

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 3.0
casi particolari ed estensioni

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Alcune particolarità con sistemi ad 1gdl e 2gdl

Decremento logaritmico

Smorzamento coloumbiano
ed equivalente

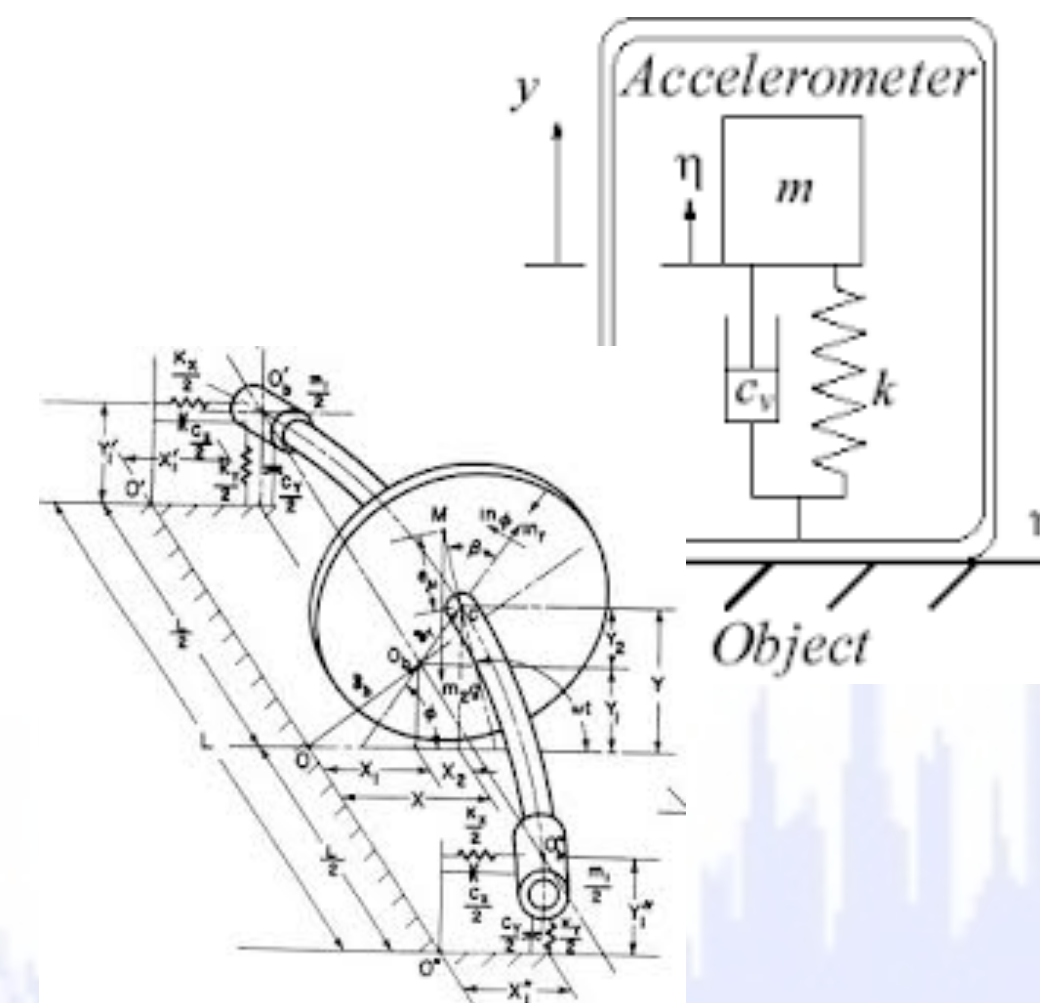
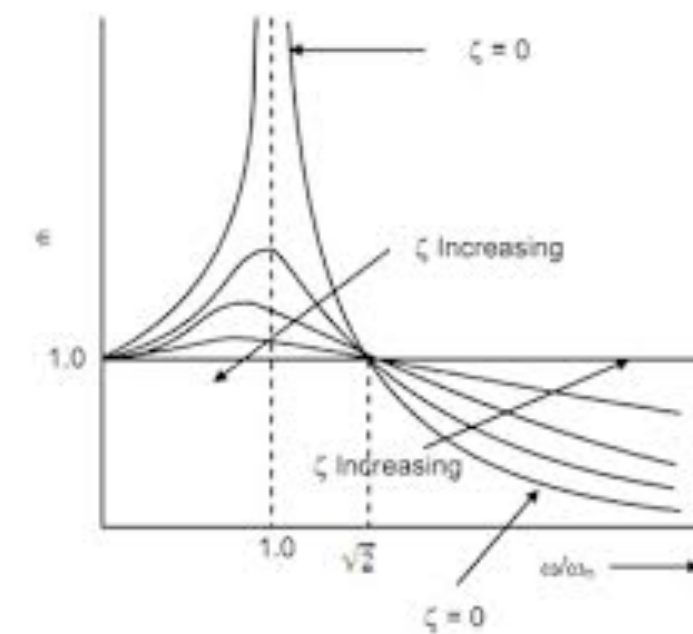
Eccitazione dalla base

Misuratori di vibrazioni

Eccitazione generica

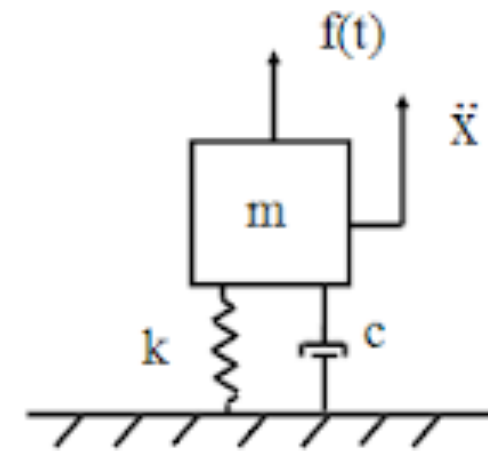
Rotore di Jeffcot / autocentratura

Tranquillizzatori dinamici 2gdl



Decremento logaritmico

Per valutare sperimentalmente lo smorzamento di un sistema è utile/facile utilizzare il decremento logaritmico. Misura di quanto si riduce l'ampiezza di vibrazione di un sistema in un certo numero di periodi.

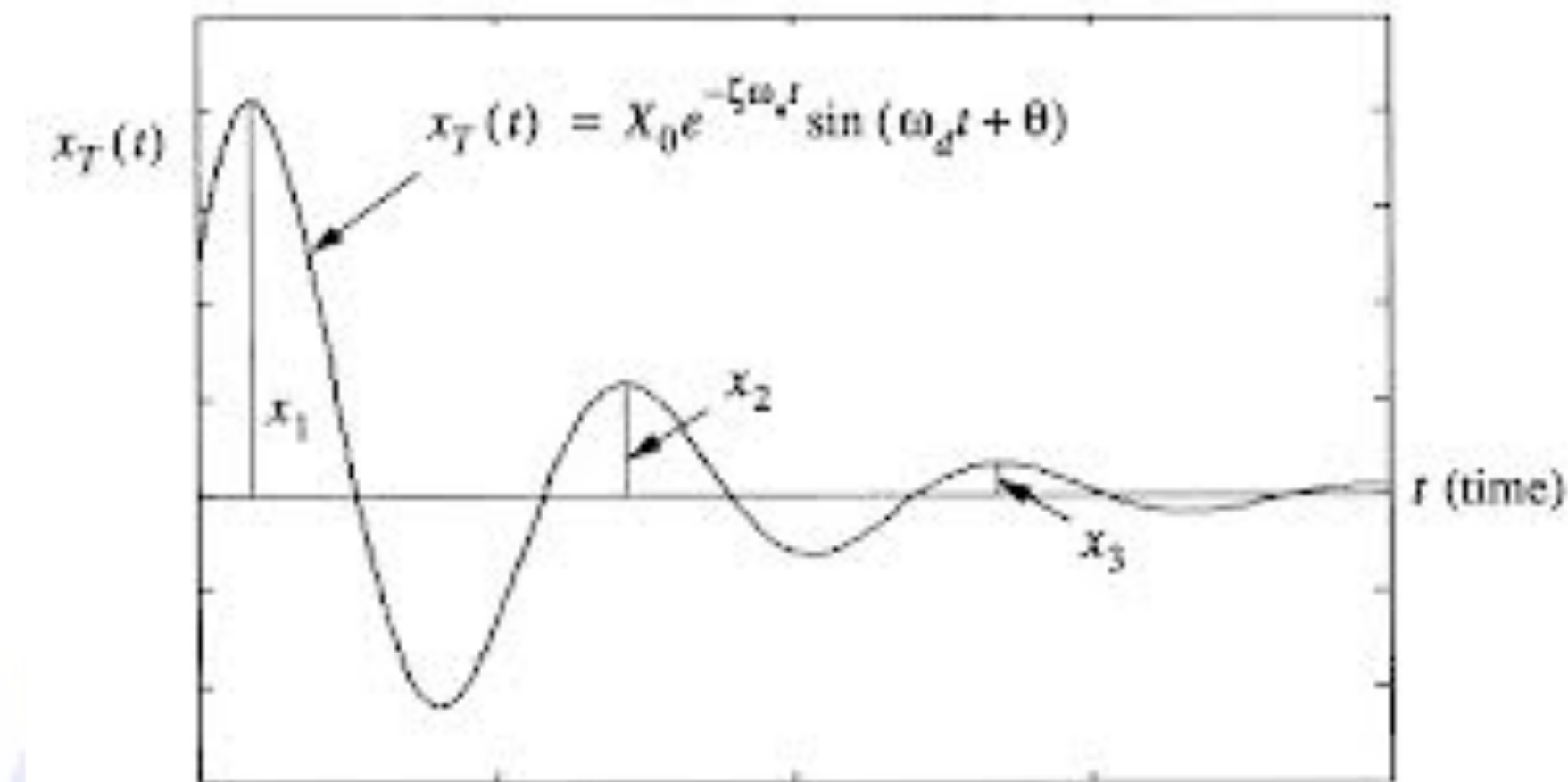


Si consideri un sistema 1gdl con massa, smorzamento, elasticità e forzante
Si conoscono l'equazione del moto e l'andamento nel tempo dello spostamento della massa m:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f$$

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

Dalla traccia temporale si misurano le ampiezze di spostamento in due istanti x_1 e x_2 separati tra loro da un periodo T_d



$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1} \cos(\omega_d t_1 + \theta)}{X_0 e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_d)} \cos(\omega_d (t_1 + T_d) + \theta)}$$

eliminando la parte
armonica

$$\frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \frac{X_0 e^{-\zeta \omega_n t_1}}{X_0 e^{-\zeta \omega_n (t_1 + T_d)}} = e^{\zeta \omega_n T_d}$$

Si definisce il decremento logaritmico come il logaritmo del rapporto così trovato:

$$\delta = \ln \frac{x_1(t)}{x_2(t)} = \zeta \omega_n T_d = \zeta \omega_n \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \text{traccia blu}$$

Ricordando: $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Se ζ è molto piccolo ($\ll 1$) si può utilizzare una formula semplificata:

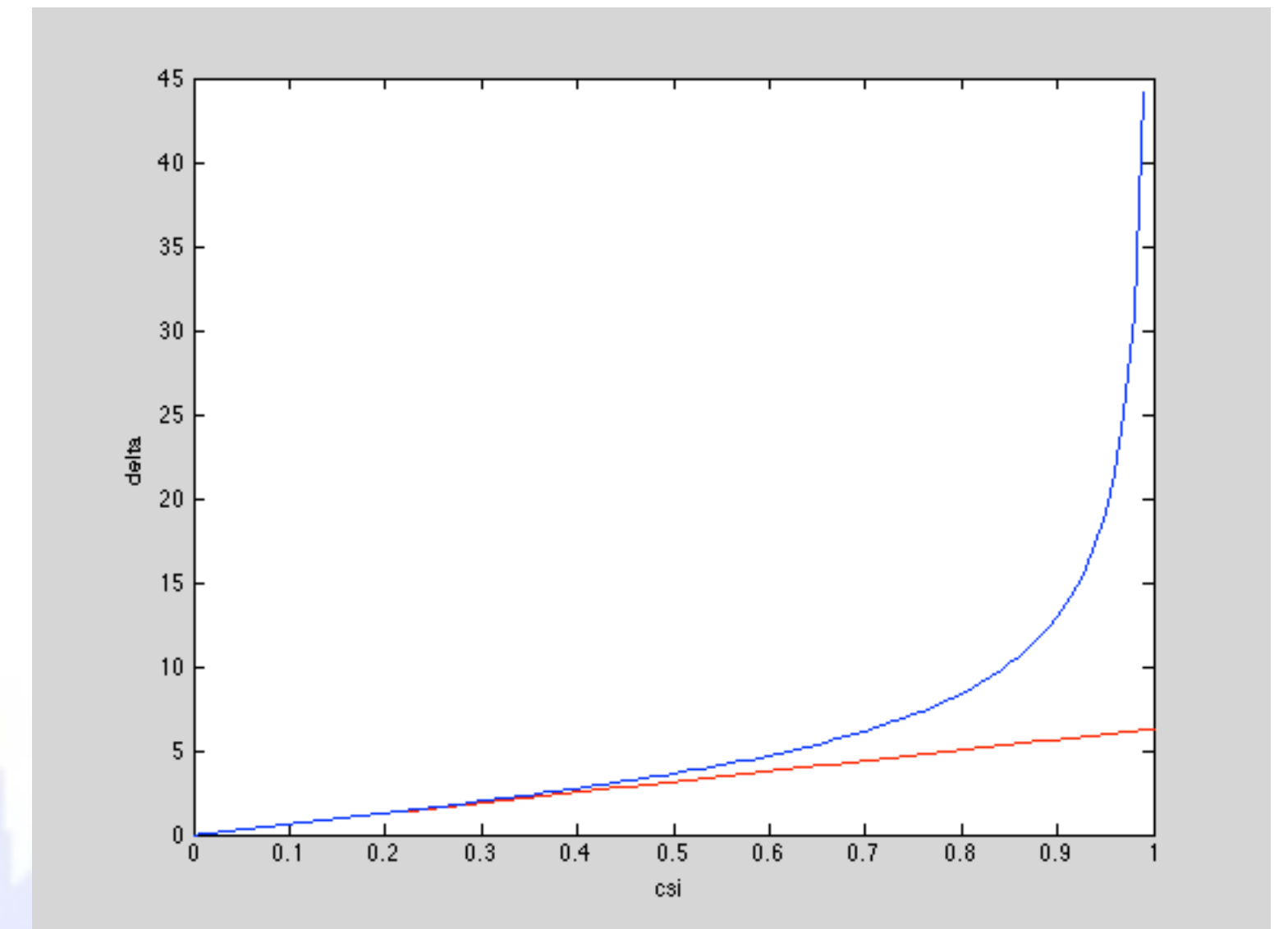
$$\delta \simeq 2\pi\zeta \quad \text{traccia rossa}$$

Se invece di **1** solo periodo tra gli spostamenti x_1 e x_2 ne prendo **m** la formula diventa:

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_1(t)}{x_{m+1}(t)}$$

cosa succede se ci sono più modi?
>..?

ζ resta costante ?
>..?



Il decremento logaritmico è l'unica maniera di stimare lo smorzamento dalla traccia temporale.

