

- La luce è descritta da una **funzione scalare** detta "funzione d'onda" (wavefunction).
- Il significato fisico non è specificato, può rappresentare una delle componenti cartesiane del campo.

PRO'S

Descrive bene moltissimi fenomeni, incluse interferenza e diffrazione

CON'S

Non si può usare per descrivere quei casi in cui è importante il carattere vettoriale, ad esempio

- riflessione e rifrazione
- polarizzazione

POSTULATI

- In un mezzo di indice di rifrazione n la luce si propaga con velocità \rightarrow

$$c = \frac{c_0}{n}$$

velocità del vuoto

- l'onda luminosa è descritta da una **funzione scalare** $\in \mathbb{R}$ $u(\vec{r}, t)$ detta funzione d'onda ($\vec{r} = (x, y, z)$)

- la funzione d'onda soddisfa

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Eq. d'onda

- si applica il **principio di sovrapposizione**

- all'interfaccia tra due mezzi il comportamento di u dipende dal suo significato fisico

- L'eq. d'onda si applica anche a mezzi in cui $n = n(\vec{r})$ (o $c = c(\vec{r})$), se la variazione è lenta su una λ

INTENSITA' OTTICA

$$I(\vec{r}, t) = 2 \langle u^2(\vec{r}, t) \rangle$$

mezzo per
condotta

media temporale
in Δt tale che
 $T \leq \Delta t \leq$ tempi caratter.
ad esempio
la durata di
un impulso

POTENZA OTTICA



ATTRAVERSO
UN'AREA A \perp ALLA PROPAGAZIONE DELL'ONDA

$$P(t) = \int_A I(\vec{r}, t) dA$$

ONDE MONOCROMATICHE

$$u(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) \cos \left[\underbrace{2\pi \nu t}_{\substack{\omega \\ \text{freq. angolare}}} + \underbrace{\varphi(\vec{r})}_{\text{fase}} \right]$$

ampiezza

RAPPRESENTAZIONE COMPLESSA E EQ. DI HELMHOLTZ

$$U(\vec{r}, t) = a(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})} e^{i2\pi \nu t} \in \mathbb{C}$$

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re} \{ U(\vec{r}, t) \} = \frac{1}{2} [U(\vec{r}, t) + U^*(\vec{r}, t)]$$

anche U soddisfa l'eq. d'onda

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

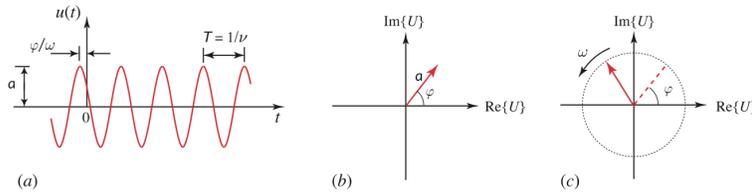
Si può scrivere

$$U(\vec{r}, t) = \underbrace{U(\vec{r})}_{= a(\vec{r}) e^{i\varphi(\vec{r})}} e^{i2\pi \nu t}$$

AMPIEZZA
COMPLESSA

quindi

$$u(\vec{r}, t) = \text{Re} [U(\vec{r}) e^{i2\pi\nu t}] = \frac{1}{2} [U e^{i2\pi\nu t} + U^* e^{-i2\pi\nu t}]$$



Da SALETT + TBLICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

Figure 2.2-1 Representations of a monochromatic wave at a fixed position \mathbf{r} : (a) the wavefunction $u(t)$ is a harmonic function of time; (b) the complex amplitude $U = a \exp(j\varphi)$ is a fixed phasor; (c) the complex wavefunction $U(t) = U \exp(j2\pi\nu t)$ is a phasor rotating with angular velocity $\omega = 2\pi\nu$ radians/s.

