

- L'istrica di Fourier descrive la propagazione dello sua utilizzandoli i concetti dell'analisi di Fourier e della teoria dei sistemi lineari.

## Analisi di Fourier

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{F(\nu) e^{i2\pi\nu t}}_{\substack{\text{funzione armonica} \\ \text{complesso}}} d\nu$$

$f(t)$  è una generica funzione  $\in \mathbb{C}$

$F(\nu)$  è la "trasformata di Fourier di  $f(t)$ "

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$f(t)$  è l'"anti-trasformata di Fourier" di  $F(\nu)$

Nella teoria delle comunicazioni:

- $f(t)$  regale nel dominio del tempo
- $F(\nu)$  regale nel dominio delle frequenze

$|f(t)|^2$  → "Potenza" del segnale

$|F(\nu)|^2$  → "Densità spettrale di energia" del segnale

Alcuni teoremi utili:

### Convulsione

$$F_1(\nu) = FT\{f_1\} \quad F_2(\nu) = FT\{f_2\}$$

o ltr

$$FT^{-1}\{F_1(\nu) F_2(\nu)\} = f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

↳ anti-trasformata di Fourier

### Correlazione

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1^*(\tau) f_2(t+\tau) d\tau$$

→  $f(t)$  è la "correlazione" di  $f_1$  ed  $f_2$

$$\Rightarrow F(\nu) = F_1^*(\nu) F_2(\nu) \quad \text{Inve } F(\nu) = FT\{f\}$$

se  $f_1 = f_2$  si parla di autocorrelazione

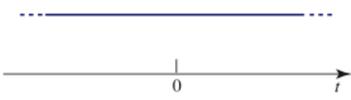
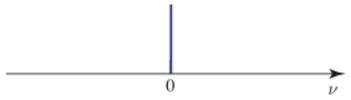
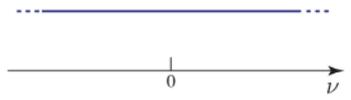
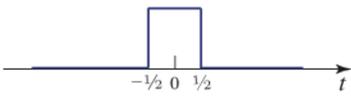
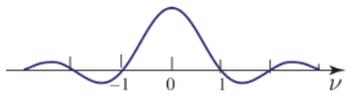
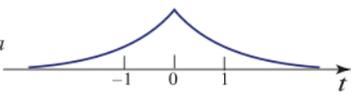
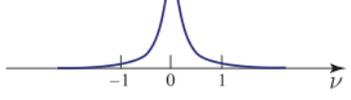
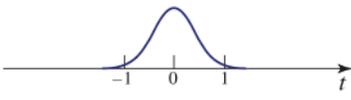
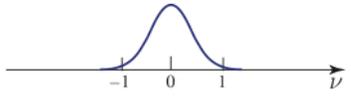
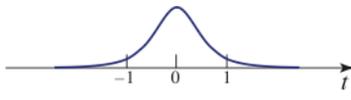
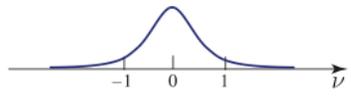
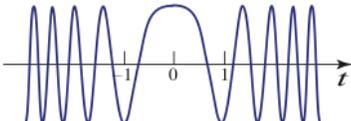
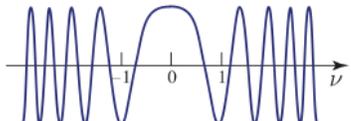
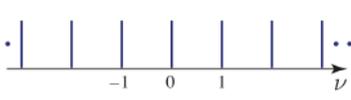
Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2 d\nu$$

conservative  
total energy

Dr. SALEH-TEBICI  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

**Table A.1-1** Selected functions and their Fourier transforms.

| Function                 | $f(t)$  | $F(\nu)$  |
|--------------------------|---|---|
| Uniform                  |    | $\delta(\nu)$                                  |
| Impulse                  |    | 1    |
| Rectangular              |    | $\text{sinc}(\nu)$                             |
| Exponential <sup>a</sup> |   | $\frac{2}{1 + (2\pi\nu)^2}$                   |
| Gaussian                 |  | $\exp(-\pi\nu^2)$                            |
| Hyperbolic secant        |  | $\text{sech}(\pi\nu)$                        |
| Chirp <sup>b</sup>       |  | $e^{j\pi/4} \exp(-j\pi\nu^2)$                |
| $M = 2S + 1$<br>Impulses |  | $\frac{\sin(M\pi\nu)}{\sin(\pi\nu)}$         |
| Comb                     |  | $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - m)$  |

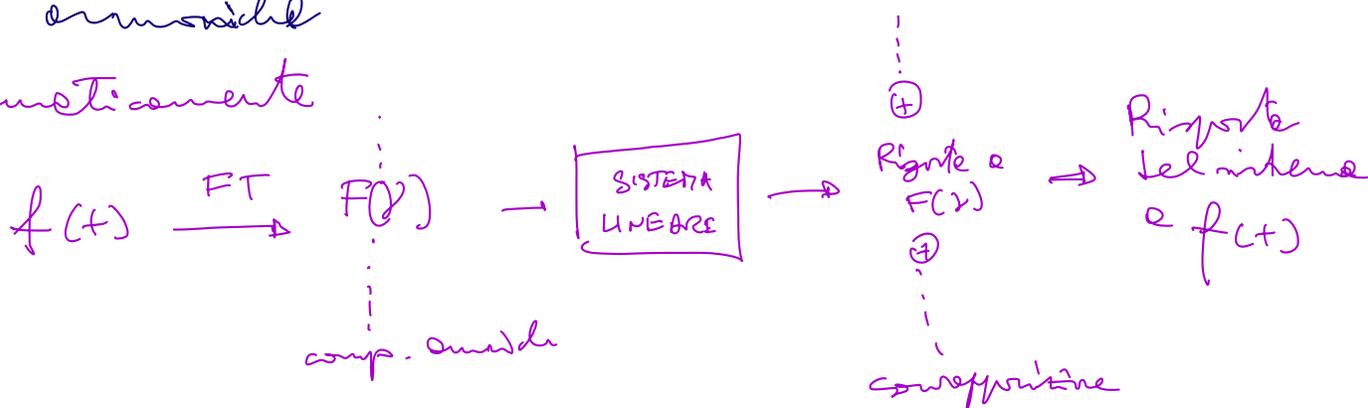
<sup>a</sup>The double-sided exponential function is shown. The Fourier transform of the single-sided exponential,  $f(t) = \exp(-t)$  with  $t \geq 0$ , is  $F(\nu) = 1/[1 + j2\pi\nu]$ . Its magnitude is  $1/\sqrt{1 + (2\pi\nu)^2}$ .