Dall'espressione che descrive l'andamento del tempo del decadimento, si estrae la parte che descrive l'involuppo:

$$x(t) = X_0 e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t + \theta)$$

$$Env = |X_0| e^{-\zeta \omega_n t}$$

Di questa si prenda il logaritmo naturale $\ln$

$$\ln(Env) = \ln(|X_0|) - \zeta \omega_n t$$

ottenendo l'equazione di una retta, ove si distinguono **intercetta** e **gradiente**

Rimaneggiando l'espressione del gradiente $|Grad| = \zeta \omega_n$ con le usuali sostituzioni:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$|Grad| = \frac{2\pi\zeta}{T_d \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

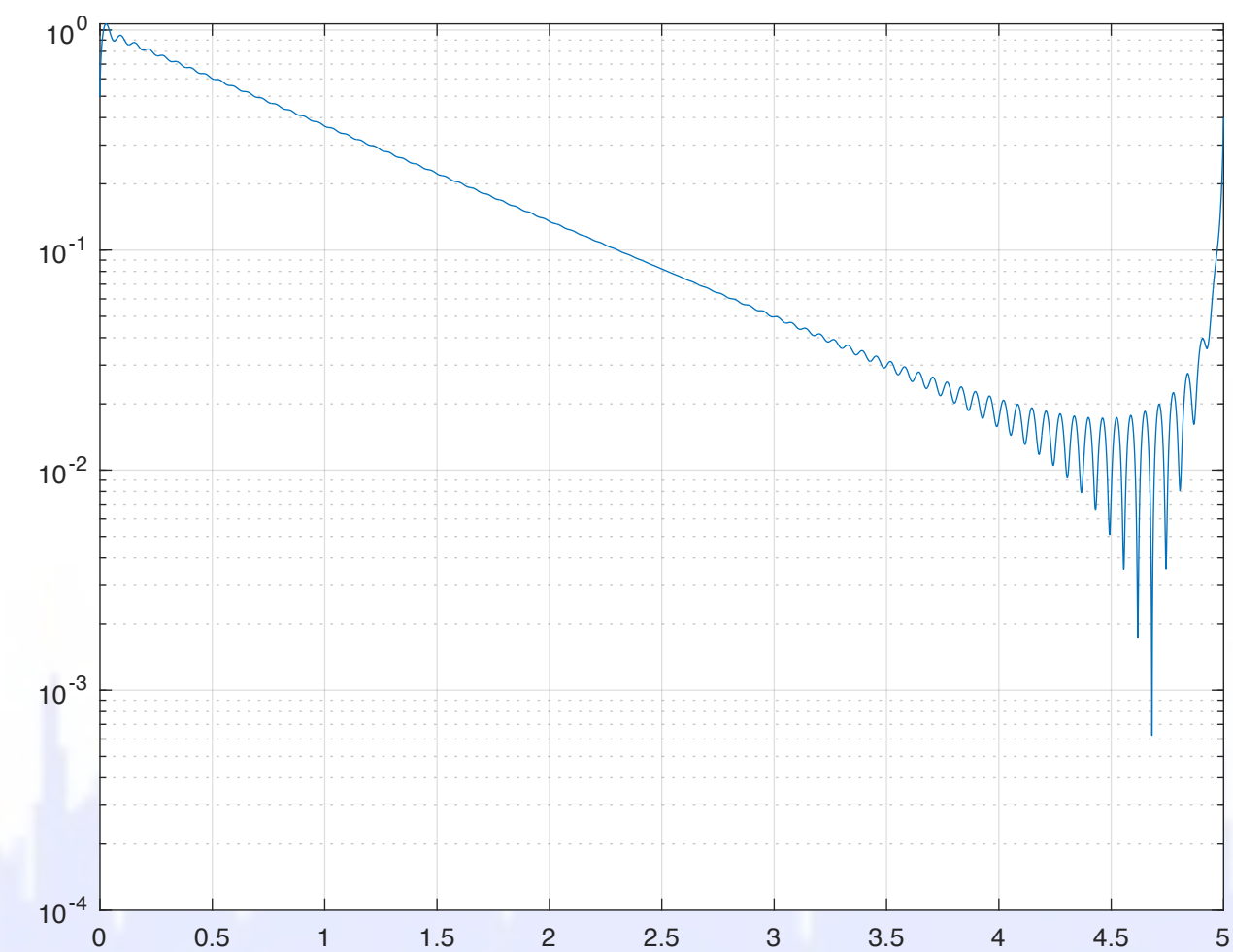
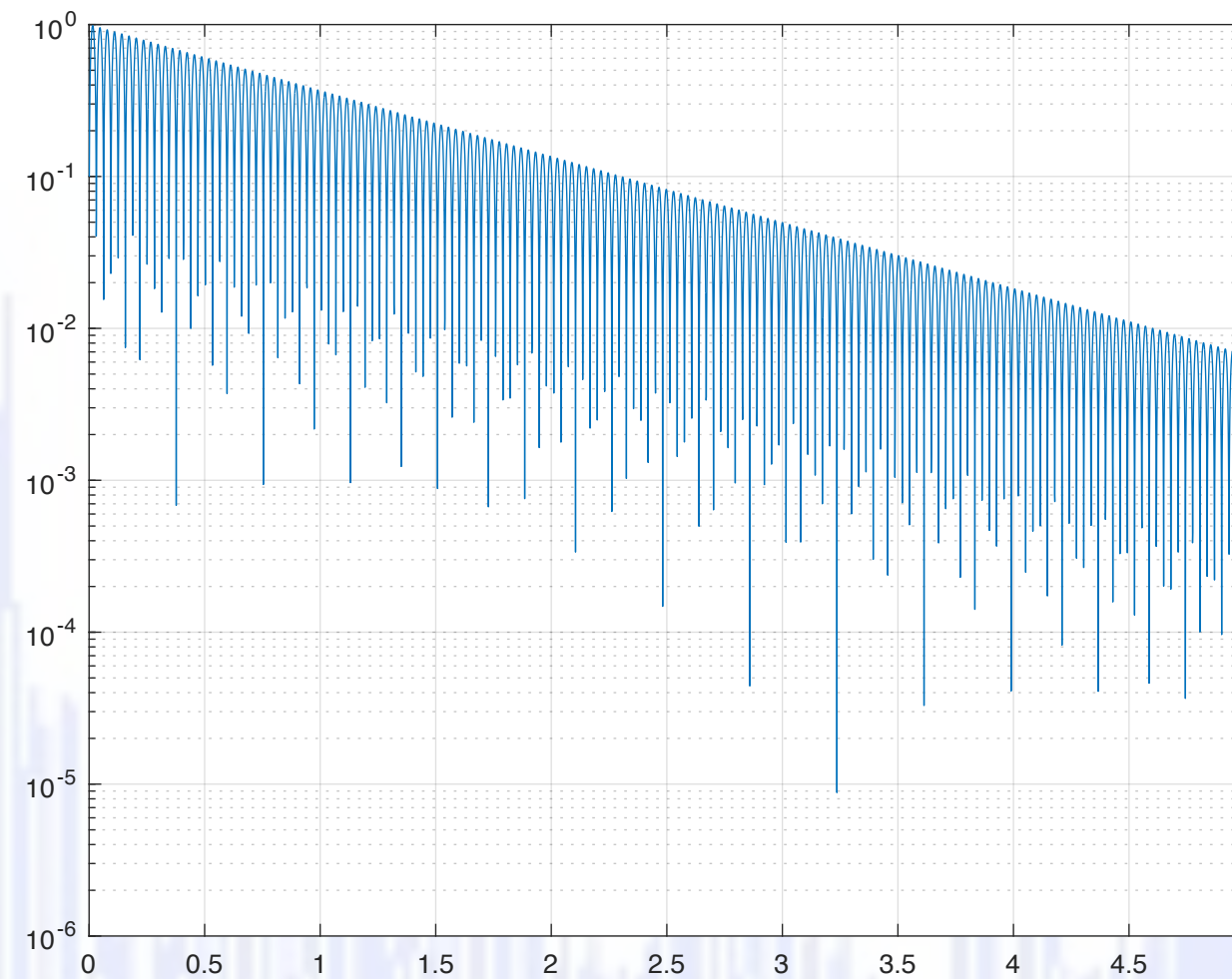
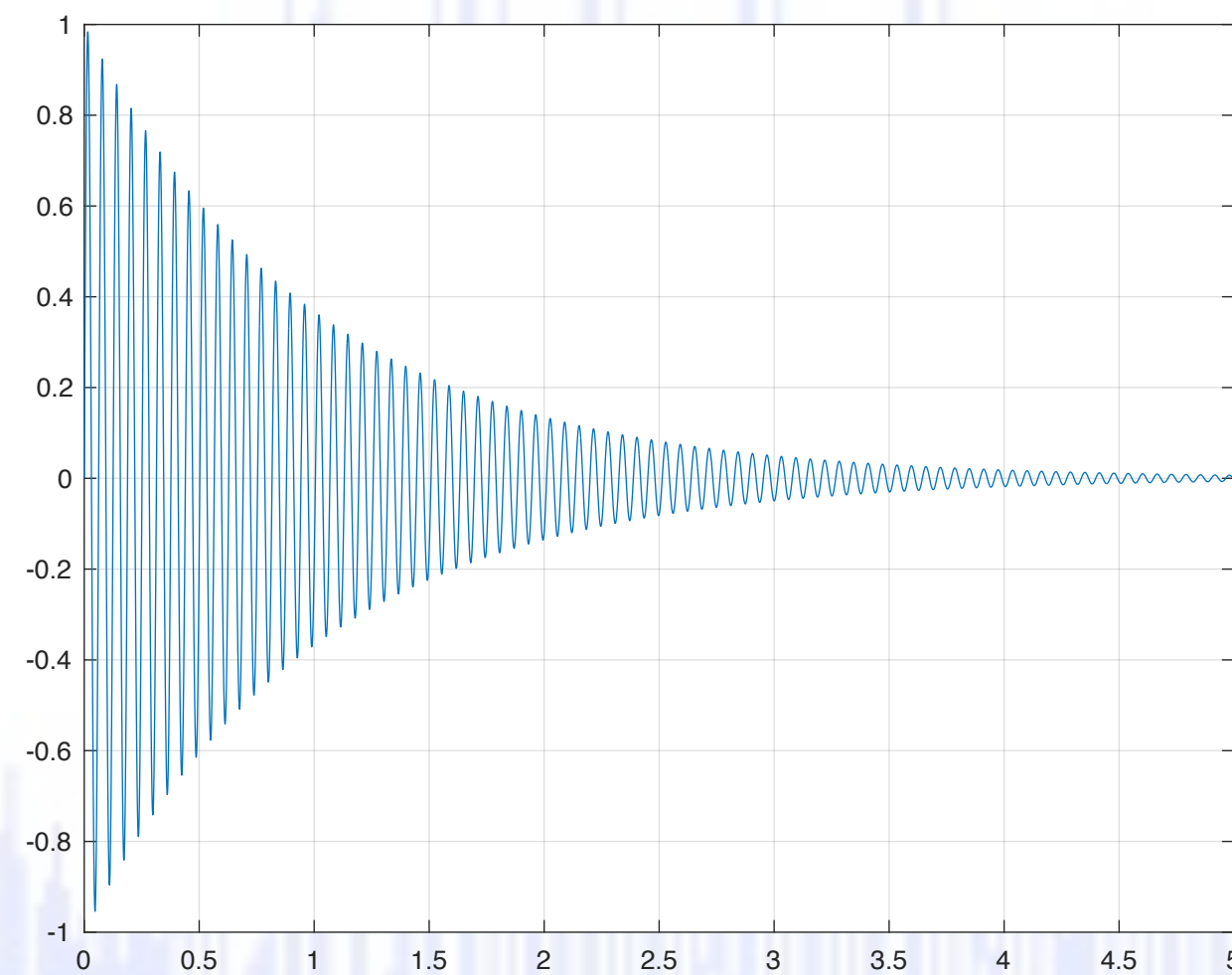
che riarrangiata fornisce il valore di smorzamento

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \chi^2}} \quad \text{in funzione di} \quad \chi = \frac{2\pi}{T_d Grad}$$

Per visualizzare al meglio l'involuppo di un segnale si può creare un segnale ad hoc chiamato segnale analitico, ottenuti sommando la parte reale del segnale a quella immaginaria shiftata di -90° (trasformata di Hilbert del segnale $x(t)$)

$$a(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

l'involuppo è semplicemente $Env = |a(t)|$



```
clear all
% Parameteri
m=1; k=10000; wn=sqrt(k/m);
z=0.01; c=2*z*wn*m;
wd=sqrt(1-z.^2)*wn; Td=2*pi/wd;
```

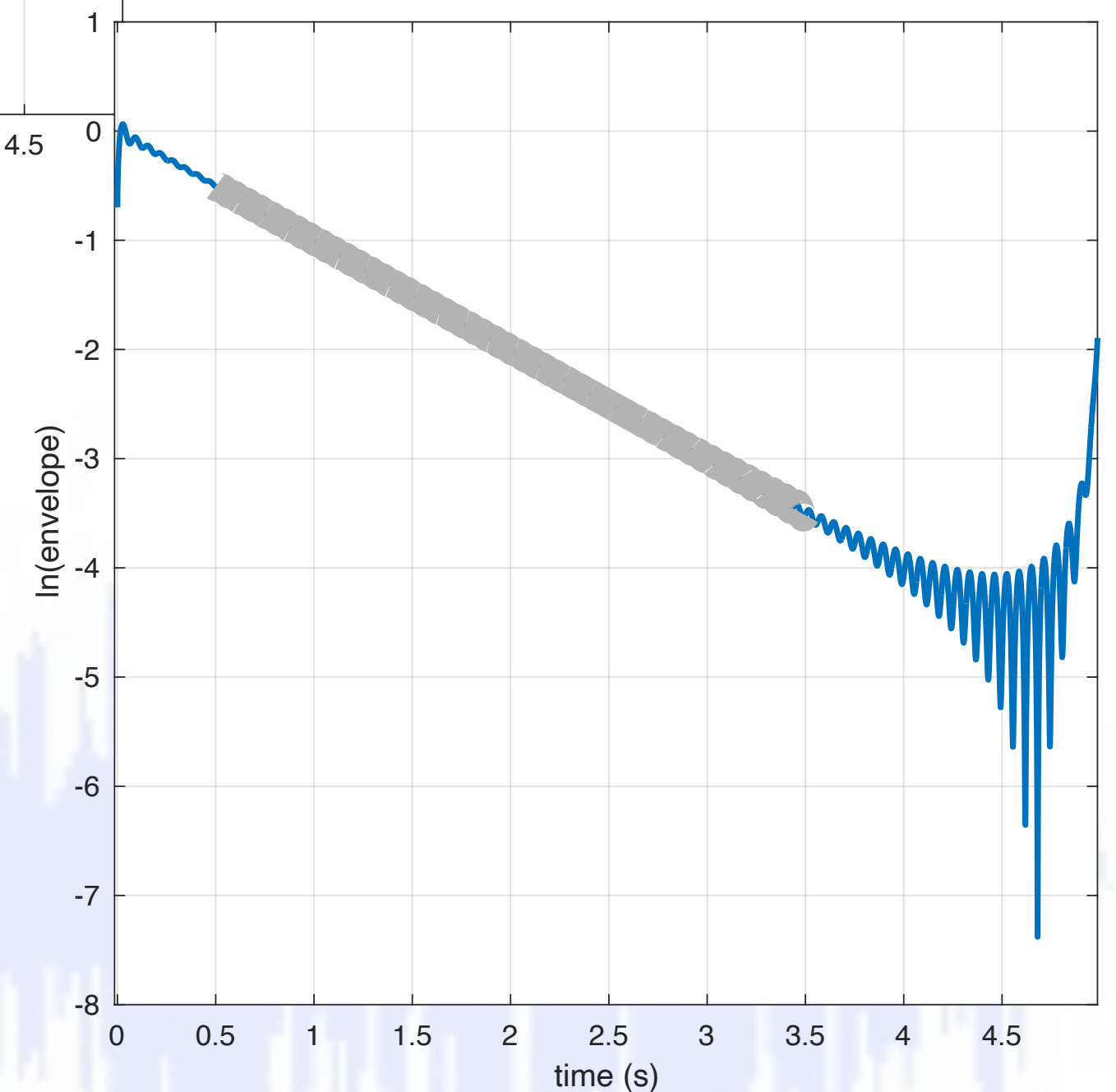
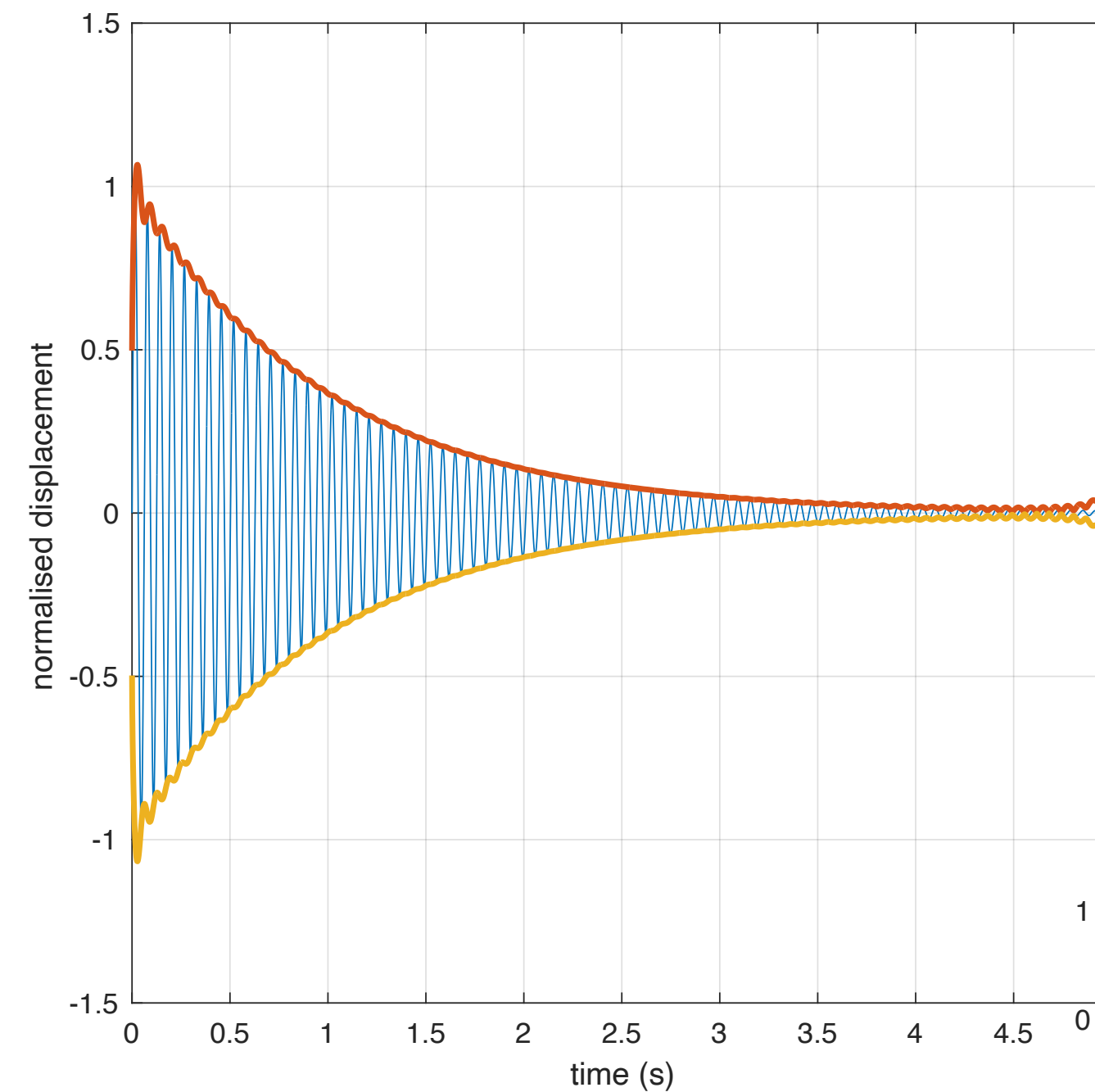
```
% Vettore del tempo
dt=0.001; T=5; t=0:dt:T;
```

```
% IRF normalizzata - spostamento
h=exp(-z*wn*t).*sin(wd*t);
```

```
% Calcoli
a=hilbert(h);
env=log(abs(a));
t1=t(500:3500);env1=env(500:3500);
p=polyfit(t1,env1,1);
grad=-p(1);
gamma=2*pi/(grad*Td);
Est_z=1/sqrt(1+gamma^2)
```