EQUAZIONE DI HELMHOLTZ

$$U(\vec{r}, t) = U(\vec{r}) e^{i2\pi\nu t}$$

$$\nabla^2 U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$$

$$(\nabla^2 + k^2) U(\vec{r}) = 0$$

$$k = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{\omega}{c}$$

INTENSITA' OTTICA

$$I(\vec{r}, t) = 2\langle u^2(\vec{r}, t) \rangle = |U(\vec{r})|^2$$

$$2u^2(\vec{r}, t) = 2|U(\vec{r})|^2 \cos^2[\omega t + \varphi(\vec{r})] = |U(\vec{r})|^2 (1 + \cos 2(\omega t + \varphi(\vec{r})))$$

Quando applico la $\langle \rangle$ temporale di $\cos 2(\omega t + \varphi(\vec{r})) \rightarrow 0$

- Si dicono "fronti d'onda" le superfici dove $\varphi(\vec{r}) = \text{costante}$
Ad una data posizione \vec{r}^0 , la normale al fronte d'onda \vec{i} parallela a $\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$

ESempi di onde elementari

- Diamo esplicitamente le espressioni complesse di alcune funzioni d'onda che rappresentano "onde elementari"

ONDA PIANA

$$U(\vec{r}) = A e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r})} = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$A \in \mathbb{C}$ è una costante detta "INVILUPPO"

$\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ è il vettore d'onda

Scriviamo $A = A_0 e^{i\delta} \Rightarrow$ la fase di $U(\vec{r})$ è $\arg\{U(\vec{r})\} = \delta - \vec{k} \cdot \vec{r}$
I fronti d'onda soddisfano $\delta - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{costante} = 2\pi q$ con $q \in \mathbb{Z}$
 \uparrow che
(l'intero)

quindi $\vec{k} \cdot \vec{r} = \delta + 2\pi q = k_x x + k_y y + k_z z$

equazione di un piano \perp al vettore \vec{k}
al variare di $q \in \mathbb{Z}$ i piani sono separati da
una distanza $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ lungo il vettore \vec{k}

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu}$$

L'intensità dell'onda piana è $I(\vec{r}) = |U(\vec{r})|^2 = |A|^2 = A_0^2$
in tutto lo spazio. Segue che $P_{\text{ottica}} = \infty \Rightarrow$ l'onda
piana è una idealizzazione.

Poniamo l'asse z lungo $\vec{k} \Rightarrow U(\vec{r}) = A e^{ikz}$ e

quindi $u(\vec{r}, t) = \text{Re}\{U(\vec{r})e^{i\omega t}\} = A_0 \cos[\omega t - kz + \delta] =$
 $= A_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right]$

Si vede allora che la funzione d'onda dipende
dalle coordinate spaziali e temporali nella combinazione
 $t - \frac{z}{c}$, che può riscrivere $\frac{1}{c}(ct - z) \Rightarrow$ le
superfici equifase, ovvero i fronti d'onda, si
propagano con velocità di fase $c = \frac{c_0}{n}$

La lunghezza d'onda resta data da

$$\lambda \nu = c \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c_0}{n\nu} = \frac{\lambda_0}{n} \quad \text{lunghezza d'onda in vuoto}$$

Inoltre può scrivere $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{\lambda_0} = n k_0$

ONDA SFERICA

L'ampiezza complessa $U(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{-ikr}$, detta "onda sferica" è pure una soluzione dell'eq. di Helmholtz $(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0$

Se riavviciniamo infatti l'operatore ∇^2 in coordinate sferiche troviamo

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + k^2 \right] \frac{A}{r} e^{-ikr} = 0$$

dove ho tenuto conto del fatto che $U(\vec{r})$ dipende solo dalla distanza radiale dall'origine.

Segue $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A}{r} e^{-ikr} \right) \right) + k^2 \frac{A}{r} e^{-ikr} = 0$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left(-\frac{A}{r^2} e^{-ikr} + \frac{A}{r} (-ik) e^{-ikr} \right) + k^2 \frac{A}{r} e^{-ikr} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-A e^{-ikr} - ikr A e^{-ikr} \right) + k^2 \frac{A}{r} e^{-ikr} = 0$$

$$\frac{1}{r^2} \left(+A ik e^{-ikr} - ik A e^{-ikr} - (ikr(-ik) A e^{-ikr}) \right) + \frac{k^2 A}{r} e^{-ikr} = 0$$

$$-\frac{k^2 A e^{-ikr}}{r} + \frac{k^2 A}{r} e^{-ikr} = 0 \quad \text{C.V.D.}$$

Prendiamo per semplicità $A = A_0$ ($\delta = 0$), allora i fronti d'onda sono i luoghi dei punti tali che $kr = \text{costante} = 2\pi q$ con $q \in \mathbb{N}$

Segue $r = \frac{2\pi}{k} q = \lambda q \Rightarrow$ sfere concentriche ripete da una distanza radiale λ

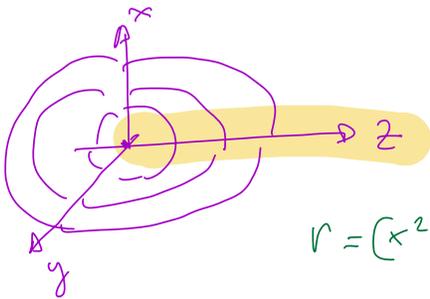
$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{-ikr}$ rappresenta un'onda sferica che si propaga dall'origine in fuori radialmente.

