

Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 09.02.25

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2024/2025

Esercizio 1

1. Dare la definizione di funzionale, facendo un esempio. [1,5pt]
2. Definire la variazione di un funzionale. [1pt]
3. Dato il funzionale $F[u] = u'(0)^2$, calcolare la sua variazione e dire su che funzioni essa si annulla. [2pt]

Si consideri un sistema Lagrangiano a due gradi di libertà, con coordinate libere q_1, q_2 .

4. Scrivere il funzionale azione S . [1pt]
5. Calcolare la variazione δS del funzionale azione, scrivendo i vari passaggi. [2pt]
6. Si enunci e si dimostri il “Principio di Hamilton”. [2pt]
7. Si usi il principio di Hamilton per dimostrare che “Lagrangiane che differiscono per una derivata totale sono equivalenti”. [2pt]

Si consideri un sistema Hamiltoniano con $n = 1$.

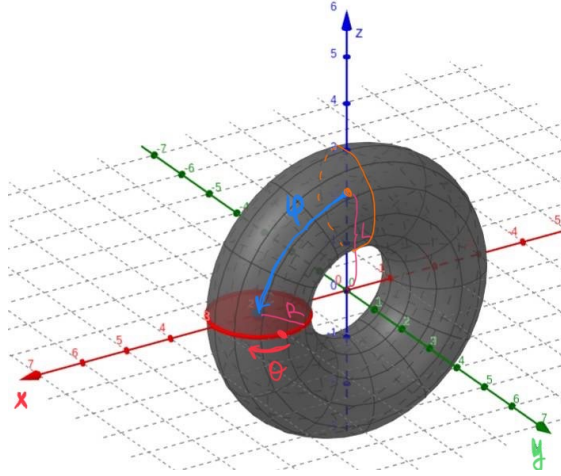
8. Si dia la definizione di trasformazione canonica. [1,5pt]
9. Si consideri la funzione $F_2(\tilde{p}, q) = \log(1 + \tilde{p}q)$. Si trovi la trasformazione canonica da essa generata. [1pt]
10. Usando le Parentesi di Poisson, si dimostri che la trasformazione trovata al punto precedente è canonica [1pt]
11. Si consideri l'Hamiltoniana $H(p, q) = \log(p) - \log(1 - pq)$. Si usi la trasformazione canonica trovata al punto 9 per risolvere le equazioni del moto relative a questa Hamiltoniana. [1pt]

Esercizio 2

Un punto materiale P di massa m è vincolato a stare sulla superficie del toro bidimensionale in figura. Un punto su tale toro è parametrizzato dalle coordinate θ, φ nel seguente modo:

$$\begin{aligned}x &= (L + R \sin \theta) \sin \varphi \\y &= R \cos \theta \\z &= (L + R \sin \theta) \cos \varphi\end{aligned}$$

dove R e L sono i raggi dei due cerchi (quando consideriamo il toro come il prodotto cartesiano $S_R^1 \times S_L^1$), con $\mathbf{L} = 2\mathbf{R}$. Una **molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla** lega il punto P col piano xz (la molla rimane parallela all'asse y). **Sul sistema agisce la gravità.**



1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere i due angoli θ e φ . In particolare si scriva la matrice cinetica [2pt].
2. Trovare l'equazione di Lagrange associata alla coordinata φ [2pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema, discutendone la stabilità [5pt].
4. Calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni attorno al punto $(\theta, \varphi) = (\pi/2, \pi)$ [2pt].
5. Si pongano $g = 0$ e $k = 0$. Si trovi la coordinata ciclica, si dica a quale costante del moto fisica corrisponde, e si usi la sua presenza per trovare la Lagrangiana efficace del problema ridotto a un grado di libertà. Si trovino i punti di equilibrio del potenziale efficace e se ne discuta la stabilità. Si spieghi a quali moti corrispondono nel problema originario. [3pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica vincolata su una circonferenza di raggio R e parametrizzata da $\varphi \in [0, 2\pi[$. La sua dinamica è determinata dall'Hamiltoniana

$$H_\theta = \frac{\left(p_\varphi - \frac{\hbar\theta}{2\pi}\right)^2}{2mR^2}.$$

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo, trovando autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $\hat{H}_\theta$ [2pt].
2. Dato lo stato normalizzato $\psi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} \cos \varphi$ al tempo $t = 0$, scrivere il suo evoluto $\psi(\varphi, t)$ al tempo $t \neq 0$ [1pt].
3. Si fissi $\theta = 0$. Si calcoli il valor medio della variabile dinamica $\sin^2(\varphi)$ nello stato fondamentale [1pt].