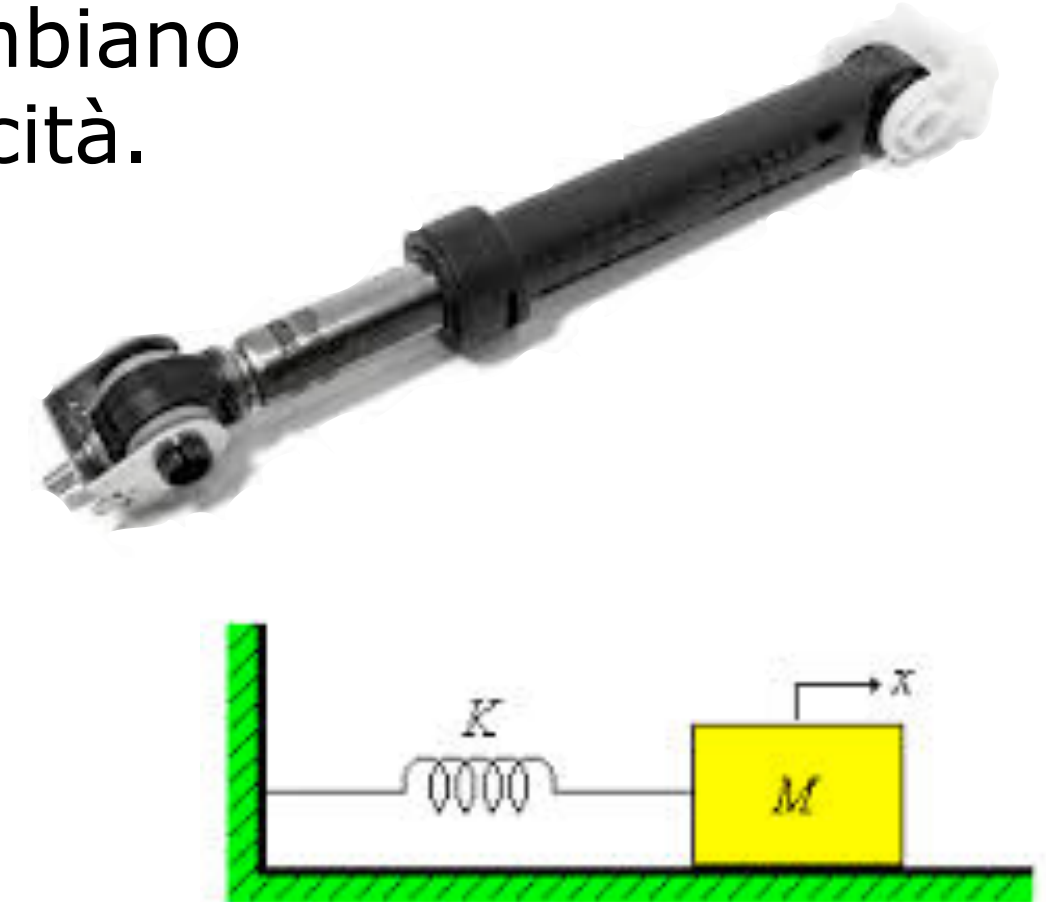
```
% plot
figure(1);
plot(t,h);hold on;
plot(t,abs(a),t,-abs(a),'linewidth',2)
grid;axis square
xlabel('time (s)');
ylabel('normalised displacement');
figure(2);
plot(t,env,'linewidth',2); hold on
plot(t1,env1,'linewidth',10,'Color',[.7 .7 .7])
grid;axis square
xlabel('time (s)');
ylabel('ln(envelope)');
```

>>Est_z=0.010



Smorzamento Coulombiano

Quanto ci sono meccanismi dissipativi dovuti all'attrito si parla di smorzamento coulombiano
La forza d'attrito si oppone al movimento e sarà sempre in direzione opposta alla velocità.
Attenzione, la velocità cambia direzione ogni semiperiodo!



$$m\ddot{x} + kx - \mu Mg = 0 \quad \text{massa si muove in verso +}$$

$$m\ddot{x} + kx + \mu Mg = 0 \quad \text{massa si muove in verso -}$$

Alla fine di ogni semiperiodo, è necessario cambiare l'equazione del moto, calcolando le nuove condizioni iniziali per il semiperiodo successivo!

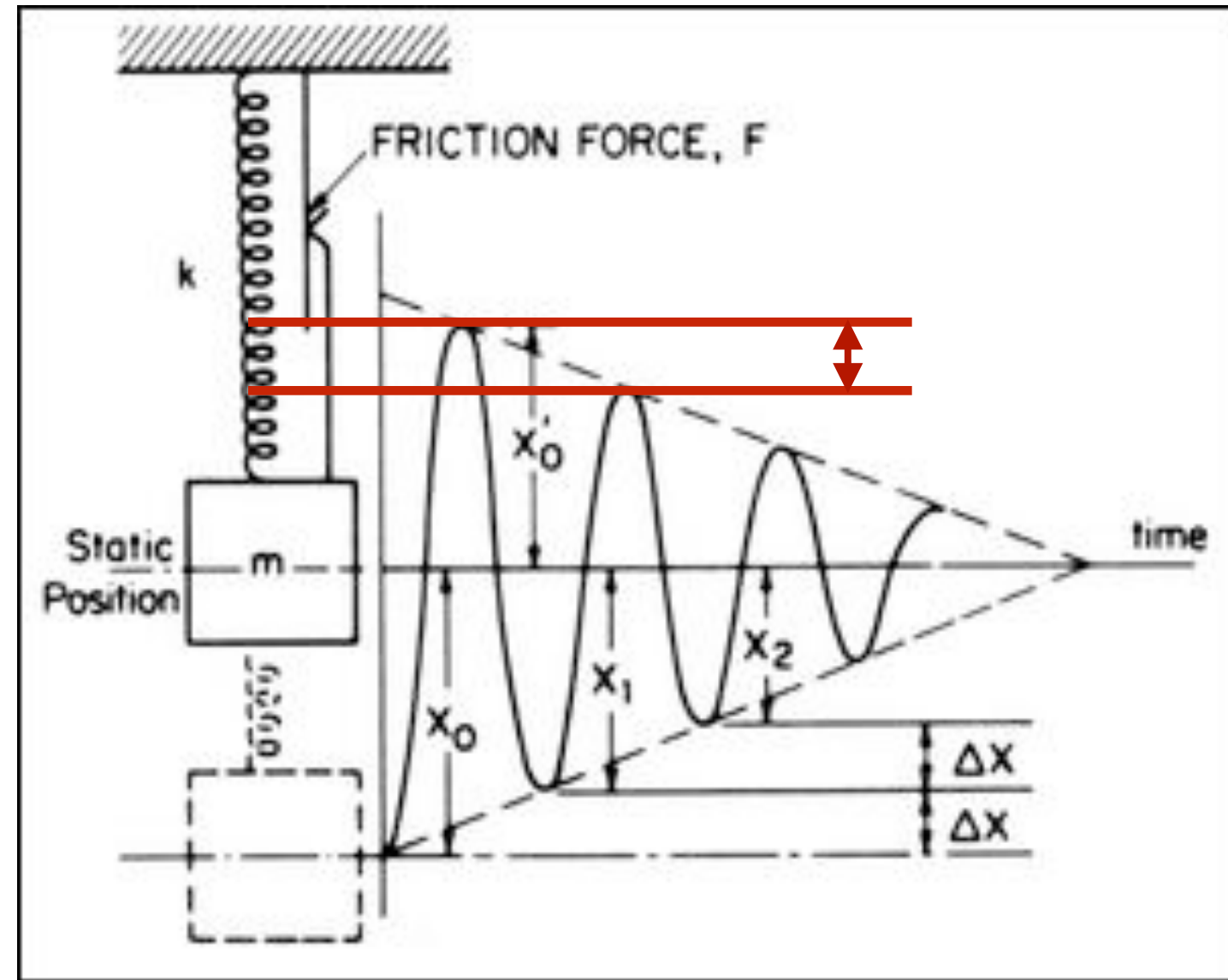
$$x(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) - \frac{\mu Mg}{k}$$

$$x(t) = A_3 \cos(\omega_n t) + A_4 \sin(\omega_n t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

Si definisce il ciclo limite quello in cui la forza di richiamo elastico eguaglia la forza d'attrito

$$x_l = \frac{\mu Mg}{k} = \frac{\mu g}{\omega_n^2}$$

Se alla fine del semiperiodo, lo spostamento della massa è all'interno del ciclo limite, la massa si fermerà! (forza attrito > forza di richiamo elastica)



* rappresenta la nuova condizione iniziale per il semiperiodo successivo, descritto dalla prima equazione (-).

Partendo dalle seguenti condizioni iniziali: $x(0)=X_0$, e $\dot{x}(0)=0$, con la seconda equazione (+) si ottengono i coefficienti A_i relativi al primo semiperiodo

$$A_3 = X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \quad A_4 = 0$$

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{\mu Mg}{k} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{\mu Mg}{k}$$

$$* \quad X\left(\frac{\pi}{\omega_n}\right) = - \left(X_0 - \frac{2\mu Mg}{k} \right)$$

$$A_1 = X_0 - \frac{3\mu Mg}{k} \quad A_2 = 0$$

$$x(t) = \left(X_0 - \frac{3\mu Mg}{k} \right) \cos(\omega_n t) - \frac{\mu Mg}{k}$$

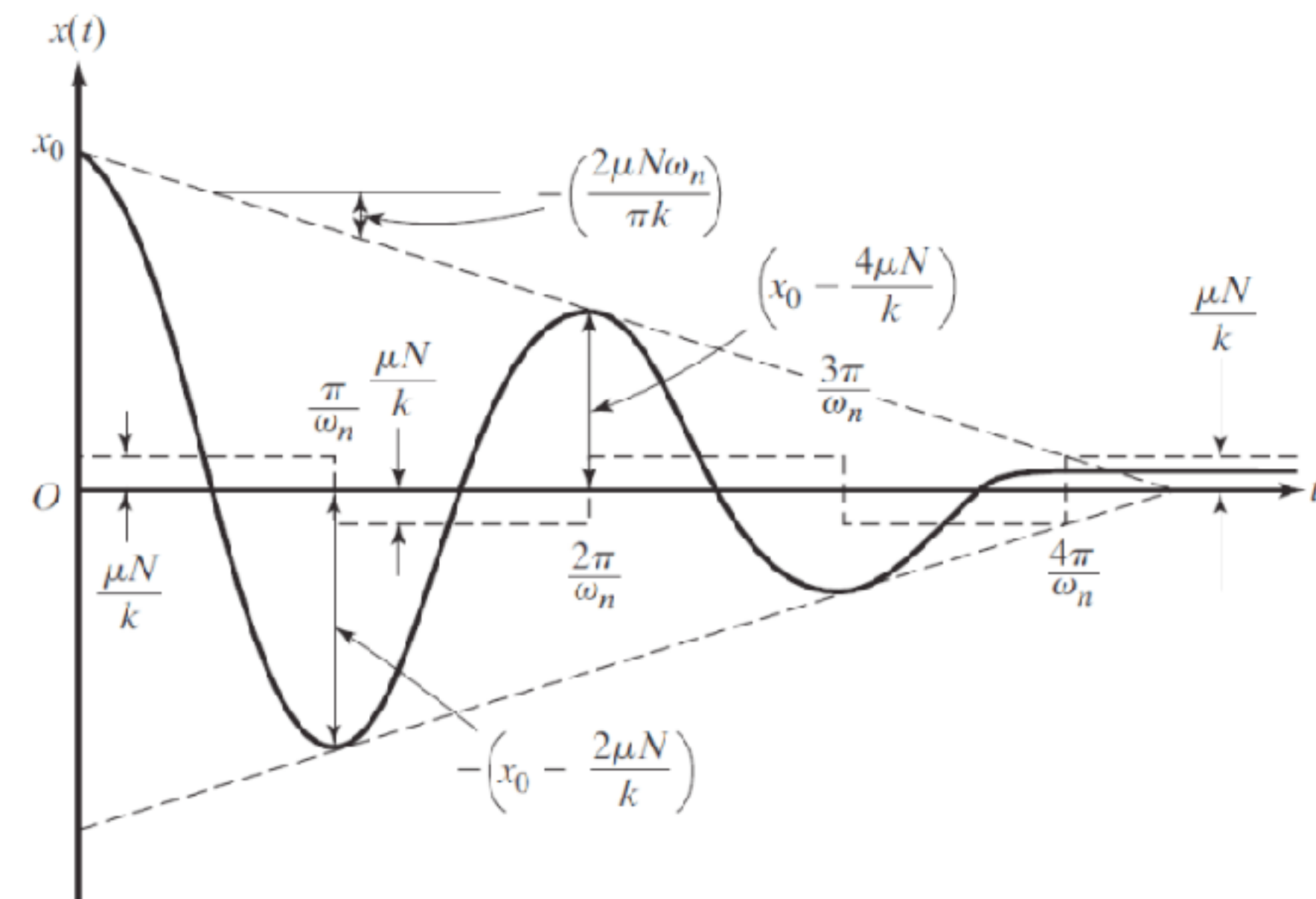
$$X\left(\frac{2\pi}{\omega_n}\right) = \left(X_0 - \frac{4\mu Mg}{k} \right)$$

In un ciclo completo quindi si perde sempre la stessa quantità di “spostamento”

$$X_{m+1} = X_m - \frac{4\mu Mg}{k}$$

La frequenza del sistema smorzato, non cambia in presenza di attrito!
(nel caso dello smorzamento viscoso $\omega_n \neq \omega_d$)

Vista la presenza del ciclo limite, non è detto che la massa per $t=\infty$,
sia in posizione di equilibrio 0, ($x(\infty)$ può esser diverso da 0)
come accade nel caso dello smorzamento viscoso.