<sup>b</sup>The functions  $\cos(\pi t^2)$  and  $\cos(\pi \nu^2)$  are shown. The function  $\sin(\pi t^2)$  is shown in Fig. 4.3-6.

Una volta scomposta una funzione arbitraria del tempo  $f(t)$  nelle sue componenti armoniche di Fourier, si può utilizzare la teoria dei sistemi lineari:

- Se è nota la risposta di un sistema lineare a ciascuna delle componenti armoniche, allora la risposta del sistema a  $f(t)$  si ottiene come la sovrapposizione delle risposte alle sue componenti armoniche.

Schematicamente



### Trasformata di Fourier 2-D spaziale -

- La scomposizione di Fourier vale anche per funzioni delle coordinate spaziali, anche in due dimensioni.

Se  $f(x, y)$  è una funzione  $\in \mathbb{C}$ , si può esprimere come una sovrapposizione di funzioni armoniche del tipo  $F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)}$  dove  $\nu_x$  e  $\nu_y$  sono le frequenze periodiche nelle direzioni  $x$  e  $y$ .

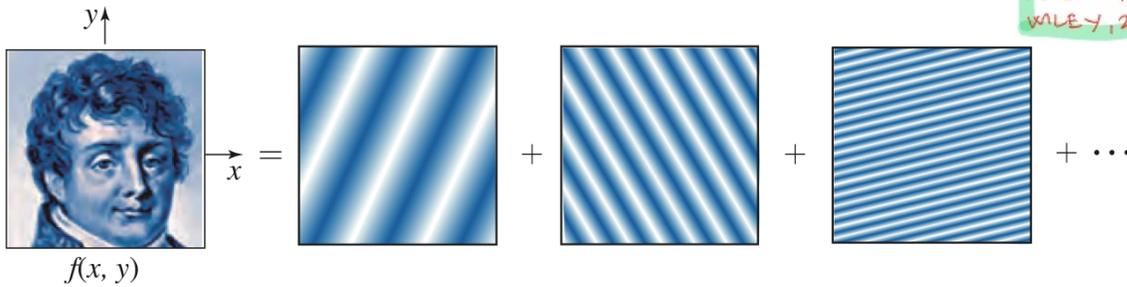
$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

TRASF. INVERSA SPAZIALE DI FOURIER IN 2 DIM.

V. nota sotto nella  $\star$  conversione dei segni

- La funzione armonica  $F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)}$  può essere usata per generare una funzione arbitraria  $f(x, y)$  che può rappresentare, ad esempio, l'intensità ottica in un certo piano.

DA SALET-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023



**Figure 4.0-2** An arbitrary function  $f(x, y)$  may be analyzed in terms of a sum of harmonic functions of different spatial frequencies and complex amplitudes, drawn here schematically as graded blue lines.

★ Conversione dei segni nelle T. di F.

Trasformata "temporale"

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

$$F(\nu) = \text{F.T.} \{ f(t) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

Trasformata spaziale

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x) e^{-i2\pi\nu_x x} d\nu_x$$

$$F(\nu_x) = \text{F.T.} \{ f(x) \} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i2\pi\nu_x x} dx$$

corrisponde alla conversione per cui l'onda armonica si propaga nel tempo con  $\nu > 0$  e nello spazio verso le  $x$  positive pure con  $\nu_x > 0$

Consideriamo una ondata piana monocromatica

$$U(x, y, z) = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$A \in \mathbb{C}$

e  $(k_x, k_y, k_z) \equiv \vec{k}$  vettore d'onda

Presso un piano arbitrario, si vede

che  $U$  è una funzione armonica spaziale dei punti in quel piano. Ad esempio, nel piano  $z=0$  si ha

$$U(x, y, 0) = A e^{-i(k_x x + k_y y)} = f(x, y) \quad (\text{funzione armonica})$$

dove poniamo visivamente

$$f(x,y) = Ae^{-i 2\pi (v_x x + v_y y)}$$

$$\text{con } v_x = \frac{k_x}{2\pi}$$

$$v_y = \frac{k_y}{2\pi}$$

frequenze spaziali

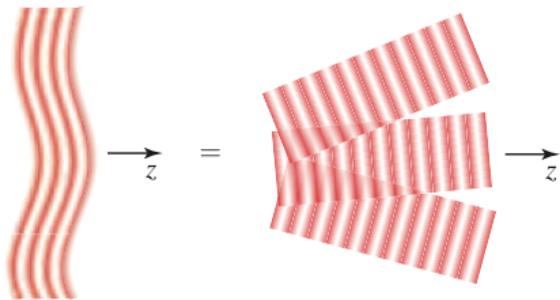
Inoltre, visto che  $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$ , e

$k_x$  e  $k_y$  sono ovunque, cioè è finita la funzione  $f(x,y)$ ,  
ed esse è associata una ed una sola  $U(x,y,z)$  dato  
che  $k_z$  è determinato da  $k_x$  e  $k_y$ . segue l'importante

risultato:

dato che una funzione arbitraria  $f(x,y)$  può essere  
espressa come una sovrapposizione di funzioni armoniche,  
un'onda arbitraria  $U(x,y,z)$  può essere espressa come  
una sovrapposizione di onde piane

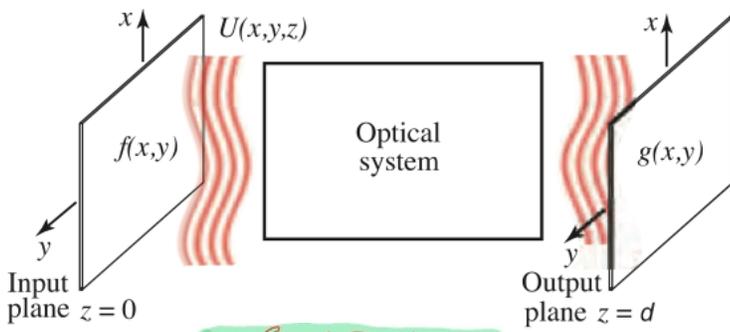
PRINCIPIO DELL'OTTICA DI FOURIER



**Figure 4.0-3** The principle of Fourier optics:  
An arbitrary wave in free space can be analyzed  
in terms of a superposition of plane waves.

