



**UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI TRIESTE**



Dipartimento di  
**Ingegneria  
e Architettura**

# **Bipoli Elettrici**

## **Elettrotecnica**

### **A.A. 2025 - 2026**

**Prof. Nicola Blasuttigh – [nicola.blasuttigh@units.it](mailto:nicola.blasuttigh@units.it)**

# PROPRIETA' DEI BIPOLI

- Tipo di **comando**: bipoli comandati in tensione o comandati in corrente
- **Linearità**: i bipoli sono lineari se la relazione tra tensione e corrente è espressa da un operatore lineare
- **Memoria**: bipoli dinamici (con memoria) o istantanei (senza memoria) a seconda che la relazione costitutiva (o relazione caratteristica) leghi tensione e corrente anche a istanti di tempo diversi o meno
- **Dipendenza dal tempo**: il bipolo è tempo-invariante (T-I) se la sua equazione costitutiva non dipende dal tempo (altrimenti T-V)





# RESISTORE

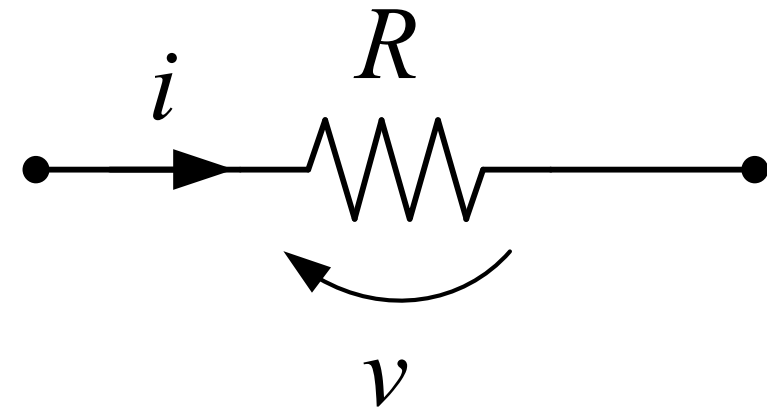
- La resistenza si misura in ohm [ $\Omega$ ]
- George Simon Ohm (1787 – 1854)



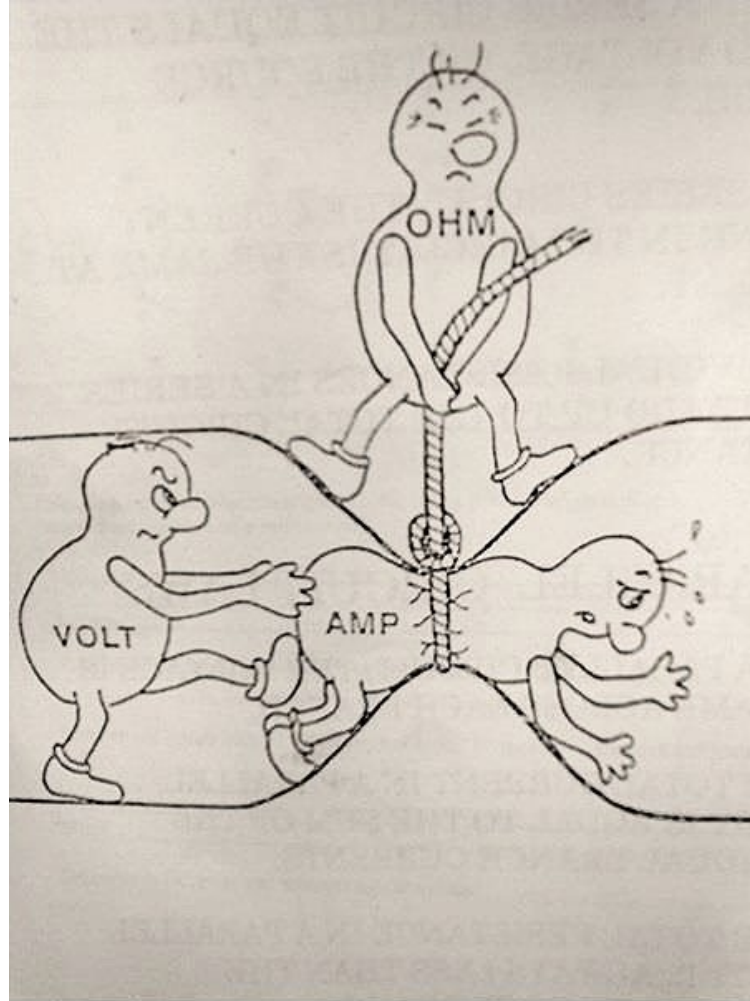
## LEGGE DI OHM

$$v(t) = R \times i(t)$$

**1 ohm = 1 volt/ampere**



# LEGGE DI OHM

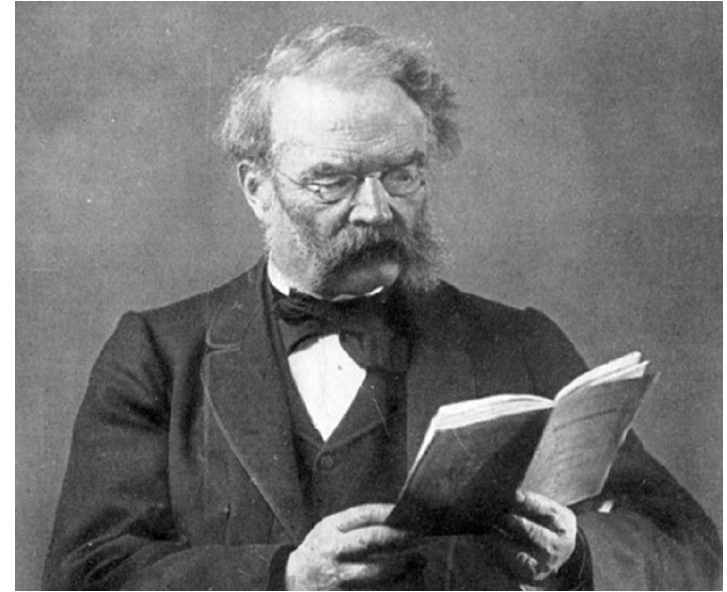






# CONDUTTANZA

- La conduttanza si misura in siemens [S]
- Ernst Werner von Siemens (1816 – 1892)



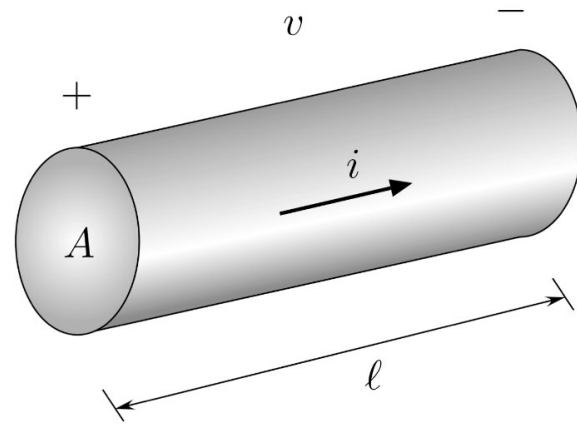
$$G = \frac{1}{R}$$

**1 siemens = 1 ampere/volt**

$$i(t) = G \times v(t)$$



# RESISTENZA ELETTRICA



$$R = \rho \times \frac{l}{A}$$

MATERIALE	RESISTIVITA' ( $\Omega \cdot m$ )	APPLICAZIONE
Rame	$1,7 \times 10^{-8}$	Anima dei cavi
Oro	$2,3 \times 10^{-8}$	Interruttori
Alluminio	$2,7 \times 10^{-8}$	Anima dei cavi
Silicio	$6,4 \times 10^2$	Circuiti integrati/Celle fotovoltaiche
Polietilene	$10^{14}$	Guaine dei cavi

# RESISTIVITA'

$$R = \rho \times \frac{l}{A}$$

$$\rho = \rho_0 \times (1 + \alpha_0 T)$$

- ✓  $\rho_0$  [ $\Omega \cdot m$ ] – resistività alla temperatura di 0°C
- ✓  $\alpha_0$  [ $^{\circ}C^{-1}$ ] – coefficiente di variazione della resistività con la temperatura
- ✓  $T$  [ $^{\circ}C$ ] – temperatura di lavoro

# ESEMPIO



**Cca-s1b,d1,a1 IMMEQU EFP FG17 450/750V**



Numero conduttori	Sezione nominale	Diametro indicativo conduttore	Spessore medio isolante	Diametro est. MASSIMO	Peso indicativo del cavo	Resistenza elettrica a 20°C	Portate di corrente
<i>Cores number</i>	<i>Cross section</i>	<i>Approx conductor diameter</i>	<i>Insulation medium thickness</i>	<i>Max external diameter</i>	<i>Approx cable weight</i>	<i>Electric resistance at 20°C</i>	<i>Current carrying capacities</i>
(N°)	(mm <sup>2</sup> )	(mm)	(mm)	(mm)	(kg/km)	(Ohm/km)	(A)
Unipolare / Single core							
1x	1.5	2.0	0.7	3.4	19	13.3	20
1x	2.5	2.2	0.8	4.1	31	7.98	28
1x	4	2.6	0.8	4.8	45	4.95	37
1x	6	3.4	0.8	5.3	63	3.3	48
1x	10	4.4	1	6.8	112	1.91	66
1x	16	5.7	1	8.7	166	1.21	88

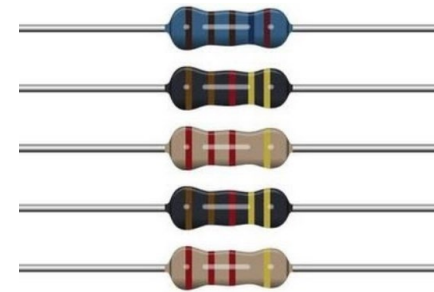
# ESEMPIO CIRCUITO LUCI

# POTENZA – LEGGE DI JOULE

$$p(t) = R \times i^2(t)$$



Resistore di potenza



Resistore di precisione

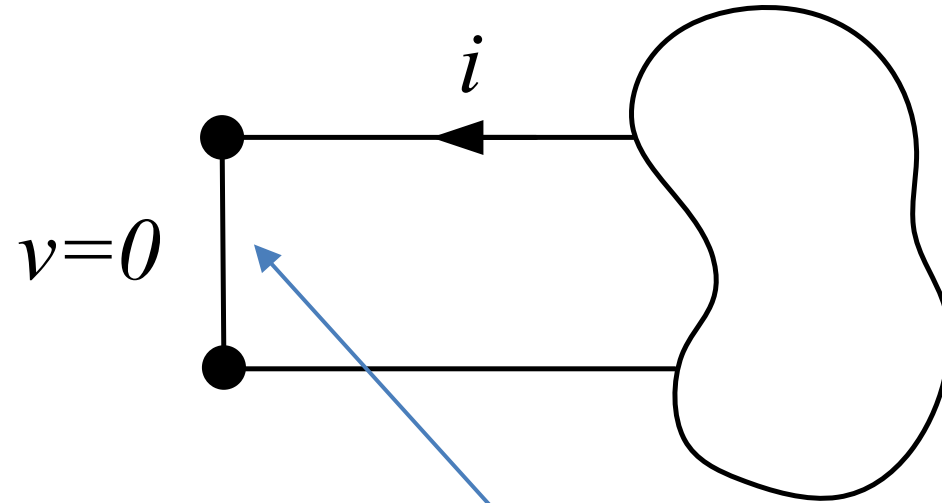
$$p(t) = v(t) i(t) = R i^2(t) = \frac{1}{R} v^2(t) = G v^2(t)$$