$U(\vec{r}) = \frac{A}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} e^{-ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}$ è un'onda sferica centrata in \vec{r}_0

$U(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{ikr}$ rappresenta un'onda sferica che converge nell'origine

APPROSSIMAZIONE DI FRESNEL E ONDA PARABOLICA

Onde sferiche dall'origine nei punti lontani dall'origine, ma vicini all'asse z in modo



che $\sqrt{x^2+y^2} \ll z$ [equivalente all'appr. piana in ottica geometrica]

Scriviamo allora

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = z \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2} \right)^{1/2} = z (1 + t^2)^{1/2}$$

$$\text{con } t^2 = \frac{x^2 + y^2}{z^2} \ll 1$$

Possiamo allora espandere

$$r = z \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots \right) \approx z \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) = z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$$

e sostituire nell'equazione $U(\vec{r}) = \frac{A}{r} e^{-ikr}$;

$$U(\vec{r}) = \frac{A}{z} e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2 + y^2}{2z}}$$

Approssimazione di Fresnel dell'onda sferica

- $r \approx z$ nell'ampiezza

- $r \approx z + \frac{x^2 + y^2}{2z}$ nella fase che è più sensibile agli errori

\uparrow $V(\vec{r})$ può essere pensata come un'onda piana $A e^{-ikz}$ la cui ampiezza è modulata dal fattore $\frac{1}{z} e^{-ik\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)}$.

La fase di questo fattore, cioè $k\left(\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$, trasforma i fronti d'onda piani dell'onda in fronti parabolici, dato che l'equazione di un paraboloido di rotazione è

$\frac{x^2+y^2}{z} = \text{costante} \Rightarrow$ l'onda sferica è approssimata nel caso paraxiale da un'onda paraboloidale

Per z molto grandi $\frac{x^2+y^2}{2z} \rightarrow 0$ e l'onda parabolica diventa $\approx \frac{A}{z} e^{-ikz}$ un'onda piana, visto che per z grande l'ampiezza varia lentamente con z .

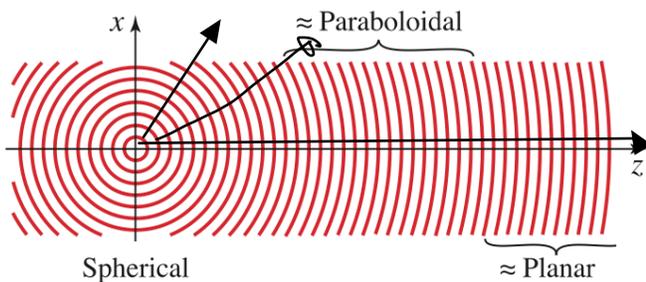


Figure 2.2-4 A spherical wave may be approximated at points near the z axis and sufficiently far from the origin by a paraboloidal wave. For points very far from the origin, the spherical wave approaches a plane wave.

Da SAUNDERS & BELL
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

Notiamo che perché l'approssimazione di Fresnel sia valida, non è sufficiente che $t^2 = \frac{x^2+y^2}{z^2} \ll 1$.