Da SAURENBICH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

- In aggiunta al principio sopra esposto è utile considerare la propagazione della luce attraverso componenti ottici lineari utilizzando la teoria dei sistemi lineari.
- Questo metodo permette di studiare l'effetto di un dato componente ottico, incluso lo specchio sferico, su una funzione armonica e di ricostituire poi per sovrapposizione il suo effetto su un'onda arbitraria.
- Per applicare al nostro caso la teoria dei sistemi lineari si considerano le ampiezze complesse dell'onda in corrispondenza a due piani ortogonali all'asse ottico (che diamo  $z$ ) come l'ingresso e l'uscita di un certo sistema lineare



Da SALETTBUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

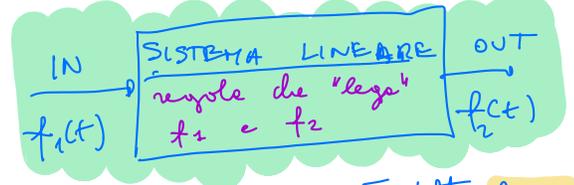
**Figure 4.0-4** The transmission of an optical wave  $U(x, y, z)$  through an optical system located between an input plane  $z = 0$  and an output plane  $z = d$ . This configuration is regarded as a linear system whose input and output are the functions of  $f(x, y) = U(x, y, 0)$  and  $g(x, y) = U(x, y, d)$ , respectively.

Un sistema lineare è caratterizzato dalle sue

→ funzione di risposta ad un impulso in ingresso (anche detto "funzione di Green")

oppure dalle sue

→ funzione di trasferimento, cioè la risposta del sistema ad un insieme di funzioni armoniche speciali



Il sistema è detto lineare

$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) f_1(\tau) d\tau$$

cioè a l'uscita  $f_2(t)$  al tempo  $t$  è una somma pesata dei contributi in ingresso a diversi tempi  $\tau$ , con  $h(t, \tau)$  la funzione peso che dà il contributo dell'input  $f_1$  al tempo  $\tau$  all'output al tempo  $t$ .

• Se l'ingresso è un impulso al tempo  $\tau$   $f_1(t) = \delta(t - \tau)$

allora  $f_2(t) = h(t, \tau) \Rightarrow h(t, \tau)$  è la funzione di risposta ad un impulso

• Un sistema lineare è **invariante temporale** (shift-invariant) se quando l'ingresso è spostato nel tempo, anche l'uscita è spostata nel tempo della medesima quantità, rimanendo però invariato. Per un sistema shift-invariante  $h$  è funzione della differenza  $t - \tau$ , cioè  $h(t, \tau) = h(t - \tau)$

Segue che

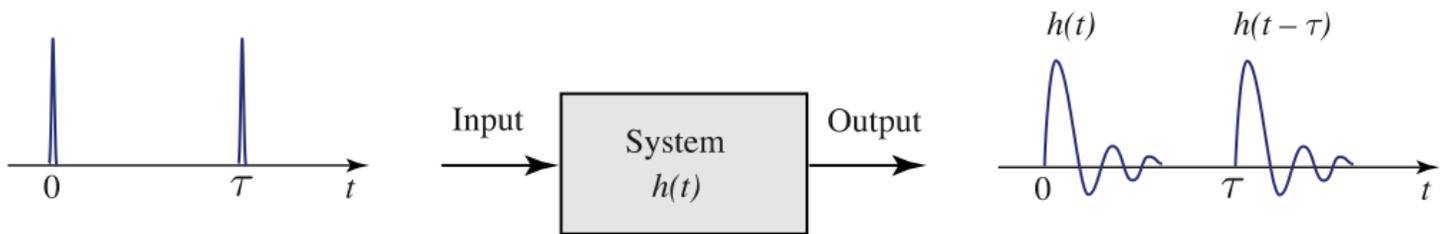
$$f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) f_1(\tau) d\tau$$

SISTEMA  
SHIFT-INVARIANT

Si dice allora che l'uscita  $f_2(t)$  è la **convoluzione** dell'ingresso  $f_1(t)$  con la funzione di risposta  $h(t)$ .

Infatti, se  $f_1(t) = \delta(t)$ , si ha  $f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = h(t)$

e se  $f_1(t) = \delta(t-\tau)$  si ha  $f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau) \delta(t-\tau) d\tau = h(t-\tau)$



**Figure B.1-1** Response of a linear shift-invariant system to impulses.

Da SAUNDERS  
"FUNDAMENTALS OF PHONICS"  
WILEY, 2023

### Teorema della convoluzione

$$F_1(\gamma) = \text{F.T.} \{f_1(t)\}$$

Se  $F_2(\gamma) = \text{F.T.} \{f_2(t)\} \Rightarrow \text{F.T.} \{f(t)\} = F(\gamma) = F_1(\gamma) F_2(\gamma)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$$

Applichiamo il teorema al nostro sistema

lineare IN  $\rightarrow f_1(t)$   $F_1(\gamma) = \text{F.T.} \{f_1(t)\}$

OUT  $\rightarrow f_2(t)$   $F_2(\gamma) = \text{F.T.} \{f_2(t)\}$

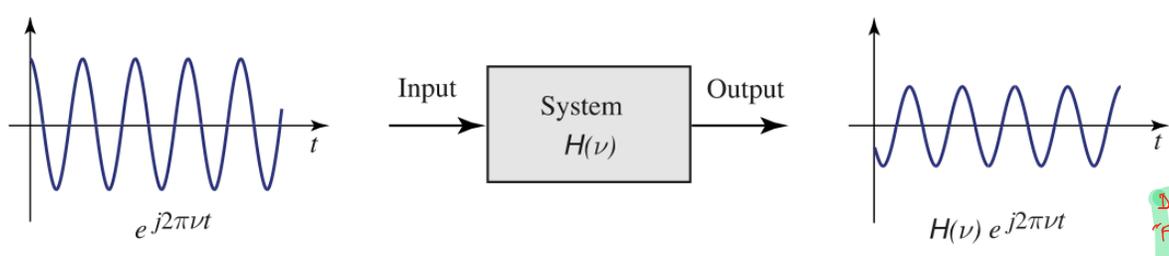
risposta all'impulso  $h(t)$   $H(\gamma) = \text{F.T.} \{h(t)\}$

segue  $F_2(\gamma) = H(\gamma) F_1(\gamma)$  (v.  $\otimes$ )

Se one  $f_1(t) = F_2(\gamma) e^{i2\pi\gamma t}$  è una funzione sinusoidale

$\text{r.i. l.e. F.T. } \{f_1(t)\} = F_1(\nu) \Rightarrow F_2(\nu) = H(\nu) F_1(\nu)$   
 e l'inversa  $\bar{e} f_2(t) = \text{F.T.}^{-1} \{F_2(\nu)\} = H(\nu) F_1(\nu) e^{j2\pi\nu t}$

$\Rightarrow H(\nu) = \text{F.T.} \{h(t)\}$   $\bar{e}$  detta funzione di trasferimento e rappresenta l'effetto del sistema su un'onda armonica



Da SAUERBRIGHT 'FUNDAMENTALS OF PHOTOMICS' WILEY, 2023

Figure B.1-2 Response of a linear shift-invariant system to a harmonic function.