# Linearità resistore

# ESERCIZIO 1.1 LEVA

# ESERCIZIO POTENZA/ENERGIA

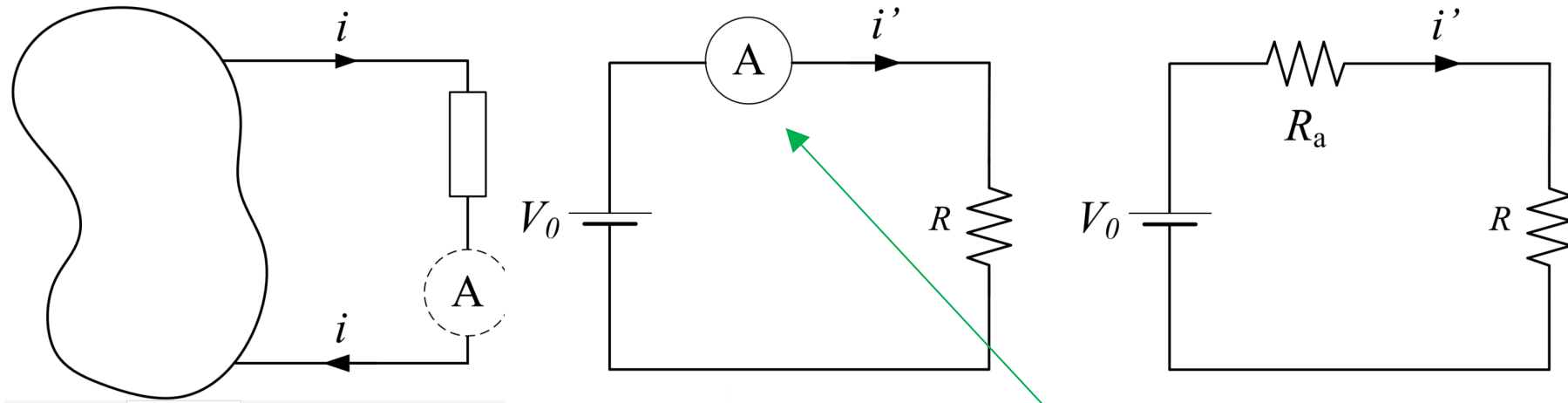
# CORTO CIRCUITO



Resistenza nulla!

$$v = 0$$

# AMPEROMETRO



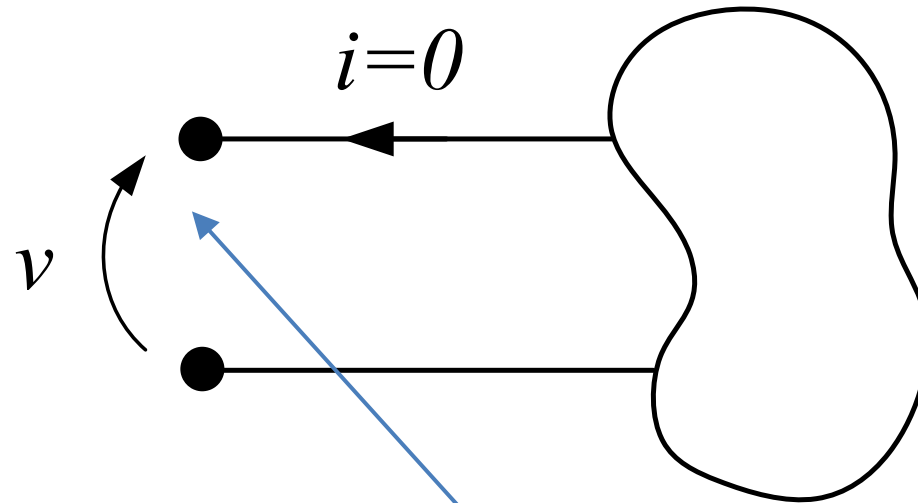
Inserimento in serie



$$\frac{\Delta i}{i} = \frac{R_a}{R + R_a}$$

Un amperometro ideale si comporta come un cortocircuito

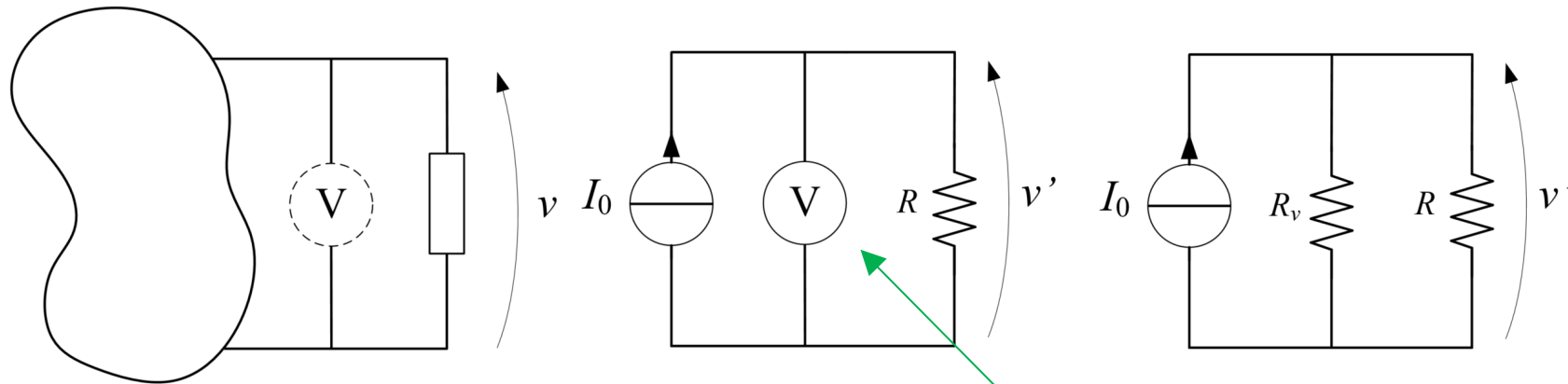
# CIRCUITO APERTO



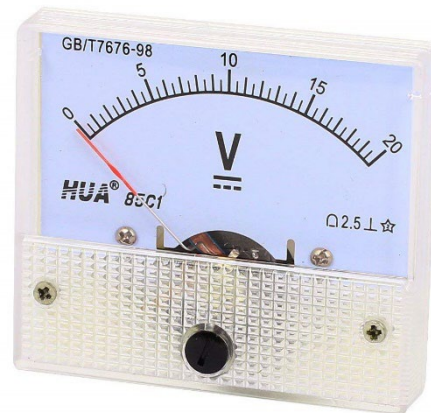
Conduttanza nulla!

$$i = 0$$

# VOLTMETRO



Inserimento in parallelo



$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{R}{R + R_v}$$

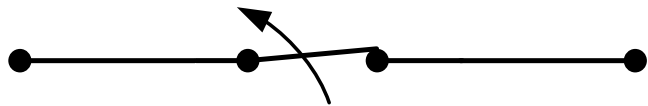
Un voltmetro ideale si comporta come un circuito aperto

# INTERRUTTORI

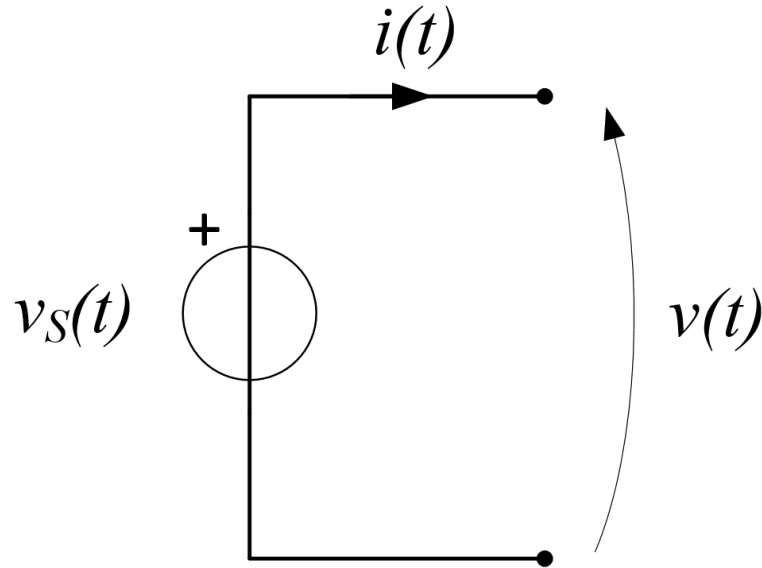
## Interruttore aperto



## Interruttore chiuso

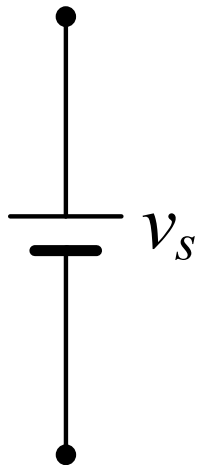


# GENERATORE (IDEALE) INDIPENDENTE DI TENSIONE



$$v(t) = v_s(t)$$

$$p(t) = v_s(t) i(t)$$



$$v = V_S$$

**Un generatore indipendente di tensione spento equivale a un corto circuito**





# FORME D'ONDA

- A gradino
- A dente di sega
- Impulsive
- Periodiche
- Sinusoidali ...

$$v(t) = \sqrt{2} E \cos(\omega t + \varphi)$$

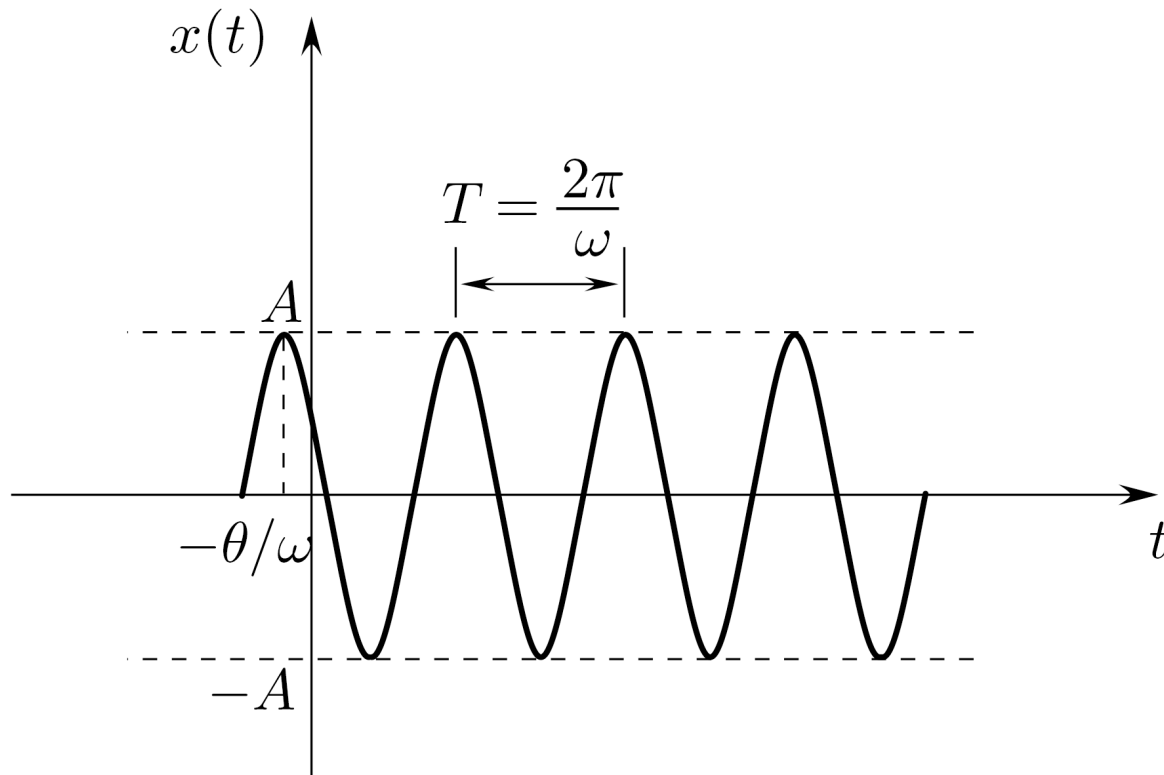
$$\omega = 2\pi f$$

# SINUSOIDI

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

$$T = \frac{1}{f}$$

$$\omega = 2\pi f$$

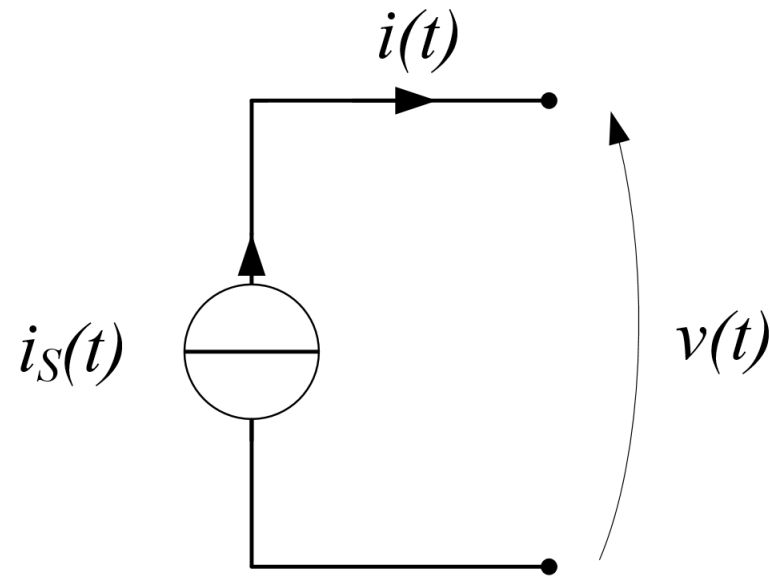


- $A$  – ampiezza
- $\omega$  – pulsazione [rad/s]
- $\theta$  – fase iniziale [°]
- $T$  – periodo [s]
- $f$  – frequenza [Hz]

