Università di Trieste

Lauree in ingegneria elettronica e informatica e in ingegneria industriale (energia elettrica e dei sistemi)

Corso di Metodi Matematici per l'Ingegneria (030IN)
Anno Accademico 2025/2026

Prof. Franco Obersnel

Motivazioni. Cenni alla trasmissione di un segnale: codifica e digitalizzazione. Il metodo di campionamento. Il metodo di decomposizione in blocchi base. La necessità di rappresentare un segnale come serie di armoniche. Il modello di Fourier per la conduzione del calore. Il metodo di separazione delle variabili. Autovalori del problema di Dirichlet associato all'equazione del calore. Soluzione dell'equazione del calore come serie. Tre problemi: funzioni che ammettono la rappresentazione in serie, definizione di convergenza, regolarità della serie. Funzioni periodiche di periodo T, Una funzione $T-$periodica è sempre $kT-$periodica per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Derivata e primitiva di una funzione periodica. Integrale di una funzione periodica su un intervallo di lunghezza T. Polinomi trigonometrici. Armoniche elementari, ampiezza, fase, frequenza, frequenza angolare. Rappresentazioni equivalenti. Relazione tra i coefficienti nelle diverse rappresentazioni. Fase di un armonica in notazione complessa. Spettro delle fasi e spettro delle ampiezze di un polinomio trigonometrico.

L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Motivazioni e premesse storiche. Forma cartesiana di un numero complesso. Parte reale e parte immaginaria. Somma e prodotto di numeri complessi. Reciproco di un numero complesso. Proprietà algebriche. Il campo dei numeri complessi. Coniugato di un numero complesso. Modulo di un numero complesso. $\mathbb{C}$ non è un campo-ordinato. Numeri reali come particolari numeri complessi. Numeri immaginari puri. Piano di Gauss - Argand. Metrica e topologia in $\mathbb{C}$: palla aperta $B(z_0, r)$, intorno di un punto, punti interni, punti esterni, punti di frontiera, punti di accumulazione di un insieme, insieme aperto, insieme chiuso, chiusura di un insieme, insiemi limitati. Successioni e serie di numeri complessi. Limite di una successione e somma di una serie. Relazione tra convergenza di una successione/serie e delle rispettive successioni/serie delle parti reali e immaginarie. Funzioni complesse di variabile complessa. Parte reale e parte immaginaria di una funzione f. Serie di numeri complessi. Somma di una serie. Serie assolutamente convergenti. La serie geometrica. Funzione esponenziale, funzioni circolari e funzioni iperboliche definite come serie. La formula di Eulero. Forma polare di un numero complesso. Modulo, argomento e argomento principale di un numero complesso. Notazione esponenziale. Prodotto e potenze di numeri complessi in forma polare: formule di De Moivre. Interpretazione del prodotto come rotazione nel piano di Gauss. Forma matriciale di un numero complesso. Soluzioni in $\mathbb{C}$ dell'equazione $z^n = w$: radici $n-$esime di un numero complesso. Determinazione principale della radice $n-$esima. La funzione logaritmo (determinazione principale) e le sue proprietà. Funzioni continue. Problema della continuità delle funzioni argomento principale, radice $n-$esima e logaritmo (determinazioni principali). Proprietà principali della funzione esponenziale, delle funzioni circolari e delle funzioni iperboliche (formule di addizione, parti reale e immaginaria delle funzioni circolari). Equazioni del tipo $\operatorname{sen}(z) = c$. Principali teoremi sulle funzioni continue (cenni).