PROPAGAZIONE NELLO SPAZIO VUOTO

$e \in \mathbb{C}$   
 $U(x, y, z) = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} = A e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} \quad k = |\vec{k}|$   
 $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

onda monocromatica complessa

Supponiamo che  $\vec{k}$  faccia angoli  $\theta_x = \arcsin \frac{k_x}{k}$  e  $\theta_y = \arcsin \frac{k_y}{k}$  con i piani  $y-z$  e  $x-z$ . Se ci mettiamo nel piano  $z=0$ ,

$U(x, y, 0) = A e^{-i(2\pi(k_x x + k_y y))} = f(x, y) \rightarrow$  funzione armonica spaziale con freq. spaziali  $\nu_x = k_x / 2\pi$   
 $\nu_y = k_y / 2\pi$

segue che

$\theta_x = \arcsin \frac{k_x}{k} = \arcsin \frac{2\pi\nu_x}{2\pi/\lambda} = \arcsin \lambda \nu_x = \arcsin \frac{\lambda}{\Lambda_x}$   
 $\theta_y = \arcsin \lambda \nu_y = \arcsin \frac{\lambda}{\Lambda_y}$

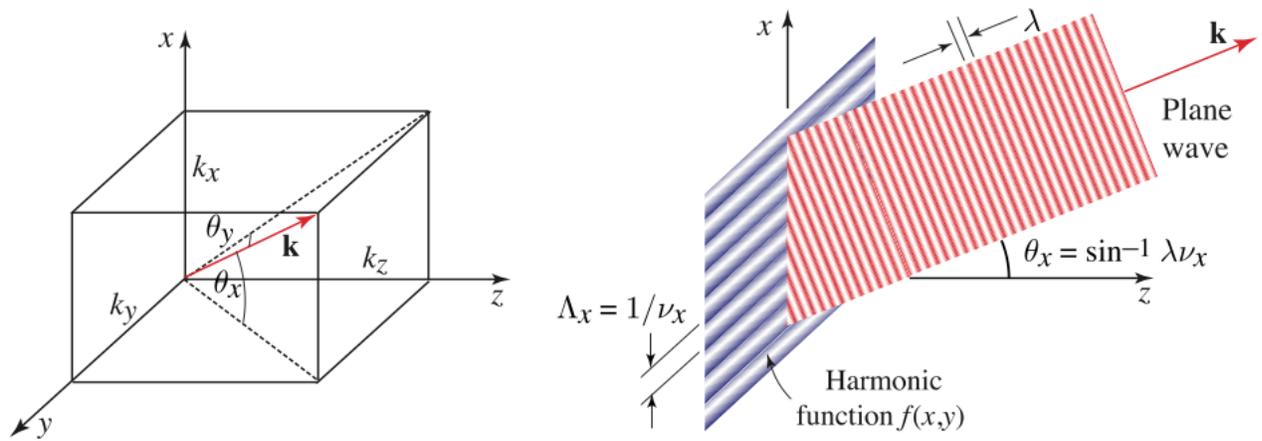
dove  $\Lambda_x$  e  $\Lambda_y$  sono i periodi spaziali nelle direzioni  $x$  e  $y$  rispettivamente.

• Nell'approssimazione parassiale ( $z$  è l'asse di propagazione)

$k_x \ll k$  e  $k_y \ll k \Rightarrow$

$\sin \theta_x \approx \theta_x \approx \lambda \nu_x$   
 $\sin \theta_y \approx \theta_y \approx \lambda \nu_y$





**Figure 4.1-1** A harmonic function of spatial frequencies  $\nu_x$  and  $\nu_y$  at the plane  $z = 0$  is consistent with a plane wave traveling at angles  $\theta_x = \sin^{-1} \lambda \nu_x$  and  $\theta_y = \sin^{-1} \lambda \nu_y$ .

Da SAUER-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

= Le relazioni  $\theta_x \approx \lambda \nu_x$  e  $\theta_y \approx \lambda \nu_y$  vogliono dire che gli angoli di inclinazione del vettore di propagazione  $\vec{k}$  non direttamente proporzionali alle frequenze spaziali dell'onda armonica corrispondente.

$U(x,y,z)$  ONDA PIANA  $\longleftrightarrow$  CORRISP. UNO-UNO  $f(x,y)$  FUNZIONE ARMONICA

Da una delle due si può trovare l'altra, ammesso di conoscere la lunghezza d'onda  $\lambda$

$f(x,y) = U(x,y,0)$  ( $U$  campionato nel piano  $z=0$ )

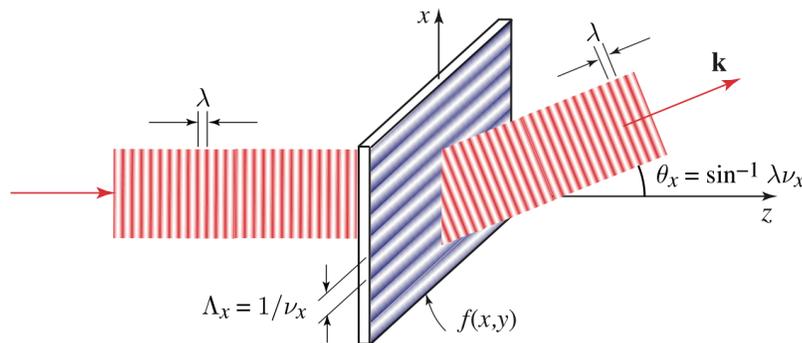
$U(x,y,z) = f(x,y) e^{-i k_z z}$

Loe  $k_z = \pm \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$   $j \cdot k = \frac{2\pi}{\lambda}$   
 corrisponde alle onde progressive e regressive

inoltre  $k_x^2 + k_y^2 < k^2$   
 deve essere vero che  $k_z \in \mathbb{R}$   
 $\Rightarrow$  segue che  $\lambda \nu_x < 1$   
 $\lambda \nu_y < 1$   
 in modo che  $\theta_x$  e  $\theta_y$  esistano

# ANALISI SPETTRALE SPAZIALE

- Prendiamo un'onda piana di ampiezza unitaria che si propaga lungo l'asse  $z$  e facciamo passare attraverso un elemento ottico rettile con trasmittanza complessa  $f(x,y) = e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)}$  posto a  $z=0$ .
- Si ha quindi  $U(x,y,0) = f(x,y)$ , cioè l'onda incidente è modulata dalla funzione armonica.
- L'onda che esce dall'elemento ottico è un'onda piana inclinata degli angoli  $\theta_x = \arcsin \lambda \nu_x$  e  $\theta_y = \arcsin \lambda \nu_y$  rispetto all'asse  $z$ .



