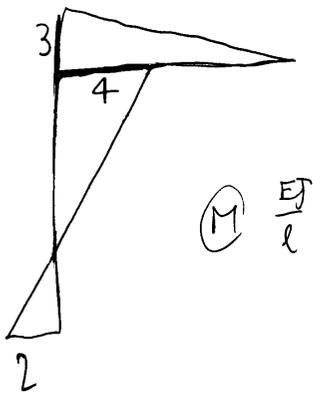
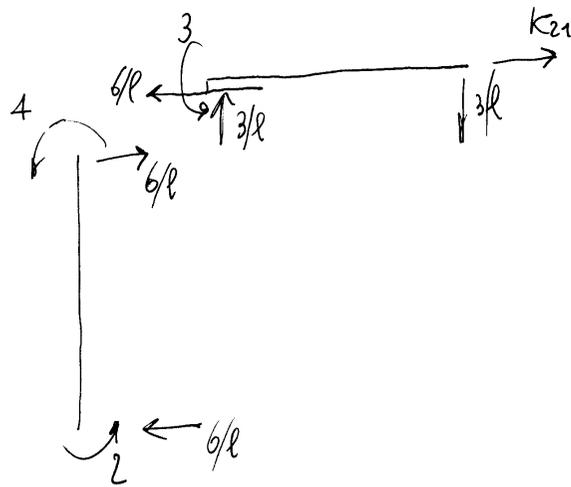
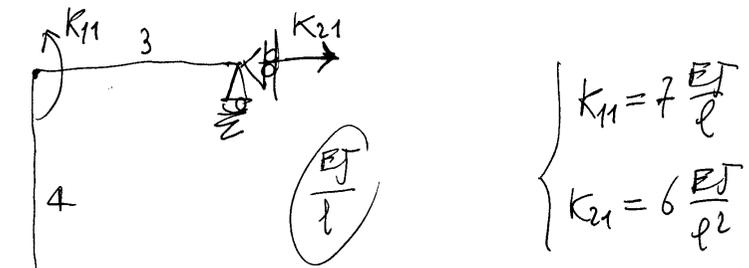
$$\begin{cases} x_1 = \frac{15}{67} m \\ x_2 = \frac{18}{67} m \\ x_3 = \frac{20}{67} m \end{cases}$$

6.7 Esercizio 102



1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
 2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
 3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidezze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
-
4. Completare il calcolo della matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
 5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
 6. Impostare la soluzione con il metodo delle forze.





$$K \equiv \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 7l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \quad F \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R \equiv \begin{bmatrix} +\frac{9l^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 7l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_c \\ \xi_c \end{Bmatrix} = \frac{9l^2}{8} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

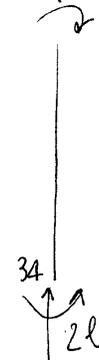
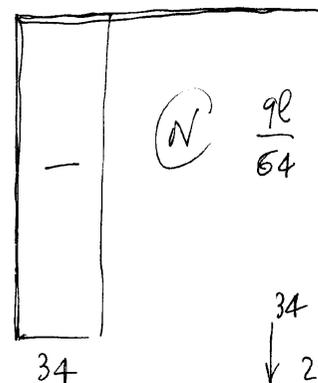
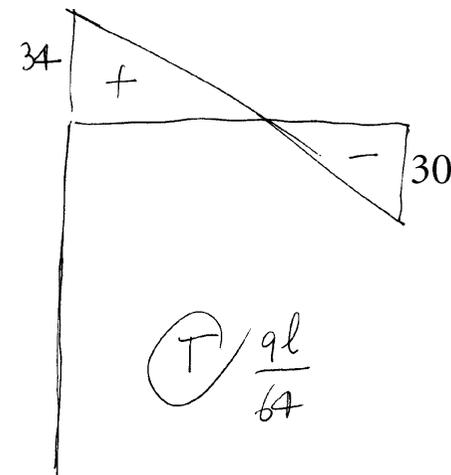
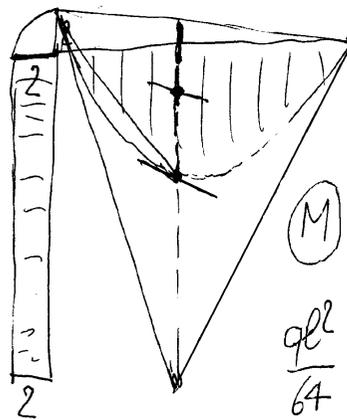
$$\textcircled{1} \quad 7l\varphi_c + 6\xi_c = -\frac{9l^4}{8EJ}$$

$$\textcircled{2} \quad 6l\varphi_c + 12\xi_c = 0$$

$$2 \times \textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow 8l\varphi_c = -\frac{9l^4}{4EJ}$$

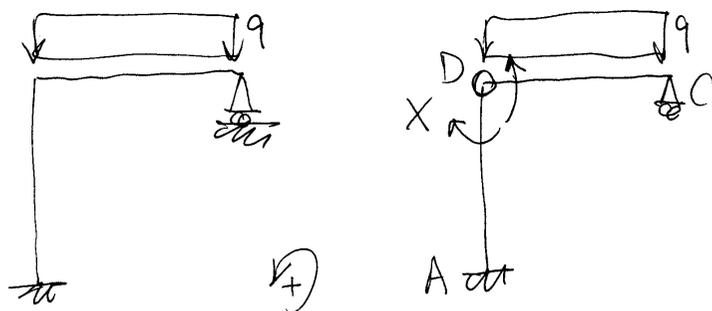
$$7 \times \textcircled{2} - 6 \times \textcircled{1} \Rightarrow 48\xi_c = \frac{39l^4}{4EJ}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_c = -\frac{9l^3}{32EJ} \\ \xi_c = \frac{9l^4}{64EJ} \end{cases}$$



$$\frac{9l}{64}$$

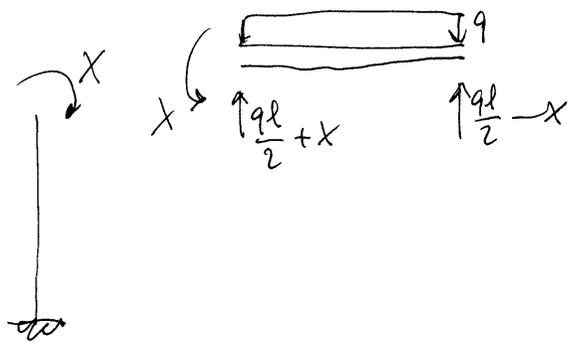
Metodo forze



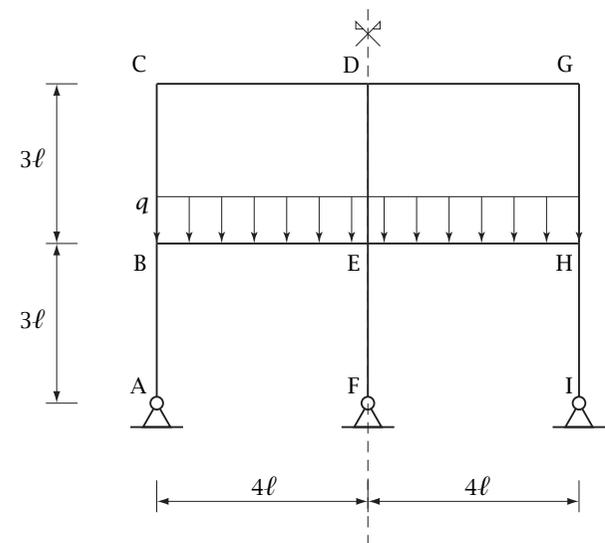
$$d_{DC} = \varphi_{DA}$$

$$\frac{Xl}{3EJ} - \frac{ql^3}{24EJ} = -\frac{Xl}{EJ}$$

$$\left(\frac{1}{3} + 1\right)X = \frac{ql^2}{24} \Rightarrow X = \frac{ql^2}{32}$$



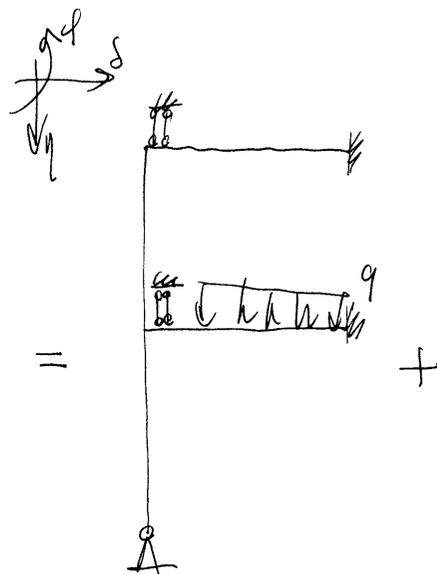
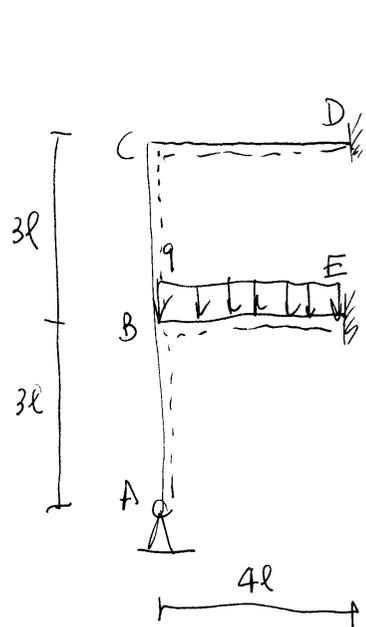
6.8 Esercizio 103



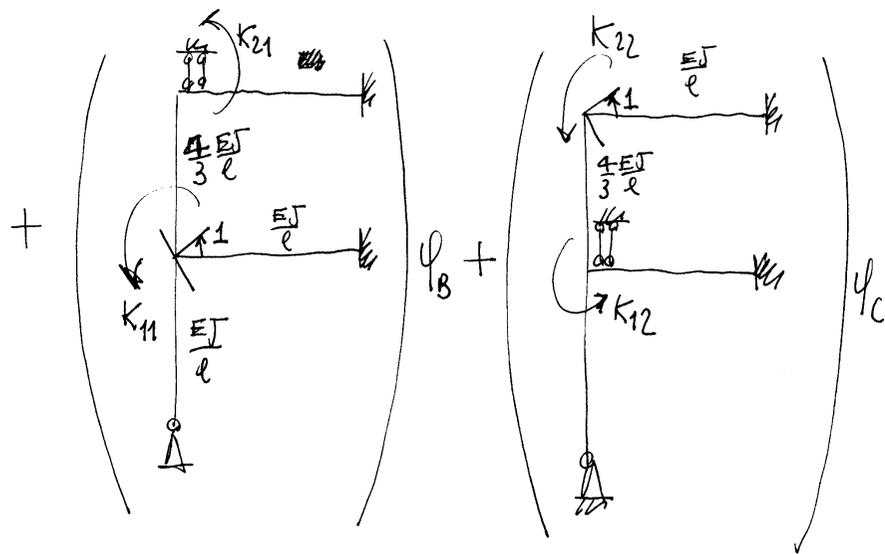
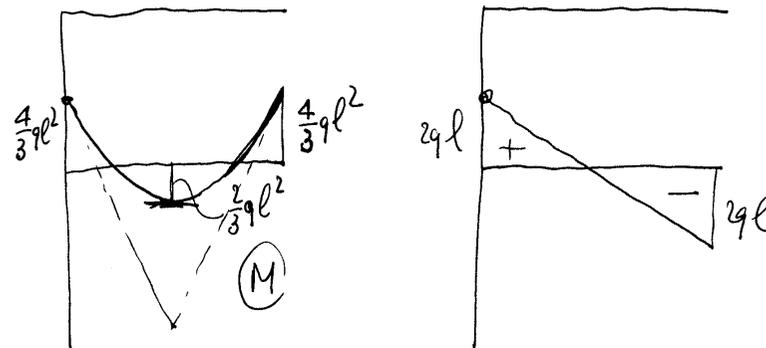
Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico distribuito sul tratto BEH:

1. Impostare la soluzione con il metodo degli spostamenti;
2. Risolvere lo schema per il calcolo delle reazioni di incastro perfetto, disegnare i relativi diagrammi quotati del momento flettente e del taglio e calcolare le reazioni di incastro perfetto;
3. Calcolare una colonna della matrice delle rigidezze, disegnando i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;

4. Completare il calcolo della matrice delle rigidezze e risolvere la struttura con il metodo degli spostamenti;
5. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale;
6. Disegnare la deformata elastica della struttura.



$$\underline{u} \equiv \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} \quad \underline{F} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

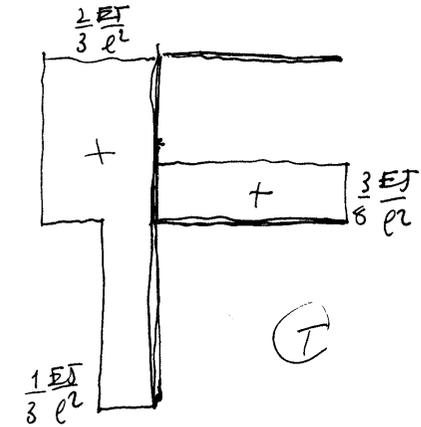
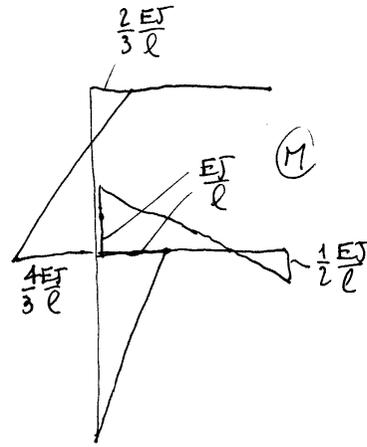
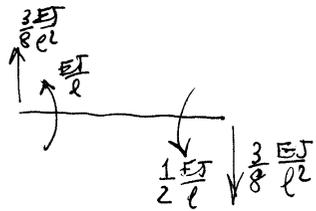
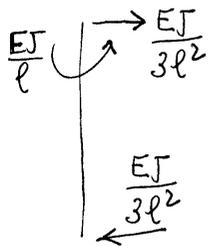
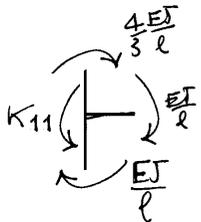
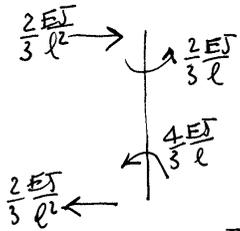


$$\underline{R} \equiv \begin{Bmatrix} \frac{4}{3} ql^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \varphi_B = 1 \\ \varphi_C = 0 \end{cases}$$

$$K_{11} = \frac{10}{3} \frac{EJ}{l}$$

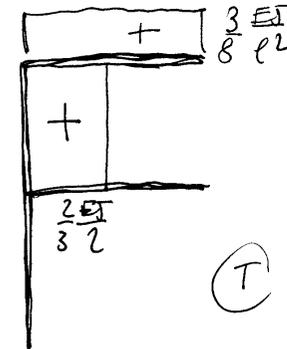
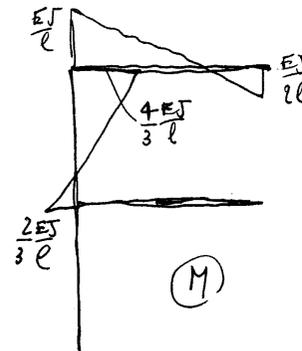
$$K_{21} = \frac{2}{3} \frac{EJ}{l}$$

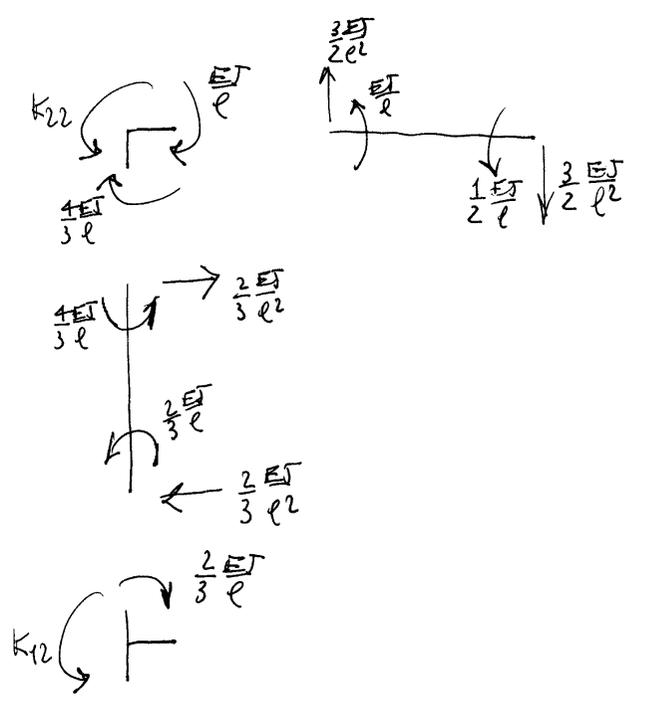


$$\begin{cases} \varphi_B = 0 \\ \varphi_C = 1 \end{cases}$$

$$K_{22} = \frac{7}{3} \frac{EJ}{l}$$

$$K_{12} = \frac{2}{3} \frac{EJ}{l}$$





$$\underline{K} \equiv \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \frac{EI}{3l}$$

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{R} = \underline{F}$$

$$\frac{EI}{3l} \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \end{Bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 49l^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 10\varphi_B + 2\varphi_C = -4\frac{9l^3}{EI} \\ 2\varphi_B + 7\varphi_C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_C = \frac{4}{33} \frac{9l^3}{EI} \\ \varphi_B = -\frac{14}{33} \frac{9l^3}{EI} \end{cases}$$

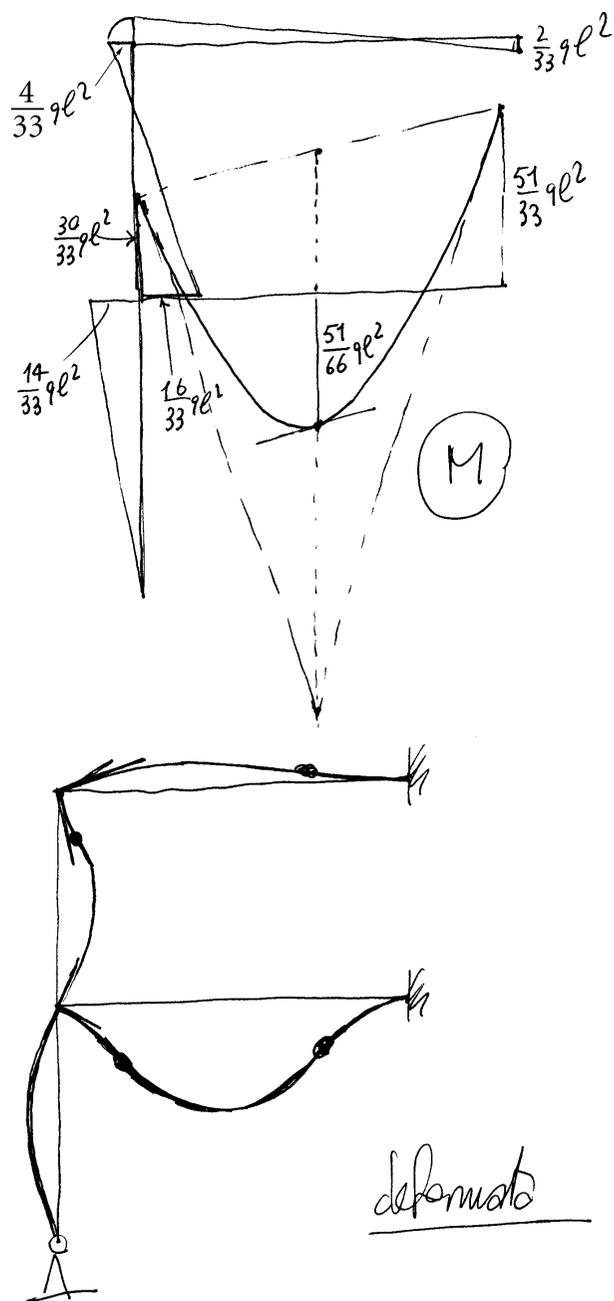
$$M_{BE} = \left(-\frac{4}{3} + \frac{14}{33}\right) 9l^2 = -\frac{30}{33} 9l^2$$

$$M_{BA} = -\frac{14}{33} 9l^2$$

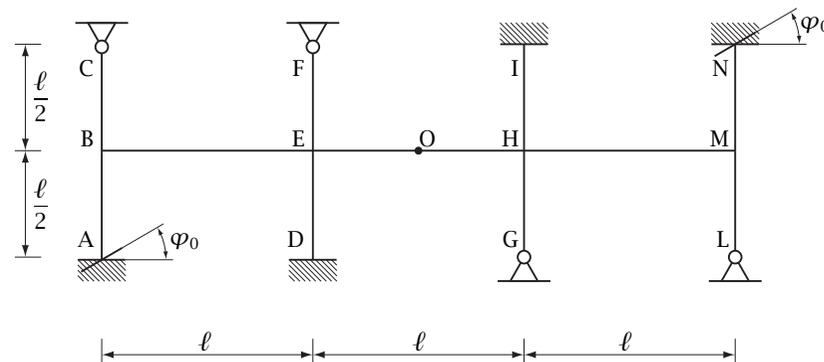
$$M_{BC} = \left(\frac{4}{3} \frac{14}{33} - \frac{2}{3} \frac{4}{33}\right) 9l^2 = \frac{48}{99} 9l^2 = \frac{16}{33} 9l^2$$

$$M_{EB} = \left(-\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \frac{14}{33}\right) 9l^2 = -\frac{102}{66} 9l^2 = -\frac{51}{33} 9l^2$$

$$M_{CB} = \left(-\frac{2}{3} \frac{14}{33} + \frac{4}{3} \frac{4}{33}\right) 9l^2 = -\frac{4}{33} 9l^2$$



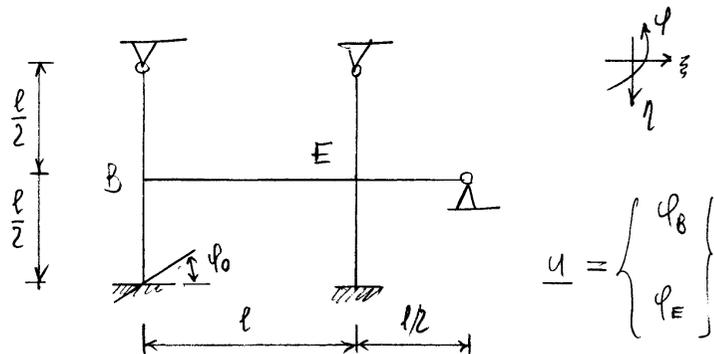
6.9 Esercizio 104



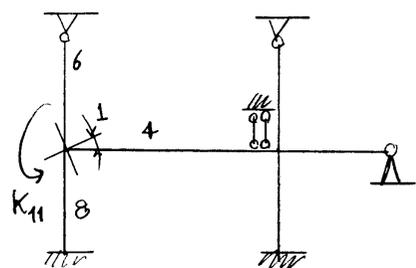
Sia data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un cedimento angolare nei due incastri A e N . Tenendo conto della sua polarisimmetria geometrica e materiale:

1. Calcolare la matrice delle rigidezze (almeno una colonna);
 2. Disegnare il diagramma quotato del momento flettente e del taglio relativo ad uno dei due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
 3. Calcolare le reazioni di incastro perfetto;
-
4. Disegnare la deformata elastica della struttura;
 5. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
 6. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
 7. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Struttura polarisimmetrica \Rightarrow il polo puo' solo ruotare

