ESERCIZIO 1

1) La capacità finale è $C_1 = C_0 \frac{d_0}{d_1} = 2C_0$

Il condensatore è isolato, quindi $Q_1 = Q_0$.

La differenza di potenziale vale

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_0}{2C_0} = V_0/2$$

2) $$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 = \frac{1}{2} 2C_0 \frac{V_0^2}{4} = \frac{1}{2} U_0 = \frac{Q_0^2}{4C_0}$$

$$\Rightarrow \frac{U_0}{U_1} = 2$$

3) $$U_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C_2} \quad \text{con } C_2 = C_0 \frac{d_0}{d_2} = \frac{C_0}{2}$$

$$= \frac{Q_0^2}{C_0}$$

Il lavoro da compiere dall'esterno è pari a

$$\mathcal{L}_{ext} = U_2 - U_1 = \frac{Q_0^2}{C_0} - \frac{Q_0^2}{4C_0} = \frac{3}{4} \frac{Q_0^2}{C_0} > 0$$

4) Per mantenere V devo variare la carica

$$Q_1 = V_0 C_1 = 2Q_0 \quad , \quad Q_2 = V_0 C_2 = Q_0/2$$

$$U_1 = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 = C_0 V_0^2 \qquad U_2 = \frac{1}{2} C_2 V_0^2 = \frac{1}{4} C_0 V_0^2$$

Per la conservazione dell'energia

$$\Delta U = \mathcal{L}_{ext} + \mathcal{L}_{batt}$$ ← lavoro della batteria

variazione di energia nel condensatore

lavoro delle forze esterne sul condensatore

$$\mathcal{L}_{ext} = U_2 - U_1 - \mathcal{L}_{batt}$$

Abbiamo $\mathcal{L}_{batt} = \int W \, dt = \int V_0 I \, dt = V_0 (Q_2 - Q_1)$

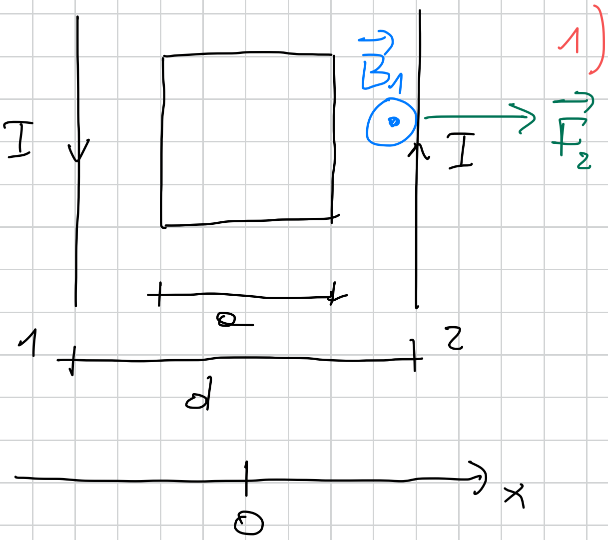
$$= C_2 V_0^2 - C_1 V_0^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{ext} = \frac{1}{2} C_2 V_0^2 - \frac{1}{2} C_1 V_0^2 - \left(C_2 V_0^2 - C_1 V_0^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} C_1 V_0^2 - \frac{1}{2} C_2 V_0^2$$

$$= + \frac{3}{4} C_0 V_0^2$$ come nel caso precedente

ESERCIZIO 2



1) Nella spira non circola corrente, quindi la forza dipende solo dai due fili.

Il filo 1 produce un campo

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

dove r è la distanza dal filo 1

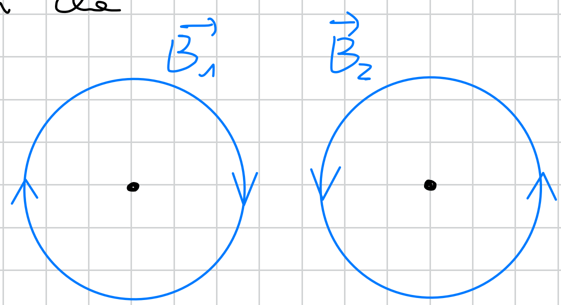
La forza sul filo 2 è

$$\boxed{\frac{|\vec{F}_2|}{l} = I\, B_1 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \approx 6.7 \times 10^{-5}\,\frac{N}{m} \quad \text{repulsiva (verso destra)}}$$