# ESEMPI



# GENERATORE (IDEALE) INDIPENDENTE DI CORRENTE



$$i = i_s(t)$$

$$p(t) = v(t) i_s(t)$$

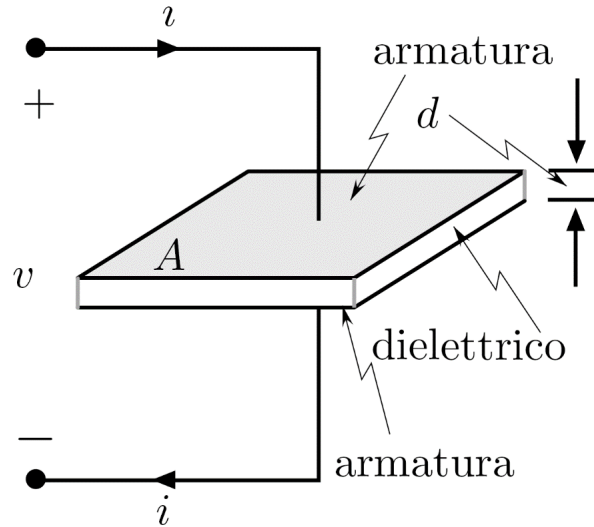
**Un generatore indipendente di corrente spento equivale a un circuito aperto**

# CARATTERISTICHE GENERATORI

## ESERCIZIO 2.1

## ESERCIZIO 2.1

# CONDENSATORE



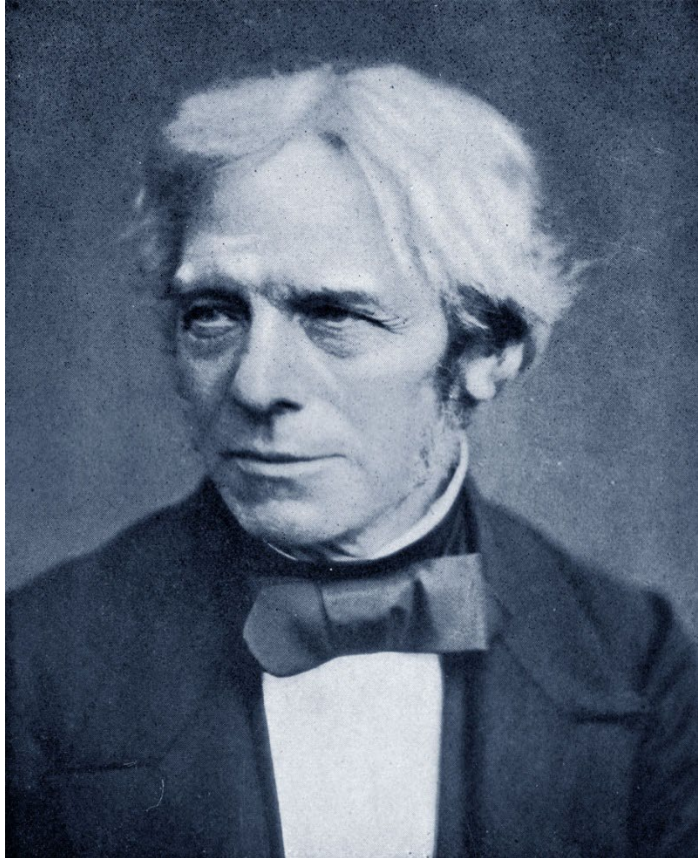
$$q = C \cdot v$$

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d}$$



- ✓  $\epsilon_r$  – costante dielettrica relativa del materiale
- ✓  $\epsilon_0$  [F/m] - costante dielettrica del vuoto

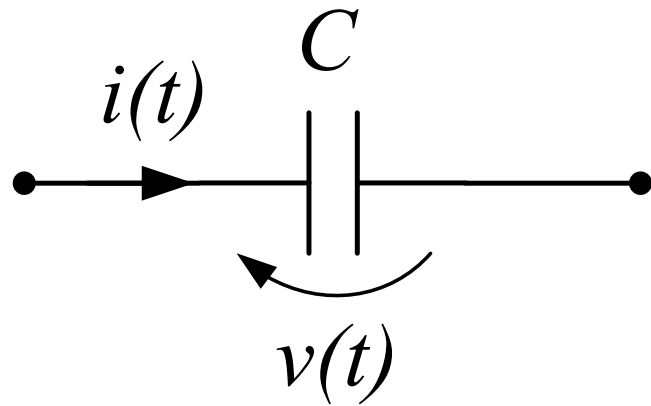
# CAPACITA'



- ✓ La capacità si misura in farad [F]
- ✓ Michael Faraday (1791 – 1867)

**1 farad = 1 coulomb/volt**

# CONDENSATORE



$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

**Se la tensione è costante (DC)**

**Il condensatore equivale a un circuito aperto**

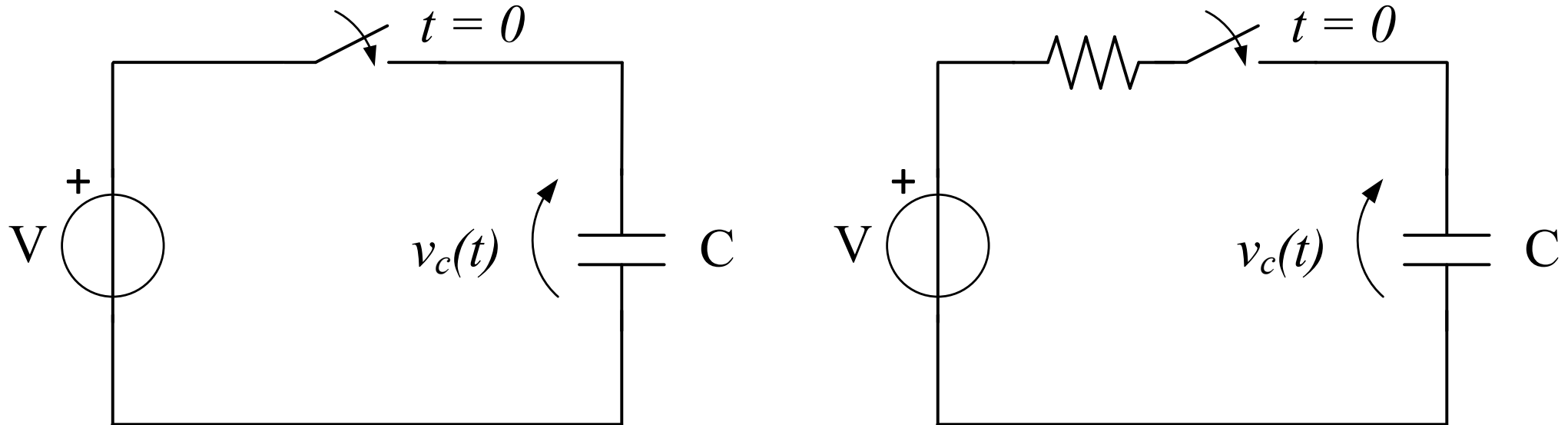
$$v(t) = v(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt$$

# MEMORIA E CIRCUITO APERTO

# ESERCIZIO 6.1

## FIGURA 6.3

# CONDENSATORE



La tensione in un condensatore è una funzione continua il  
condensatore si oppone a brusche variazioni di tensione

# LA TENSIONE IN UN CONDENSATORE E' UNA FUNZIONE CONTINUA

# CONDENSATORE - ENERGIA

**Il condensatore ideale è un elemento passivo senza perdite e può immagazzinare energia**

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{1}{2T} C [v^2(t_0 + T) - v^2(t_0)] = 0$$

$$w(t_0, t_1) = \frac{1}{2} C [v^2(t_1) - v^2(t_0)]$$

**Per un elemento passivo, quando tensione e corrente sono periodiche, la potenza media assorbita in un periodo è maggiore o uguale a zero**

## FIGURA 6.10

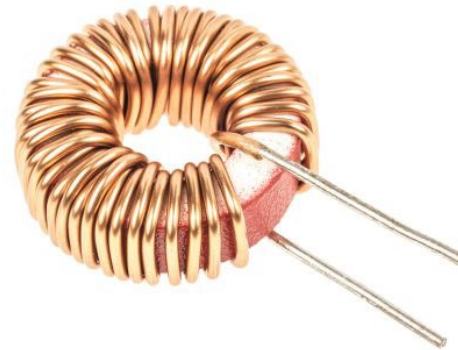
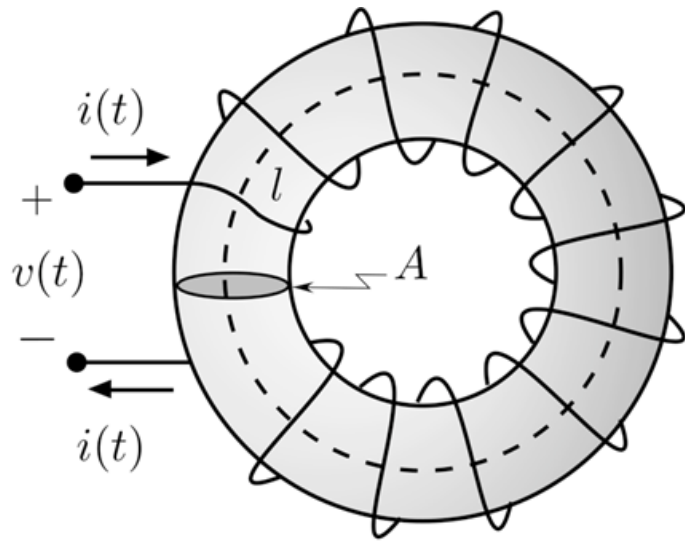
## FIGURA 6.10

# CONDENSATORE - ENERGIA

$$w(v) = \frac{1}{2} C v^2$$

**L'energia immagazzinata dal condensatore dipende solo dalla tensione!**

# INDUTTORE



$$f.e.m. = - \frac{d\Phi(B)}{dt}$$

$$\Phi(B) = L \cdot i$$

- ✓  $\mu_0$  [H/m] – permeabilità magnetica del vuoto
- ✓  $\mu_r$  – permeabilità magnetica relativa
- ✓ N - numero di spire

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{N^2 A}{l}$$

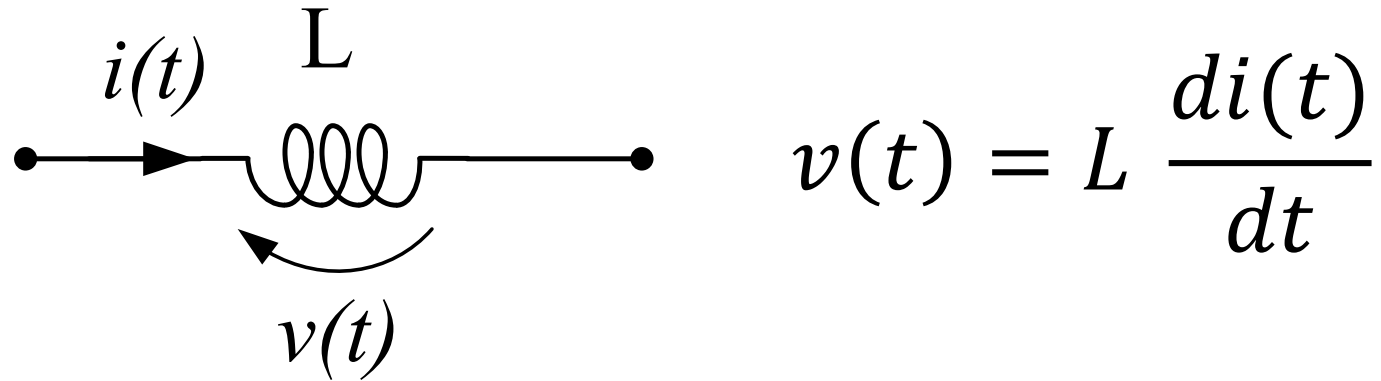
# INDUTTANZA



- ✓ L'induttanza si misura in henry [H]
- ✓ Joseph Henry (1797 – 1878)

