

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 09.02.26

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Si consideri un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà. Scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti alle equazioni di Lagrange del sistema considerato e l'Hamiltoniana corrispondente, spiegando sotto quale condizione si possono scrivere tali equazioni [2pt].
2. Si dimostri l'equivalenza tra i due sistemi di equazioni [3pt].
3. Dare la definizione di costante del moto in un sistema Hamiltoniano [2pt].
4. Si definiscano le parentesi di Poisson e si dica il loro legame con le costanti del moto [2pt].
5. Dimostrare che le equazioni di Hamilton possono essere scritte nella forma $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$ and $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$. Scrivere l'Hamiltoniana dell'oscillatore armonico e applicare le parentesi di Poisson per ricavare l'equazione del moto dell'oscillatore armonico [2pt].
6. Si consideri un sistema Hamiltoniano con due gradi di libertà, descritto da coordinate canoniche (q_1, q_2, p_1, p_2) e si consideri la seguente trasformazione di coordinate sullo spazio delle fasi, dipendente da un parametro reale λ :

$$\begin{aligned} Q_1 &= q_1, & Q_2 &= q_2 + \lambda q_1^2, \\ P_1 &= p_1 - 2\lambda q_1 p_2, & P_2 &= p_2. \end{aligned} \tag{1}$$

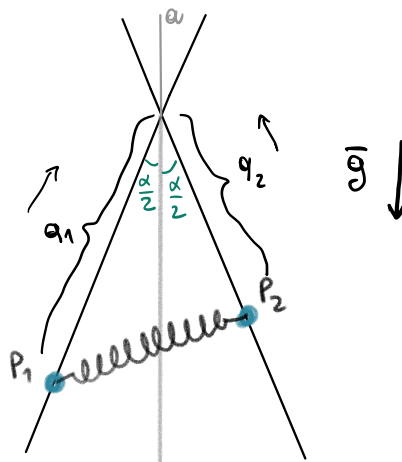
Dimostrare che tale trasformazione sullo spazio delle fasi è invertibile. Esprimere (q_1, q_2, p_1, p_2) in funzione di (Q_1, Q_2, P_1, P_2) [2pt].

7. Verificare che la trasformazione al punto precedente è canonica [1pt].
8. Si consideri la trasformazione canonica (1), con $\lambda \ll 1$. Scrivere le variazioni infinitesime delle coordinate canoniche e trovare il generatore della trasformazione [2pt].

Esercizio 2

Si consideri il sistema in figura. Due aste di massa trascurabile sono poste su un piano verticale, ad angolo $\alpha/2$ dalla verticale. Il punto materiale P_1 di massa m è vincolato a stare su una delle due aste, mentre il punto materiale P_2 di massa m è vincolato a giacere sull'altra asta. I due punti sono legati da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce la gravità.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema usando come coordinate libere le ascisse dei due punti sulle rispettive rette (usare come verso positivo il verso ascendente e come origine il punto di intersezione delle due aste) [2pt].
2. Trovare le equazioni di Lagrange [1pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [3pt].



4. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile [2pt].
5. Si scriva la soluzione generale delle equazioni di Lagrange linearizzate [2pt].

Si permetta ora al piano dove giacciono le aste di ruotare attorno all'asse verticale a . Questo aggiunge una terza coordinata libera θ .

6. Si scriva la nuova Lagrangiana $L(q_1, q_2, \theta, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{\theta})$ [1pt].
7. Si usi la coordinata ciclica θ per trovare la Lagrangiana efficace a valore fissato ℓ del suo momento coniugato p_θ [1,5pt].
8. Si determini il valore di ℓ affinché il punto $(q_1, q_2) = \left(\frac{mg \cos(\alpha/2)}{k \cos \alpha}, 0\right)$ sia una soluzione di equilibrio per il problema ridotto [1,5pt].

Esercizio 3

Si consideri l'oscillatore armonico quantistico unidimensionale, con potenziale $V = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Scrivendo l'equazione di Schrödinger in funzione di φ e λ e inserendo $\varphi(q) = \theta(q)e^{-q^2/2}$ in tale equazione, si trova la seguente equazione per $\theta(q)$

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + 2q\frac{d}{dq} + 1 - 2\lambda\right)\theta(q) = 0$$

1. Si ponga $\theta(q) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s q^{2s+r}$ con $a_0 \neq 0$ e si calcolino le serie che definiscono $\frac{d\theta}{dq}$ e $\frac{d^2\theta}{dq^2}$. Dimostrare che la soluzione è data da $a_{s+1} = \frac{4s+2r+1-2\lambda}{(2s+r+2)(2s+r+1)}a_s$ e $r = 0, 1$ e determinare lo spettro dell'energia [2pt].
2. Si trovino le autofunzioni $\psi_0(x)$ e $\psi_1(x)$ relative allo stato fondamentale e al primo livello eccitato dell'energia [1pt].
3. Si consideri lo stato con funzione d'onda normalizzata $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\psi_0(x) + \psi_1(x))$. Si calcoli il valor medio dell'energia nello stato $\psi(x)$ [1pt].