Provate a costruire
un modello in Matlab
Simulink, Octave
Python..

```
t = i * (pi/omega_n)
for i = 1, 3, 5, 7,...
    x_a(t)
for i = 2, 4, 6, 8,...
    x_b(t)

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#constants
k = 2      #(N/m), spring coef
m = 0.04   #(kg), mass
x0 = -0.1  #(m), preload
mi = 0.3   #(), dry dynamic friction coef. ABS-ABS
N = 0.3    #(N), normal contact force

f_tr = mi * N / k    #friction force/pring coef - equivalent distance
omega_0 = np.sqrt(k/m)

#time
t = np.linspace(0,5,100)

#undamped model
x_undamp = x0*np.cos(omega_0*t)
dx_undamp = -omega_0*x0*np.sin(omega_0*t)

#damped model
x_damp = (x0+f_tr)*np.cos(omega_0*t)-f_tr
dx_damp = -omega_0*(x0+f_tr)*np.sin(omega_0*t)

#time to x=0
t0 = np.arccos(f_tr/(x0+f_tr))/omega_0
print t0

#plotting
fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
fig.suptitle('position on left, velocity on right')
ax1.plot(t, x_undamp, 'r', label='x_undamp')
ax1.plot(t, x_damp, 'b', label='x_damp')
ax2.plot(t, dx_undamp, 'r', label='dx_undamp')
ax2.plot(t, dx_damp, 'b', label='dx_damp')

#grids, titles, legends, axis labels
ax1.grid()
ax2.grid()
ax1.set_title('Position vs time')
ax2.set_title('Velocity vs time')
ax1.legend()
ax2.legend()
ax1.set_xlabel('t(s)')
ax1.set_ylabel('x(m)')
ax2.set_xlabel('t(s)')
ax2.set_ylabel('dx(m/s)')

plt.show()
```

Smorzamento equivalente

Solitamente ci sono più meccanismi dissipativi che agiscono contemporaneamente
Lo smorzamento equivalente permette di trovare uno smorzatore viscoso (che da equazione del moto più semplice) che dissipa, in un ciclo, la stessa quantità di energia degli altri!



$$\frac{dW}{dt} = \text{Force} * \text{Speed} = -c\dot{x}\dot{x} = -c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

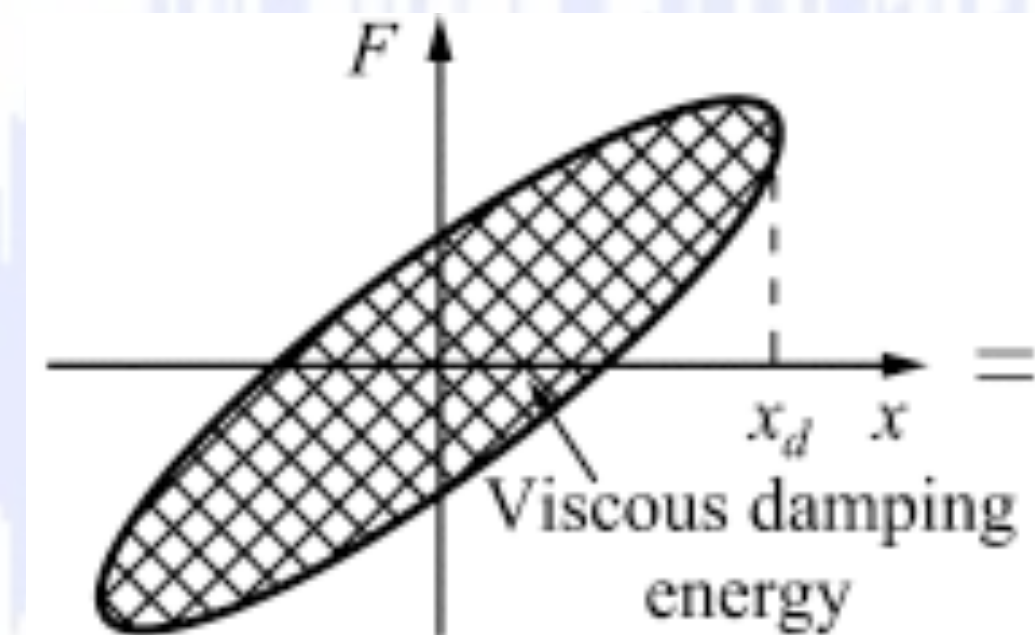
Si ipotizzi che lo spostamento sia di tipo armonico:

$$x = X \cos(\omega t)$$

$$\Delta W = - \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_d}} c \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = - \int_0^{2\pi} cX^2\omega_d^2 \sin^2(\omega_d t) d(\omega_d t) = - \pi cX^2\omega_d$$

da questa relazione
si può derivare il valore di c_{eq} :

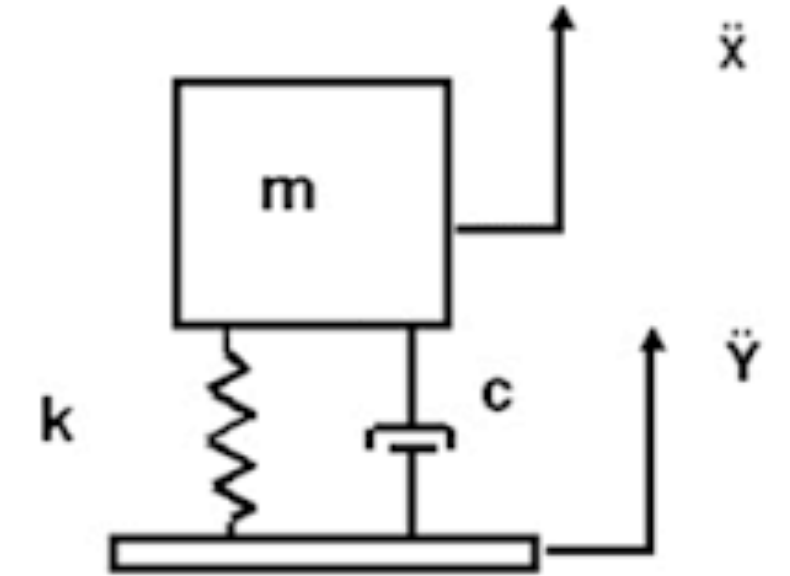
$$c_{eq} = - \frac{\Delta W}{\pi X^2 \omega_d}$$



Eccitazione dalla base

Si consideri un sistema 1gdl in cui sia la base si muova con un movimento armonico $y=Y\sin\Omega t$

Come cambia la risposta dalla massa in funzione dell'eccitazione e delle caratteristiche del sistema? L'equazione del moto sarà:



$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

La risposta del sistema sarà alla stessa frequenza della forzante!!

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\Omega Y \cos\Omega t + kY \sin\Omega t$$

La soluzione particolare sarà:
(NB è una funzione complessa)

$$x_p = \frac{kY \sin(\Omega t - \theta)}{[(k - m\Omega^2)^2 - (c\Omega)^2]^{1/2}} + \frac{c\Omega Y \cos(\Omega t - \theta)}{[(k - m\Omega^2)^2 - (c\Omega)^2]^{1/2}}$$

Siamo interessati al modulo della funzione di trasferimento (X/Y) (quanto si sposta la massa al variare dell'eccitazione)

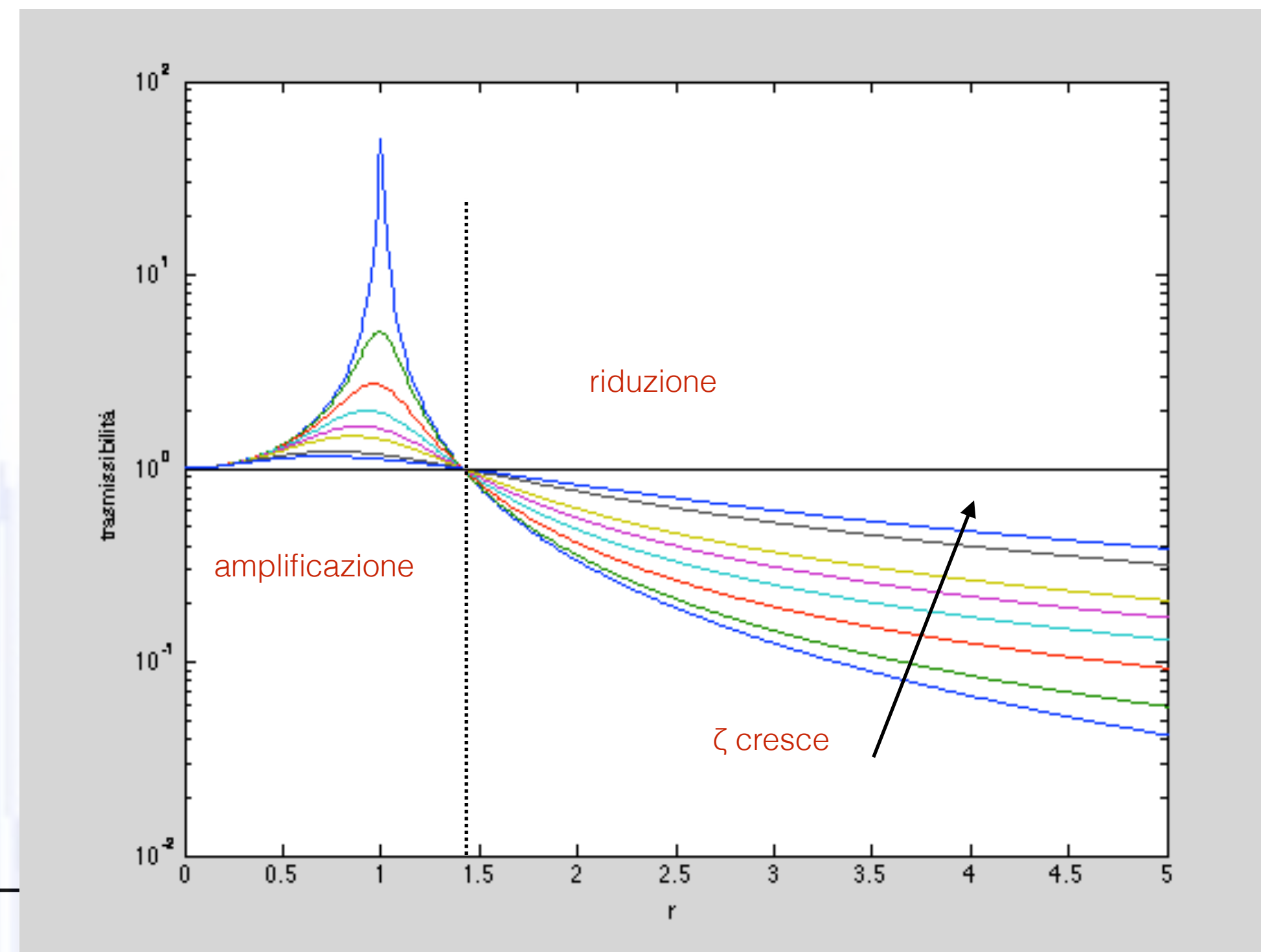
$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \left[\frac{k^2 + (c\Omega)^2}{(k - m\Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \right]^{1/2}$$

Con le solite sostituzioni si ricava la formula della Trasmissibilità (quanto si amplifica lo spostamento)

$$\left| \frac{X}{Y} \right| = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$$

$$r = \frac{\Omega}{\omega}$$

```
r=0:0.01:5;
csi=[0.01 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.8 1];
for i=1:size(csi,2)
tr(i,:)=sqrt((1+(2*csi(i)*r).^2)./((1-r.^2).^2+(2*csi(i)*r).^2));
end
semilogy(r,tr)
hold
un=ones(size(r,2));
semilogy(r,un,'k')
xlabel('r')
ylabel('trasmissibilità')
```



Attenzione all'effetto dello smorzamento!!

..prima e dopo $r = \sqrt{2}$

Si può calcolare anche quanta forza si scarica dalla massa alla fondazione, attraverso la molla e lo smorzatore:

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

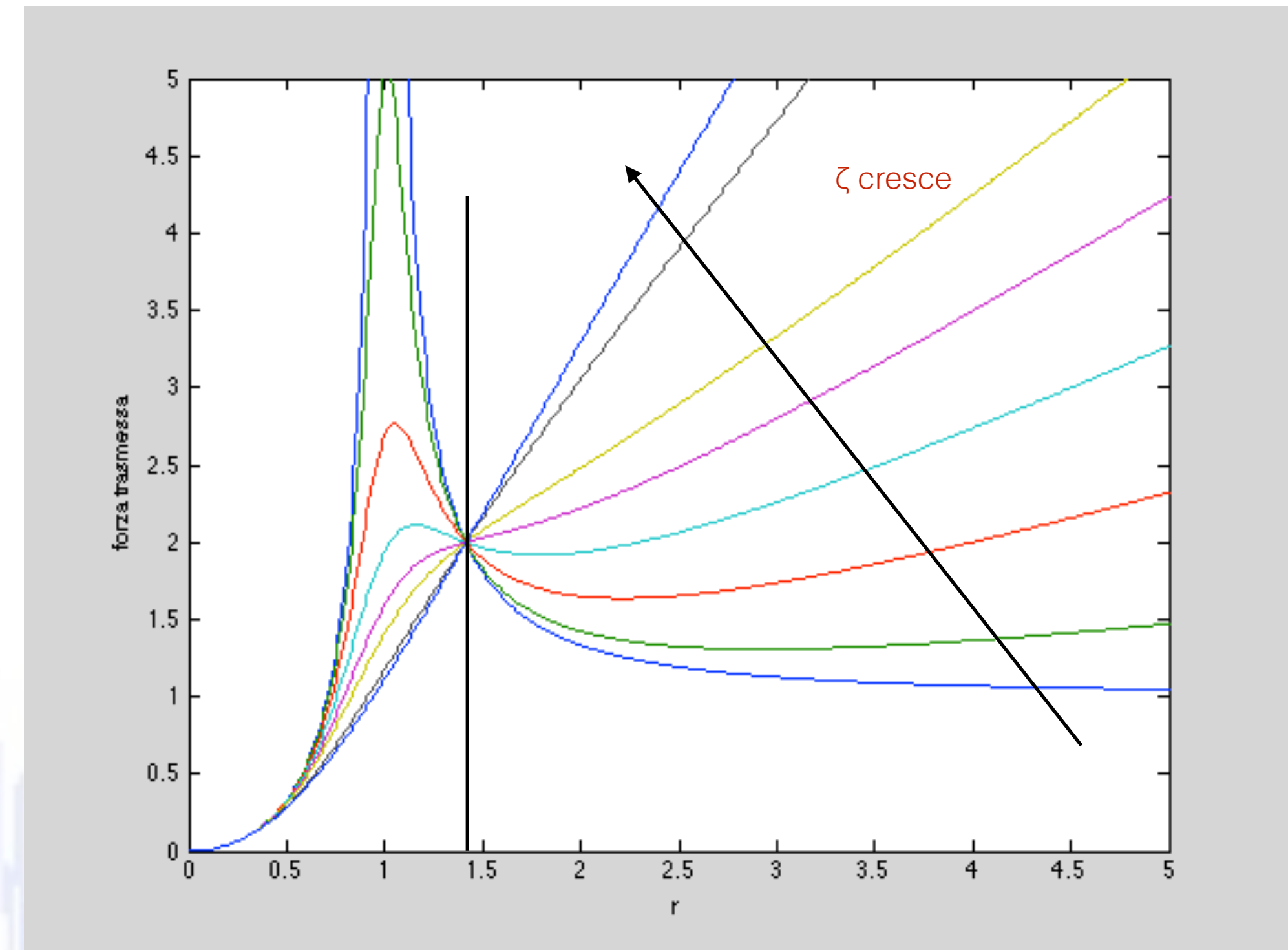
$$F = -m\ddot{x} = c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y)$$

Si definisce il coefficiente di amplificazione tra la forza dinamica ed il cedimento statico kY

$$\left| \frac{F}{kY} \right| = r^2 \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{1/2}$$

Attenzione
all'effetto dello
smorzamento!!