Infatti la fase dell'onda parabolica si scrive in realtà

$kz \left(1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{8} + \dots \right)$ e potrebbe verificarsi che, sebbene $\frac{t^4}{8} \ll \frac{t^2}{2}$, $kz \frac{t^4}{8} \approx \pi$. L'approssimazione

di Fresnel è dunque valida quando $kz \frac{t^4}{8} \ll \pi$

Cioè $(x^2 + y^2)^2 \ll 4z^3 \frac{2\pi}{\lambda} = 4z^3 \lambda$

Se consideriamo i punti in un cerchio di raggio a intorno all'asse z , la condizione diventa

$a^4 \ll 4z^3 \lambda$, che usualmente si esprime in termini del **NUMERO DI FRESNEL** $N_F = \frac{a^2}{\lambda z}$

e dell'angolo massimo $\theta_m = \frac{a}{z}$ in questo modo

$$\frac{N_F \theta_m^2}{4} \ll 1$$

CONDIZIONE DI FRESNEL PER LA VALIDITÀ DELL'APPROSSIMAZIONE PARABOLICA

ONDE PARASSIALI

onda parassiale → le normali ai fronti d'onda sono raggi parassiali

Si può scrivere così

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) e^{-ikz}$$

involuppo $A(\vec{r})$ che varia lentamente con \vec{r} onda piana "portante"

• $A(\vec{r})$ e $\frac{\partial A(\vec{r})}{\partial z}$ variano molto poco su una lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ in modo da mantenere la somiglianza con un'onda piana.

• la funzione d'onda di un'onda parassiale è $u(\vec{r}, t) = A_0(\vec{r}) \cos(\omega t - kz + \psi(\vec{r}))$ $A(\vec{r}) = A_0(\vec{r}) e^{i\psi(\vec{r})}$

e n' può rappresentare schematicamente così

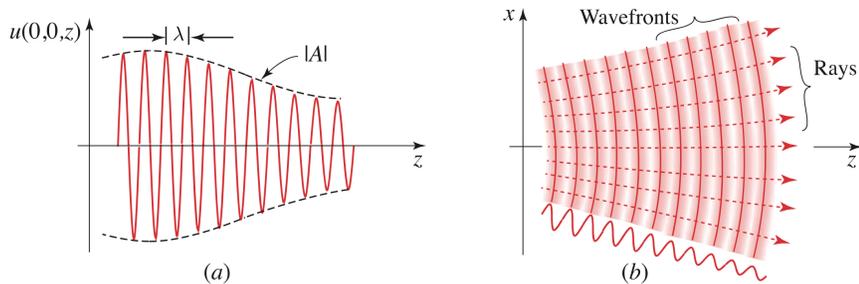


Figure 2.2-5 (a) Wavefunction of a paraxial wave at point on the z axis as a function of the axial distance z . (b) The wavefronts and wavefront normals of a paraxial wave in the x - z plane.

Da SAURENBLOCH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

→ Abbiamo supposto che $A(\vec{r})$ vari lentamente rispetto a z , cioè per una distanza $\Delta z = \lambda$

$$\Delta A \ll A \quad \left[\begin{array}{l} \text{vale dire } \operatorname{Re}\{\Delta A\} \ll \operatorname{Re}\{A\} \\ \operatorname{Im}\{\Delta A\} \ll \operatorname{Im}\{A\} \end{array} \right]$$

allora

$$\Delta A = \frac{\partial A}{\partial z} \Delta z = \frac{\partial A}{\partial z} \lambda \Rightarrow \frac{\partial A}{\partial z} \ll \frac{A}{\lambda} = A \frac{k}{2\pi}$$

vale

$$\frac{\partial A}{\partial z} \ll kA$$

• Inoltre abbiamo supposto che anche $\frac{\partial A}{\partial z}$ vari lentamente in una distanza $\Delta z = \lambda$, quindi

$$\frac{\Delta \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)}{\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)} \ll 1 \Rightarrow \Delta \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right) \Delta z = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \lambda \ll \frac{\partial A}{\partial z} \ll kA$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \ll k^2 A$$

- Sostituisco $U(\vec{r}) = A(\vec{r})e^{-ikz}$ nell'eq. d'onda di Helmholtz e teniamo conto di queste approssimazioni:

$$(\nabla^2 + k^2)U(\vec{r}) = 0 \Rightarrow (\nabla^2 + k^2)A(\vec{r})e^{-ikz} = 0$$

Calcoliamo separatamente:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(Ae^{-ikz}) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{-ikz} \quad ; \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}(Ae^{-ikz}) = \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} e^{-ikz}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2}(Ae^{-ikz}) &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial}{\partial z}(Ae^{-ikz}) \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial A}{\partial z} e^{-ikz} - ikAe^{-ikz} \right] \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{-ikz} - k^2 A e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} \end{aligned}$$