Integrazione complessa e funzioni analitiche. Curve parametriche in $\mathbb{C}$. Curve semplici, curve chiuse. Somma (concatenazione) di curve. Circuiti (lacci). Teorema della curva chiusa di Jordan (solo enunciato). Interno e esterno di una curva semplice chiusa. Curve regolari e regolari a tratti in $\mathbb{C}$. Curve equivalenti, orientazione di una curva. Circuiti orientati positivamente. Integrale su una curva di una funzione complessa. Integrale su curve equivalenti. Teorema sulla stima del modulo. Funzione derivabile in un punto. Derivabilità delle funzioni somma, prodotto, quoziente, composta. Derivabilità delle funzioni polinomiali, delle serie di potenze, delle funzioni razionali. Continuità di una funzione derivabile. Condizioni di monogeneità di Cauchy-Riemann. Derivata e condizioni di Cauchy-Riemann in forma polare. Le condizioni di Cauchy-Riemann non sono sufficienti per la derivabilità. Teorema di caratterizzazione delle funzioni derivabili (solo enunciato). Funzioni analitiche. Funzioni olomorfe. Funzioni intere. Un esempio di una funzione derivabile in un punto non olomorfa. Primitive, funzioni primitivabili, funzioni localmente primitivabili. Integrale su una curva di una funzione primitivabile. La funzione $\frac{1}{z}$ non è primitivabile sul suo dominio ma è localmente primitivabile. Teorema di Cauchy (dimostrazione per funzioni C^1 e curve regolari a tratti). Il teorema dei due circuiti. Passaggio del limite dentro il segno integrale, esempi. Cenni agli integrali di Lebesgue: insiemi di misura nulla secondo Lebesgue, funzioni a scala, funzioni misurabili, funzioni integrabili secondo Lebesgue e integrale di Lebesgue, proprietà principali (parte di programma non richiesta all'esame). Il teorema della convergenza dominata di Lebesgue (senza dimostrazione). Formula integrale di Cauchy per una funzione. Teorema di analiticità delle funzioni olomorfe e formule integrali di Cauchy per le derivate. Funzioni localmente primitivabili e funzioni olomorfe. Aperti semplicemente connessi. Funzioni olomorfe e funzioni primitivabili su un aperto semplicemente connesso (solo enunciato). Disuguaglianze di Cauchy. Teorema di Liouville. Il Teorema Fondamentale dell'Algebra. Molteplicità di uno zero di una funzione analitica. Il teorema sugli zeri di molteplicità infinita. Insiemi discreti. Proprietà degli insiemi degli zeri di una funzione analitica. Il principio di identità per le funzioni analitiche. Prolungamento analitico. Unicità del prolungamento analitico. Applicazione del prolungamento analitico alla dimostrazione di alcune proprietà delle funzioni. Punti singolari isolati di una funzione. Classificazione delle singolarità isolate: singolarità eliminabile (definizione, esistenza del limite e del prolungamento analitico), polo di ordine n (definizione, esistenza del limite, caratterizzazione dell'ordine); singolarità essenziale. Esempio di singolarità essenziale. Teorema di Picard (solo enunciato). Residuo di una funzione in un punto singolare isolato. Formula per il calcolo del residuo per un polo di ordine n. Formula per il calcolo del residuo di funzioni razionali nei poli semplici con utilizzo della derivata del denominatore. Osservazione sui residui nei poli coniugati delle funzioni razionali a coefficienti reali. Serie bilatera. Corona circolare $C(z_0; r_1, r_2)$. Insieme di convergenza di una serie bilatera di potenze. Parte principale (caratteristica, singolare) e parte regolare. Teorema di Laurent. Classificazione delle singolarità mediante la serie di Laurent. Residuo di una serie di Laurent. Il "metodo dei residui" per il calcolo della parte caratteristica di una serie di Laurent in un intorno forato di un polo di ordine k. Il metodo dei coefficienti indeterminati per il calcolo dei termini di una serie di Laurent. Funzioni razionali: metodo dei residui per la decomposizione in frazioni semplici. Il teorema dei residui. Valor principale (di Cauchy) $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ con eventuali punti singolari. Lemma del grande cerchio, lemma del piccolo cerchio e loro applicazioni. Lemma di Jordan. Applicazioni al calcolo di integrali del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x)\,dx$ e delle trasformate di Fourier (in particolare delle funzioni $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ e $f(x) = e^{-x^2}$). Calcolo degli integrali $PV\!\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$, $PV\!\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(x-a)}\,dx$, $PV\!\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2+a^2}\,dx$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+a^2}\,dx$, $a \in \mathbb{R}^+$. Integrali del tipo $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ con f funzione di $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$.