..prima e dopo
 $r = \sqrt{2}$



Si può anche calcolare lo spostamento relativo tra la massa e la fondazione ($z=x-y$ da cui $x=z+y$)

$$m\ddot{x} + c(\dot{x} - \dot{y}) + k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

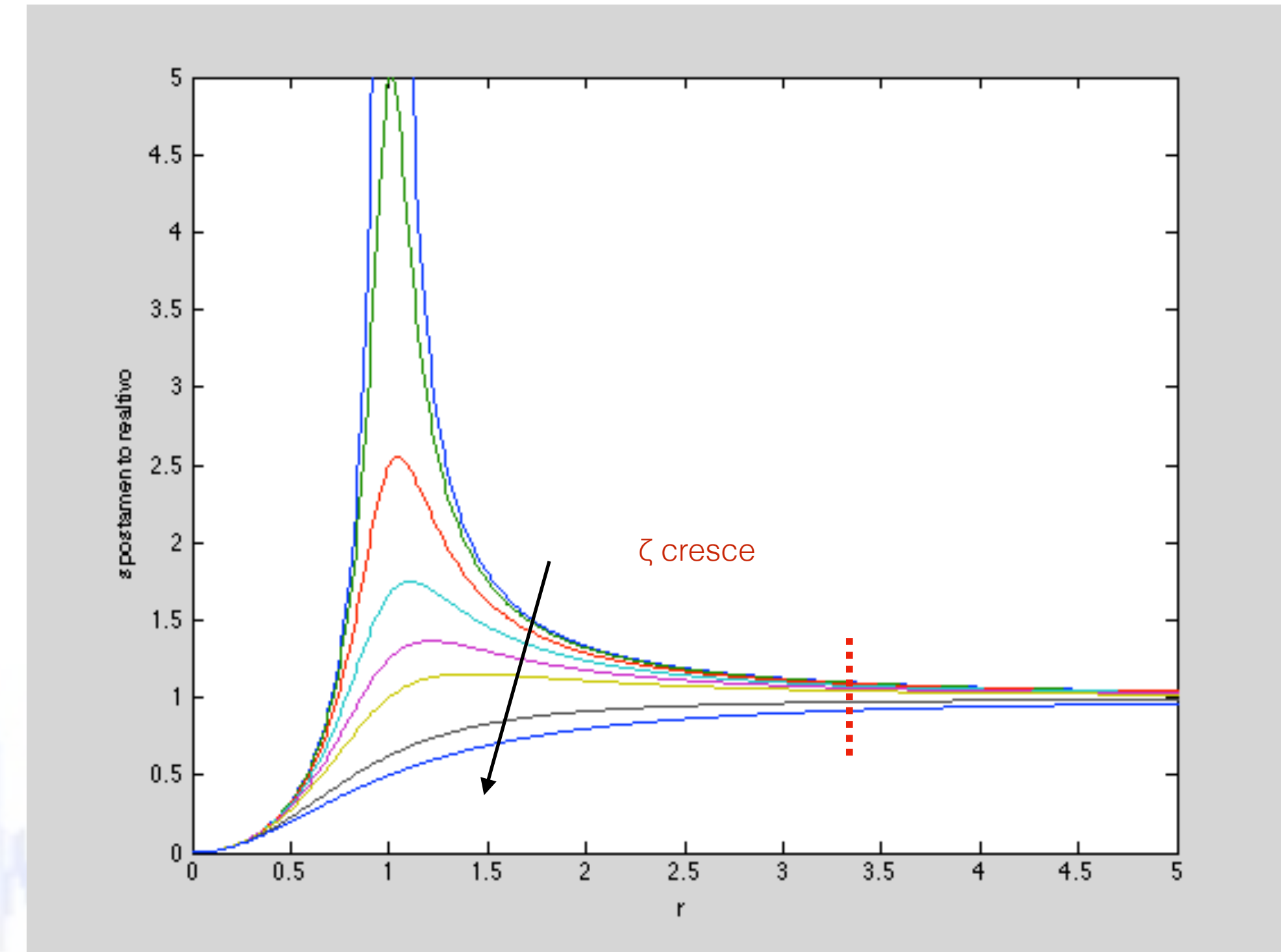
Supponendo lo spostamento impresso sia una funzione armonica $y=Y\sin\Omega t$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\Omega^2 Y \sin\Omega t$$

da si deriva la funzione di trasferimento tra lo spostamento relativo Z e lo spostamento della base Y

$$\left| \frac{Z}{Y} \right| = \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

per valori di $r > 3$ il rapporto è prossimo a 1
 $Z=Y$... un segnale proporzionale a Z è circa uguale allo spostamento della base... sensore di spostamento!



Per avere r grande, ω dovrà esser piccolo !! come si fa??

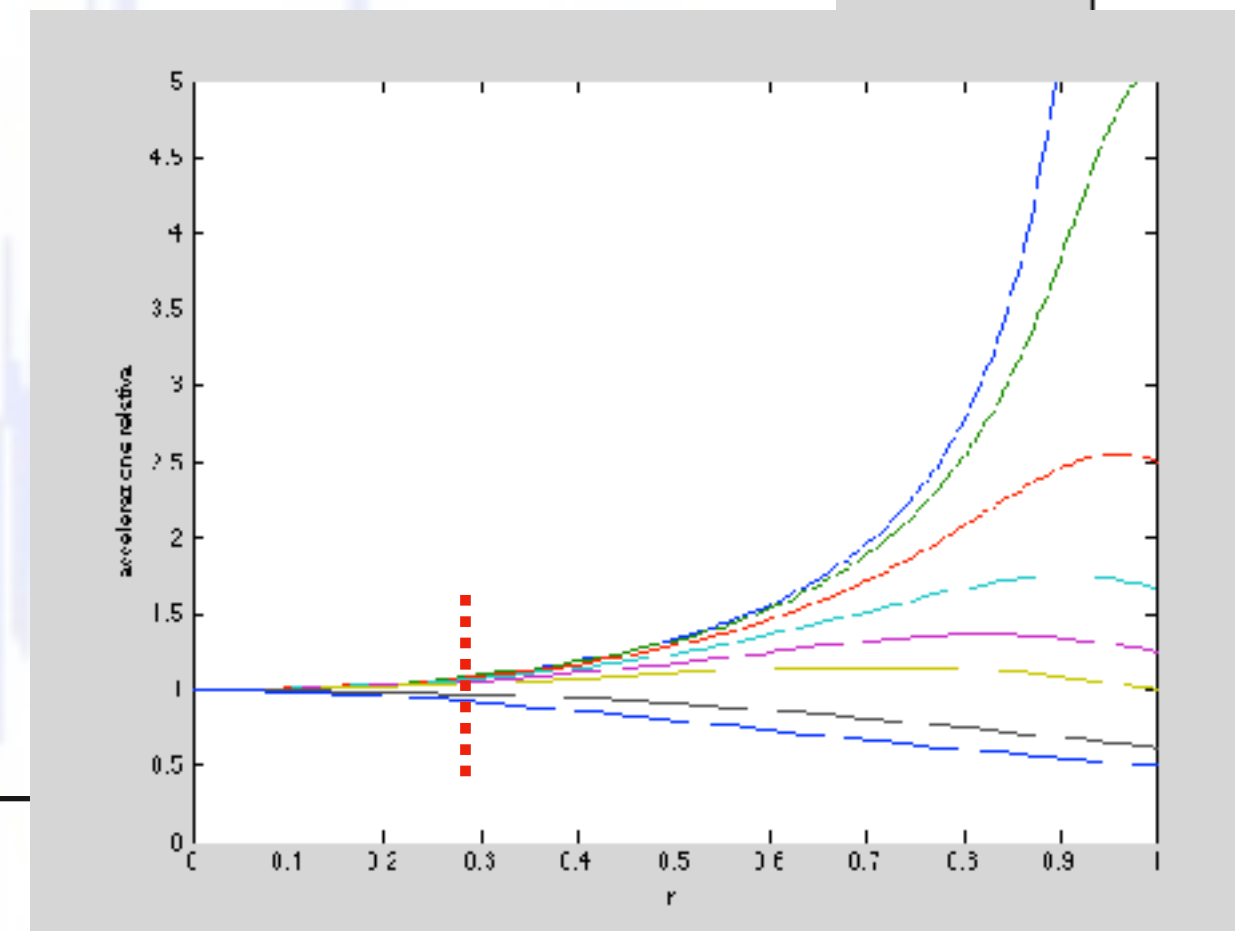
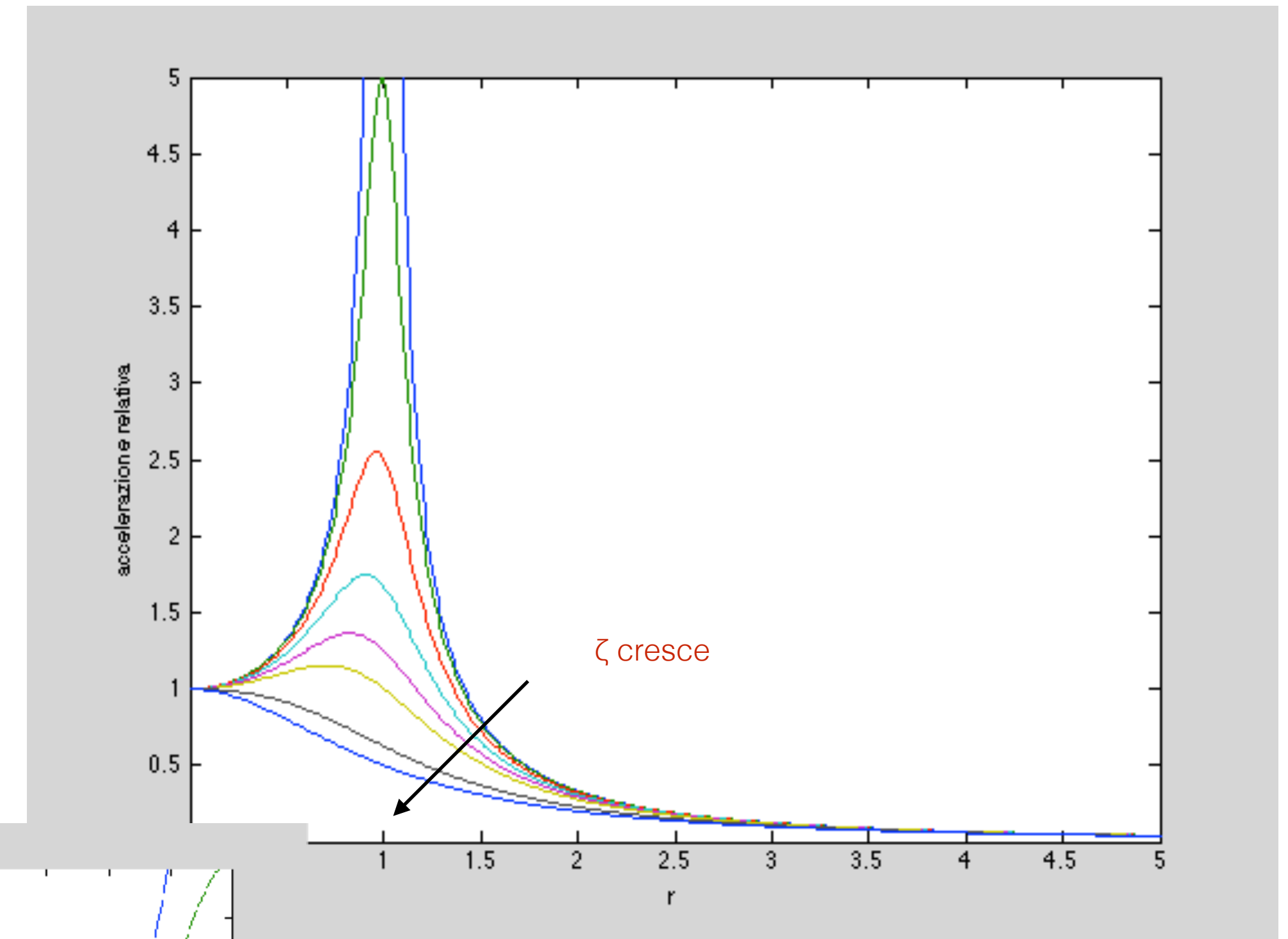
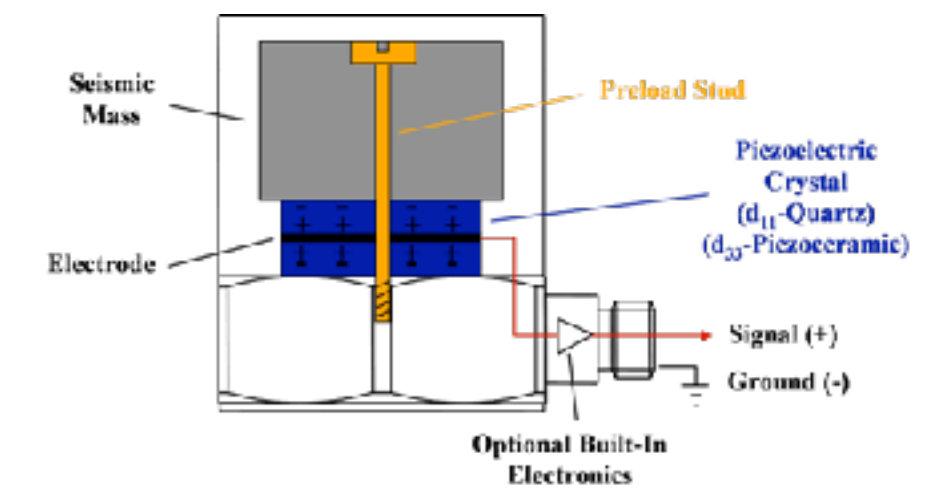
Se si volesse misurare l'accelerazione invece dello spostamento..
basta esplicitare quanto al numeratore:

$$\left| \frac{Z}{Y} \right| = \frac{\left(\frac{\Omega}{\omega} \right)^2}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

$$\left| \frac{\omega^2 Z}{\Omega^2 Y} \right| = \left| \frac{\ddot{z}}{\ddot{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

Il rapporto Z/Y è unitario per valori molto piccoli di r ($r < .3$)

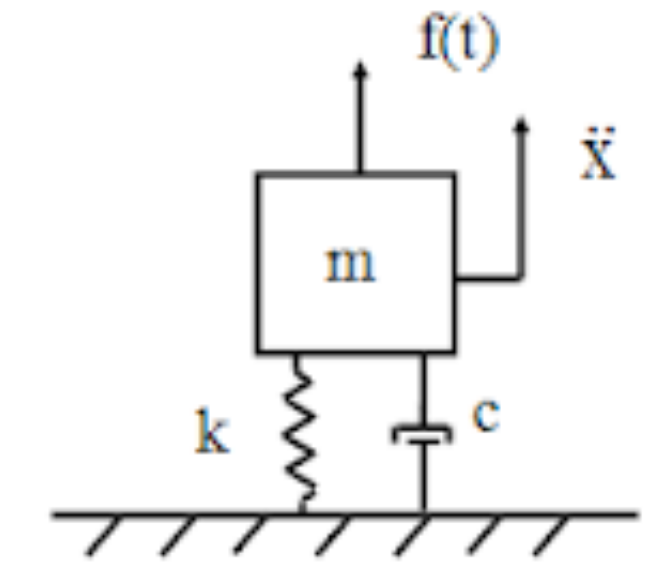
per avere r piccoli,
 ω dovrà esser grande !! come?



Si riprende nella Parte 4
Strumenti e metodi sperimentali

Eccitazione Generica

Non sempre le forzanti del sistema sono armoniche!
Possono essere impulsive, transitorie, randomiche,...



L'equazione del moto cambia poco,
cambia la soluzione particolare !

Esempio: eccitazione a gradino
(forcella di moto che impatta sul cordolo della pista)

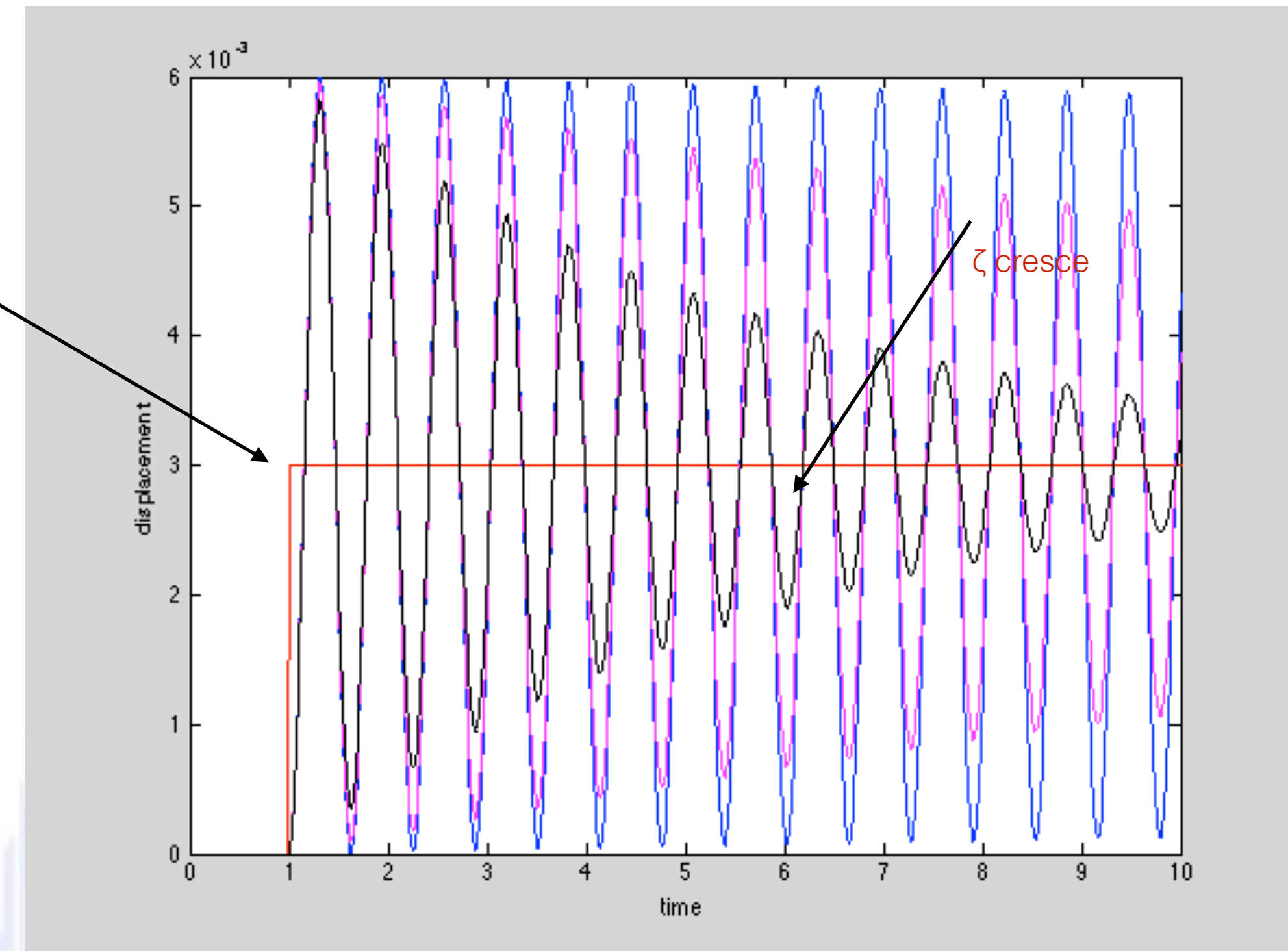
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_0$$

$$p = 0 \quad t \leq 0$$

$$p = P_0 \quad t > 0$$

$$x = \frac{P_0}{k} + e^{-\zeta\omega_n t} (A_1 \cos\omega_d t + A_2 \sin\omega_d t)$$