Segue allora, rimettendo tutto insieme

$$0 = \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} e^{-ikz} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} e^{-ikz} - k^2 A e^{-ikz} + k^2 A e^{-ikz} + \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} e^{-ikz} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} e^{-ikz}$$

che può riscrivere

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0$$

e trascurando $\frac{\partial A}{\partial z}$ rispetto a $k \frac{\partial A}{\partial z}$ otteniamo finalmente

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \nabla_T^2 A - 2ik \frac{\partial A}{\partial z} = 0$$

EQUAZIONE DI HELMHOLTZ PARASSIALE

$\nabla_T^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$
 e se
 "loplacien
 transvers"

- la soluzione più semplice dell'eq. di Helmholtz paraviale è l'onda parabolica

$$A(\vec{r}) = \frac{A}{z} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2z}} \quad \text{PARAB.}$$

- la soluzione più importante è il FASCIO GAUSSIANO, come quello emesso dai laser

$$A_G(\vec{r}) = \frac{A}{(z+iz_0)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2(z+iz_0)}} \quad \text{GAUSS.}$$

Esempio

$$U_G = \frac{A}{(z+iz_0)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2(z+iz_0)}} e^{-ikz}$$

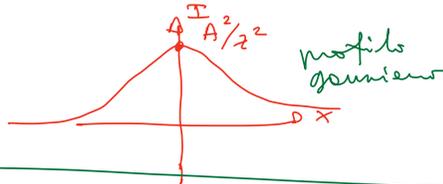
$$I = U_G^* U_G$$

Nel piano $z=0$ $U_G = \frac{A}{iz_0} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2iz_0}}$

$$I = U_G^* U_G = \frac{A}{iz_0} e^{-k \frac{(x^2+y^2)}{2z_0}} \cdot \frac{A}{-iz_0} e^{-k \frac{(x^2+y^2)}{2z_0}} = \frac{A^2}{z_0^2} e^{-k \frac{(x^2+y^2)}{z_0}}$$

Facciamo una sezione nel piano xy con $y=0$

$$I(x, 0, 0) = \frac{A^2}{z_0^2} e^{-\frac{kx^2}{z_0}}$$



TRASMISSIONE DELLE ONDE LUMINOSE ATTRAVERSO SEMPLICI DISPOSITIVI OTTICI

LASTRA TRASPARENTE

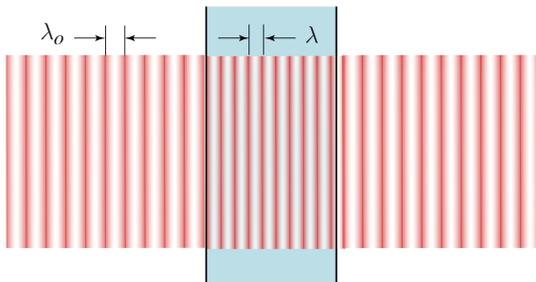


Figure 2.4-3 Transmission of a plane wave through a transparent plate.

da SAUREN-BLICH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
WILEY, 2023

- Ignoriamo gli effetti di riflessione e rifrazione che non possiamo trattare adeguatamente nella teoria scalare.
- La lastra ha spessore d e indice di rifrazione n ed è nel vuoto
- L'onda incidente si propaga nella direzione z
- L'ampiezza complessa dell'onda è $U(x, y, z)$
- Si definisce la

$$\text{TRASMITTANZA COMPLESSA} = \frac{\text{AMPIEZZA OUT}}{\text{AMPIEZZA IN}}$$

cioè nel caso della lastra

$$t(x, y) = \frac{U(x, y, d)}{U(x, y, 0)}$$

$U(x, y, z)$ è proporzionale a $e^{-ikz} = e^{-ik_0 n z}$

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ λ_0 lunghezza d'onda nel vuoto

quindi $t_{\text{lastra}}(x, y) = e^{-ik_0 n d} = e^{-i \frac{2\pi n d}{\lambda_0}}$

si può quindi dire che la lastra introduce uno sfasamento pari a $nk_0 d = \frac{2\pi n d}{\lambda_0}$

LASTRA TRASPARENTE A SPESORE VARIABILE

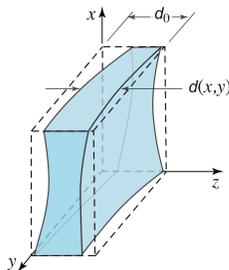


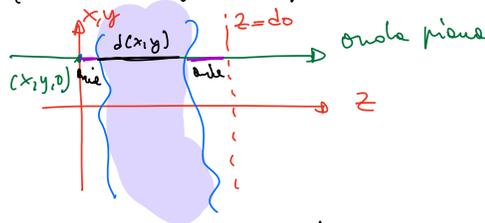
Figure 2.4-5 A transparent plate of varying thickness.