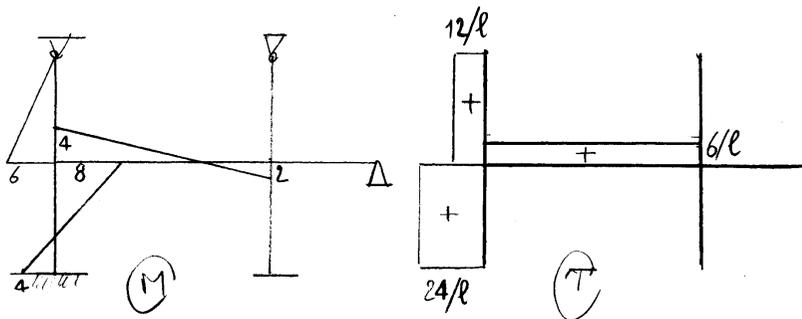


1ª colonna



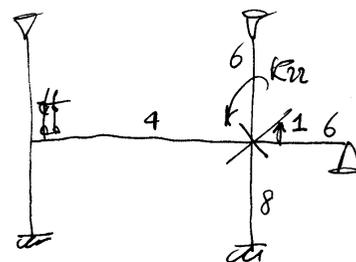
2 meno di EJ/l

$$K_{11} = 18 \frac{EJ}{l} \quad K_{21} = 2 \frac{EJ}{l}$$

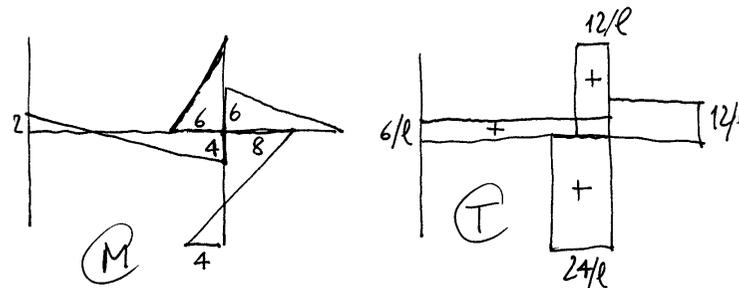


2ª colonna

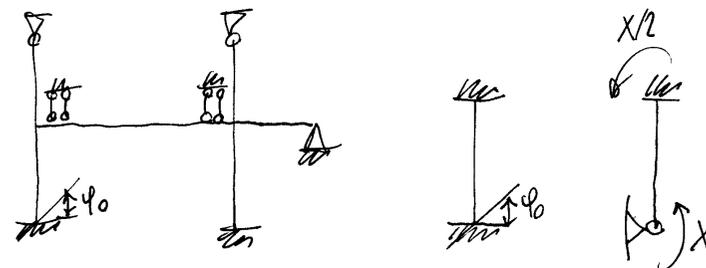
2 meno di EJ/l



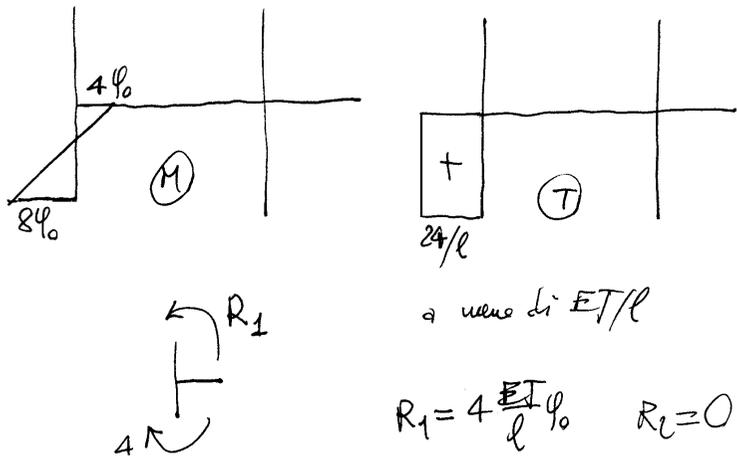
$$K_{22} = 24 \frac{EJ}{l} \quad K_{12} = 2 \frac{EJ}{l}$$



Reazioni di incastro perfetto



$$\frac{X(l/2)}{4EJ} = \varphi_0 \Rightarrow X = \frac{8EJ}{l} \varphi_0$$



$$R_1 = 4 \frac{EI}{l} \varphi_0 \quad R_2 = 0$$

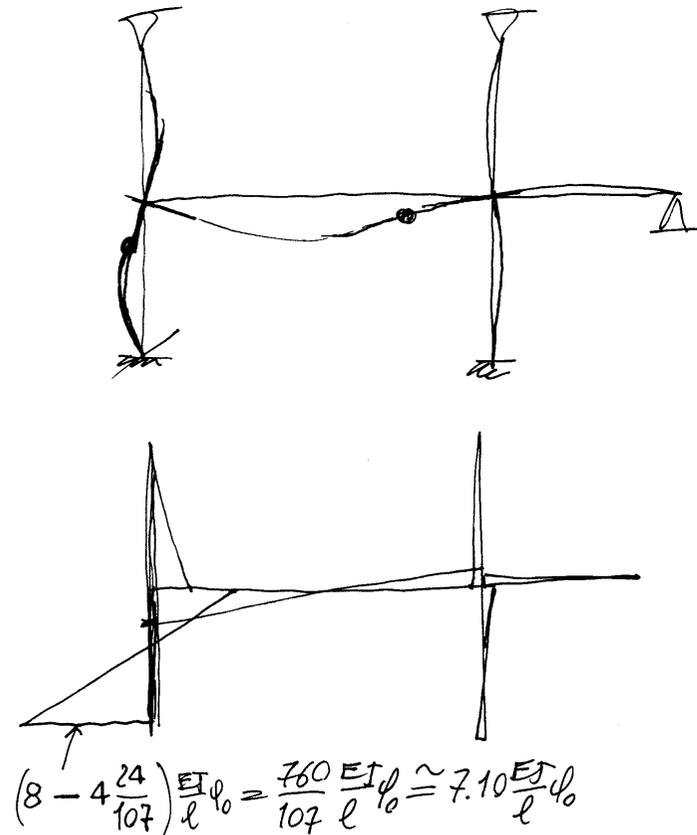
$$\underline{F} \equiv \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{R} \equiv \frac{EI}{l} \begin{Bmatrix} 4\varphi_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 2 & 24 \end{bmatrix} \frac{EI}{l}$$

$$\underline{K}\underline{u} + \underline{R} = \underline{F} \Rightarrow \begin{cases} 18\varphi_B + 2\varphi_E + 4\varphi_0 = 0 \\ 2\varphi_B + 24\varphi_E = 0 \end{cases}$$

$$\varphi_B = -12\varphi_E$$

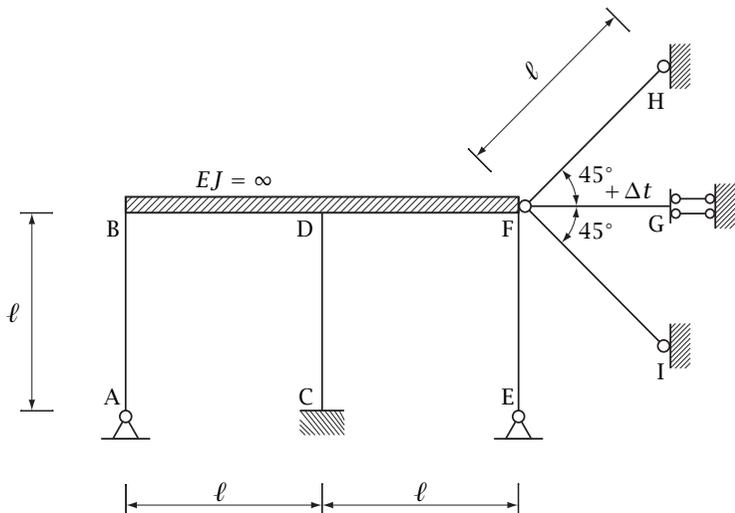
$$(12 \times 18 - 2)\varphi_E = 4\varphi_0 \Rightarrow \varphi_E = \frac{2}{107}\varphi_0$$

$$\begin{cases} \varphi_B = -\frac{24}{107}\varphi_0 \\ \varphi_E = \frac{2}{107}\varphi_0 \end{cases}$$



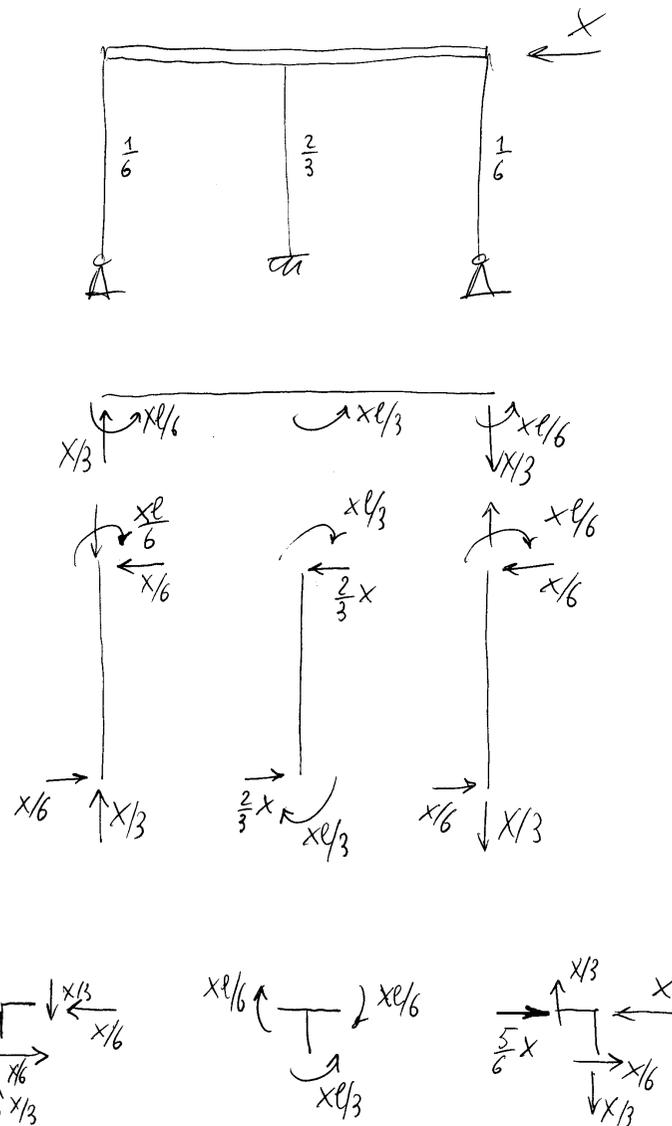
$$L_d = \frac{1}{2} \frac{760}{107} \frac{EI}{l} (\varphi_0)^2$$