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ (volt} \times \text{secondo)/ampere}$$

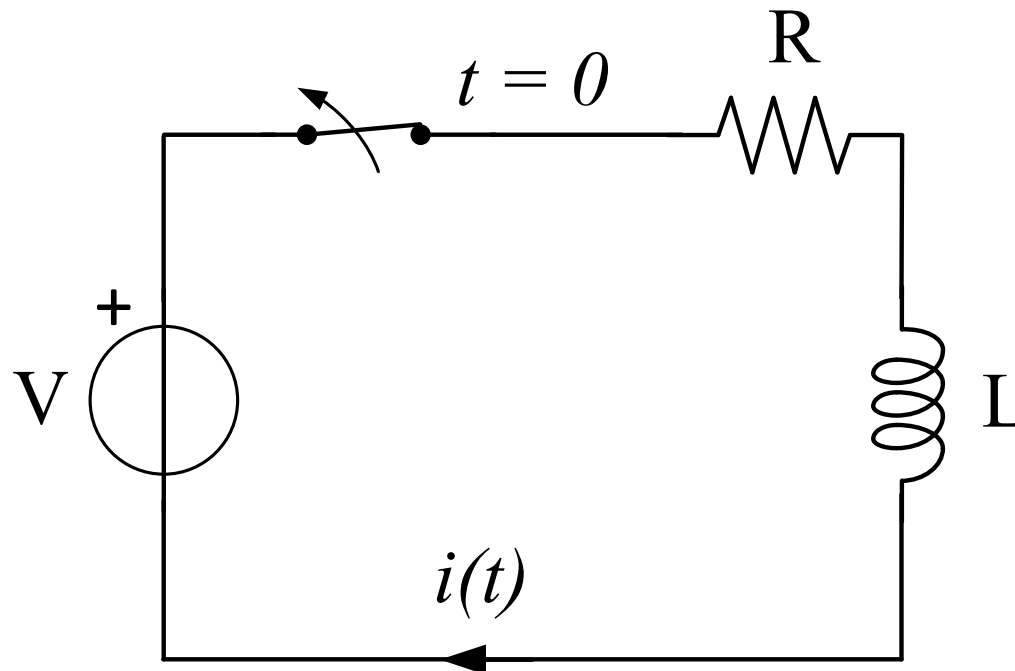
# INDUTTORE



**Se la corrente è costante (DC)  
l'induttore equivale a un corto circuito**

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

# INDUTTORE



**La corrente in un induttore è una funzione continua l'induttore si oppone a brusche variazioni di corrente**

# INDUTTORE ENERGIA

Come il condensatore, **l'induttore ideale è un elemento passivo senza perdite**

$$w(t_0 - t_1) = \frac{1}{2}L[i^2(t_1) - i^2(t_0)]$$

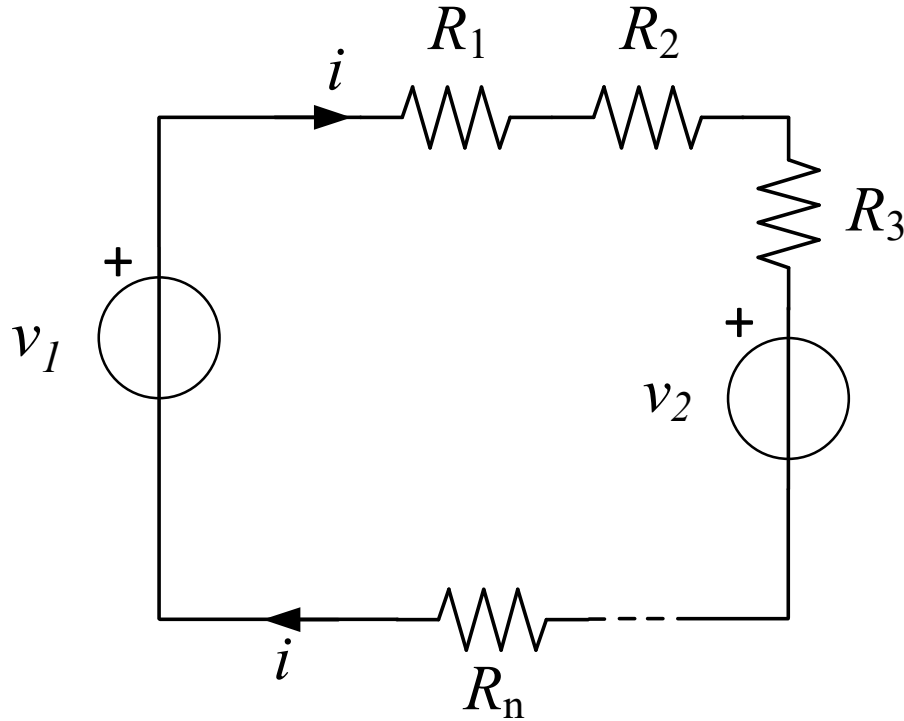
$$w(i) = \frac{1}{2}Li^2$$

**L'energia immagazzinata dall'induttore  
solo dalla corrente!**

**dipende**

# RICAPITOLANDO

# RESISTORI IN SERIE



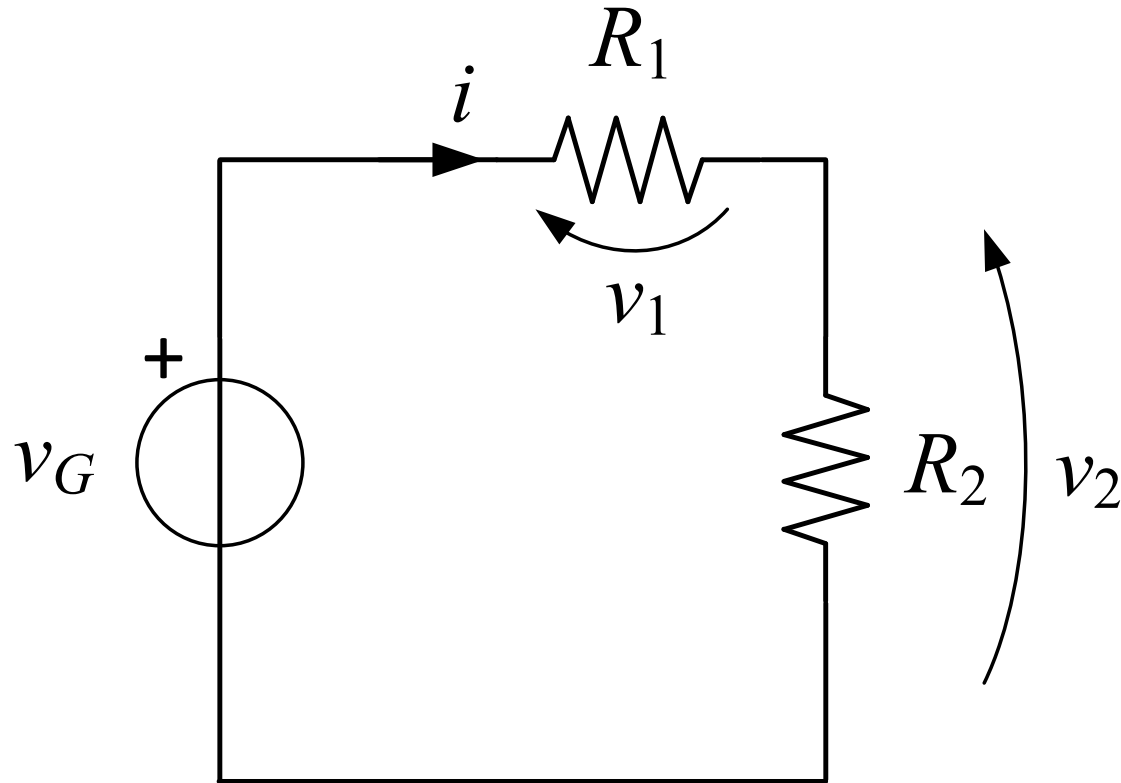
$$i = \frac{\sum_{k=1}^n V_k}{\sum_{k=1}^n R_k}$$

I resistori (bipoli) si dicono in serie se sono attraversati dalla stessa corrente

# ESEMPIO 2.1

## ESEMPIO 2.2

# PARTITORE DI TENSIONE

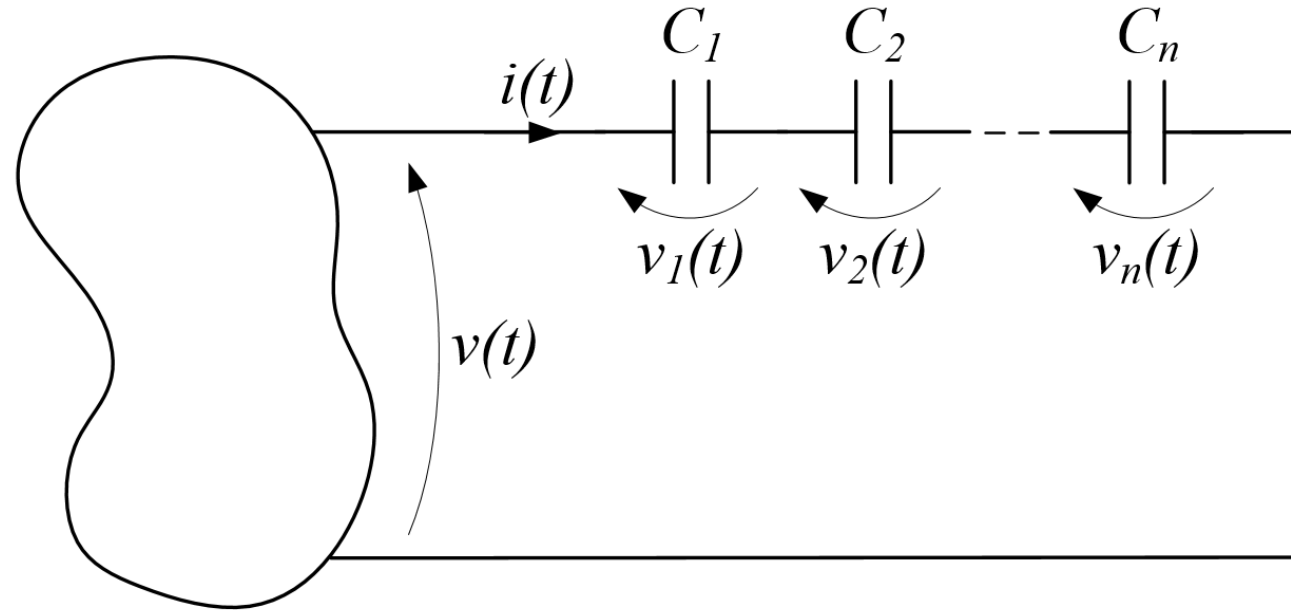


$$v_1 = v_G \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$v_2 = v_G \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