Da SAUER-BUCH "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS" VALEY, 2023

- Supponiamo che lo spessore della lastra vari in maniera continua $d = d(x, y)$ e che la lastra sia compresa tra i piani $z=0$ e $z=d_0$

• Inoltre l'onda incidente è piana

→ Nell'intorno di $(x, y, 0)$, l'onda piana si può pensare localmente come un'onda piana che viaggia nella direzione $z \Rightarrow$ quindi attraversa uno strato di lente di spessore $d(x, y)$ e resterà strato di aria (o vuoto) di spessore totale $d_0 - d(x, y)$



quindi la trasmittanza locale è data da

$$t(x, y) = e^{-i k_0 d(x, y)} e^{-i k_0 [d_0 - d(x, y)]} = e^{-i k_0 d_0} e^{-i(n-1)k_0 d(x, y)} = h_0 e^{-i k_0 (n-1) d(x, y)}$$

TRASMITTANZA DI UNA LASTRA A SPESSORE VARIABILE

• L'espressione della $t(x, y)$ per una lente a spessore variabile si può usare per determinare la trasmittanza di vari elementi ottici e, di conseguenza, il modo in cui trasformano una funzione d'onda incidente, ...

Esempio: lente sottile (raggi parassiali)

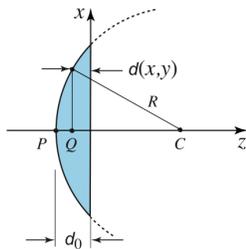


Figure 2.4-7 A plano-convex thin lens. The lens imparts a phase proportional to $x^2 + y^2$ to an incident plane wave, thereby transforming it into a paraboloidal wave centered at a distance f from the lens (see Exercise 2.4-3).

$$d(x, y) = d_0 - \overline{PQ} = d_0 - (R - \overline{QC}) = d_0 - (R - [R^2 - x^2 - y^2]^{1/2}) \approx d_0 - \frac{x^2 + y^2}{2R} \quad \text{per } x^2 + y^2 \ll R^2 \quad (\text{raggi parassiali})$$

Segue

$$t_{\text{lente}}(x, y) \approx h_0 e^{-i(n-1)k_0 d(x, y)} \approx h_0 e^{i k_0 \frac{x^2 + y^2}{2f}}$$

con $f = \frac{R}{n-1}$ "Distanza focale"

La lente piano-convessa opera come una lente focalizzata. Un'onda piana nel punto focale e distanza f dalla lente, ovvero trasforma l'onda piana in un'onda parabolica che converge a distanza f dalla lente.

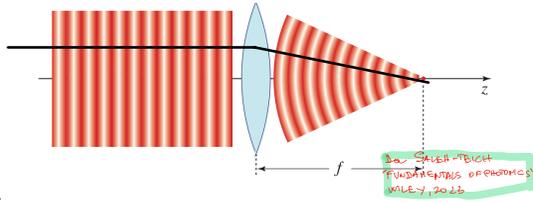


Figure 2.4-9 A thin lens transforms a plane wave into a paraboloidal wave.

INTERFERENZA (ONDE MONOCROMATICHE)

→ Due o più funzioni d'onda presenti simultaneamente nella stessa regione di spazio
 ⇒ la funzione d'onda totale è la loro somma

N.B.: questo principio di sovrapposizione NON si applica alle intensità

$$U(\vec{r}) = U_1(\vec{r}) + U_2(\vec{r})$$

$$I_1 = |U_1(\vec{r})|^2$$

$$I_2 = |U_2(\vec{r})|^2$$

Intensità totale

$$I = |U|^2 = |U_1 + U_2|^2 = (U_1 + U_2)^* (U_1 + U_2) =$$

$$= |U_1|^2 + |U_2|^2 + U_1^* U_2 + U_1 U_2^*$$

Se ora poniamo $U_1 = \sqrt{I_1} e^{i\varphi_1}$, $U_2 = \sqrt{I_2} e^{i\varphi_2}$

si ottiene

$$I = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos \varphi$$

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

EQUAZIONE DELL'INTERFERENZA

- Il fenomeno dell'interferenza è molto importante perché permette di misurare differenze di fase

sulla rivelazione di un'intensità luminosa

- Normalmente, in luce ordinaria, non si osserva interferenza perché detta luce non è coerente: le fasi fluttuano casualmente e la differenza di fase tra due fasci si media a zero
 → Per l'interferenza occorre luce coerente, cioè con relazioni di fase fisse nel tempo