Da SAIEH + BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
MAY 7, 2023

**Figure 4.1-2** A thin element whose complex amplitude transmittance is a harmonic function of spatial frequency  $\nu_x$  (period  $\Lambda_x = 1/\nu_x$ ) bends a plane wave of wavelength  $\lambda$  by an angle  $\theta_x = \sin^{-1} \lambda \nu_x = \sin^{-1}(\lambda/\Lambda_x)$ . The dark blue and white stripes are used to indicate that the element is a phase grating (changing only the phase of the wave).

- Notare che l'elemento ottico si comporta analogamente ad un "prisma", con una deflessione proporzionale alla frequenza spaziale, mentre un prisma propriamente detto deflette proporzionalmente alla frequenza temporale.
- Questa proprietà di deflessione può essere interpretata come un fenomeno di interferenza. Due punti sull'elemento ottico separati di un periodo spaziale  $\Lambda = \frac{1}{\nu_x}$  hanno una differenza relativa di cammino ottico  $\Lambda \sin \theta_x = \frac{1}{\nu_x} \lambda \nu_x = \lambda$ , quindi tutti i raggi separati di  $\Lambda$  interferiscono costruttivamente nella direzione data da  $\theta_x$ .

In generale, una trasmittanza complessa arbitraria  $\bar{t}$  rappresentabile secondo Fourier con una sovrapposizione di funzioni armoniche

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

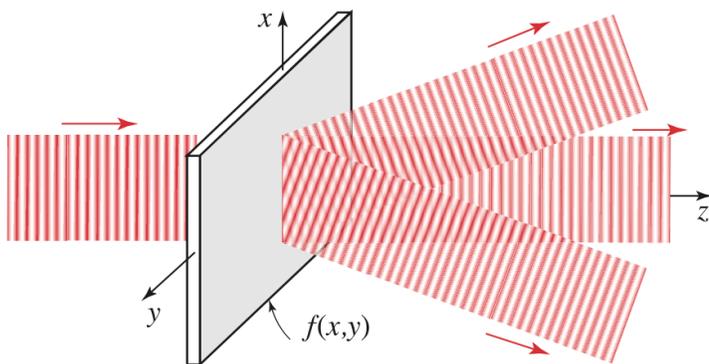
e l'onda trasmessa  $\bar{t}$  una sovrapposizione di onde piane

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} e^{-ik_z z} d\nu_x d\nu_y$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2}$$

Nota  $F(\nu_x, \nu_y) = \text{F.T.} \{f(x, y)\}$

- Si conclude quindi che la luce trasmessa da un elemento ottico di trasmittanza arbitraria può essere espresa come la sovrapposizione di onde piane di diverse frequenze spaziali (diversi vettori  $\vec{k}$ ), purché almeno  $\nu_x^2 + \nu_y^2 < \frac{1}{\lambda^2}$



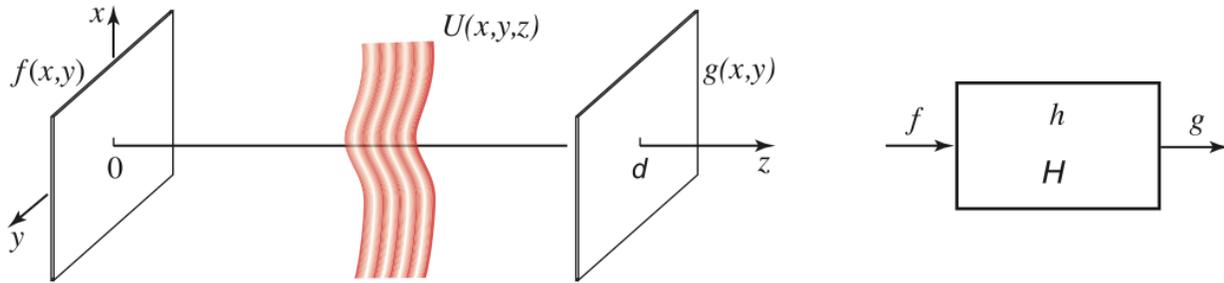
**Figure 4.1-3** A thin optical element of amplitude transmittance  $f(x, y)$  decomposes an incident plane wave into many plane waves. The plane wave traveling at the angles  $\theta_x = \sin^{-1} \lambda \nu_x$  and  $\theta_y = \sin^{-1} \lambda \nu_y$  has a complex envelope  $F(\nu_x, \nu_y)$ , the Fourier transform of  $f(x, y)$ .

Da SAUER-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
VALEY, 2023

# FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLO SPAZIO VUOTO

- Consideriamo la propagazione di un'onda monomodale, di lunghezza d'onda  $\lambda$ , descritta dall'ampiezza complessa  $U(x,y,z)$ , nello spazio tra i piani  $z=0$  e  $z=d$

da SALET-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2022



**Figure 4.1-10** Propagation of light between two planes is regarded as a linear system whose input and output are the complex amplitudes of the wave in the two planes.

- Dato  $f(x,y) = U(x,y,0)$  in ingresso si vuole determinare la corrispondente uscita  $g(x,y) = U(x,y,d)$ .
- $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  sono l'ingresso e l'uscita, rispettivamente, di un sistema lineare.
- lo spazio vuoto è un sistema lineare e invariante per traslazione (l'eq. di Helmholtz che  $U(x,y,z)$  soddisfa è lineare e lo spazio è invariante per traslazione delle coordinate)
- Cerchiamo allora la "risposta impulsiva"  $h(x,y)$  oppure la funzione di trasferimento  $H(\gamma_x, \gamma_y)$  dello spazio vuoto.
- Si ha per una funzione armonica in ingresso  $f(x,y) = A e^{-i2\pi(\gamma_x x + \gamma_y y)}$ 