e $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

2) La simmetria del problema fa sì che

$$\vec{B}_1(x) = \vec{B}_2(-x)$$



Vale quindi $\Phi_{B_1} = \Phi_{B_2}$

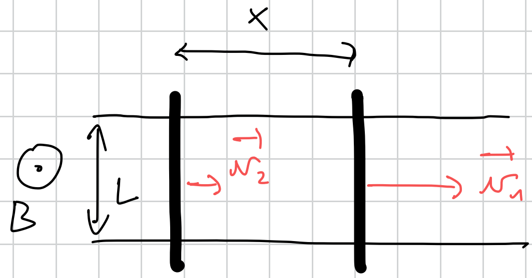
$$\boxed{\begin{aligned}\Phi_B &= 2\Phi_{B_1} = 2\int \vec{B}\, d\vec{S} = 2a \int_{(d-a)/2}^{(d+a)/2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\, dr \\ &= \frac{\mu_0 I\, a}{\pi} \log \frac{d+a}{d-a} \approx 1.6 \times 10^{-7}\ \text{Wb}\end{aligned}}$$

3) $\Phi_B = M I \Rightarrow M = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 a}{\pi} \log \frac{d+a}{d-a} \approx 3.2 \times 10^{-8}\ \text{H}$

ESERCIZIO 3

1) $$\phi_B = L x B$$

$$\frac{d\phi_B}{dt} = LB\frac{dx}{dt} = LB(v_1 - v_2)$$

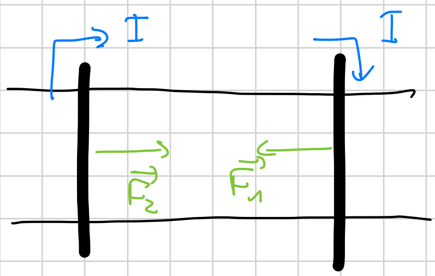


La fem vale $\mathcal{E} = -LB(v_1 - v_2)$

Il segno indica che, per $v_1 - v_2 > 0$, la corrente indotta circola in senso orario

$$I = \frac{LB(v_1 - v_2)}{2R} \Rightarrow R = \frac{LB(v_1 - v_2)}{2I} \approx 4.4\ \Omega$$

2)



$$|\vec{F}_1| = |ILB| \approx 0.10\ N$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

3) $$\ddot{x}_1 = \frac{F_1}{m} = -\frac{ILB}{m} = -\frac{L^2B^2}{2mR}(v_1 - v_2)$$

$$\ddot{x}_2 = +\frac{L^2B^2}{2mR}(v_1 - v_2)$$

$$\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 = -\frac{L^2B^2}{mR}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$$ chiamo $\Delta v \equiv \dot{x}_1 - \dot{x}_2$

$$\Delta\dot{v} = -\frac{L^2B^2}{mR}\Delta v \rightarrow \Delta v = \Delta v_0\, e^{-t/\tau}$$ con $\tau = \frac{mR}{L^2B^2}$

$$\Delta x = \Delta x_0 + \int_0^t \Delta v\, dt' = \Delta x_0 + \int_0^t \Delta v_0\, e^{-t'/\tau}\, dt'$$

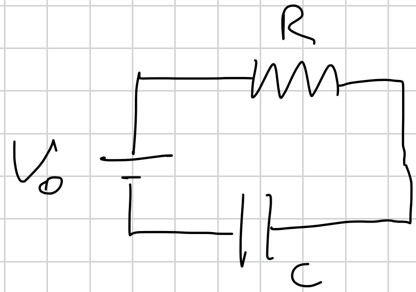
$$= \Delta x_0 + \Delta v_0 \tau \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Per $t \gg \tau$

$$\Delta x \approx \Delta x_0 + \Delta v_0 \tau$$

$$= \Delta x_0 + \Delta v_0 \frac{mR}{L^2B^2} \approx 1.9\ m$$

ESERCIZIO 4



1) In un circuito RC

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$V_c(t) = V_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$I(t) = I_0\, e^{-t/\tau}$$