# PARTITORE DI TENSIONE

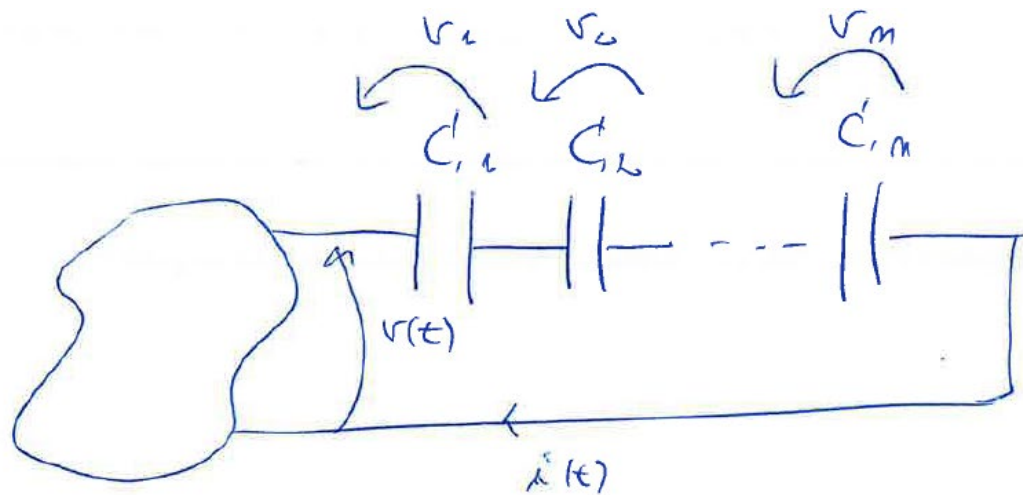
# CONDENSATORI IN SERIE



$$\frac{1}{C_s} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}$$

$$C_s = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

## Dimostrazione condensatori in serie (NO 2026)



$$i(t) = C_1 \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow v(t) = v_0 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt$$

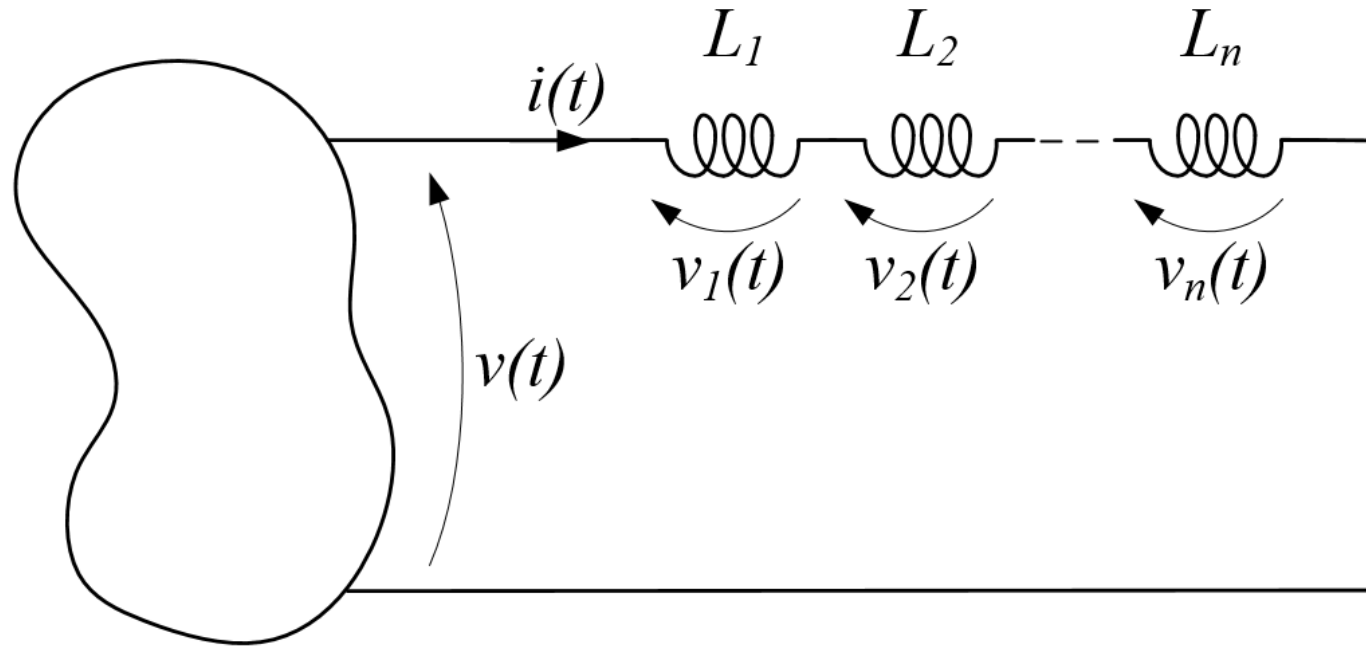
$$v(t) = v_1 + v_2 + \dots + v_m =$$

$$= v_{01} + \frac{1}{C_1} \int_0^t i(t) dt + \dots + v_{0m} + \frac{1}{C_m} \int_0^t i(t) dt$$

$$= v_{01} + \dots + v_{0m} + \left( \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_m} \right) \int_0^t i(t) dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_m}$$

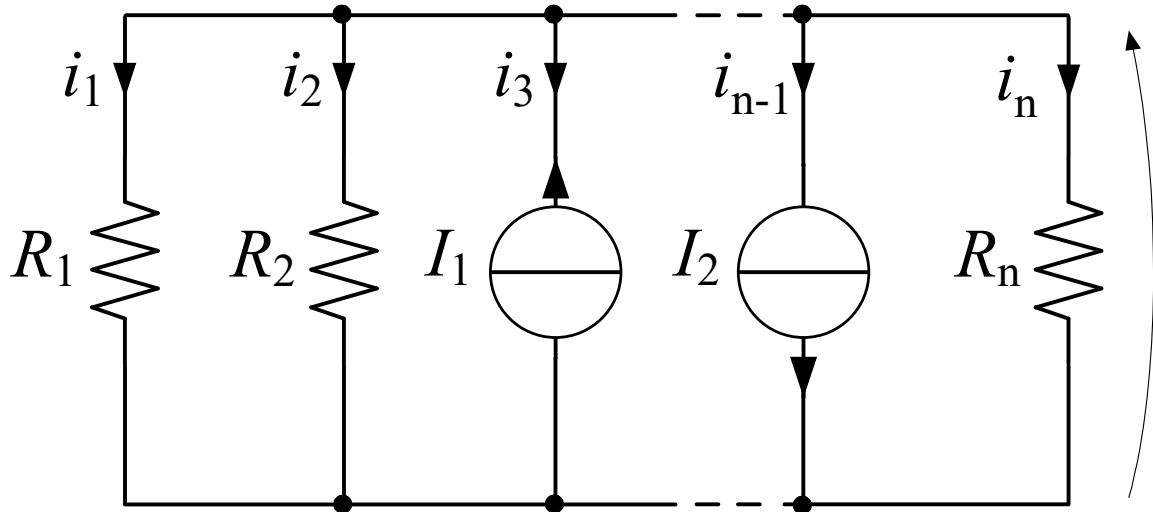
# INDUTTORI IN SERIE



$$L_S = \sum_{k=1}^n L_k$$

$$L_S = L_1 + L_2$$

# RESISTORI IN PARALLELO

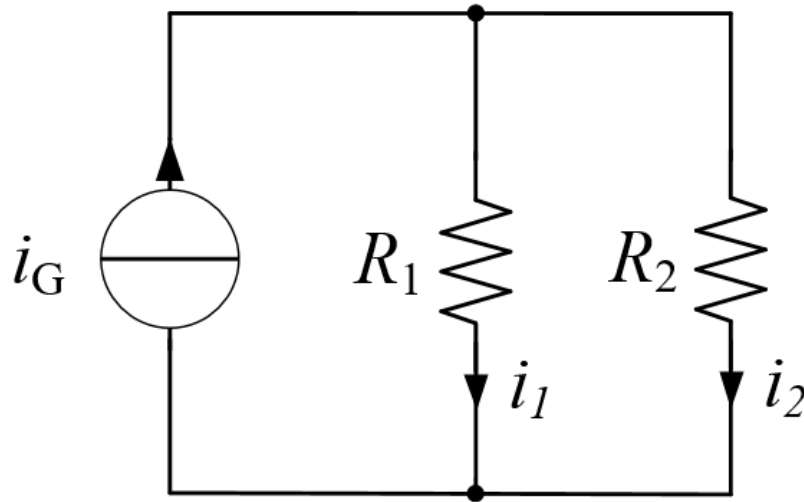


$$v = \frac{\sum_{k=1}^n I_k}{\sum_{k=1}^n G_k}$$

I resistori (bipoli) si dicono in parallelo se hanno in comune la stessa tensione

## ESEMPIO 2.5

# PARTITORE DI CORRENTE



$$i_1 = i_G \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

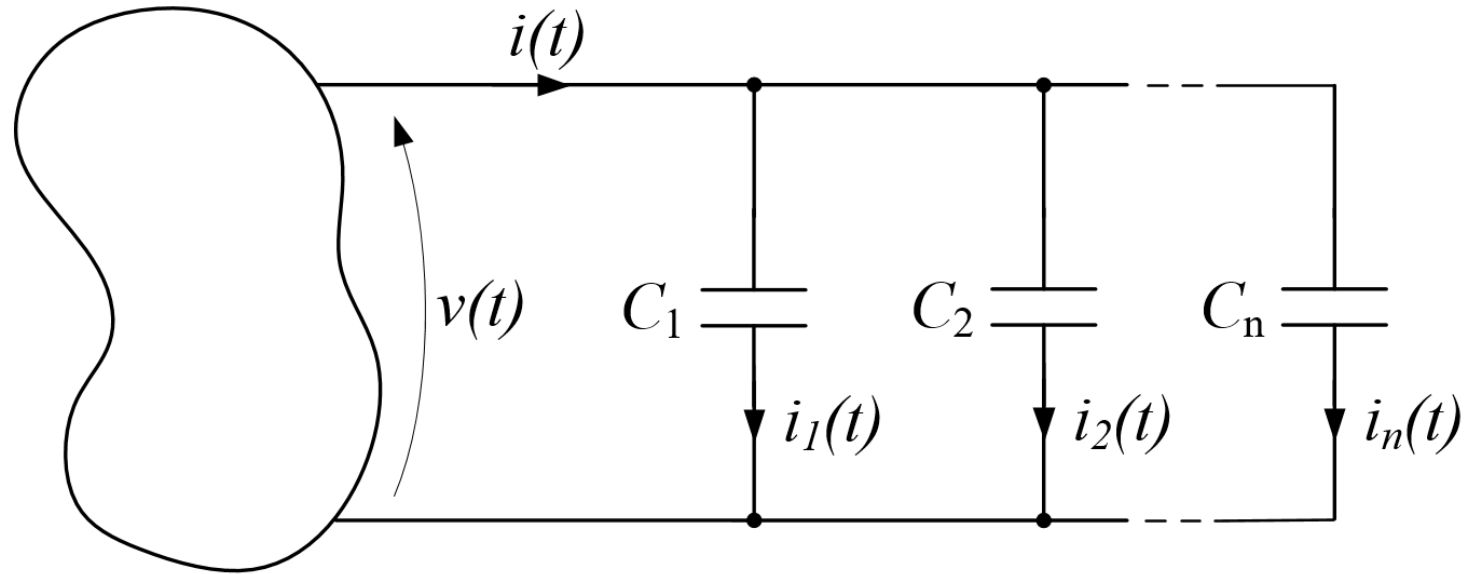
$$i_2 = i_G \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$$i_1 = i_G \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$i_2 = i_G \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