$f(x,y)$  corrisponde all'onda  
 piana  $U(x,y,z) = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$   
 con  $k_x = 2\pi\gamma_x$ ,  $k_y = 2\pi\gamma_y$   
 $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \gamma_x^2 - \gamma_y^2}$

 che l'uscita dopo una

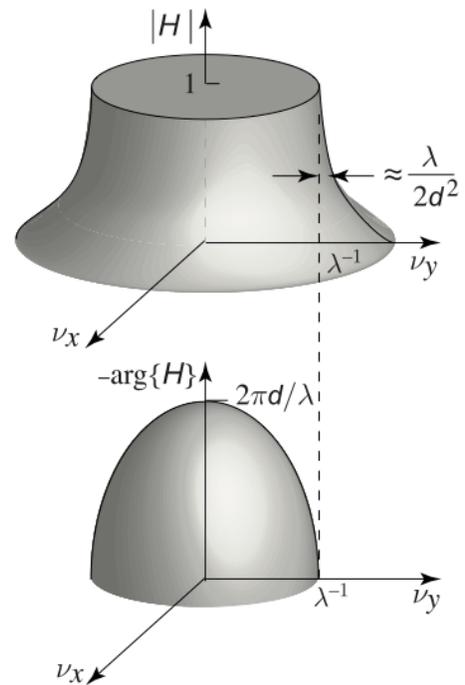
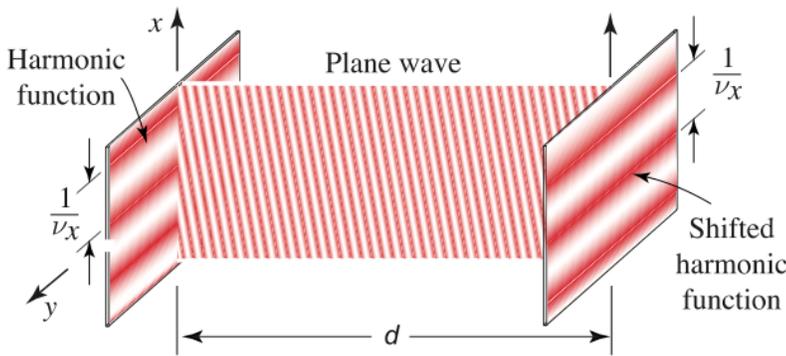
distanza  $d$  percorsa nello spazio vuoto  $\bar{e}$

$$g(x,y) = A e^{-i(k_x x + k_y y + k_z d)} = f(x,y) e^{-i k_z d}$$

Segue che la funzione di trasferimento dello spazio vuoto  $\bar{e}$

$$H(\nu_x, \nu_y) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = e^{-i k_z d} = e^{-i 2\pi d \sqrt{\frac{1}{\lambda^2} - \nu_x^2 - \nu_y^2}}$$

Da SALETZ & BUCH  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
WILEY, 2022



**Figure 4.1-11** Magnitude and phase of the transfer function  $H(\nu_x, \nu_y)$  for free-space propagation between two planes separated by a distance  $d$ .

Si vede che se

$$\nu_x^2 + \nu_y^2 \leq \lambda^{-2} \quad \text{allora} \quad |H(\nu_x, \nu_y)| = 1 \quad \text{e} \quad \arg\{H(\nu_x, \nu_y)\} = \text{funzione di } \nu_x \text{ e } \nu_y$$

cioè una funzione omogenea in questo caso si propaga con modulo inalterato e subisce uno sfasamento funzione delle frequenze spaziali.

Se invece

$$-2\pi d \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2 - \lambda^{-2}} \quad \text{e l'onda}$$

$$\nu_x^2 + \nu_y^2 > \lambda^{-2} \quad \text{allora } H(\nu_x, \nu_y) = e$$

risultato attenuato  $\Rightarrow$  onde evanescenti

- Supponiamo ora che per una certa coppia di frequenze possibili  $\nu_x$  e  $\nu_y$  si abbia

$$(\nu_x^2 + \nu_y^2)^{1/2} = \nu_c \approx \lambda^{-1} \quad \text{allora}$$

$$e^{-2\pi d \sqrt{(\nu_c^2 - \lambda^{-2})}} = e^{-2\pi d \sqrt{(\nu_c - \frac{1}{\lambda})(\nu_c + \frac{1}{\lambda})}} \approx e^{-2\pi d \sqrt{(\nu_c - \frac{1}{\lambda}) \frac{2}{\lambda}}}$$

$$\text{Se } \left(\nu_c - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2d^2} \quad \text{ovvero} \quad \frac{\nu_c - \lambda^{-1}}{\lambda^{-1}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{d}\right)^2 \Rightarrow e^{-2\pi} \quad \left( \begin{array}{l} \text{fattore} \\ \text{di} \\ \text{attenuazione} \end{array} \right)$$

Se  $\lambda \ll d$ , allora il fattore di attenuazione scende rapidamente non appena la frequenza possibile supera di poco  $\frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\lambda}$  è la frequenza possibile di cutoff

$\Rightarrow$  Dettagli di dimensioni  $< \lambda$  non possono essere trasmessi da un'onda di lunghezza d'onda  $\lambda$  in distanza molto maggiori di  $\lambda$ .

## APPROSSIMAZIONE DI FRESNEL

- Supponiamo che la  $f(x, y)$  contenga solo frequenze possibili tali che  $\nu_x^2 + \nu_y^2 \ll \lambda^{-2}$  (minori del cutoff), allora le onde piane che compongono l'onda luminosa in questione fanno piccoli angoli con l'asse  $z$ :

$$\theta_x \approx \lambda \nu_x \quad \text{e} \quad \theta_y \approx \lambda \nu_y \ll 1 \Rightarrow \text{angoli piccoli}$$

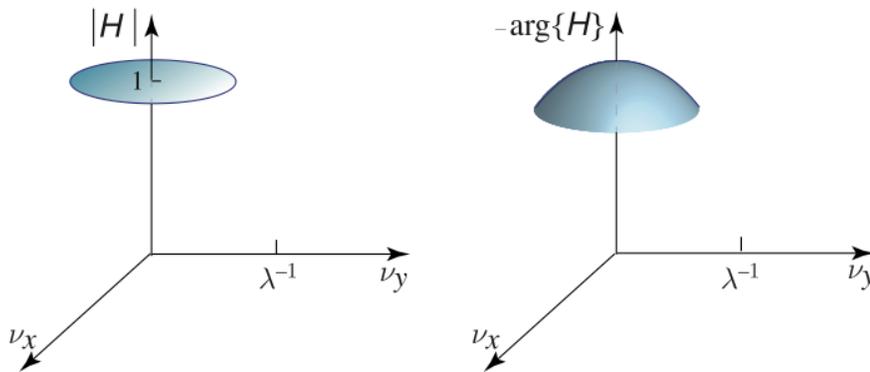
Se  $\Theta^2 = \Theta_x^2 + \Theta_y^2 \approx \lambda^2 (v_x^2 + v_y^2)$  è l'angolo con l'asse ottico dell'onda piana corrispondente  
 può scrivere il fattore di fase della funzione di trasferimento dello spazio vuoto come

$$2\pi d \sqrt{\lambda^{-2} - v_x^2 - v_y^2} = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sqrt{1 - \Theta^2} \approx 2\pi \frac{d}{\lambda} \left(1 - \frac{\Theta^2}{2} + \frac{\Theta^4}{8} + \dots\right)$$

e trascurando i termini  $O(\Theta^4)$  e superiori ho

$$H(v_x, v_y) = e^{-ikd} e^{i\pi \lambda d (v_x^2 + v_y^2)} = H_0 e^{i\pi \lambda d (v_x^2 + v_y^2)}$$

FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DELLO SPAZIO VUOTO  
 NELL'APPROSSIMAZIONE DI FRESNEL



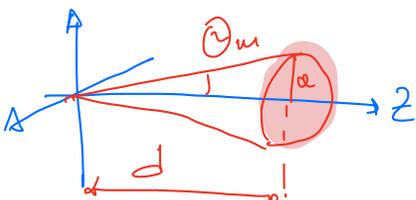
**Figure 4.1-12** The transfer function of free-space propagation for low spatial frequencies (much less than  $1/\lambda$  cycles/mm) has a constant magnitude and a quadratic phase.