Il sistema non oscilla
più attorno allo zero



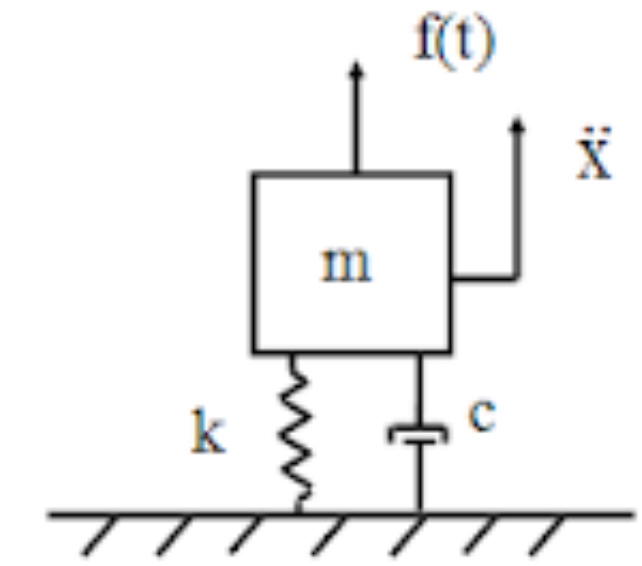
soluzione graticolare

A_1 e A_2 dipendono dalle CI

Qualora ci siano forzanti più complesse, conviene separarle e considerarle a pezzi,
stando attenti alle CI ad ogni cambio di forzante

Eccitazione impulsiva

L'eccitazione impulsiva si ha quando la durata dell'eccitazione è molto breve (in funzione della risposta del sistema)



Si ipotizza di applicare un impulso unitario definito come: $I = \int_0^{t_d} p(t)dt = 1 \quad t_d \ll T_n$

$$m\ddot{x} + kx = \begin{cases} p & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases} \quad \text{con le C.I.} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

integriamo nel tempo per la durata dell'impulso t_d

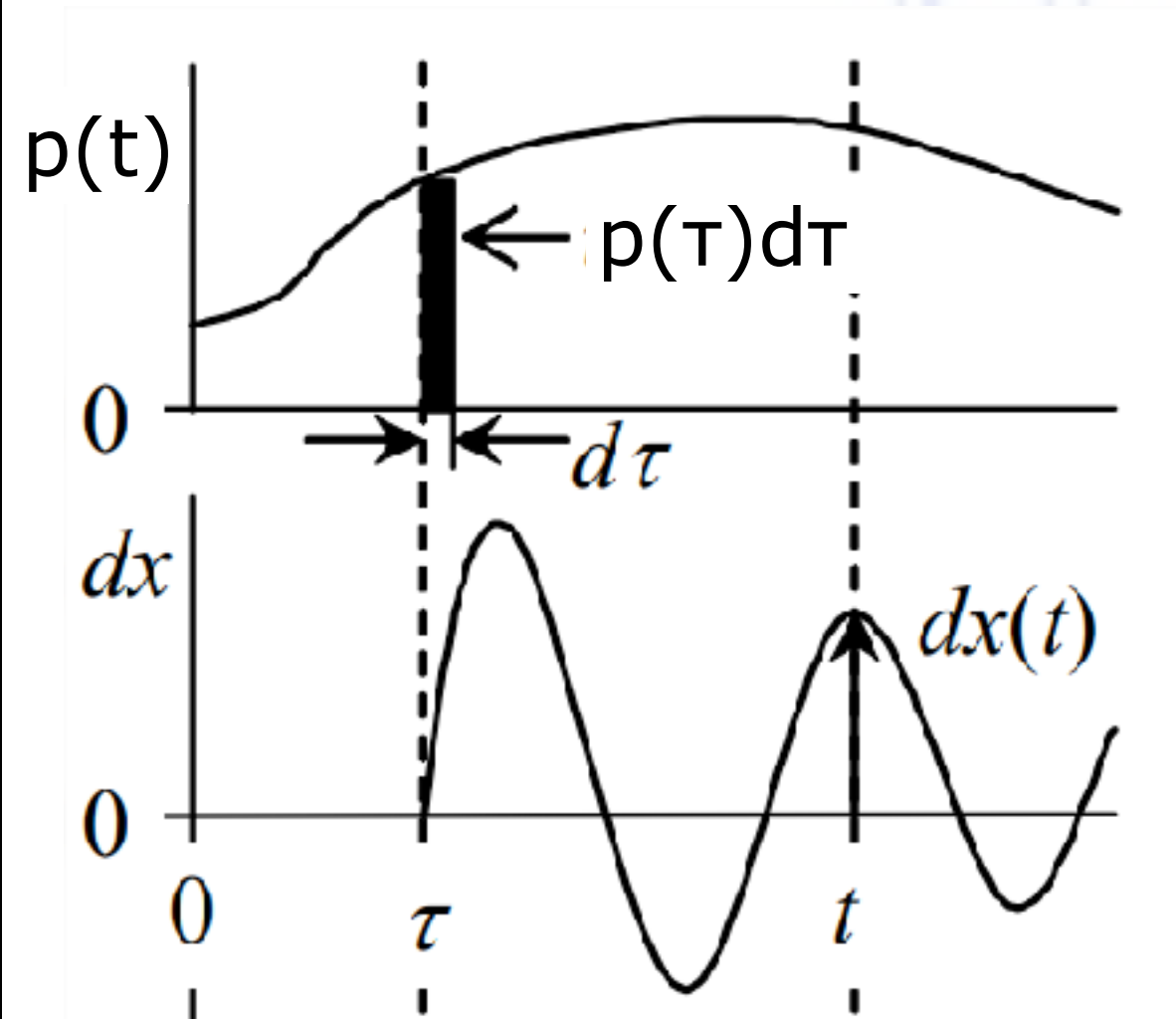
$$m\dot{x} + kx_{av}t_d = I \quad \text{quando } t_d \text{ tende a zero} \quad m\dot{x}(0^+) = I \quad \text{cambia la C.I. sulla velocità} \quad \dot{x}(0^+) = \frac{I}{m}$$

quindi la risposta diventa: $x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \sin\omega_n t$ con smorzamento : $x(t) = \frac{I}{m\omega_n} e^{-\zeta\omega_n t} \sin\omega_d t$

Eccitazione generica

Quando l'eccitazione è generica, la risposta all'impulso torna in aiuto!

La forzante viene scomposta in una serie di impulsi unitari scalati dall'ampiezza dell'eccitazione all'istante considerato



Questo integrale è detto Integrale di Duhamel, ed è la convoluzione tra la forzante del sistema e la risposta all'impulso

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \sin\omega_n t$$

risposta all'impulso unitario

$$dx(t) = \frac{dI}{m\omega_n} \sin\omega_n(t - \tau)$$

risposta all'impulso infinitesimo all'istante τ

Va da se che la risposta all'eccitazione generica, sarà l'integrale di tutte le risposte, create degli impulsi infinitesimi al variare di τ

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) \sin\omega_n(t - \tau) d\tau$$

$$x(t) = \int_0^t p(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Non è una relazione così pratica da maneggiare, meglio fare un prodotto nel dominio delle frequenze

Se il sistema ha dello smorzamento le equazioni ovviamente si complicano per tener conto del decadimento della risposta ...

$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau$$

e con l'aggiunta delle C.I. ...

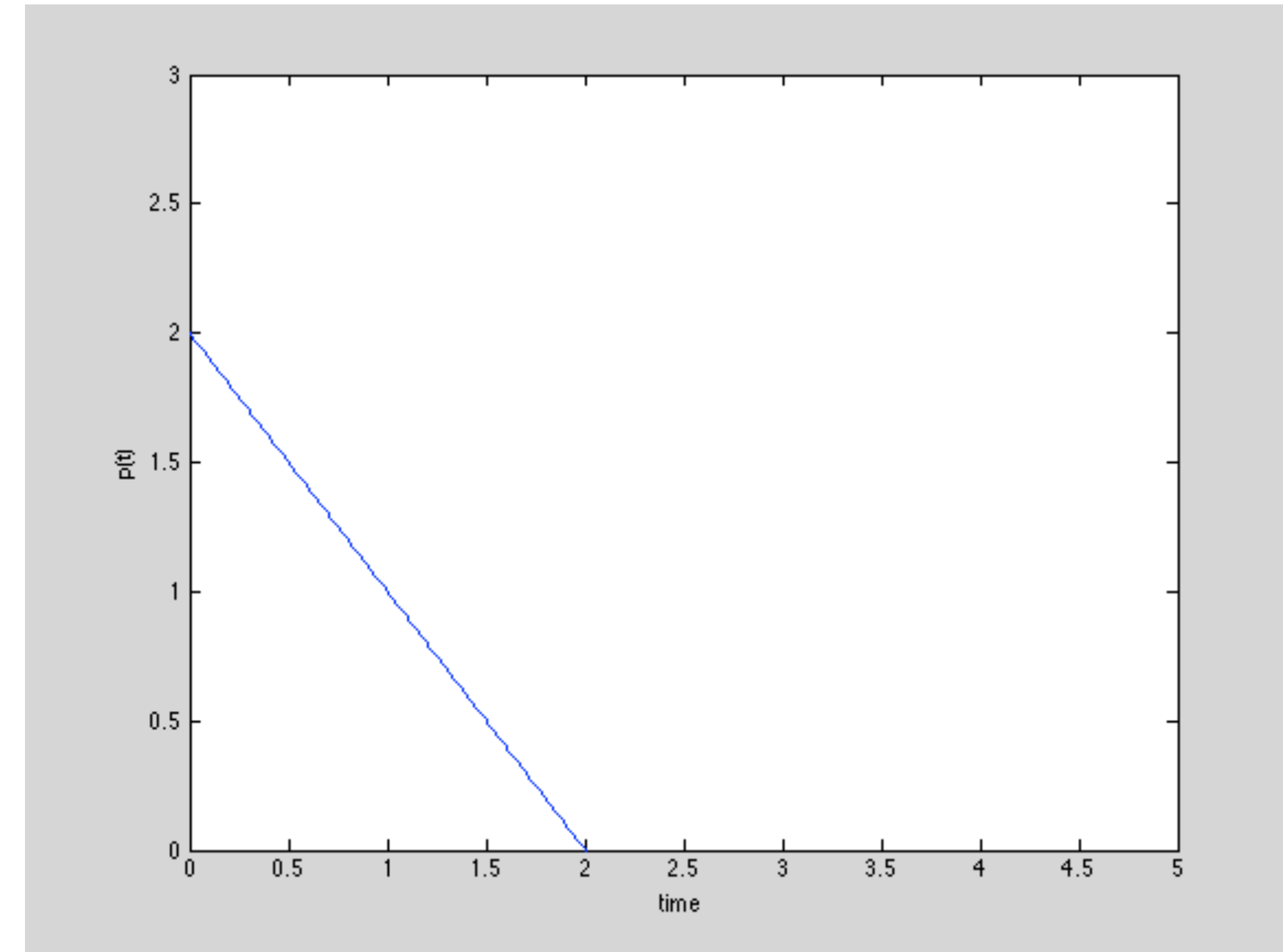
$$x(t) = \frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau + x_0 \cos(\omega_n t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$$

nel caso smorzato ..

$$x(t) = \underbrace{\frac{I}{m\omega_n} \int_0^t p(\tau) e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_n(t-\tau) d\tau}_{\text{forzante}} + e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)} \left(x_0 \cos(\omega_n t) + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_n x_0}{\omega_d} \right) \sin(\omega_d t) \right)_{\text{C.I.}}$$

Un esempio..
sistema 1gdl non smorzato, forzato da un forzante cosi definita

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \left(1 - \frac{t}{t_d}\right) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t > t_d \end{cases}$$



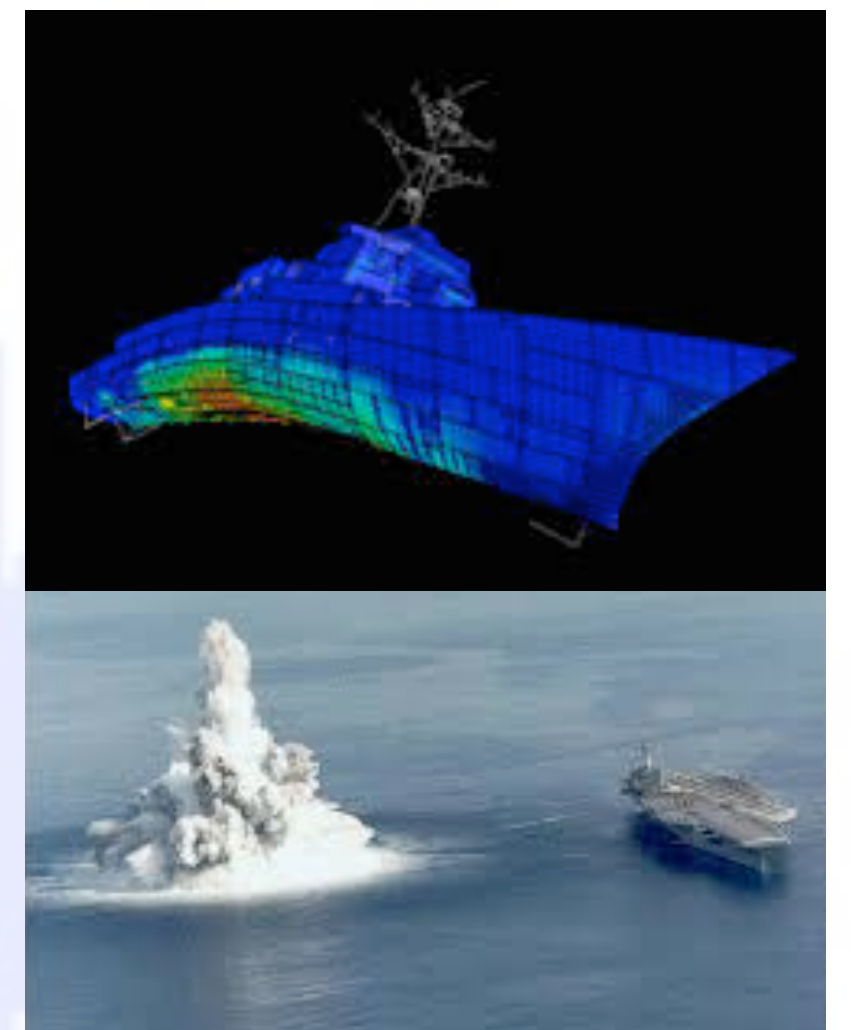
$0 \leq t \leq t_d$

$$x(t) = \left(\frac{p_o}{k}\right) \left\{ \sin \omega_n t \left[\sin \omega_n t - \left(\frac{t}{t_d}\right) \sin \omega_n t - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \right] + \right. \\ \left. - \cos \omega_n t \left[-\cos \omega_n t + \left(\frac{t}{t_d}\right) \cos \omega_n t - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \sin \omega_n t + 1 \right] \right\}$$

$t > t_d$

$$x(t) = \left(\frac{p_o}{k}\right) \left\{ \sin \omega_n t \left[-\left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \cos \omega_n t + \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \right] + \right. \\ \left. - \cos \omega_n t \left[1 - \left(\frac{t}{\omega_n t_d}\right) \sin \omega_n t \right] \right\}$$