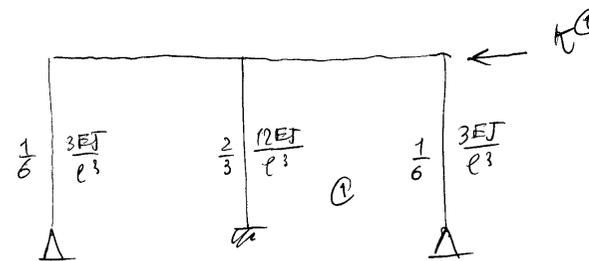
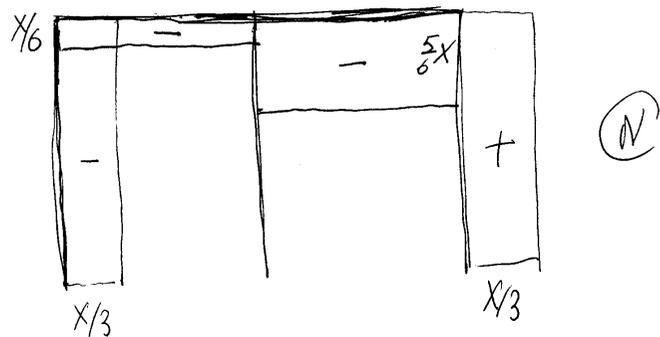
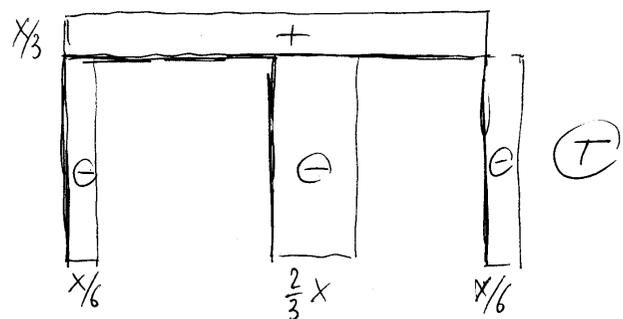
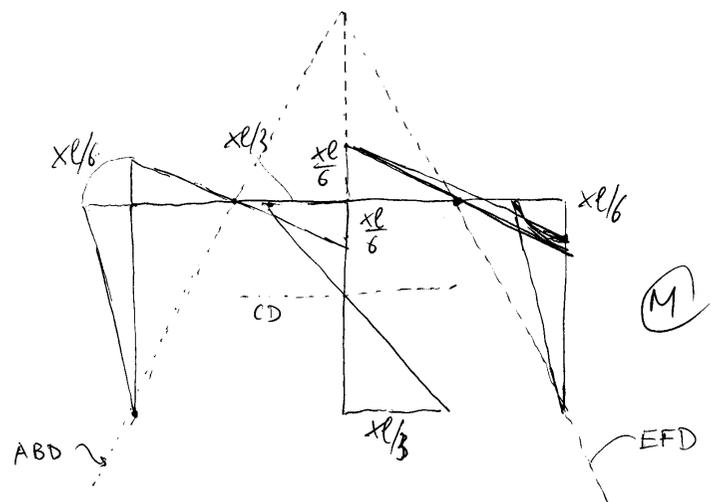
6.10 Esercizio 105



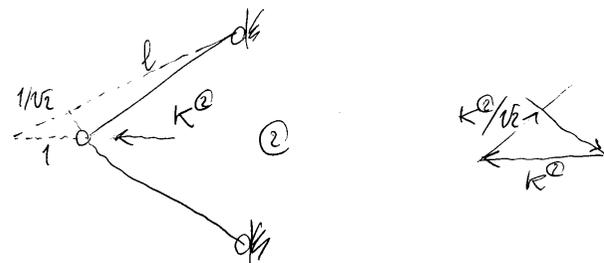
Data la struttura iperstatica riportata in figura, avente la travata BDF infinitamente rigida e l'asta FG soggetta ad un incremento uniforme di temperatura:

1. Tracciare i diagrammi quotati del momento flettente, del taglio e dello sforzo normale nel telaio con travata rigida, prevedendo retta d'azione e verso della forza agente nel nodo F (indicare con X il modulo di tale forza);
 2. Risolvere la struttura iperstatica;
-
3. Disegnare la curva delle pressioni;
 4. Determinare la variazione termica critica che provoca l'instabilità laterale dell'asta FG;
 5. disegnare la deformata della struttura quotando le rotazioni e gli spostamenti;
 6. Valutare l'energia potenziale totale in corrispondenza della soluzione.

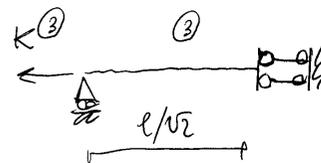




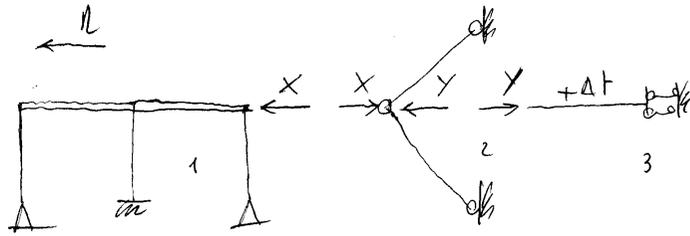
$$k^1 = \frac{18EJ}{l^3} \quad c^1 = \frac{l^3}{18EJ}$$



$$\frac{k^2}{\sqrt{2}} \frac{l}{EA} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k^2 = \frac{EA}{l} \quad c^2 = \frac{l}{EA}$$



$$\frac{k^3 l}{\sqrt{2}EA} = 1 \Rightarrow k^3 = \frac{\sqrt{2}EA}{l} \quad c^3 = \frac{l}{\sqrt{2}EA}$$



$$q_1 = c_1 X \quad q_2 = c_2(Y - X) \quad q_3 = \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}} - c_3 Y$$

$$q_1 = q_2 \Rightarrow (c_1 + c_2)X - c_2 Y = 0$$

$$q_1 = q_3 \Rightarrow c_1 X + c_3 Y = \frac{\alpha \Delta t l}{\sqrt{2}}$$

$$(c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1) X = \frac{c_2 \alpha \Delta t l}{\sqrt{2}}$$

$$X = \frac{c_2 \alpha \Delta t l}{\sqrt{2} (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1)} = \frac{k_1 k_3}{\sqrt{2} (k_1 + k_2 + k_3)} \alpha \Delta t l$$

$$(c_3 c_1 + c_3 c_2 + c_1 c_2) Y = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2}} \alpha \Delta t l$$

$$Y = \frac{c_1 + c_2}{\sqrt{2} (c_3 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1)} \alpha \Delta t l = \frac{k_3 (k_1 + k_2)}{\sqrt{2} (k_1 + k_2 + k_3)} \alpha \Delta t l$$

$$Y - X = \frac{c_1}{\sqrt{2} (c_1 c_2 + c_2 c_3 + c_3 c_1)} \alpha \Delta t l = \frac{k_2 k_3}{\sqrt{2} (k_1 + k_2 + k_3)} \alpha \Delta t l$$

$$q_1 = \frac{X}{k_1} \quad q_2 = \frac{Y - X}{k_2} \quad q_3 = -\frac{Y}{k_3} + \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}}$$

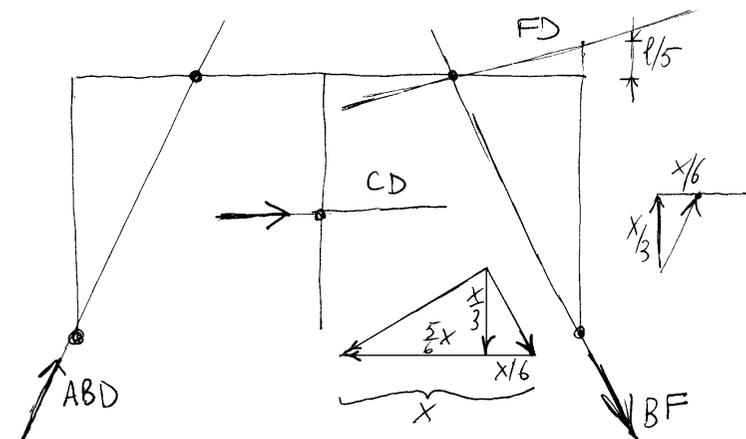
$$q_1 = q_2 \Rightarrow \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2} X - \frac{1}{k_2} Y = 0$$

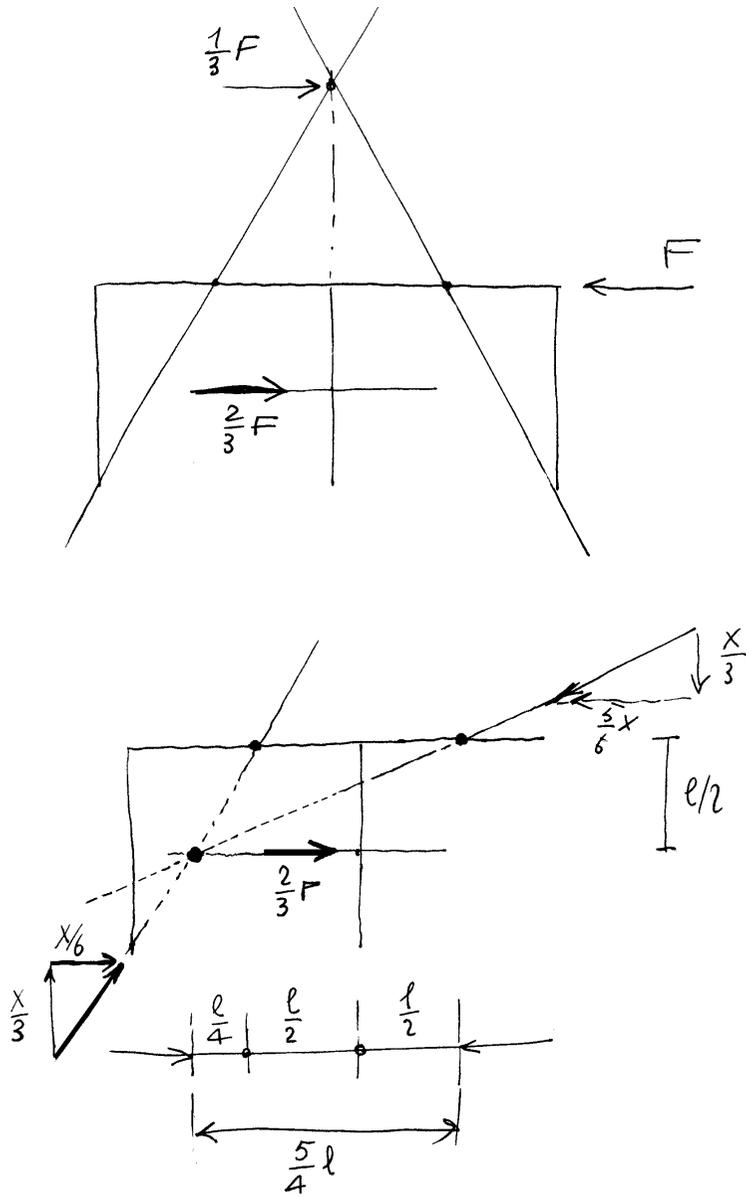
$$q_1 = q_3 \Rightarrow \frac{X}{k_1} + \frac{Y}{k_3} = \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_1} X = k_3 \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\frac{k_1}{k_3} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) Y = k_1 \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{k_1 + k_2 + k_3}{k_3 (k_1 + k_2)} Y = \alpha \Delta t \frac{l}{\sqrt{2}}$$



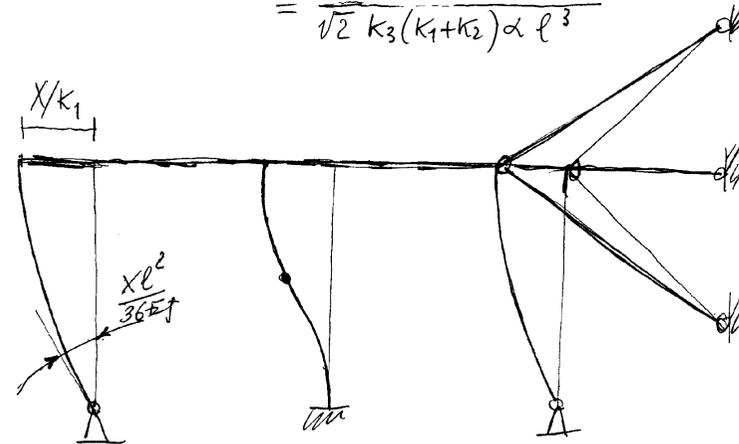


luce libera di inflessione $28/2$ FG: $l_0 = \sqrt{2} l$

$$\pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} = \gamma_{cr} = \frac{k_3(k_1+k_2)}{\sqrt{2}(k_1+k_2+k_3)} \propto \Delta t_{cr} l$$

$$\Delta t_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{2 l^2 \alpha l} \frac{\sqrt{2}(k_1+k_2+k_3)}{k_3(k_1+k_2)}$$

$$= \frac{\pi^2 EJ (k_1+k_2+k_3)}{\sqrt{2} k_3 (k_1+k_2) \alpha l^3}$$



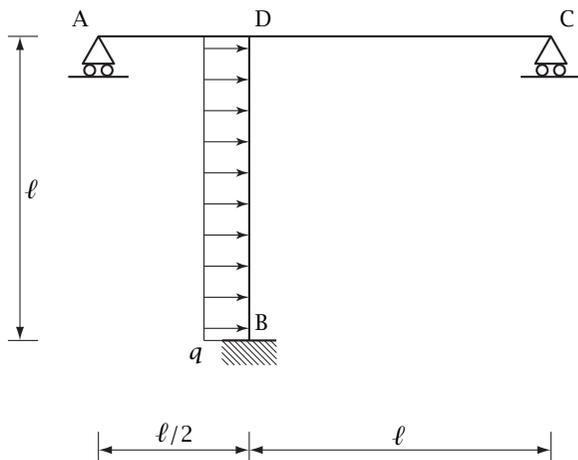
Energia potenziale totale

$$L_d = \frac{1}{2} \frac{x^2}{k_1} + \frac{1}{2} \frac{(y-x)^2}{k_2} + \frac{1}{2} \frac{y^2}{k_3}$$

$$V = x^2/k_1 + (y-x)^2/k_2 + y^2/k_3$$

$$\Pi = - \frac{1}{2} \left(x^2/k_1 + \frac{(y-x)^2}{k_2} + \frac{y^2}{k_3} \right)$$