→ L'interferenza ha l'effetto di ridistribuire spazialmente l'intensità ottica disponibile senza ovviamente creare o togliere l'energia presente

INTERFEROMETRI

- Supponiamo di avere due onde piane di pari intensità I_0 che si propagano lungo z e sopprimiamo inoltre che una delle due vada in ritardo di una distanza d

$$U_1 = I_0^{1/2} e^{-iKz}$$

$$U_2 = I_0^{1/2} e^{-iK(z-d)}$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 = 2I_0 \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right) \right]$$

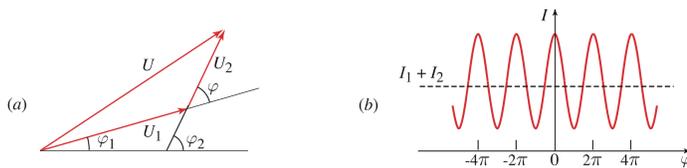


Figure 2.5-1 (a) Phasor diagram for the superposition of two waves of intensities I_1 and I_2 and phase difference $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. (b) Dependence of the total intensity I on the phase difference φ .

Da SALET-BUCH
 "FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
 WILEY, 2023

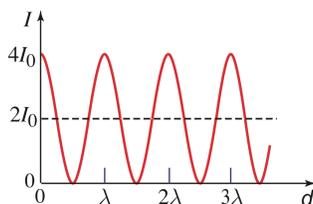


Figure 2.5-2 Dependence of the intensity I of the superposition of two waves, each of intensity I_0 , on the delay distance d . When the delay distance is a multiple of λ , the interference is constructive; when it is an odd multiple of $\lambda/2$, the interference is destructive.

Un INTERFEROMETRO è uno strumento che divide un'onda in due parti, con un "beam splitter", e poi la ricombina dopo averle fatte propagare lungo distanze diverse.

- Siccome I è unibile a $\varphi = \frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{2\pi n d}{\lambda_0} = \frac{2\pi n v d}{c_0}$, gli interferometri sono strumenti ideali per misure piccole variazioni di $d, \lambda, n, v \dots$

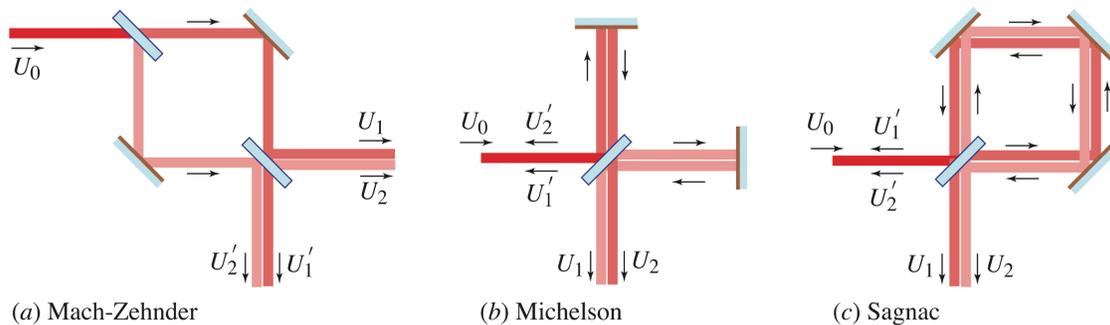


Figure 2.5-3 Interferometers: A wave U_0 is split into two waves U_1 and U_2 (they are shown as shaded light and dark for ease of visualization but are actually congruent). After traveling through different paths, the waves are recombined into a superposition wave $U = U_1 + U_2$ whose intensity is recorded. The waves are split and recombined using beam splitters. In the Sagnac interferometer the two waves travel through the same path, but in opposite directions.