con $I_0 = V_0 / R \qquad Q_0 = C V_0$

e $C = \varepsilon_0 \dfrac{S}{d} \approx 6.2\ \text{pF}$

$$\tau = RC \approx 6.2 \times 10^{-10}\ s$$

$$Q_0 = V_0 C \approx 3.1 \times 10^{-11}\ C$$

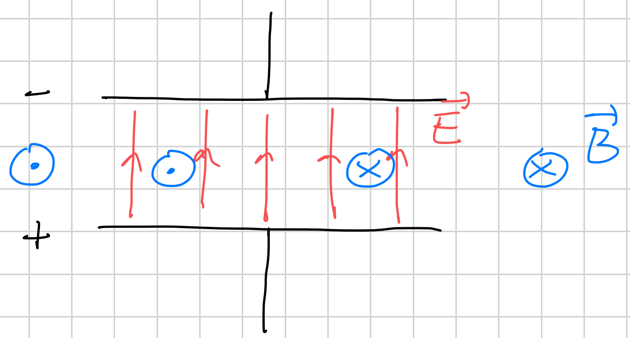
capacità — Coulomb

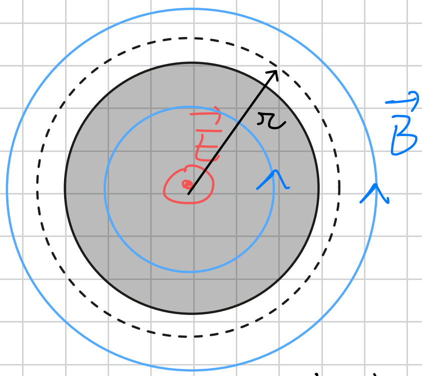
Il campo elettrico vale

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{dC} = \frac{V_0 \cancel{C}}{d \cancel{C}} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

A $t = \tau \qquad E(\tau) = \dfrac{V_0}{d}\left(1 - e^{-1}\right) \approx 3.2\ \dfrac{kV}{m}$

2)





Calcolo la circuitazione di $\vec{B}$ su una circonferenza centrata nell'asse

$\underline{r \leq a}$ $\qquad \phi_E = \pi r^2 E \qquad \dfrac{d\phi_E}{dt} = \pi r^2 \dfrac{dE}{dt}$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{dE}{dt} = \mu_0 \varepsilon_0 \pi r^2 \frac{V_0}{d} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0}{2 d \tau}\, r\, e^{-t/\tau} = \frac{\mu_0 V_0 r}{2\pi a^2 R}\, e^{-t/\tau}$$

$\tau = RC$

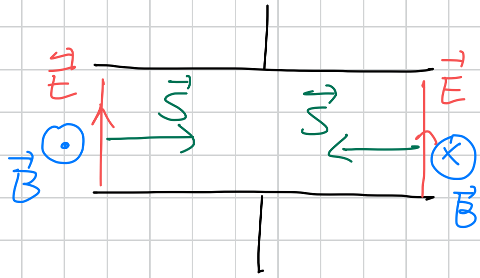
$r > a$ $\quad \phi_E = \pi a^2 E$

$$2\pi r B = \mu_0 \varepsilon_0 \pi a^2 \frac{dE}{dt}$$

$$B = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 V_0 a^2}{2 d \tau r} e^{-t/\tau} = \frac{\mu_0 V_0}{2\pi R r} e^{-t/\tau}$$

Per $r = a, t = 0$, $|\vec{B}| \approx 6.7 \times 10^{-7}\,\mathrm{T}$

3) $|\vec{S}| = \frac{1}{\mu_0} E B$ calcolato per $r = a$



$$= \frac{1}{\mu_0} \frac{V_0}{d} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \frac{\mu_0 V_0}{2\pi a R} e^{-t/\tau}$$

$$= \frac{V_0^2}{2\pi a d R} e^{-t/\tau} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

4) $\phi_S = -S \times (\text{sup laterale})$

$$= -S\, 2\pi a d$$

$$= -\frac{V_0^2}{R} e^{-t/\tau} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$U_E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2}{2d} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2$$

$$\frac{dU_E}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2}{2d} 2 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \underbrace{\left(\frac{1}{\tau}\right)}_{= \frac{1}{RC} = \frac{d}{R \varepsilon_0 \pi a^2}} e^{-t/\tau} = -\phi_S$$

Poiché $\frac{dU_E}{dt} = -\phi_S$ il teorema di Poynting è rispettato

NB: si noti che questa potenza è anche pari $V_C I$.