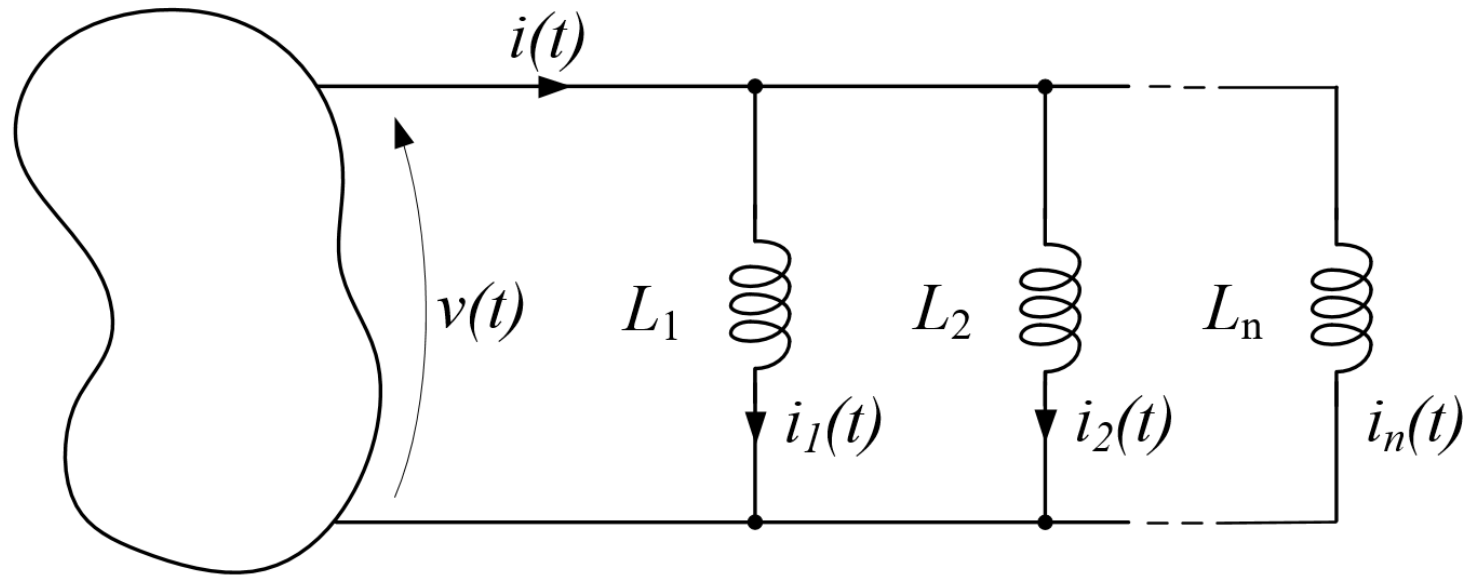
# CONDENSATORI IN PARALLELO



$$C_p = \sum_{k=1}^n C_k \quad C_p = C_1 + C_2$$

## ESEMPIO 6.8

# INDUTTORI IN PARALLELO

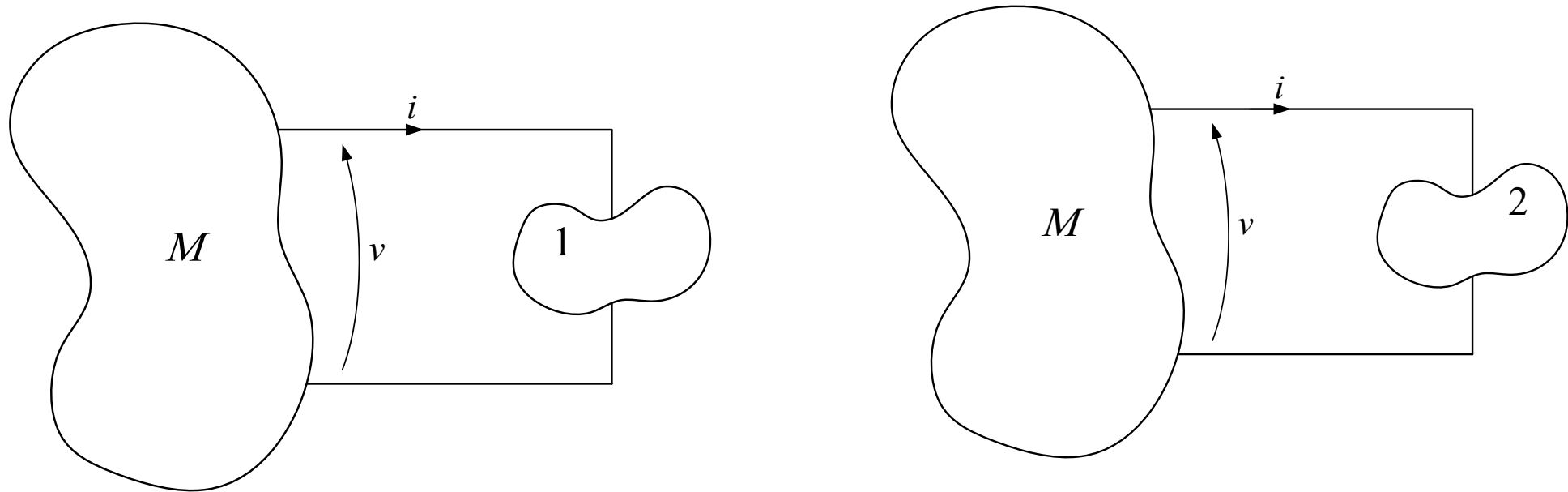


$$\frac{1}{L_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad L_p = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

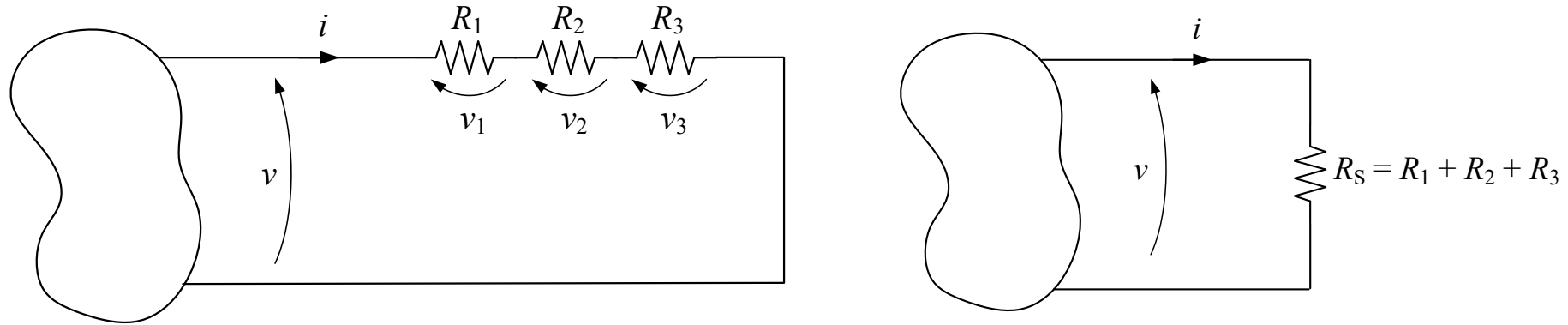
## ESEMPIO 6.9

# BIPOLI EQUIVALENTI

Due bipoli sono equivalenti (dal punto di vista esterno) se hanno la stessa relazione costitutiva



# RESISTORI IN SERIE

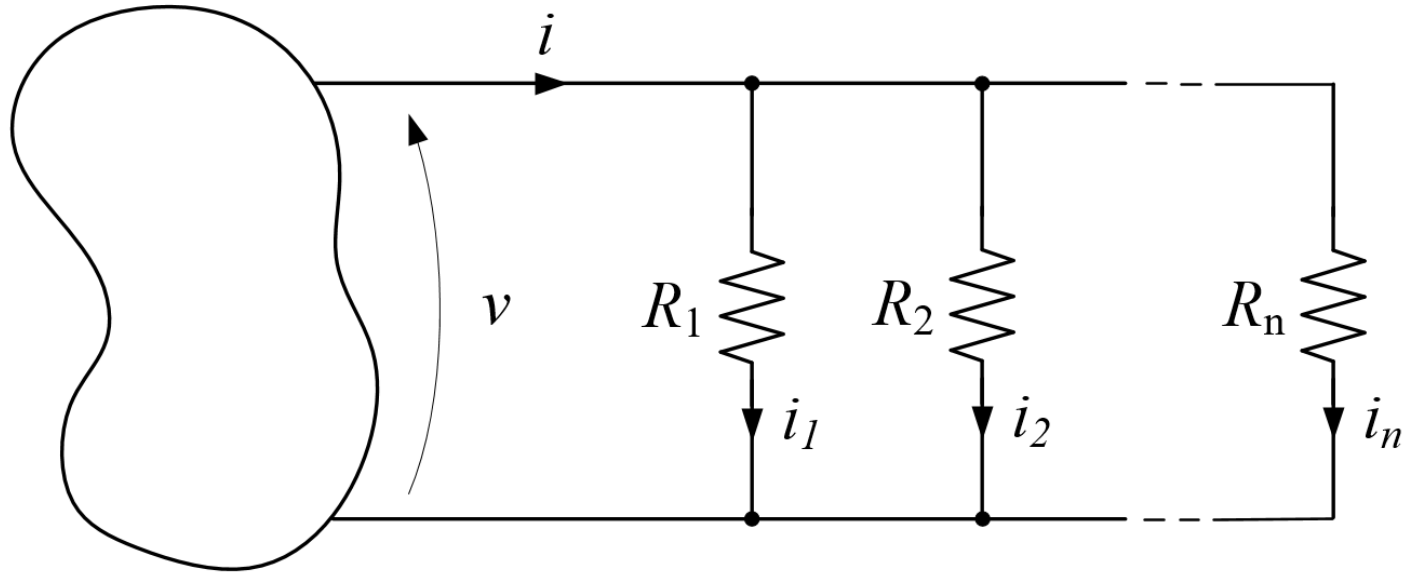


**I due circuiti sono equivalenti!**  
**(Stessa corrente e stessa tensione)**

$$R_S = \sum_{k=1}^n R_k$$

$$\frac{1}{G_S} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{G_k}$$

# RESISTORI IN PARALLELO



$$G_p = \sum_{k=1}^n G_k$$

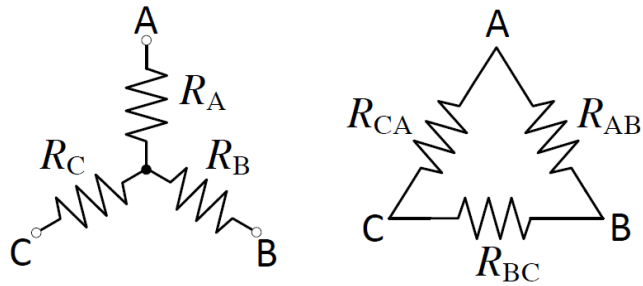
$$\frac{1}{R_p} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}$$

## ESEMPIO 2.7

## ESEMPIO 2.8



# COLLEGAMENTI STELLA TRIANGOLO



$$R_A = \frac{R_{AB}R_{CA}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_B = \frac{R_{BC}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_C = \frac{R_{CA}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$R_{AB} = \frac{R_A R_B}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

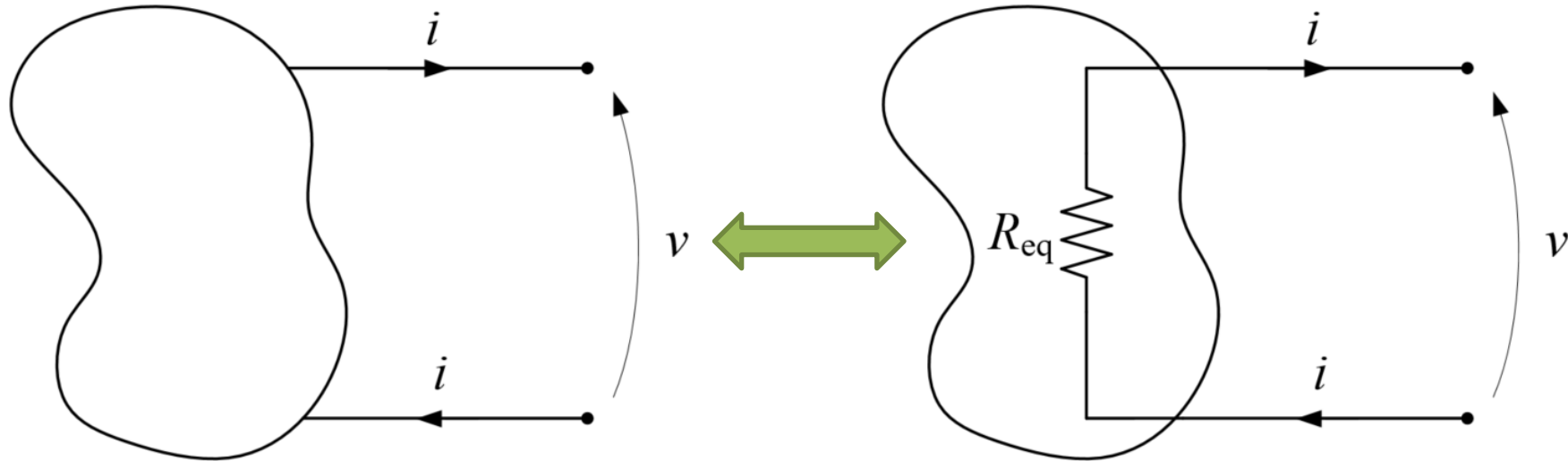
$$R_{BC} = \frac{R_B R_C}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

$$R_{CA} = \frac{R_C R_A}{\left(\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}\right)^{-1}}$$