Da SAUER-BUCH
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"
VALEY, 2023

EFFETTO SAGNAC

Nell'interferometro di Sagnac i percorsi ottici non identici, ma percorsi in versi differenti. Se il sistema viene messo in rotazione il raggio che "segue" la rotazione ha un cammino ottico più lungo rispetto all'altro, quindi si ha una differenza di fase che può venire rivelata come una variazione dell'intensità totale.

⇒ L'interferometro di Sagnac può quindi essere utilizzato per stabilire se il sistema sta ruotando o meno rispetto ad un riferimento inerziale

WIKIPEDIA
the free encyclopedia

Search Wikipedia Search Create account Log in

Photograph your local culture, help Wikipedia and win!

Sagnac effect

From Wikipedia, the free encyclopedia

The **Sagnac effect**, also called **Sagnac interference**, named after French physicist **Georges Sagnac**, is a phenomenon encountered in **interferometry** that is elicited by rotation. The Sagnac effect manifests itself in a setup called a **ring interferometer** or **Sagnac interferometer**. A beam of light is split and the two beams are made to follow the same path but in opposite directions. On return to the point of entry the two light beams are allowed to exit the ring and undergo interference. The relative phases of the two exiting beams, and thus the position of the interference fringes, are shifted according to the **angular velocity** of the apparatus. In other words, when the interferometer is at rest with respect to a nonrotating frame, the light takes the same amount of time to traverse the ring in either direction. However, when the interferometer system is spun, one beam of light has a longer path to travel than the other in order to complete one circuit of the mechanical frame, and so takes longer, resulting in a phase difference between the two beams. Georges Sagnac set up this experiment in 1913 in an attempt to prove the existence of the ether that Einstein's *theory of special relativity* makes superfluous.^{[1][2]}

A gimbal mounted mechanical gyroscope remains pointing in the same direction after spinning up, and thus can be used as a rotational reference for an inertial navigation system. With the development of so-called laser gyroscopes and fiber optic gyroscopes based on the Sagnac effect, bulky mechanical gyroscopes can be replaced by those with no moving parts in many modern inertial navigation systems. A conventional gyroscope relies on the principle of conservation of angular momentum whereas the sensitivity of the fiber interferometer is related to the Sagnac effect.

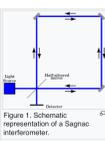
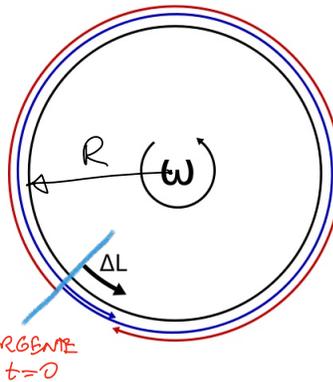


Figure 1. Schematic representation of a Sagnac interferometer.

https://en.wikipedia.org/wiki/Sagnac_effect



Immaginiamo che il cammino ottico sia circolare -
 • **Il raggio blu deve "inseguire" la sorgente** (nel caso della figura come il primo beam splitter), che nel frattempo si sposta.

• **Il raggio rosso invece va "incontro" alla sorgente,** quindi compie un percorso più corto di ΔL , che è di quanto la sorgente si sposta nel tempo t_1 che occorre al raggio blu per raggiungere la sorgente

• quindi

$$t_1 = \frac{2\pi R + \Delta L}{c} \quad \text{mentre} \quad \Delta t = R\omega t_1$$

quindi

$$t_1 = \frac{2\pi R}{c - R\omega}$$

Invece il tempo t_2 che occorre al raggio rosso per incontrare di nuovo la sorgente è

$$t_2 = \frac{2\pi R - \Delta L}{c} \Rightarrow t_2 = \frac{2\pi R}{c + R\omega}$$

e

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2 - R^2 \omega^2} \approx \frac{4\pi R^2 \omega}{c^2} \quad \text{per } R\omega \ll c$$

Lo sfasamento tra le due onde che si propagano
in versi opposti nell'interferometro è dunque

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{c\Delta t}{\lambda} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi c\Delta t}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda c} \cancel{A} W \quad \text{con } A = \pi R^2 \\ = \frac{8\pi A W}{\lambda c}$$

NB. Si può dimostrare che l'effetto vale per qualsiasi
forma del cammino ottico. A è sempre l'area
racchiusa dal cammino stesso.