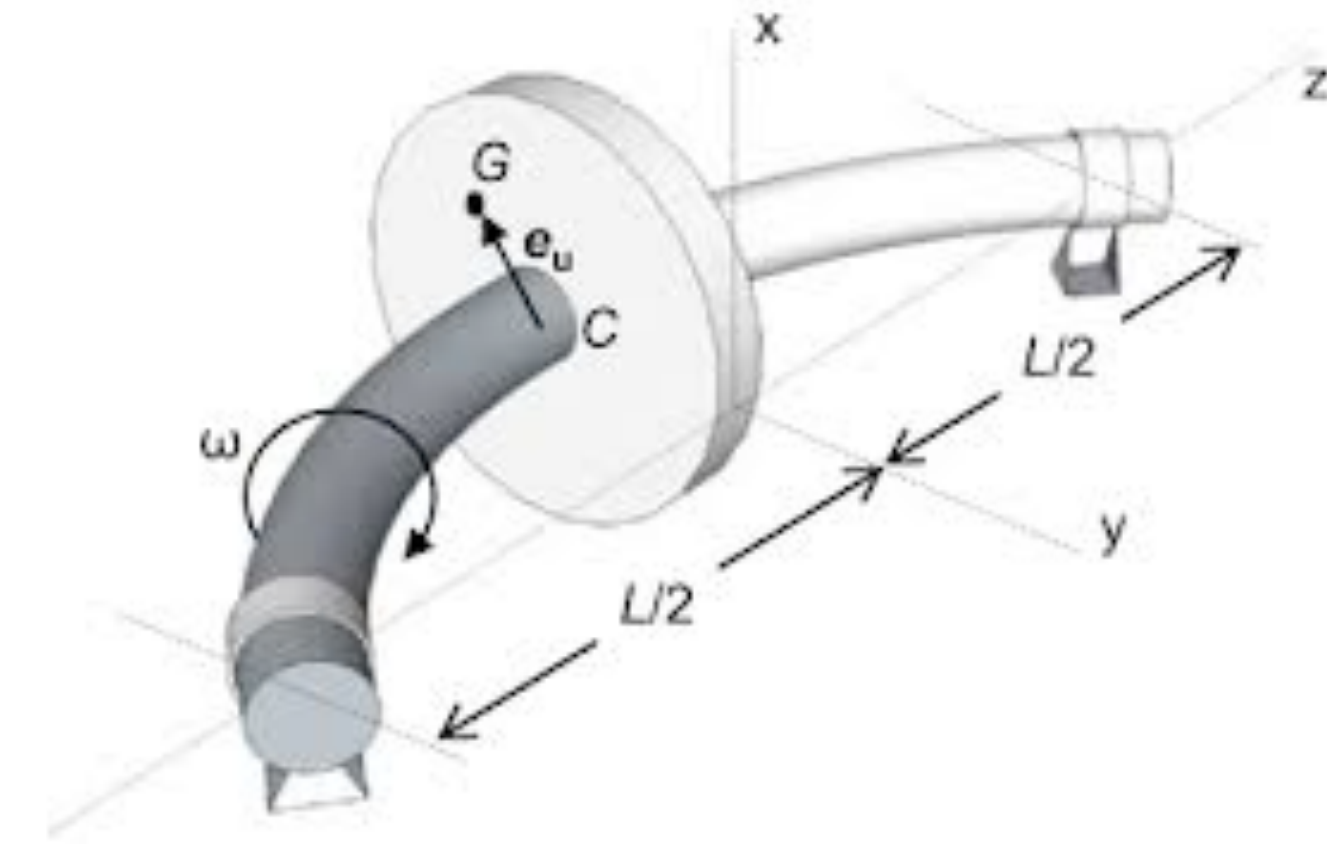
in generale.. non è agevole!
trovare le soluzioni in forma chiusa



Rotore di Jeffcot

Il rotore di Jeffcot è costituito da un albero vincolato rigidamente alle estremità ed un volano posto a metà dell'albero.

Si considera solo lo squilibrio di volano che sposta il centro di massa G dall'asse geometrico di rotazione del sistema di una quantità e



Si considerano nei piani xz e yz l'equilibrio delle forze agenti: la forza centrifuga, e la forza di richiamo elastica (flessione albero)

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = me\Omega^2 \cos\Omega t \\ m\ddot{y} + ky = me\Omega^2 \sin\Omega t \end{cases}$$

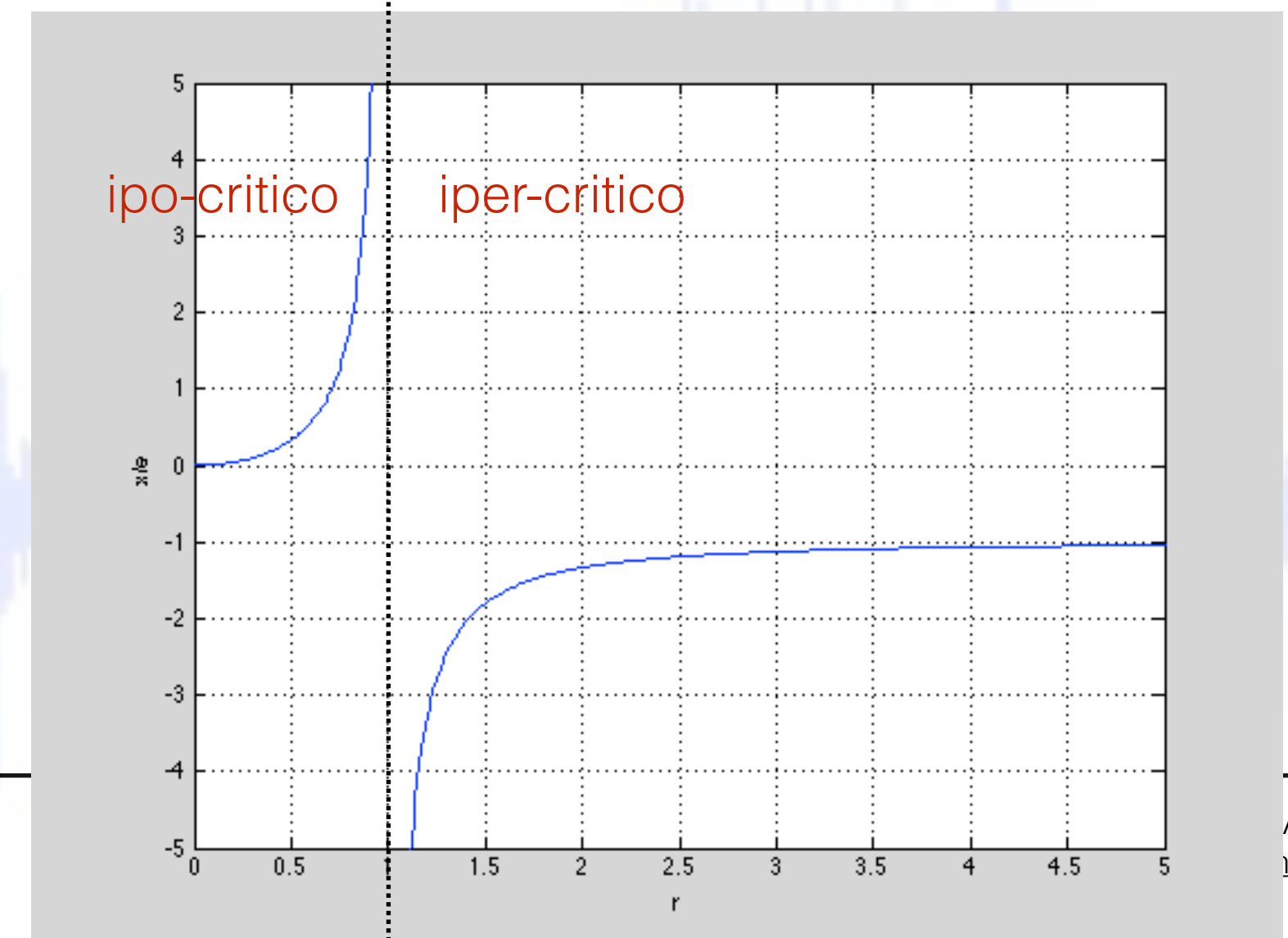
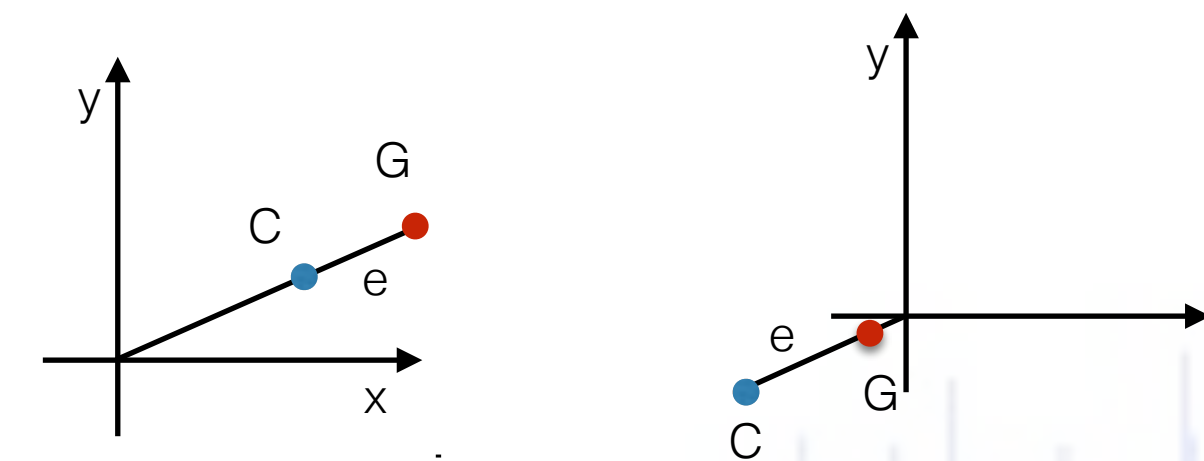
concentriamo l'attenzione sulla prima equazione, e con le solite procedure otteniamo:

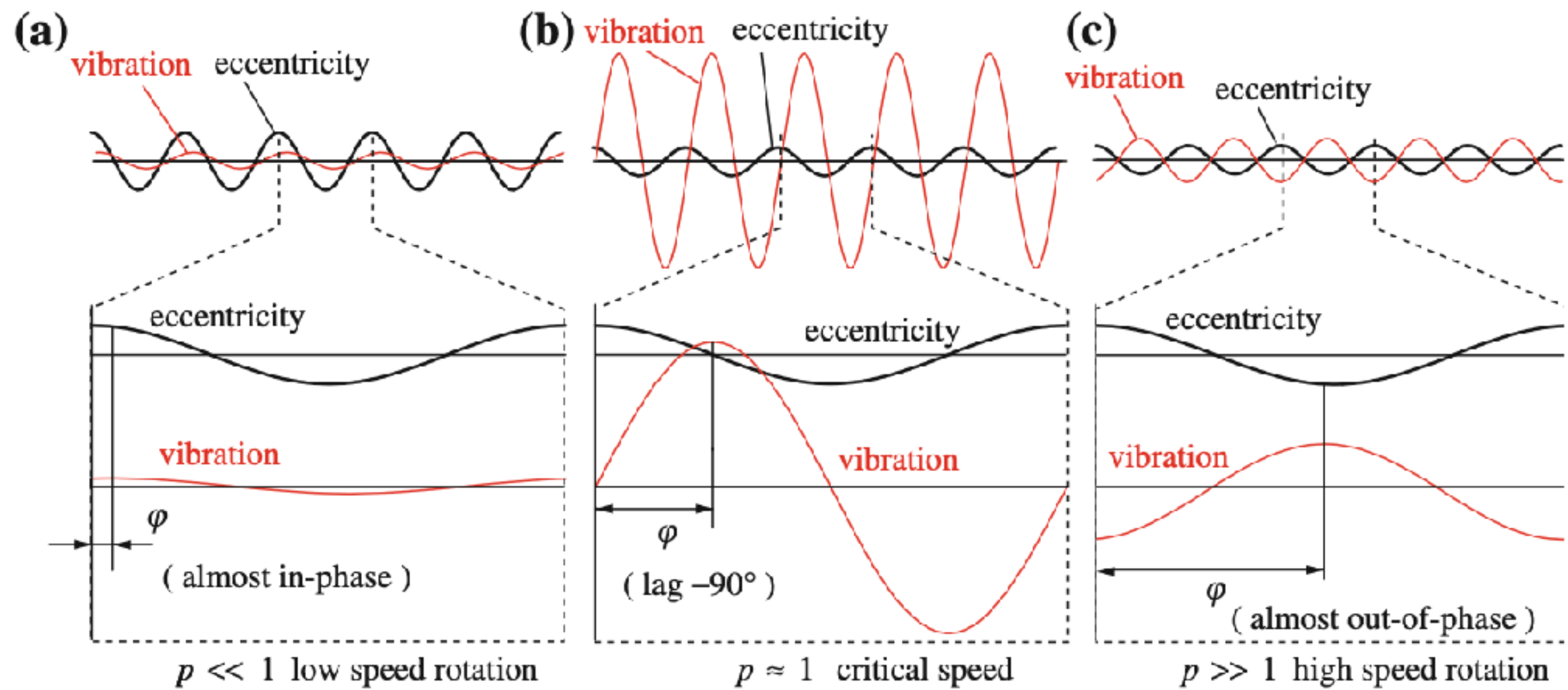
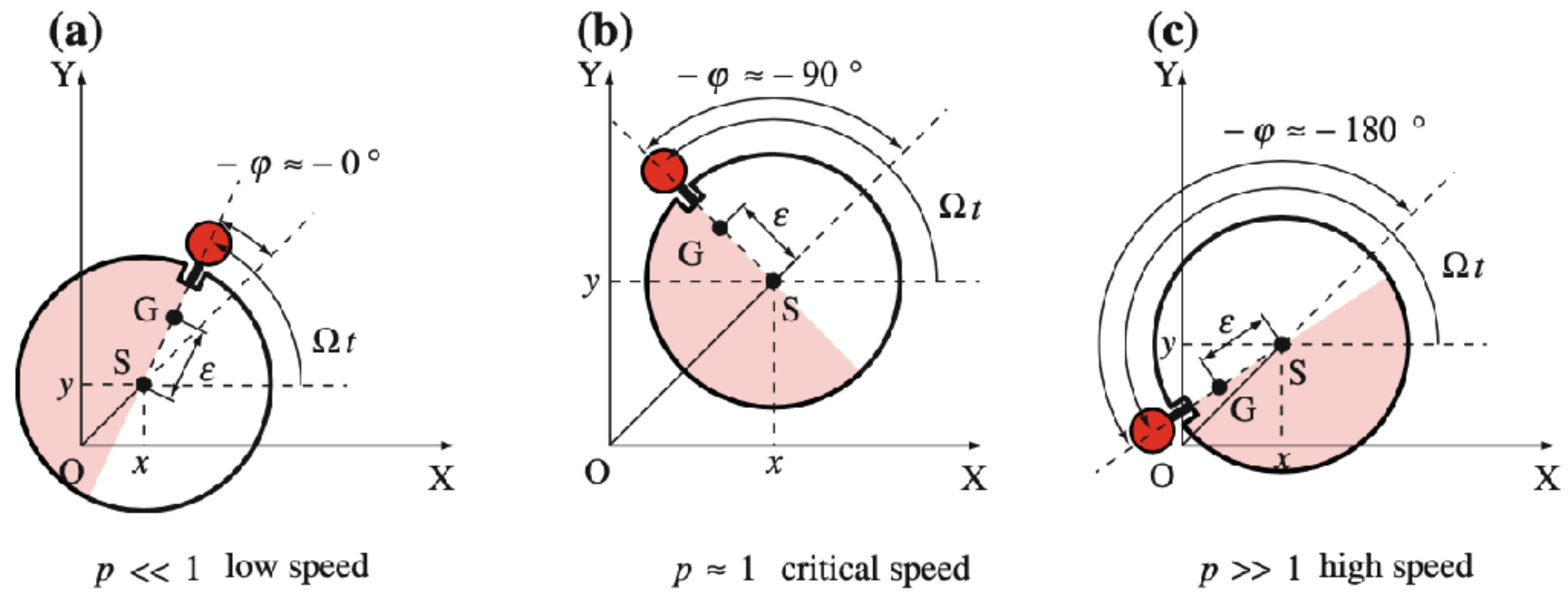
$$x = \frac{me\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \frac{e\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{x}{e} = \frac{r^2}{1 - r^2}$$

per $r=0$.. il rotore ruota attorno a C (centro geometrico)