Da SAUER-BUCH  
 FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
 WILEY, 2023

Le condizioni di validità dell'approssimazione di Fresnel

$$\frac{\Theta_m^2 d}{4\lambda} \ll 1$$

(terzo termine dell'espressione trascurabile)  
 che si traduce in



$$\Theta_m \approx \frac{a}{d}$$

$$N_F = \frac{\Theta_m^2 d}{4\lambda} \ll 1$$

$N_F = \frac{a^2}{\lambda d}$   
 NUMERO DI FRESNEL

## Relazione tra ingresso e uscita (ripetizione)

1)  $f(x,y) \rightarrow F(\nu_x, \nu_y)$  (inviluppi complessi delle onde piane che compongono la  $f(x,y)$ )

$$F(\nu_x, \nu_y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

2)  $H(\nu_x, \nu_y) F(\nu_x, \nu_y) \rightarrow$  inviluppi complessi delle onde piane che compongono l'ampiezza complessa  $g(x,y)$  all'uscita

3)  $H \cdot F \rightarrow g(x,y)$

$$g(x,y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} H(\nu_x, \nu_y) F(\nu_x, \nu_y) e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

Nell'approssimazione di Fresnel

$$g(x,y) = H_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{i\pi \lambda d (\nu_x^2 + \nu_y^2)} e^{-i2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

## RISPOSTA IMPULSIVA DELLO SPAZIO VUOTO

- la risposta impulsiva dello spazio vuoto è la  $g(x,y)$  quando la  $f(x,y)$  è un punto nell'origine  $(0,0)$
- È data da  $F.T.^{-1} \{ H(\nu_x, \nu_y) \}$ , quindi

$$h(x, y) = \text{F.T.}^{-1} \left\{ H_0 e^{i\pi \lambda d (x^2 + y^2)} \right\} \approx h_0 e^{-i\pi \frac{x^2 + y^2}{2d}}$$

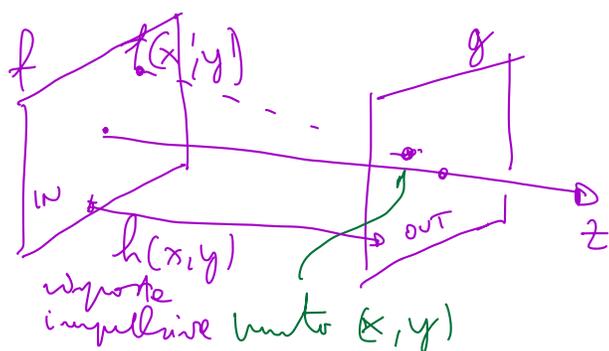
(spazio vuoto)

con  $h_0 = \frac{i}{\lambda d} e^{-ikd}$  (\*)

nell'approssimazione di Fresnel -

Interpretazione: ogni punto del piano all'ingresso genera un'onda parabolica, tutte queste onde paraboliche devono essere rimpicciolate nel piano all'uscita -

La propagazione attraverso lo spazio vuoto si può rappresentare anche dando una relazione tra  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  usando una **convoluzione**, cioè operando nel dominio dello spazio invece che in quello delle frequenze spaziali -



$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') h(x - x', y - y') dx' dy'$$

$f(x', y')$  genera qui  
un'onda  $f(x', y') h(x - x', y - y')$

Nell'approssimazione di Fresnel abbiamo per lo spazio vuoto:

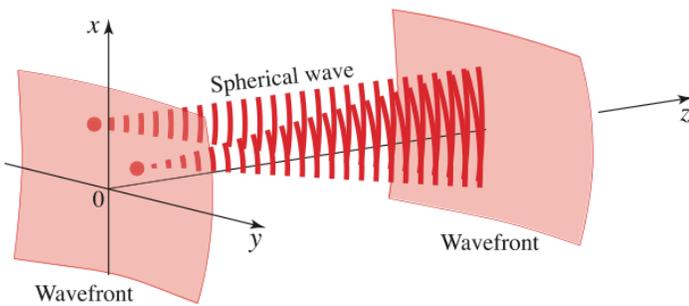
$$g(x, y) = h_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x', y') e^{-\frac{i\pi}{\lambda d} [(x - x')^2 + (y - y')^2]} dx' dy'$$

# PRINCIPIO DI HUYGENS-FRESNEL

- Ogni punto di un fronte d'onda genera un'onda sferica, l'involuppo di queste onde secondarie costituisce un nuovo fronte d'onda e la loro sovrapposizione genera l'onda in un altro piano.
- Segue che la risposta impulsiva (la risposta ad un punto di coordinate  $(x, y)$  nel piano di ingresso) per la propagazione tra i piani  $z=0$  e  $z=d$  è

$$h(x, y) \propto \frac{1}{r} e^{-ikr} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}$$

$$h(x, y) \propto \frac{1}{r} \exp(-jkr), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + d^2}. \quad (4.1-21)$$



**Figure 4.1-13** The Huygens-Fresnel principle. Each point on a wavefront generates a spherical wave.

Da SAURENBACH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

- Nell'approssimazione parassiale consistentemente con (\*)

$$h(x, y) \approx h_0 e^{-ik \left( \frac{x^2 + y^2}{2d} \right)}$$

## TRASFORMATA DI FOURIER OTTICA

Propagazione nello spazio vuoto

$$z=0$$

$$f(x, y)$$

Antenna comp. omogenee di differenti freq. spaziali  $x, y, z$

Sovrapp. di onde piane, coseno di ampiezza  $F(x, y) = \text{F.T.} \{ f(x, y) \}$  e propaganti ad angoli  $\theta_x = \arcsin \lambda x$   $\theta_y = \arcsin \lambda y$

Si può usare la luce per "colaborare" la F.T.  $\{ f(x, y) \}$  realizzando una trasparenza con trasmissività  $f(x, y)$  e illuminandola con un'onda piana di ampiezza unitaria  $\Rightarrow$  le componenti di Fourier di  $f(x, y)$  si propagano in direzioni differenti

