

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 14.07.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Scrivere la definizione di costante del moto per un sistema Hamiltoniano. [1,5pt]
2. Definire le Parentesi di Poisson e descrivere la loro relazione con le costanti del moto. [1pt]
3. Scrivere la definizione di trasformazione canonica (spiegando ogni simbolo in tale relazione). Spiegare, seguendo la definizione, perché l'identità è una trasformazione canonica. [2pt]
4. Si dica che relazione c'è tra trasformazioni canoniche e trasformazioni simplettiche. Si dimostri che le trasformazioni che preservano le parentesi di Poisson sono canoniche. [2pt]
5. Si scriva l'Hamiltoniana di un corpo soggetto a una forza centrale, che si muove in $\mathbb{R}^3$. Si dimostri usando le parentesi di Poisson, che il sistema è invariante per rotazioni [3pt].
6. Si consideri la seguente trasformazione di coordinate sullo spazio delle fasi:

$$q = \sqrt{\tilde{p}} e^{\alpha \tilde{q}}, \quad p = -2\tilde{p}^\beta e^{\tilde{q}/2} \quad (1)$$

Si trovi per quali valori di α e β la trasformazione è canonica. [1pt]

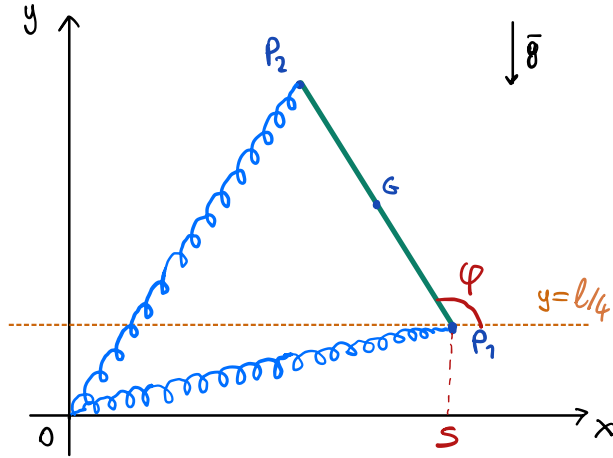
7. Si usi la trasformazione canonica (1), per risolvere le equazioni di Hamilton relative all'Hamiltoniana $H = -\frac{\omega}{2} p q$ (cioè si trovino le soluzioni $p(t)$ e $q(t)$). [2pt]
8. Si trovi la funzione generatrice $F(\tilde{p}, q)$ della trasformazione canonica (1). [1pt]
9. Si trovino le trasformazioni infinitesime generate dal generatore $G(p, q) = -\frac{\omega}{2} p q$ e si scrivano le trasformazioni finite corrispondenti. [1pt]
10. Si dica cos'è un sistema integrabile in meccanica Hamiltoniana, e si spieghi perché il problema centrale tridimensionale è un sistema integrabile. [1,5pt]

Esercizio 2

Il sistema in figura è disposto in un piano verticale. Si consideri una barra omogenea di massa m e lunghezza ℓ . Un suo estremo P_1 è vincolato sulla retta $y = \frac{\ell}{4}$. I due estremi P_1 e P_2 della barra sono legati all'origine degli assi da molle di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. **Sul sistema agisce la gravità.**

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'ascissa s del punto P_1 e l'angolo φ in figura. In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].

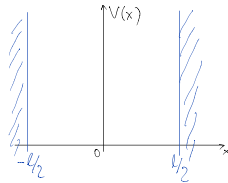
[Il momento di inerzia della barra omogenea rispetto ad un asse passante per in centro di massa G è $I = \frac{m\ell^2}{12}$.]



2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata φ [2pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [6pt].
4. Si ponga $k = \frac{2mg}{3\ell}$. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto di equilibrio stabile [2pt].
5. Si ponga ora $k = 0$ tenendo m generico. Si trovi la coordinata ciclica, si dica a quale costante del moto fisica corrisponde, e si usi la sua presenza per trovare la Lagrangiana efficace del problema ridotto a un grado di libertà. Si linearizzi la Lagrangiana efficace attorno al punto di equilibrio stabile del potenziale efficace [2pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale infinita (vedi figura).



1. Si dimostri che le seguenti funzioni d'onda sono autofunzioni dell'Hamiltoniana, trovando lo spettro risultante: [2pt]

$$\psi_{2m+1} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{(2m+1)\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad \psi_{2m} = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin\left(\frac{2m\pi x}{\ell}\right) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

2. Si consideri lo stato $\psi(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\psi_1(x) + \frac{1}{2}\psi_3(x)$. Si calcoli il valore medio dell'energia in tale stato. [1pt].
3. Al tempo $t = 0$ lo stato è descritto dalla funzione d'onda $\psi(x)$ data al punto (2): si scriva lo stato del sistema al tempo $t \neq 0$. [1pt].