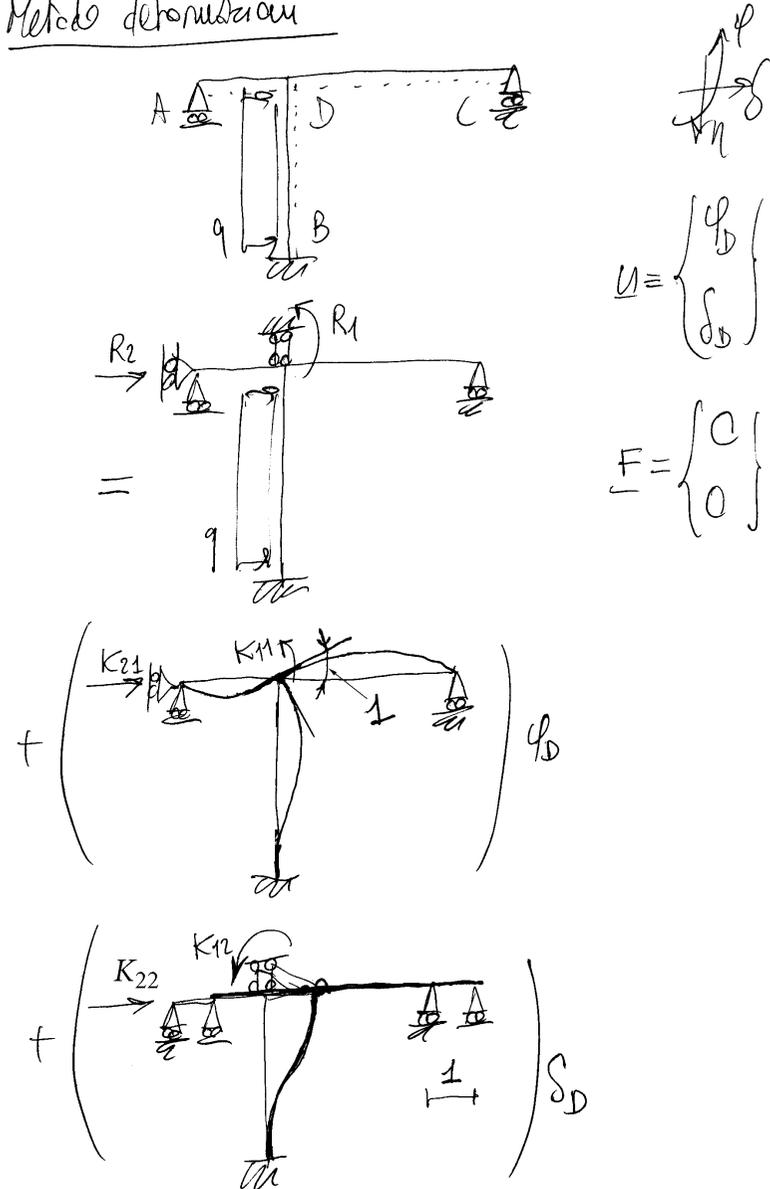
6.11 Esercizio 106



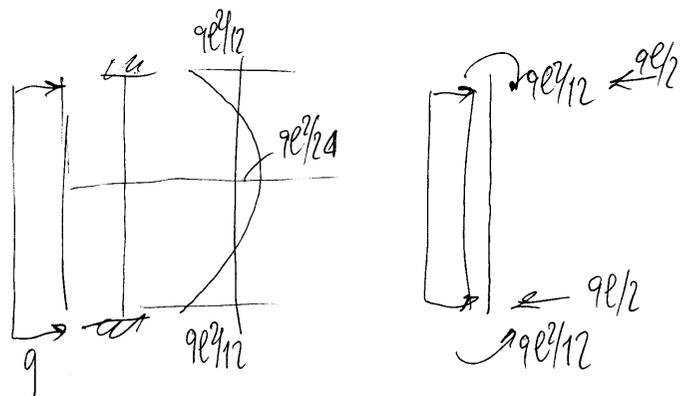
Data la struttura iperstatica di figura, soggetta ad un carico ripartito nel montante BD:

1. Calcolare la matrice delle rigidezze (almeno una colonna);
 2. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi ad uno dei due schemi che intervengono nel calcolo della matrice delle rigidezze;
 3. Calcolare le reazioni di incastro perfetto;
 4. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio relativi allo schema che interviene nel calcolo;
-
5. Disegnare la deformata elastica della struttura;
 6. Disegnare la curva delle pressioni;
 7. Risolvere la struttura con il metodo delle deformazioni;
 8. Disegnare i diagrammi quotati del momento flettente e del taglio;
 9. Calcolare l'energia elastica di deformazione.

Metodo deformazioni



Resziani incastro perfetto



Equilibrio rotazione nodo D



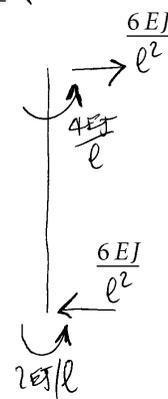
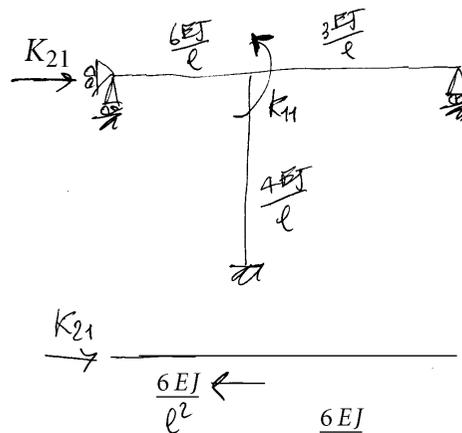
$$R_1 = -\frac{q l^2}{12}$$

Equilibrio traslazione travata ADB

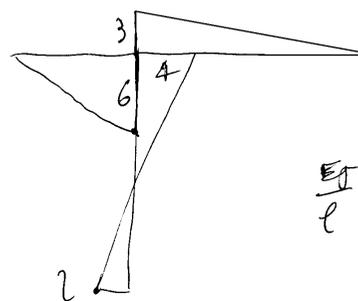


$$R_2 = -\frac{q l}{2}$$

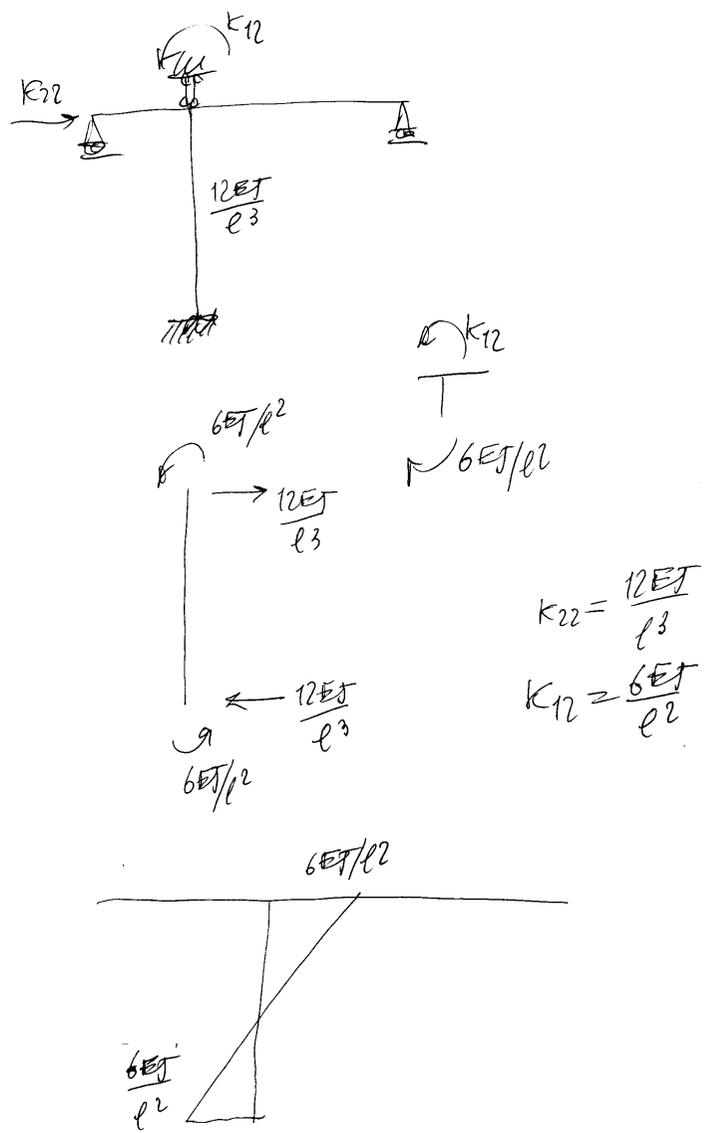
1ª colonna matrice rigidezza



$$\begin{cases} K_{11} = \frac{13EJ}{l} \\ K_{21} = \frac{6EJ}{l^2} \end{cases}$$



2ª colonna matrice rigidezze



$$\underline{R} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \end{Bmatrix} \frac{ql}{12} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} 13l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \frac{EJ}{l^3}$$

$$\underline{K} \underline{u} + \underline{R} = \underline{F}$$

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 13l^2 & 6l \\ 6l & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_D \\ \delta_D \end{Bmatrix} = \frac{ql}{12} \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

$$13l^2 \varphi_D + 6l \delta_D = \frac{9l^5}{12EJ}$$

$$6l \varphi_D + 12 \delta_D = \frac{9l^4}{2EJ}$$

$$20l \varphi_D = -\frac{9l^4}{3EJ} \Rightarrow \varphi_D = -\frac{9l^3}{60EJ}$$

$$-\frac{9l^4}{10EJ} + 12\delta_D = \frac{9l^4}{2EJ} \Rightarrow \delta_D = \frac{9l^4}{20EJ}$$

$$M_B = -\frac{9l^2}{12} \left(\frac{2EJ}{l} \right) \left(-\frac{9l^3}{60EJ} \right) - \left(\frac{6EJ}{l^2} \right) \left(\frac{9l^4}{20EJ} \right)$$

$$= -\frac{7}{20} 9l^2$$

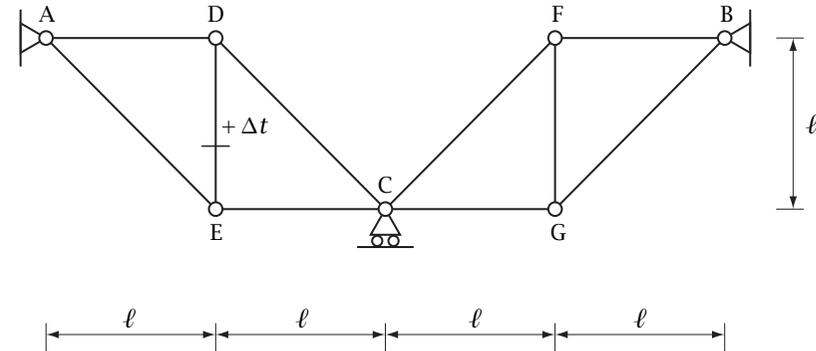
$$-\frac{1}{12} + \frac{1}{30} - \frac{3}{10} = \frac{-5+2-18}{60}$$

$$= -\frac{21}{60} = -\frac{7}{20}$$

$$M_{DB} = -\frac{9l^2}{12} + \left(\frac{4EJ}{l} \right) \left(-\frac{9l^3}{60EJ} \right) + \left(\frac{6EJ}{l^2} \right) \left(\frac{9l^4}{20EJ} \right)$$

$$= \frac{3}{20} 9l^2$$

6.12 Esercizio 107



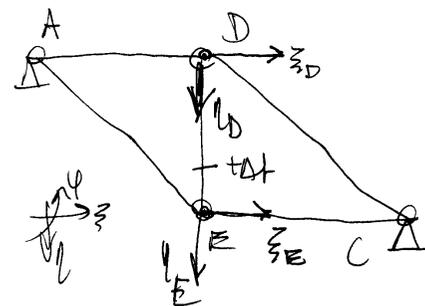
Data la travatura reticolare assialsimmetrica e iperstatica di figura, soggetta ad una distorsione termica uniforme in corrispondenza dell'asta DE, e supponendo che le aste abbiano area A uguale:

1. Impostare la soluzione del problema tenendo conto della assialsimmetria della struttura;
 2. Risolvere lo schema simmetrico, compilando una tabella riassuntiva che riporti lo sforzo normale, in modulo, di ogni singola asta e l'indicazione se questa è un tirante oppure un puntone;
 3. Risolvere lo schema emisimmetrico;
-
4. Risolvere lo schema simmetrico utilizzando il metodo degli spostamenti;
 5. Valutare lo spostamento orizzontale del nodo C utilizzando il metodo cinematico.

Posto che le aste siano realizzate in acciaio Fe360, di modulo di Young $E = 200 \text{ GPa}$, tensione ammissibile $\sigma_{adm} = 160 \text{ N/mm}^2$ e coefficiente di dilatazione termica $\alpha_t = 0.000012^\circ\text{C}^{-1}$, e che inoltre sia $\Delta t = 50^\circ\text{C}$, $l = 2 \text{ m}$, $A = 20 \text{ cm}^2$ e che infine i momenti di inerzia massimo e minimo delle aste siano $J_{max} = 140 \text{ cm}^4$ e $J_{min} = 100 \text{ cm}^4$:

6. individuare l'asta compressa in condizioni peggiori dal punto di vista del carico di punta e verificarla utilizzando il metodo omega, nell'ipotesi che le cerniere siano sferiche;
7. Valutare il livello critico dell'incremento termico Δt relativamente all'instabilità per flessione laterale delle aste compresse;
8. Calcolare (in joule) l'energia elastica di deformazione e l'energia potenziale totale corrispondente alla soluzione.

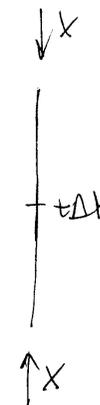
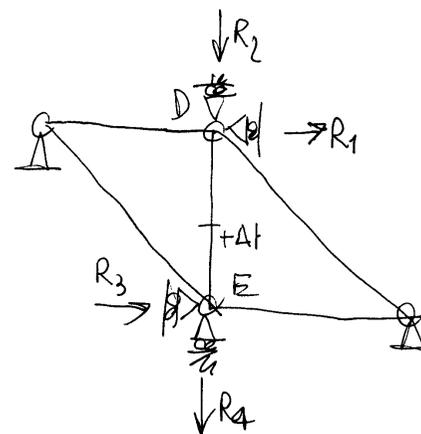
Metodo spostamenti schema simmetrico



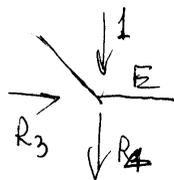
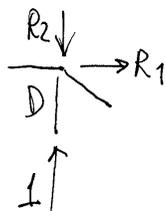
struttura principale

$$u \equiv \begin{Bmatrix} z_D \\ \rho_D \\ z_E \\ \rho_E \end{Bmatrix}$$

Reazioni di incastro perfetto



$$\frac{x l}{EA} = \alpha_t \Delta t l \Rightarrow x = EA \alpha_t \Delta t$$



$R_1 = 0$
 $R_2 = 1$

$R_3 = 0$
 $R_4 = -1$

2 meno di $EA\alpha_1\Delta T$

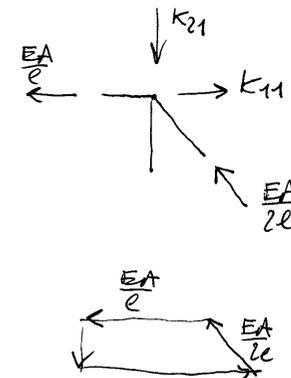
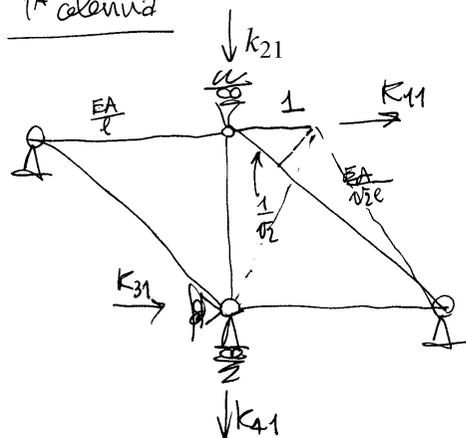
$$\underline{R} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} EA\alpha_1\Delta T$$

Forze nodali:

$$\underline{F} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

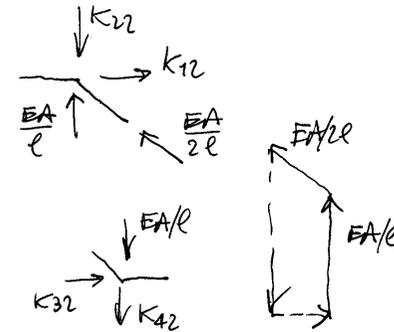
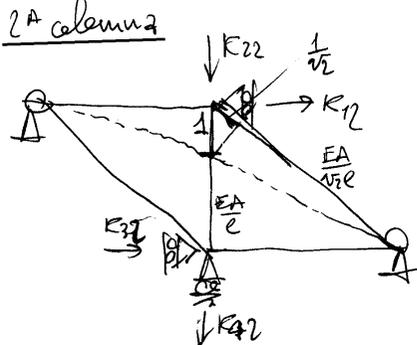
Matrice delle rigidità

1ª colonna



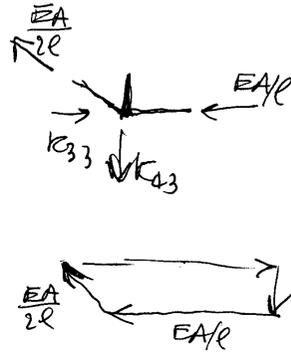
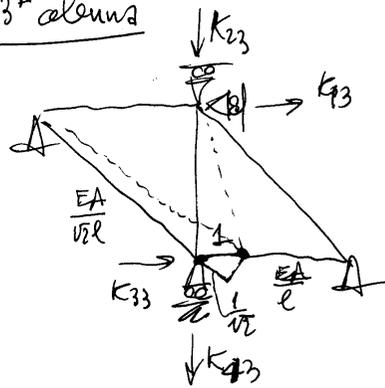
$K_{11} = (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \frac{EA}{l}$ $K_{21} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l}$ $K_{31} = 0$ $K_{41} = 0$

2ª colonna



$K_{12} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{EA}{l}$ $K_{22} = (1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}) \frac{EA}{l}$
 $K_{32} = 0$ $K_{42} = - \frac{EA}{l}$

3^a colonna



$$K_{13} = 0 \quad K_{23} = 0 \quad K_{33} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l} \quad K_{43} = \frac{EA}{2\sqrt{2}l}$$

$$\underline{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \xi & \eta & \xi & \eta \\ 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \xi \\ \eta \\ \xi \\ \eta \end{matrix}$$

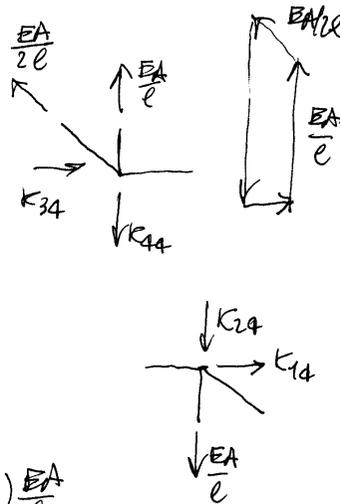
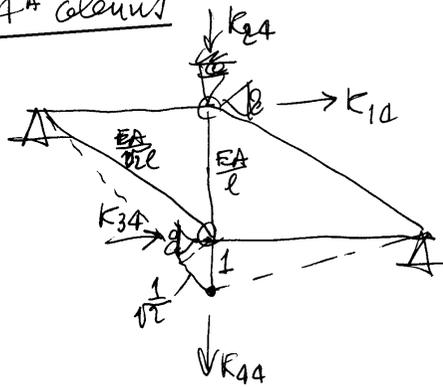
Soluzione

$$\underline{R} + \underline{K} \underline{u} = \underline{F}$$

$$\underline{K} \underline{u} = -\underline{R}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \xi_D + \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta_D &= 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \xi_D + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \eta_D - \eta_E &= -EA \alpha_T \Delta T \\ \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \xi_E + \frac{1}{2\sqrt{2}} \eta_E &= 0 \\ -\eta_D + \frac{1}{2\sqrt{2}} \xi_E + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \eta_E &= EA \alpha_T \Delta T \end{aligned} \right.$$

4^a colonna



$$K_{14} = 0 \quad K_{24} = -\frac{EA}{l}$$

$$K_{34} = \frac{EA}{2\sqrt{2}l} \quad K_{44} = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \frac{EA}{l}$$

$$\begin{cases} (1+2\sqrt{2})\xi_D + \eta_D = 0 \\ \xi_D + (1+2\sqrt{2})\eta_D - 2\sqrt{2}\eta_E = -2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T \\ (1+2\sqrt{2})\xi_E + \eta_E = 0 \\ -2\sqrt{2}\eta_D + \xi_E + (1+2\sqrt{2})\eta_E = 2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \eta_D = -(1+2\sqrt{2})\xi_D \\ \eta_E = -(1+2\sqrt{2})\xi_E \end{cases} \quad (1+2\sqrt{2})^2 = 1+8+4\sqrt{2} = 9+4\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \xi_D - (1+2\sqrt{2})^2\xi_D + 2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})\xi_E = -2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T \\ +2\sqrt{2}(1+2\sqrt{2})\xi_D + \xi_E - (1+2\sqrt{2})^2\xi_E = 2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T \end{cases}$$

$$+(8+4\sqrt{2})\xi_D - (8+2\sqrt{2})\xi_E = 2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T$$

$$(8+2\sqrt{2})\xi_D - (8+4\sqrt{2})\xi_E = 2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T$$

$$2\sqrt{2}\xi_D + 2\sqrt{2}\xi_E = 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_E = -\xi_D \\ \eta_E = -\eta_D \end{cases}$$