# CASO PARTICOLARE

# ESERCIZIO

# RESISTENZA EQUIVALENTE

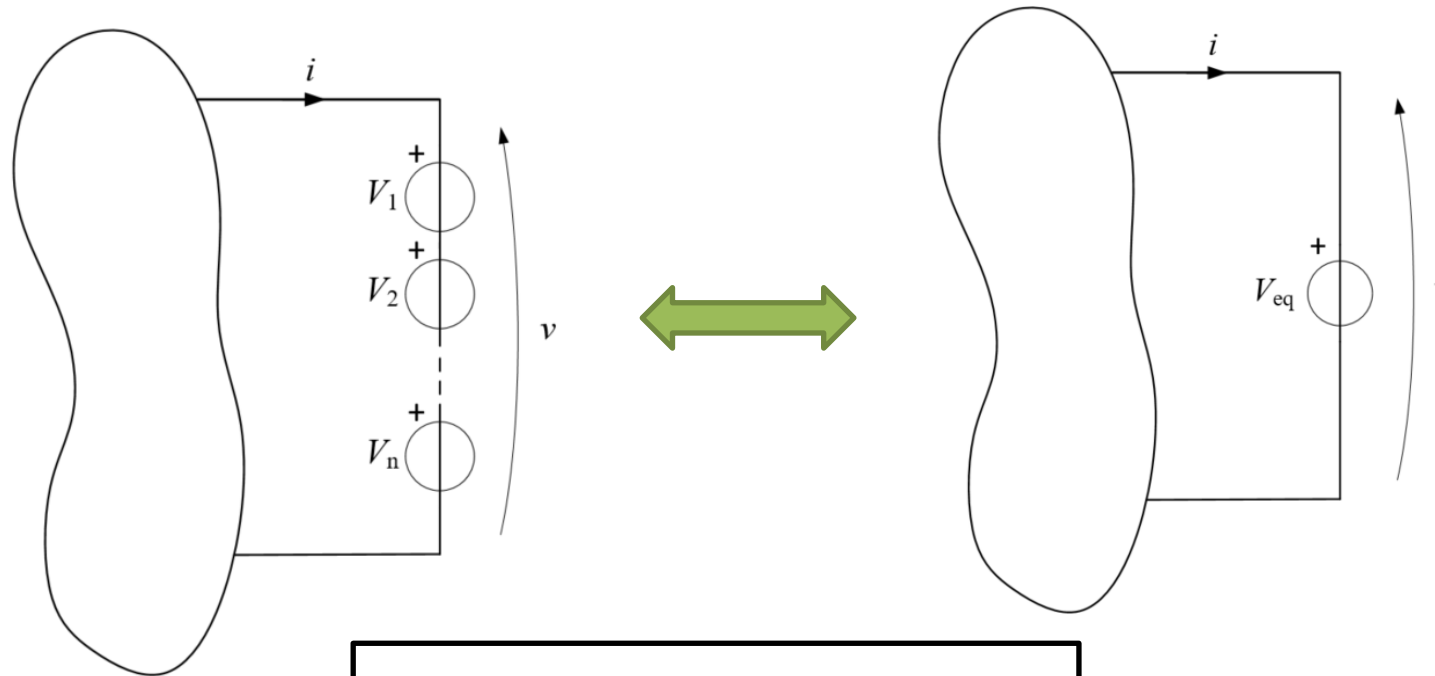


Introduciamo la resistenza equivalente di un bipolo quando la relazione tra la corrente e la tensione ai suoi terminali è analoga alla legge di Ohm