Serie di Fourier. Cenni agli spazi $L^p(E)$, con $p \geq 1$ o $p = \infty$. Relazione di inclusione tra gli spazi L^p. Lo spazio di Hilbert $L^2(]-\pi,\pi])$. Famiglie ortonormali canoniche complesse e reali in $L^2(]-\pi,\pi])$. Procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Il teorema di migliore approssimazione e la proiezione ortogonale su un sottospazio di H di dimensione finita. Coefficienti di Fourier complessi e reali. Polinomio di Fourier di una funzione in $L^2(]-\pi,\pi])$, reale e complesso. Il caso delle funzioni dispari e delle funzioni pari. Esempi di calcolo dei coefficienti di Fourier. Il caso di funzioni $T-$periodiche con $T \neq 2\pi$. Energia di una funzione di $L^2(]-\pi,\pi])$. Teorema di convergenza della serie di Fourier in energia. Disuguaglianza di Bessel e identità di Parseval (in generale e nel caso specifico delle serie di Fourier). Il teorema di convergenza in media quadratica alla funzione. Lo spazio ℓ^2. Isomorfismo tra $L^2(]-\pi,\pi])$ e ℓ^2. Serie di Fourier di funzioni di L^1. Il lemma di Riemann Lebesgue. Il problema della convergenza puntuale: cenni storici (i contributi di Du Bois Reymond, di Katznelson e Kahane, di Carleson e Hunt, di Kolmogorov). Nucleo di Dirichlet e sue rappresentazioni. Rappresentazione integrale della ridotta della serie di Fourier con nucleo di Dirichlet. Funzione regolarizzata. Criterio di Dirichlet per la convergenza puntuale (Teorema di Dirichlet-Weierstrass). Il teorema generale di convergenza uniforme. Il teorema di convergenza uniforme per funzioni C^1 a tratti. Serie di Fourier della funzione derivata e della funzione integrale. Il problema di Basilea. Regolarità e ordine di infinitesimo dei coefficienti di Fourier.

Trasformate di Fourier. Introduzione euristica alla trasformata di Fourier come estensione della serie di Fourier per $T \to +\infty$. Definizione. Funzioni pari e dispari. Esempi: la funzione porta, la funzione $e^{-a|x|}$, la funzione $\frac{1}{a^2+x^2}$, la Gaussiana e^{-ax^2}. Continuità e limitatezza della trasformata. Linearità e continuità dell'operatore di Fourier. Comportamento asintotico della trasformata (lemma di Riemann-Lebesgue). Moltiplicazioni per esponenziali complessi, traslazioni, riscalamento, coniugio. La trasformata della derivata. Regolarità L^p di una funzione con derivata seconda integrabile. La derivata della trasformata. Il calcolo della trasformata della Gaussiana usando i teoremi sulle derivate. Il prodotto di convoluzione. Il teorema di Fubini per l'integrale di Riemann e per l'integrale di Lebesgue (solo enunciati). Il teorema di Tonelli (solo enunciato). Teorema di esistenza e integrabilità del prodotto di convoluzione di funzioni L^1. Esempio: la funzione tenda. Cenno ai nuclei di convoluzione (i nuclei di Dirichlet, Gauss, Poisson, mollificatori). La densità di $C_0^\infty(\mathbb{R})$ in $L^p(\mathbb{R})$ (solo enunciato). La trasformata della convoluzione. Il problema dell'antitrasformata. Il teorema di inversione di Fourier (cenni di dimostrazione con le distribuzioni e con le approssimazioni). La formula di dualità. La trasformata del prodotto. Le formule di Plancherel per le funzioni $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il Teorema di Plancherel (idea della dimostrazione). Esempio: la trasformata della funzione seno cardinale. La trasformata di Fourier nella teoria dei campionamenti: funzioni a banda limitata, frequenza di campionamento di Nyquist, funzioni a banda limitata sono C^∞. Il Teorema di Shannon-Nyquist. Esempi di applicazione della trasformata e delle serie di Fourier alla risoluzione di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali (equazione del calore su un filo limitato e illimitato, equazione del trasporto).

Trasformate di Laplace. Funzione di Heaviside. Segnali. Funzioni trasformabili e trasformata di Laplace di una funzione. Funzioni di ordine esponenziale. Teorema sul dominio della trasformata. Ascissa, retta, semipiano di convergenza. Relazione tra le trasformate di Laplace e Fourier. Traslazione nel tempo e traslazione nella frequenza. Trasformata delle funzioni $\operatorname{sen}(t)$, $\cos(t)$, $\operatorname{senh}(t)$, $\cosh(t)$.