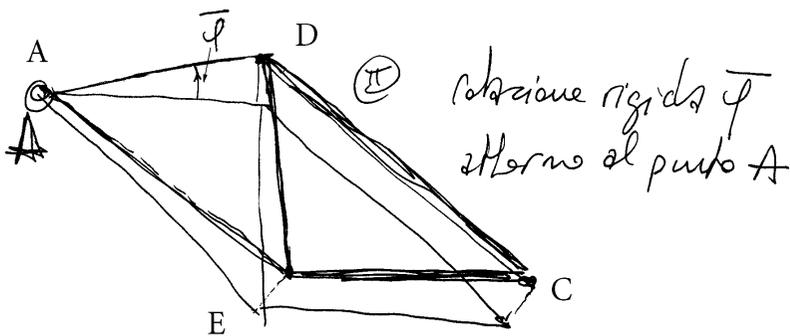
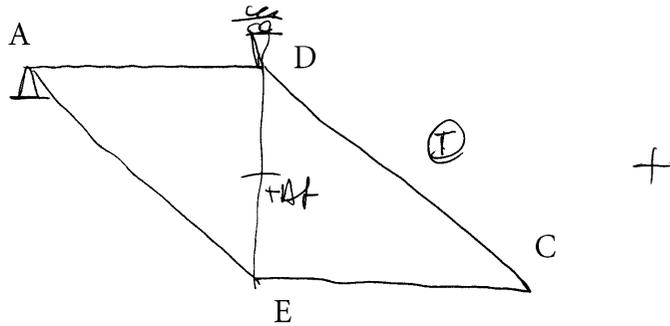
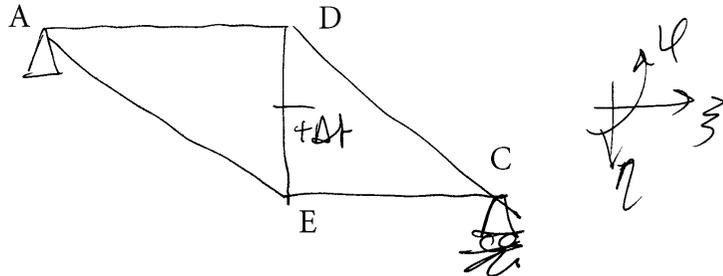
$$(16+6\sqrt{2})\xi_D = 2\sqrt{2}EA\alpha_T\Delta T$$

$$\frac{16}{2\sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

$$\xi_D = \frac{\alpha_T\Delta T l}{3+4\sqrt{2}}$$

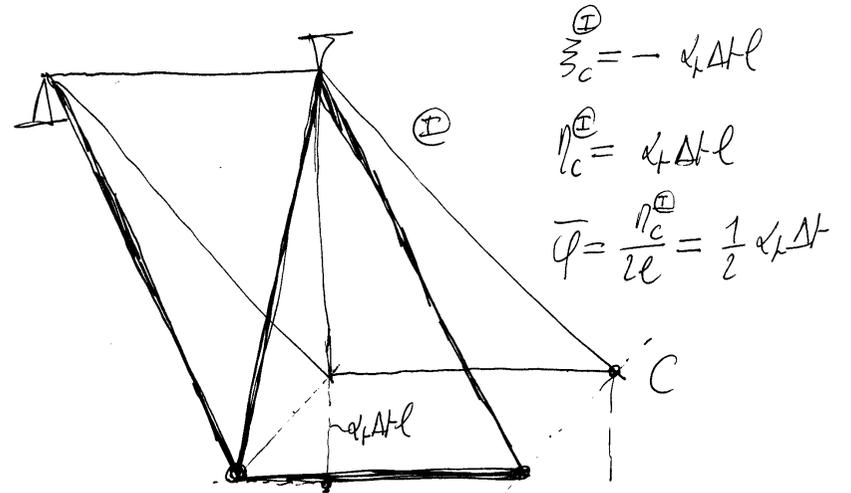
$$\eta_D = -\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}\alpha_T\Delta T l$$

Schemi emisimmetrici



$$\bar{\xi}_C^{(II)} = \bar{\varphi} l = \frac{1}{2} \alpha_t \Delta t l$$

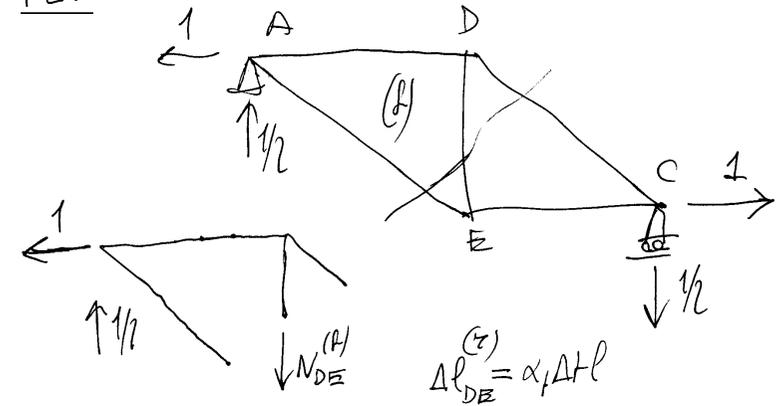
rotazione rigida $\bar{\varphi}$ attorno al punto A



$$\begin{aligned} \bar{\xi}_C^{(I)} &= -\alpha_t \Delta t l \\ \eta_C^{(I)} &= \alpha_t \Delta t l \\ \bar{\varphi} &= \frac{\eta_C^{(I)}}{2l} = \frac{1}{2} \alpha_t \Delta t \end{aligned}$$

$$\bar{\xi}_C = \bar{\xi}_C^{(I)} + \bar{\xi}_C^{(II)} = -\frac{1}{2} \alpha_t \Delta t l$$

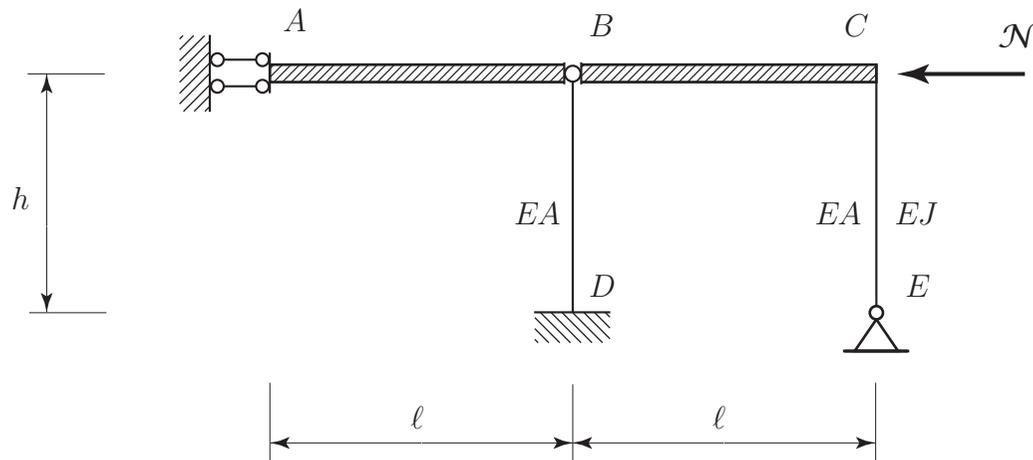
PLV



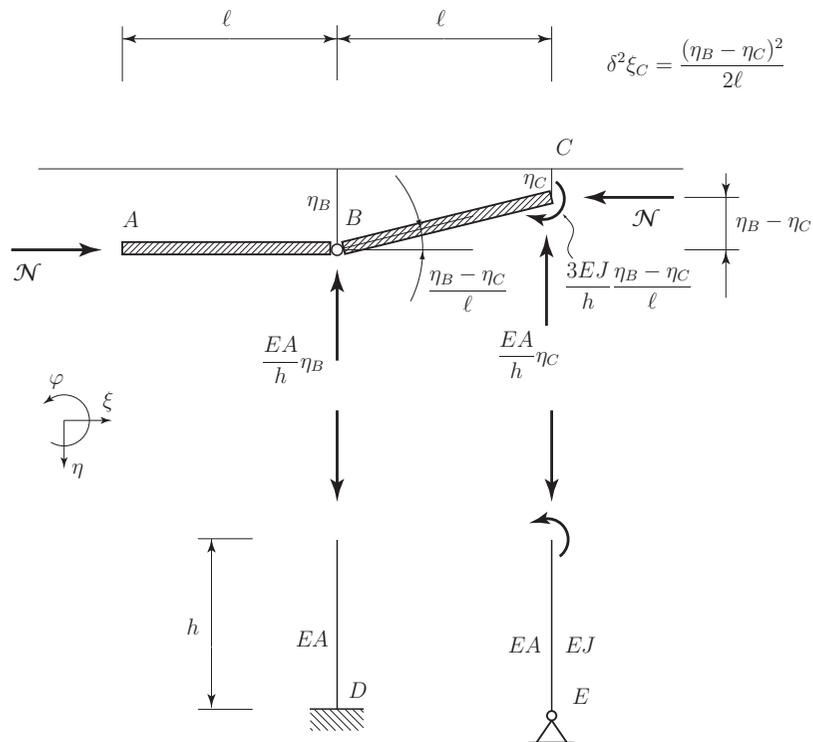
$$\frac{N_{DE}^{(R)}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad N_{DE}^{(R)} = -\frac{1}{2} \quad L_{vi} = -\frac{1}{2} \alpha_t \Delta t l$$

ESERCIZI SUI CARICHI CRITICI

7.1 Esercizio 108



Determinare il carico critico sia con il metodo statico che con il metodo energetico e disegnare la deformata critica.



$$\delta^2 \xi_C = \frac{(\eta_B - \eta_C)^2}{2\ell}$$

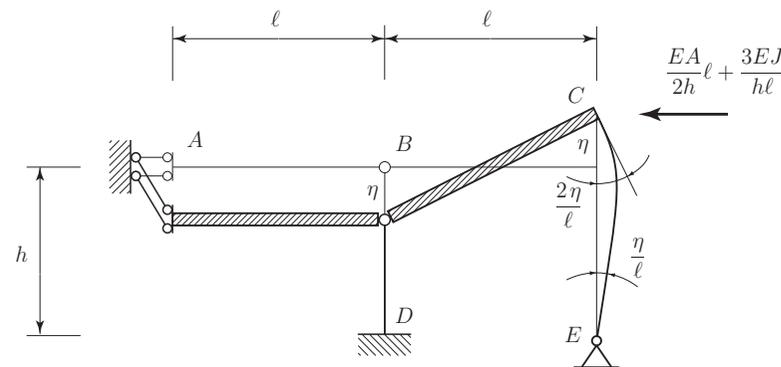
l'equazione definitrice del carico critico:

$$\left(-N + \frac{EA}{h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell}\right) - \left(N - \frac{3EJ}{h\ell}\right) = 0,$$

da cui, infine:

$$N_{cr} = \frac{EA}{2h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell}.$$

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale richiede $\eta_C = -\eta_B$. In corrispondenza del carico critico, valore del carico che annulla il determinante dei coefficienti, anche l'equazione di equilibrio alla rotazione impone tale identità senza aggiungere nulla di nuovo. Ne consegue immediatamente la deformata critica.



Equilibrio alla traslazione verticale e alla rotazione attorno al punto B:

$$\begin{cases} \frac{EA}{h}\eta_B + \frac{EA}{h}\eta_C = 0 \\ N(\eta_B - \eta_C) + \frac{EA}{h}\eta_C\ell - \frac{3EJ}{h}\frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} = 0 \end{cases}.$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{h} & \frac{EA}{h} \\ N - \frac{3EJ}{h\ell} & -N + \frac{EA}{h}\ell + \frac{3EJ}{h\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = 0.$$

Annullando il determinante della matrice dei coefficienti si ottiene

Procedendo con il metodo energetico, occorre scrivere la variazione seconda dell'energia potenziale totale associata ad una qualunque variazione η_B ed η_C dei parametri lagrangiani del sistema:

$$\delta^2 \pi = -N \left\{ \frac{(\eta_B - \eta_C)^2}{2\ell} \right\} + \frac{1}{2} \frac{EA}{h} \eta_B^2 + \frac{1}{2} \frac{EA}{h} \eta_C^2 + \frac{3}{2} \frac{EJ}{h} \left(\frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} \right)^2.$$

La condizione $\delta(\delta^2 \pi) = 0$, determinatrice del carico critico, conduce alle due equazioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta^2 \pi}{\partial \eta_B} = -N \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} + \frac{EA}{h} \eta_B + \frac{3EJ}{h} \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell^2} = 0 \\ \frac{\partial \delta^2 \pi}{\partial \eta_C} = N \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell} + \frac{EA}{h} \eta_C - \frac{3EJ}{h} \frac{\eta_B - \eta_C}{\ell^2} = 0 \end{cases}.$$

In forma matriciale si ottiene:

$$\begin{bmatrix} -\frac{N}{\ell} + \frac{EA}{h} + \frac{3EJ}{h\ell^2} & \frac{N}{\ell} - \frac{3EJ}{h\ell^2} \\ \frac{N}{\ell} - \frac{3EJ}{h\ell^2} & -\frac{N}{\ell} + \frac{EA}{h} + \frac{3EJ}{h\ell^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_B \\ \eta_C \end{Bmatrix} = 0.$$

Annullando il determinante dei coefficienti si riottiene il valore critico già ottenuto con il metodo statico.