Sebbene le componenti di Fourier di  $f(x,y)$  abbiano estensione infinite, tuttavia si può mostrare che ponendo il piano di uscita ad una **distanza sufficientemente grande**, solo una singola onda piana contribuisce all'ampiezza totale in un dato punto, **cioè le componenti di Fourier si ripercuotono nello spazio "naturalmente"** -

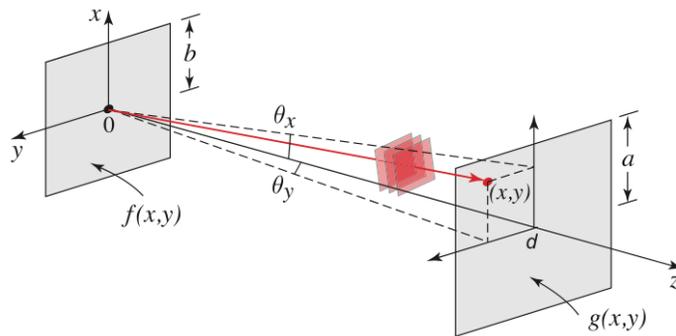
## F.T. A GRANDE DISTANZA (FAR FIELD)

- Se le coordinate di un punto nel piano di uscita sono  $(x,y)$  e  $d$  è sufficientemente grande si ha

$$\theta_x \approx \frac{x}{d} \approx \frac{k_x}{K} \quad \text{e} \quad \theta_y \approx \frac{y}{d} \approx \frac{k_y}{K}, \quad \text{cioè nel punto}$$

$(x,y)$  arriva l'onda che era partita dall'origine con

$$k_x \approx \frac{x}{d} K, \quad k_y \approx \frac{y}{d} K \quad \text{e} \quad \text{ampiezza } F(\nu_x, \nu_y) \quad \text{dove } \nu_x = \frac{x}{\lambda d} \quad \text{e} \quad \nu_y = \frac{y}{\lambda d}$$



DA SAHIL MITAL  
FUNDAMENTALS OF PHOTONICS  
WILEY, 2023

**Figure 4.2-1** When the distance  $d$  is sufficiently long, the complex amplitude at point  $(x,y)$  in the  $z = d$  plane is proportional to the complex amplitude of the plane-wave component with angles  $\theta_x \approx x/d \approx \lambda \nu_x$  and  $\theta_y \approx y/d \approx \lambda \nu_y$ , i.e., to the Fourier transform  $F(\nu_x, \nu_y)$  of  $f(x,y)$ , with  $\nu_x = x/\lambda d$  and  $\nu_y = y/\lambda d$ .

Si ha quindi

$$g(x,y) \approx h_0 F\left(\frac{x}{\lambda d}, \frac{y}{\lambda d}\right) \quad \text{dove } F(\nu_x, \nu_y) = \text{F.T.}\{f\}$$

$$h_0 = \frac{i}{\lambda d} e^{-ikd}$$

PROPAGAZIONE NELLO SPAZIO VUOTO COME F.T. NELL'APPROSSIMAZIONE DI FRAUNHOFER

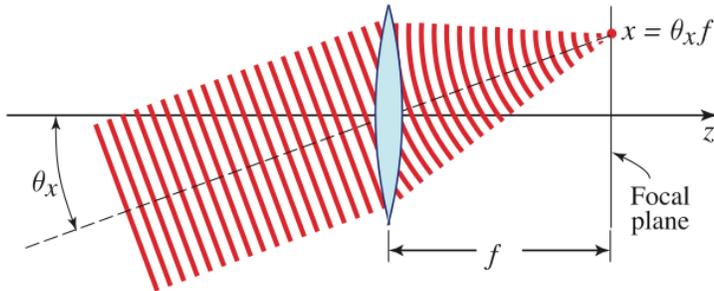
(\*) Le contributi delle altre onde in  $(x,y)$  si cancella per interferenza distruttiva.

- L'approssimazione di Fraunhofer è valida se

$$N_F = \frac{d^2}{\lambda d} \ll 1 \quad \text{e} \quad N_F' = \frac{b^2}{\lambda d} \ll 1 \quad \text{contemporaneamente}$$

# F.T. CON LENTE (APPR. PARASSIALE)

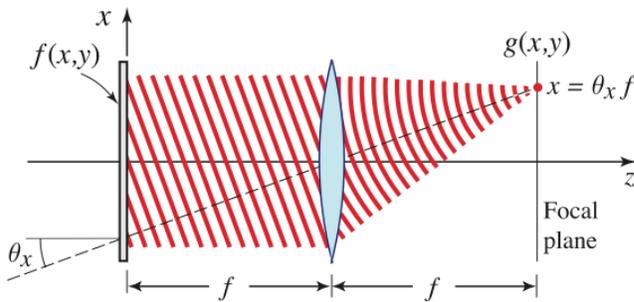
Una lente sferica sottile trasforma un'onda piana in un'onda parabolica focalizzata in un punto del piano focale.



**Figure 4.2-2** Focusing of a plane wave into a point. A direction  $(\theta_x, \theta_y)$  is mapped into a point  $(x, y) = (\theta_x f, \theta_y f)$ . (see Exercise 2.4-3.)

See SAUER-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

- Se l'onda arriva facendo piccoli angoli  $\theta_x$  e  $\theta_y$  con l'asse ottico, allora il centro dell'onda parabolica nel piano focale, distante  $f$  dalla lente, è nel punto  $(\theta_x f, \theta_y f)$ .
- Quindi ogni direzione  $(\theta_x, \theta_y)$  è mappata possibilmente nel piano focale.



**Figure 4.2-4** The 2-f system. The Fourier component of  $f(x, y)$  with spatial frequencies  $\nu_x$  and  $\nu_y$  generates a plane wave at angles  $\theta_x = \lambda \nu_x$  and  $\theta_y = \lambda \nu_y$  and is focused by the lens to the point  $(x, y) = (f \theta_x, f \theta_y) = (\lambda f \nu_x, \lambda f \nu_y)$  so that  $g(x, y)$  is proportional to the Fourier transform  $F(x/\lambda f, y/\lambda f)$ .

See SAUER-BUCH  
"FUNDAMENTALS OF PHOTONICS"  
WILEY, 2023

$$g(x, y) = \frac{i}{\lambda f} e^{-i2kz} F\left(\frac{x}{\lambda f}, \frac{y}{\lambda f}\right)$$

TRASF. DI FOURIER  
CON LENTE DI  
FOCALE  $f$ .  
(APPR. DI FRESNEL)

## Nota

- la trasformata di F. usata con lente si ottiene solo nell'approssimazione di Fraunhofer, che è più restrittiva di quella di Fresnel