$$v = R_{eq} \times i$$

# ESEMPIO 2.11

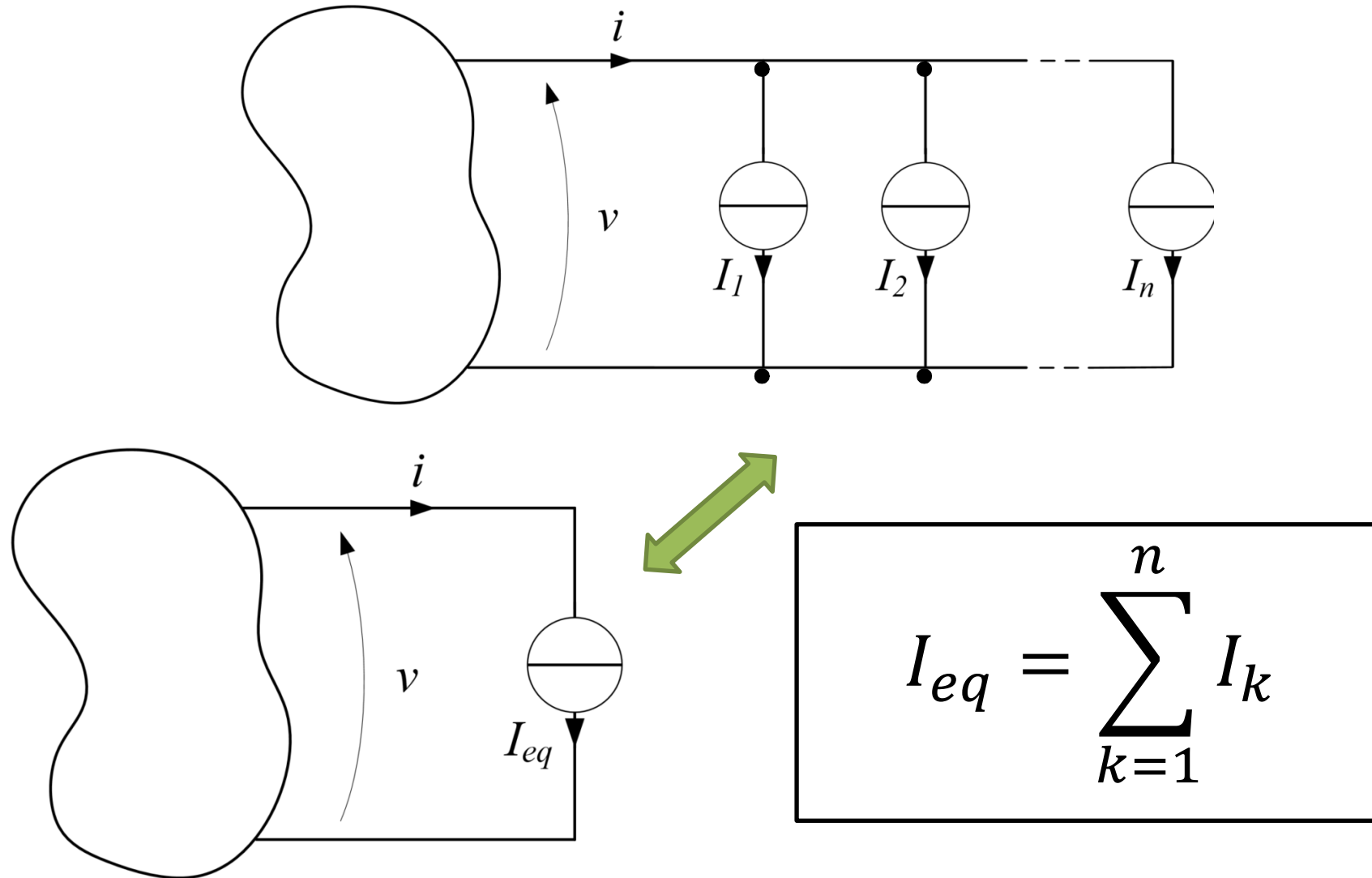
# SERIE DI GENERATORI DI TENSIONE



$$V_{eq} = \sum_{k=1}^n V_k$$

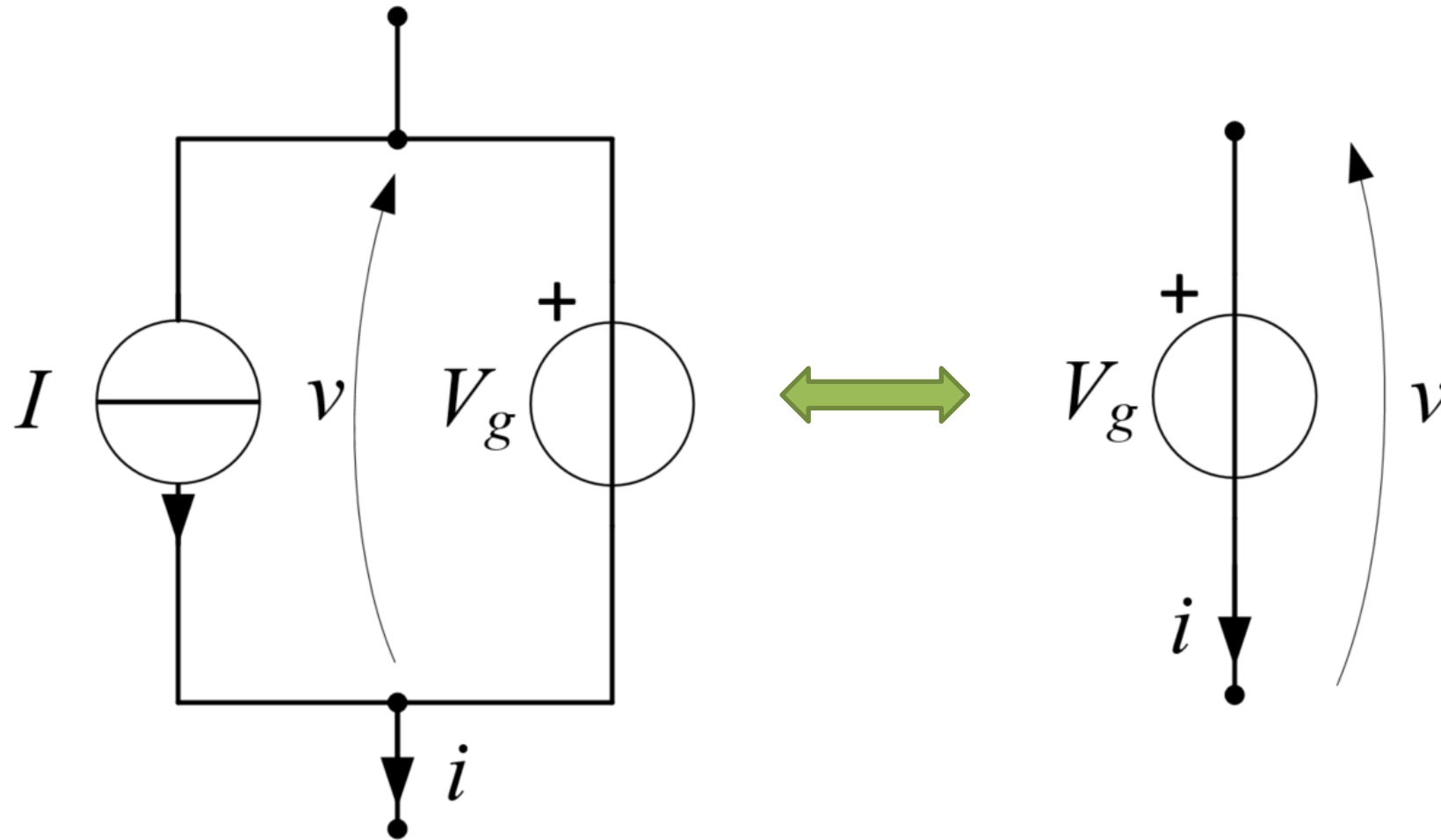


# PARALLELO DI GENERATORI DI CORRENTE

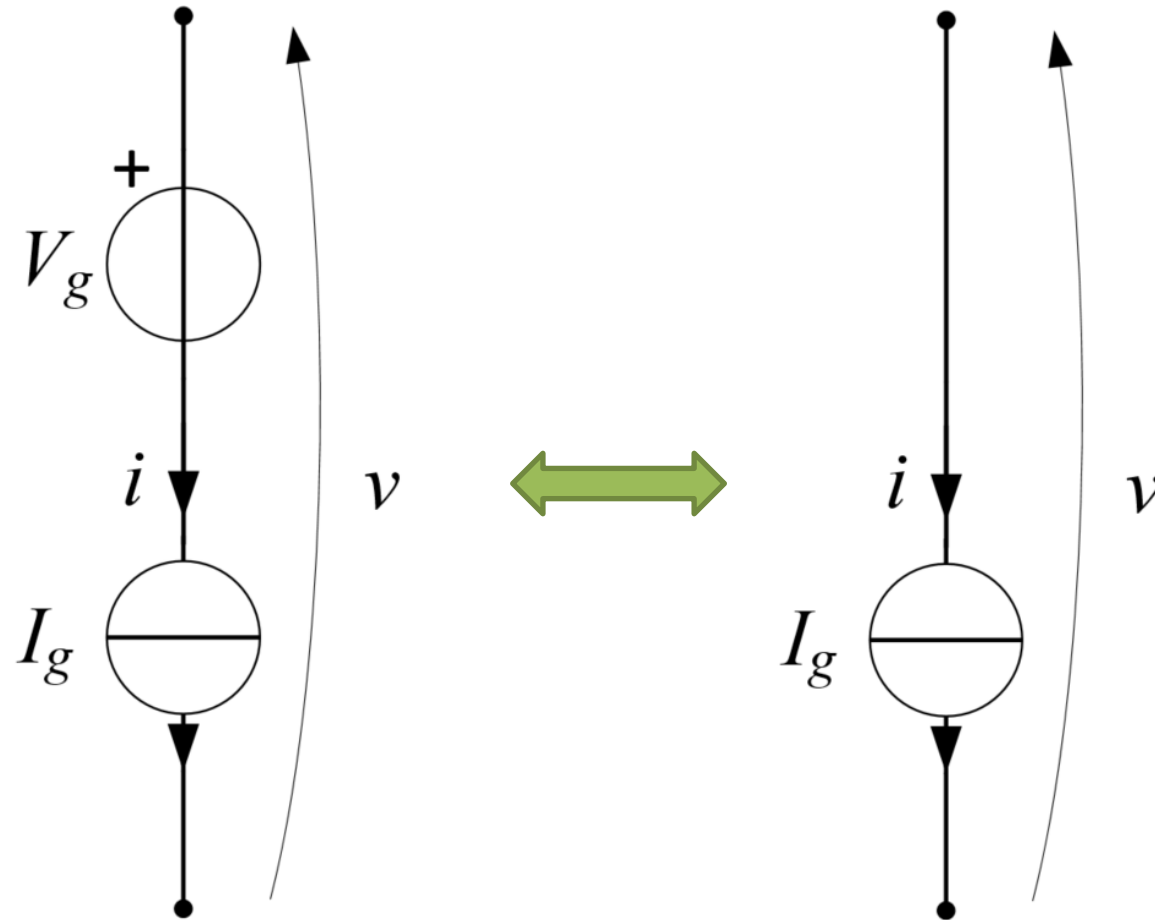




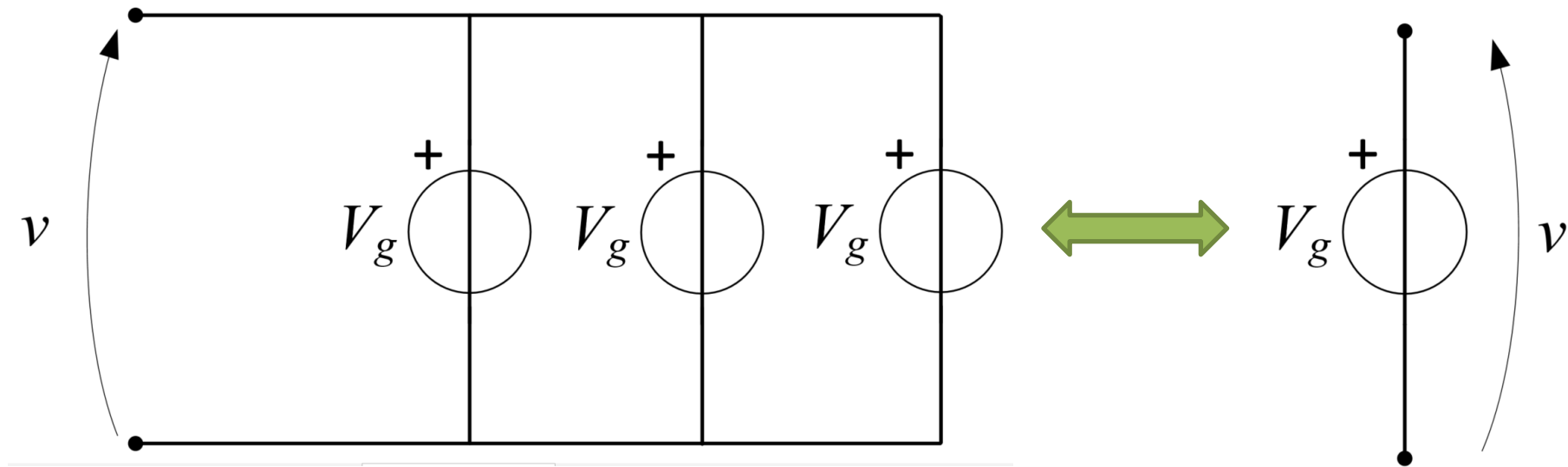
# GENERATORI DI TIPO DIVERSO



# GENERATORI DI TIPO DIVERSO



# PARALLELO DI GENERATORI DI TENSIONE

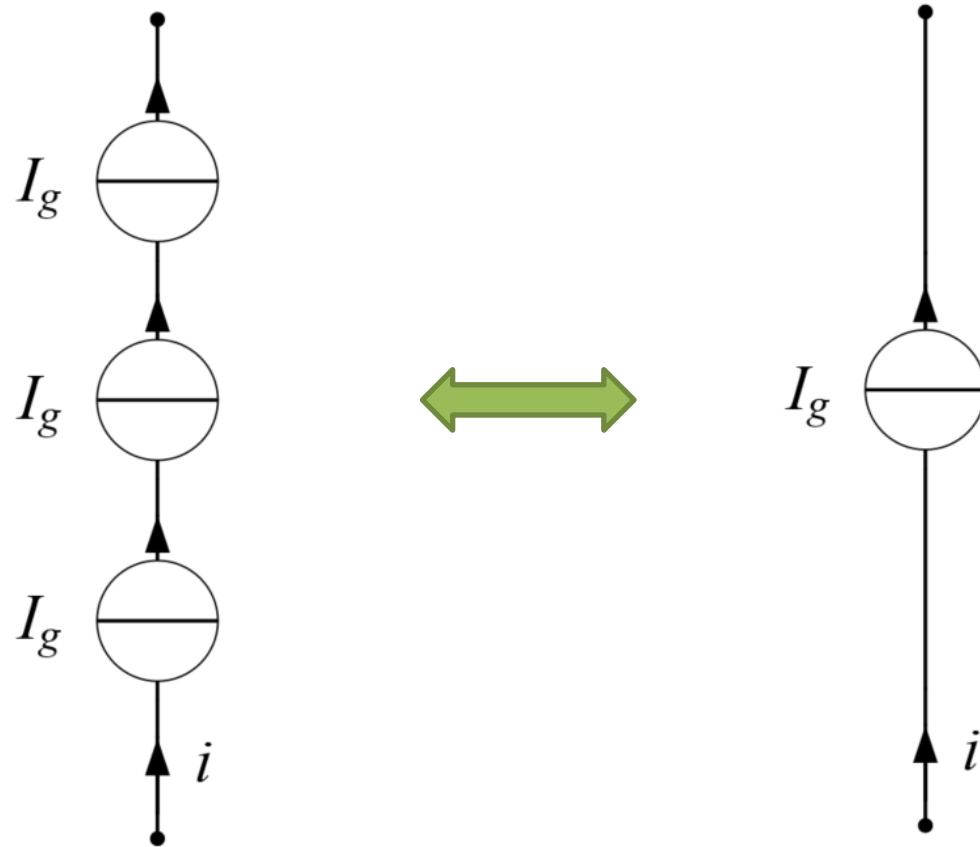


# GENERATORI A TENSIONI DIVERSE

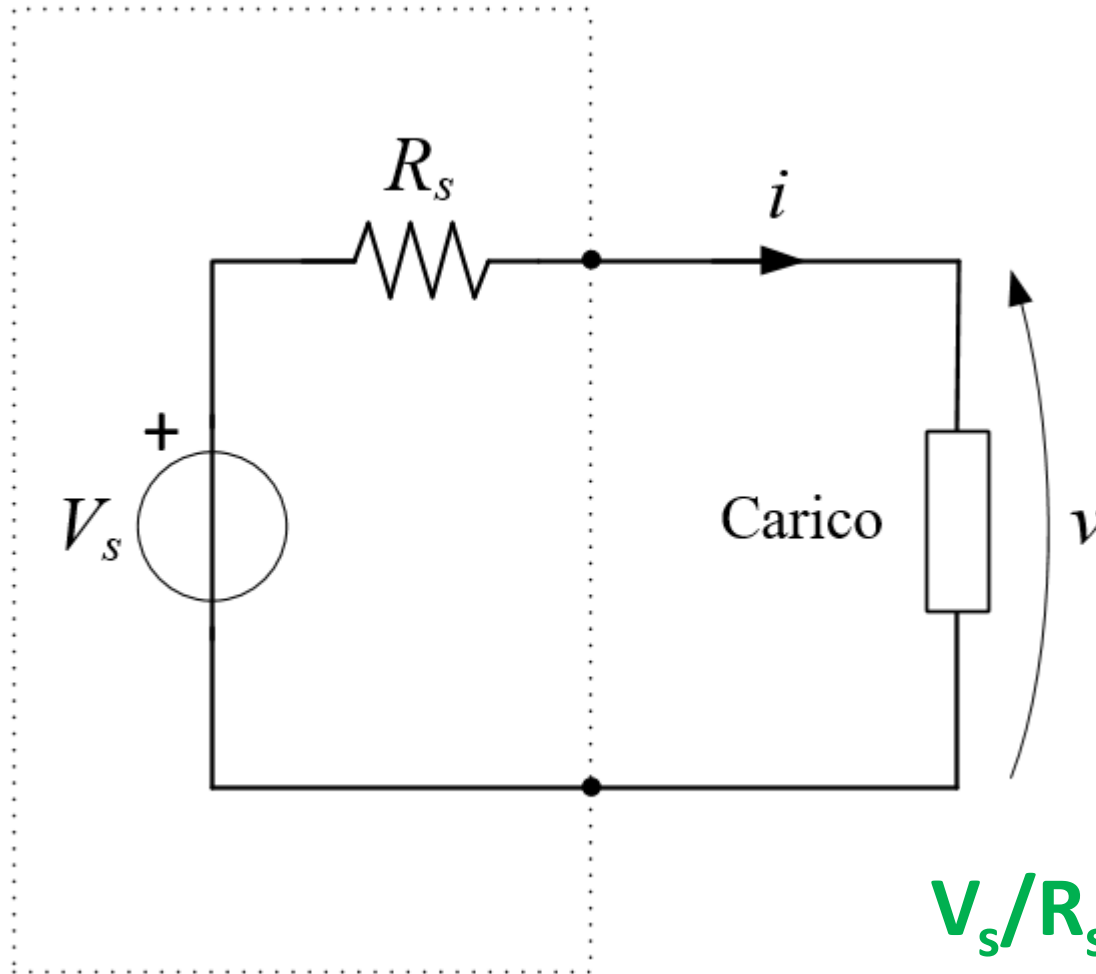
# SERIE

# DI

## GENERATORI DI CORRENTE



# GENERATORE REALE DI TENSIONE



$V_s$  – tensione a vuoto

$$v = V_s - R_s i$$

$V_s/R_s$  – corrente di corto circuito

# CARATTERISTICA GENERATORE REALE