OSSERVAZIONE. L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale è indipendente dal carico di punta e determina univocamente il modo critico nella forma

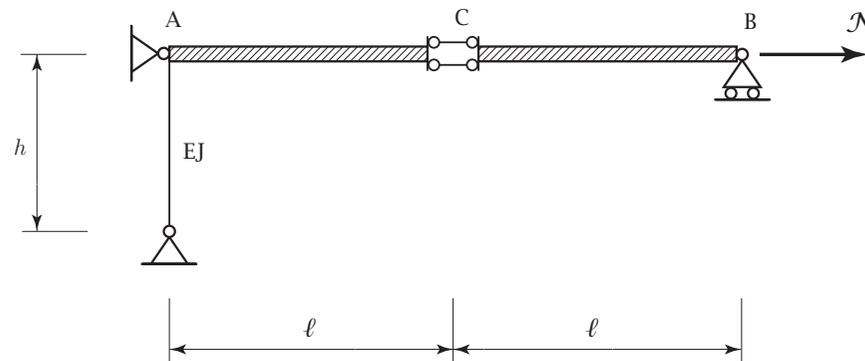
$$\eta_C = -\eta_B = \eta.$$

In corrispondenza a tale modo critico, l'equazione di equilibrio alla rotazione attorno al punto B

$$2N\eta + \frac{EA}{h}\eta\ell - \frac{3EJ}{h}\frac{2\eta}{\ell} = 0.$$

determina univocamente il carico critico.

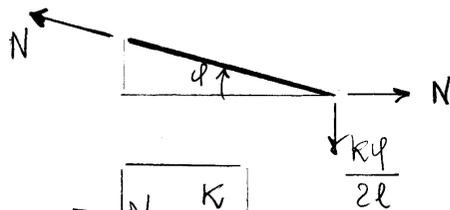
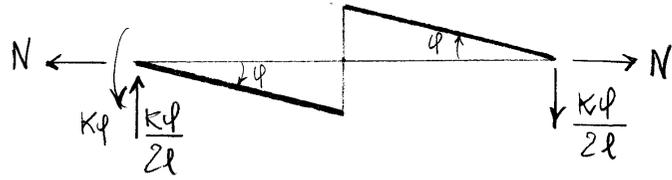
7.2 Esercizio 109



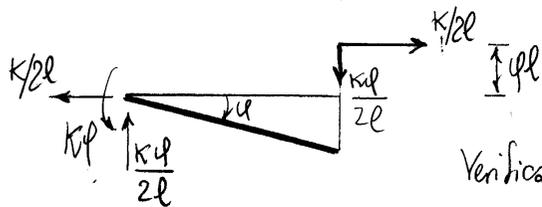
Determinare il carico critico sia con il metodo statico che con il metodo energetico e disegnare la deformata critica.

Metodo statico

$$K = \frac{3EJ}{h}$$

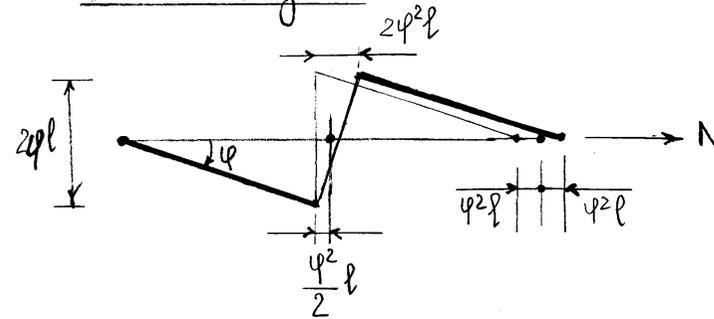


$$N\phi = \frac{K\phi}{2l} \Rightarrow \boxed{N = \frac{K}{2l}}$$



Verifica:

$$K\phi - \left(\frac{K\phi}{2l}\right)l - \left(\frac{K}{2l}\right)\phi l = 0$$

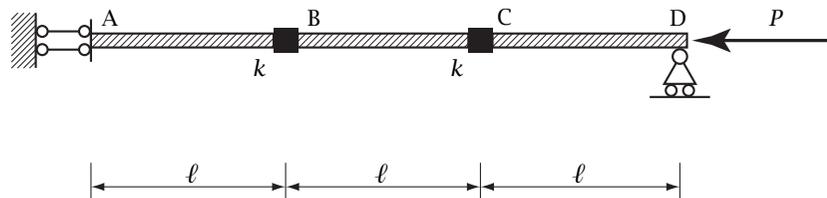
Metodo energetico

$$\delta^2 \pi = -N\phi^2 l + \frac{1}{2} K \phi^2$$

$$\frac{\partial \delta^2 \pi}{\partial \phi} = -2N\phi l + K\phi$$

$$\frac{\partial \delta^2 \pi}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow N = \frac{K}{2l}$$

7.3 Esercizio 110

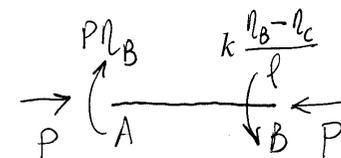
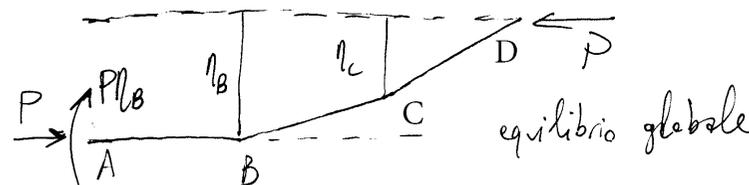
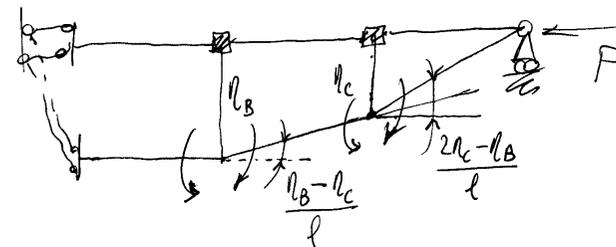


Data la struttura di figura composta di tre travi rigide connesse da due cerniere elastiche di rigidezza k , soggetta ad un carico assiale:

1. Determinare i carichi critici con il metodo statico;
 2. Dire quale tra i carichi critici ha un significato dal punto di vista strutturale;
-
3. Determinare e disegnare i modi critici;
 4. Determinare il carico critico con il metodo energetico.

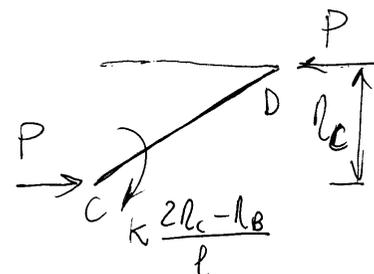
Metodo statico

$$\frac{n_c}{l} - \frac{n_B - n_c}{l} = \frac{2n_c - n_B}{l}$$



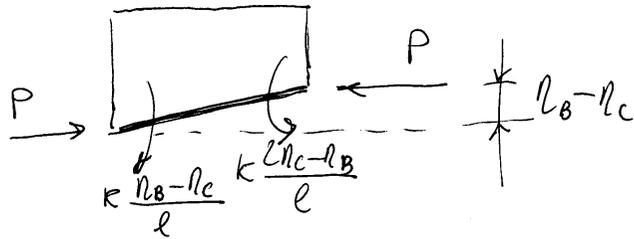
equilibrio tratto AB:

$$k \frac{n_B - n_c}{l} - P n_B = 0$$



equilibrio tratto CD:

$$-k \frac{2n_c - n_B}{l} + P n_c = 0$$



controllo equilibrio tratto BC:

$$k \frac{2l_C - l_B}{l} - k \frac{l_B - l_C}{l} + P(l_B - l_C) = 0$$

Quindi:

$$\begin{cases} \left(\frac{k}{l} - P\right) l_B - \frac{k}{l} l_C = 0 \\ -\frac{k}{l} l_B + \left(2\frac{k}{l} - P\right) l_C = 0 \end{cases}$$

Ovverossia:

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{l} - P & -\frac{k}{l} \\ -\frac{k}{l} & 2\frac{k}{l} - P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l_B \\ l_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Controllo:

$$-2\frac{k}{l} l_B + 3\frac{k}{l} l_C + P(l_B - l_C) = 0 \quad \textcircled{2} - \textcircled{1}$$

equazione caratteristica:

$$\left(\frac{k}{l} - P\right) \left(2\frac{k}{l} - P\right) - \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0$$

$$P^2 - 3\frac{k}{l}P + \left(\frac{k}{l}\right)^2 = 0$$

$$\begin{cases} P_1 \\ P_2 \end{cases} = \frac{3\frac{k}{l} \pm \sqrt{9\left(\frac{k}{l}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{l}\right)^2}}{2}$$

$$= \begin{cases} \frac{(3+\sqrt{5})}{2} \frac{k}{l} = 2.62 \frac{k}{l} \\ \frac{(3-\sqrt{5})}{2} \frac{k}{l} = 0.38 \frac{k}{l} \end{cases}$$

1° modo critico:

$$\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2} l_B - l_C\right) \frac{k}{l} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_C = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} l_B = -1.62 l_B$$

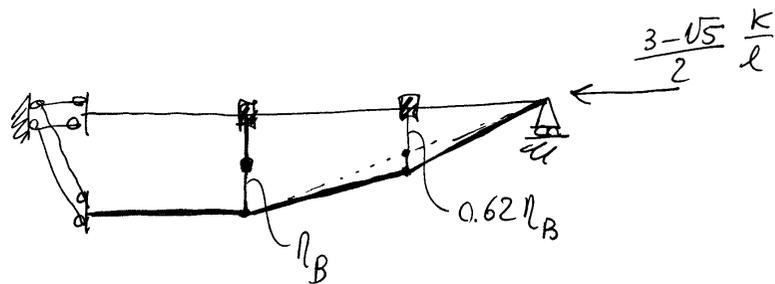
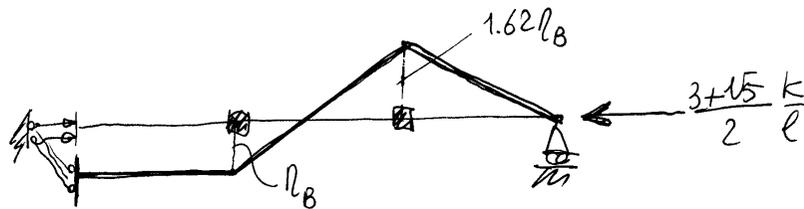
$$\left(-l_B + \frac{1-\sqrt{5}}{2} l_C\right) \frac{k}{l} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_C = -\frac{2}{\sqrt{5}-1} l_B = -1.62 l_B$$

2° modo critico

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} l_B - l_C = 0 \Rightarrow l_C = \frac{\sqrt{5}-1}{2} l_B = 0.62 l_B$$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} l_C - l_B = 0 \Rightarrow l_C = \frac{2}{\sqrt{5}+1} l_B = 0.62 l_B$$



$$\frac{2}{\sqrt{5}-1} \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}+1} \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