per $r>\infty$.. il rotore ruota attorno a G (centro di massa) > AUTOCENTRATURA

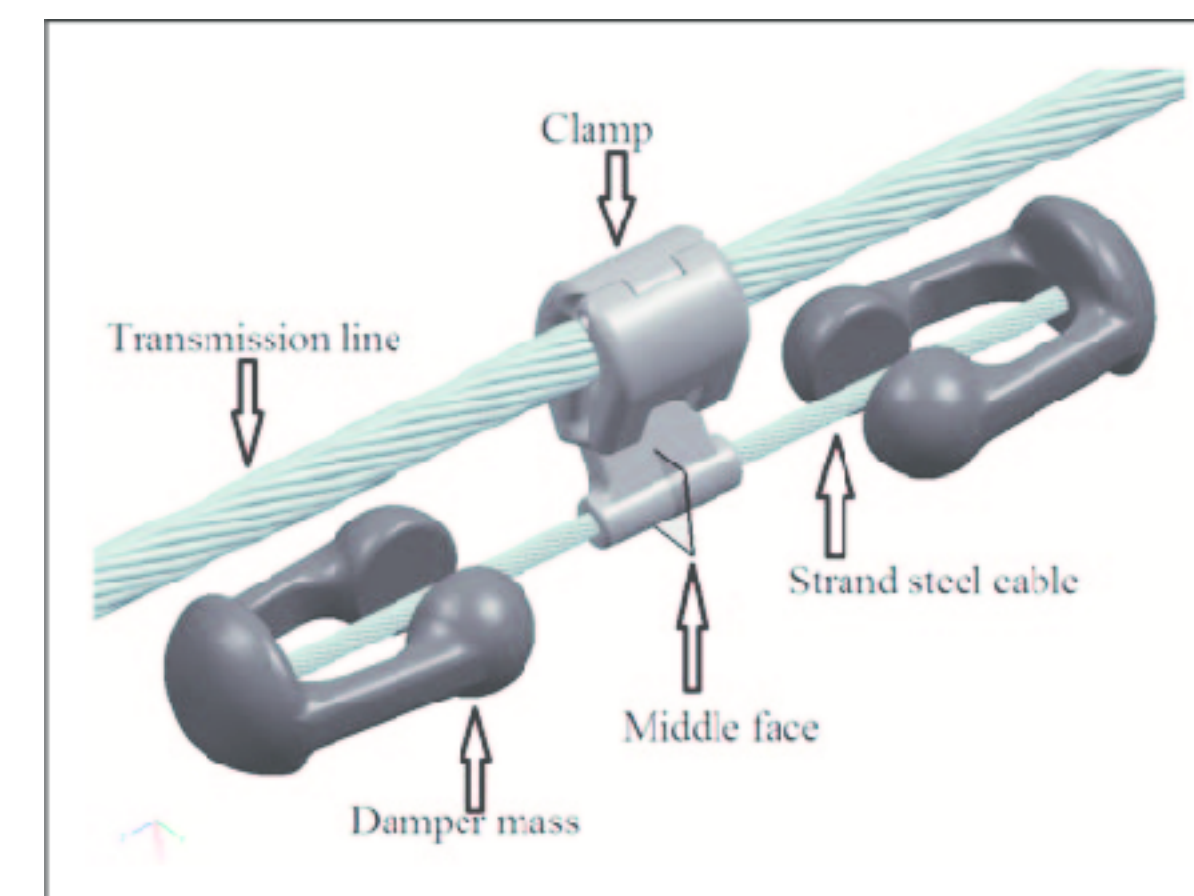
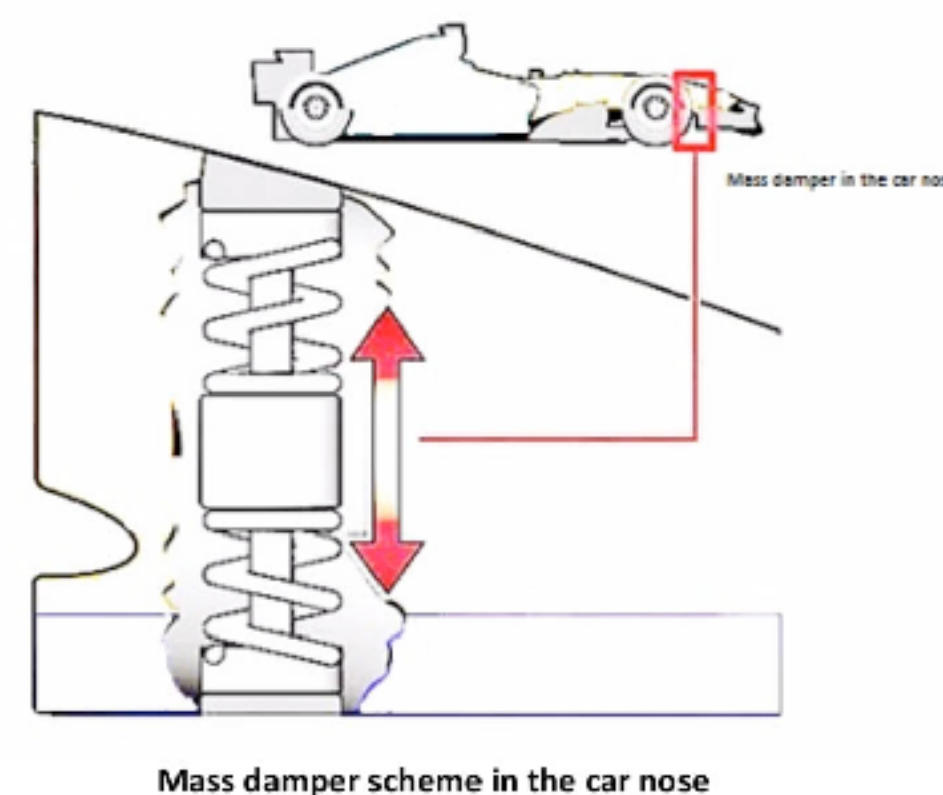
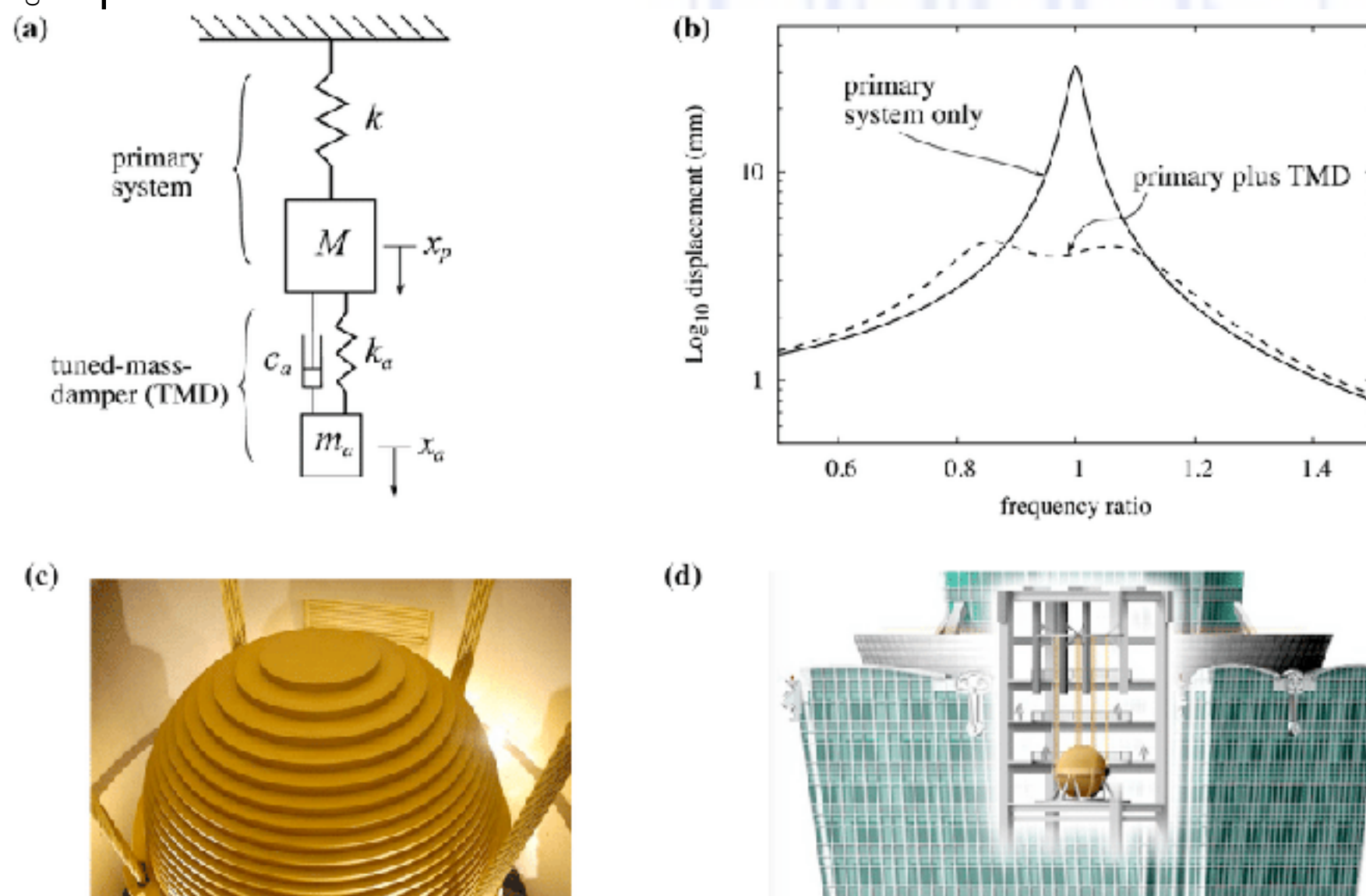




Tranquillizzatori dinamici

I tranquillizzatori sono dei sistemi dinamici secondari aggiunti ad un sistema vibrante primario in modo che questo vibri meno quando sottoposto ad una specifica eccitazione. I tranquillizzatori sono dimensionati per una specifica frequenza di vibrazione!

tuned mass dampers Taipei 101



Si immagini di avere un sistema primario (M,K) eccitato da una forzante F, a questo sistema si aggiunge un sistema secondario (m,k).

$$M\ddot{x}_1 + Kx_1 = F$$

sistema 1gdl



$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 + Kx_1 + k(x_1 - x_2) = F \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

sistema 2gdl

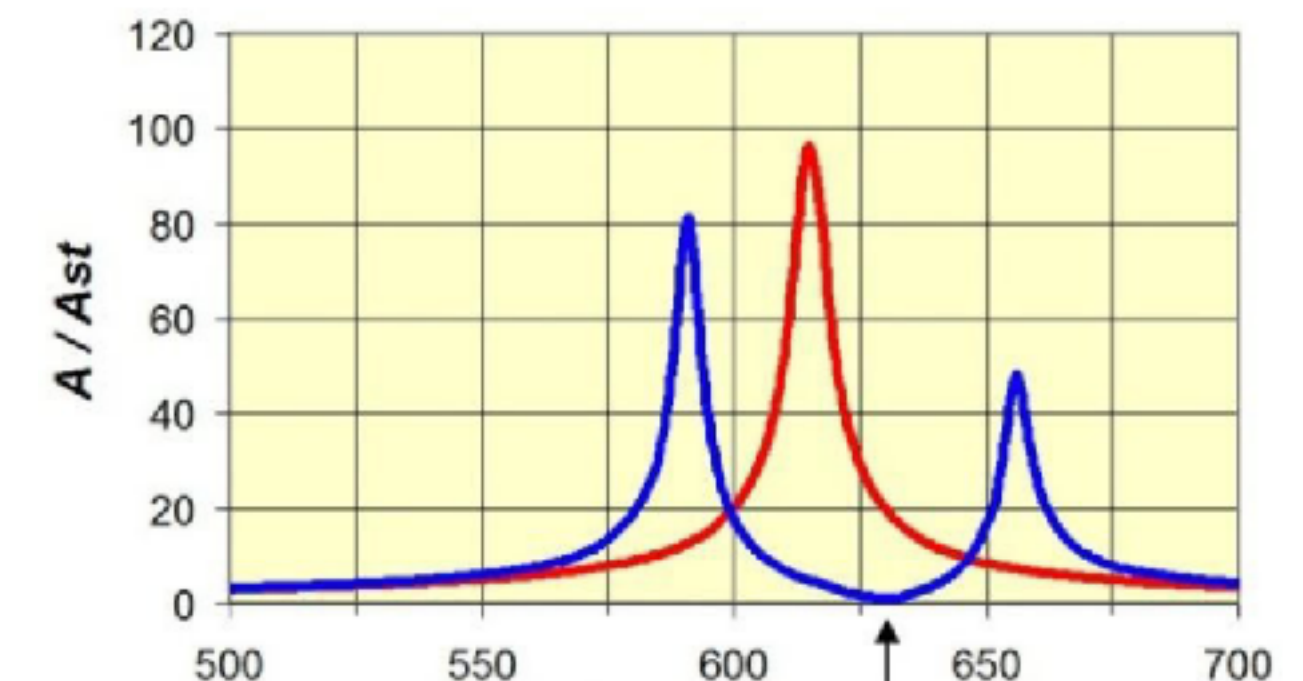
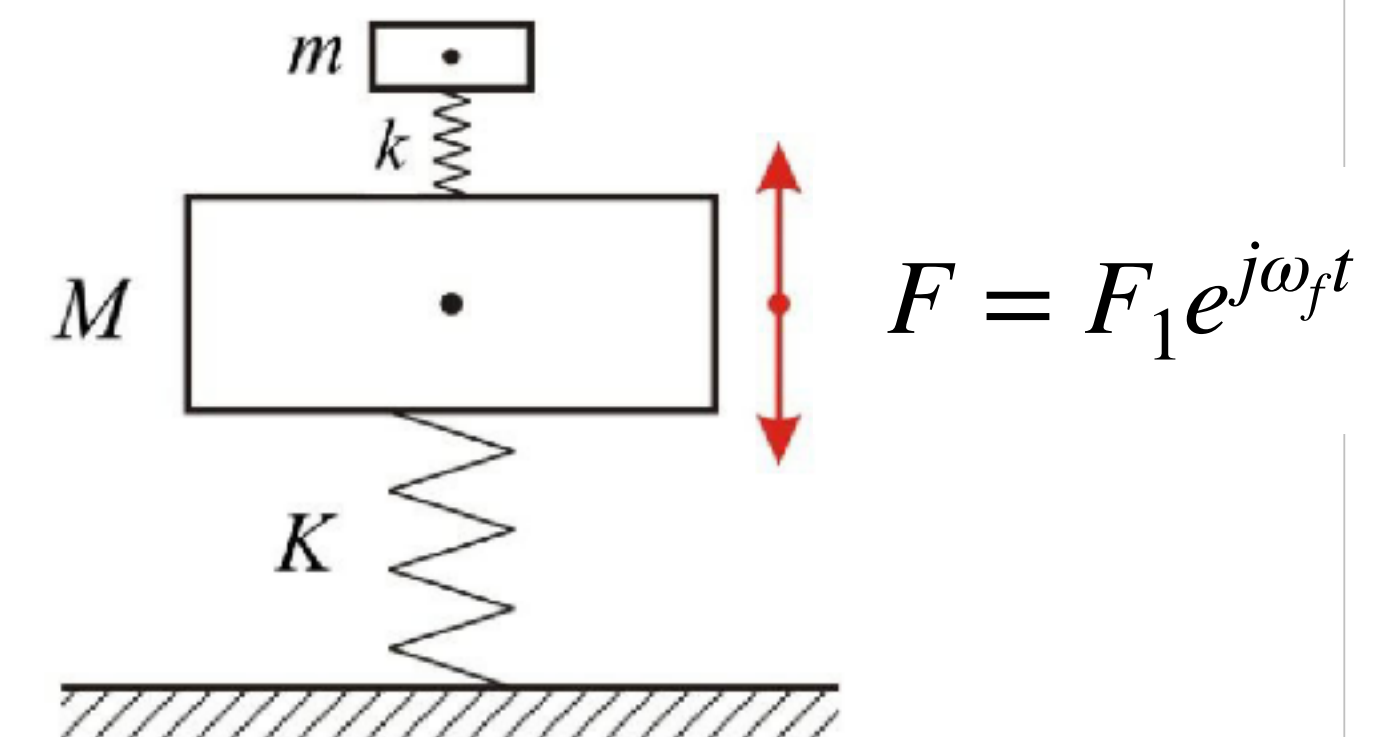


Con le note trasformazioni si può trovare la funzione di risposta X_1/F e cercare i valori di ω che ne annullano il numeratore. (spostamento $X_1=0$)

$$\frac{X_1}{F} = H_{1,1} = \frac{k - \omega^2 m}{(K + k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2}$$

$$\frac{X_1}{F} = 0 \quad @ \omega_f \quad k - \omega_f^2 m = 0 \quad \omega_f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Quando la frequenza naturale del sistema secondario (m,k) coincide con quella la frequenza dell'eccitazione (F), il sistema primario (M) non vibra!



Come si muove la massa secondaria m ? Si calcola con la funzione di trasferimento:

$$\frac{X_2}{F} = H_{2,1} = \frac{k}{(K + k - \omega^2 M)(k - \omega^2 m) - k^2}$$

$$\frac{X_2}{F} = H_{2,1}(\omega_f) = \frac{k}{\underbrace{(K + k - \omega_f^2 M)(k - \omega_f^2 m) - k^2}_{=0}} = -\frac{1}{k} \quad \text{alla frequenza di eccitazione}$$

$$X_2 = -\frac{F}{k}$$

se X_2 deve essere piccolo... k deve essere grande
ma se k è grande, anche m deve esser grande per avere $\omega_2 = \omega_f$

Attenzione a quello che si desidera
e a quello che serve per ottenerlo!

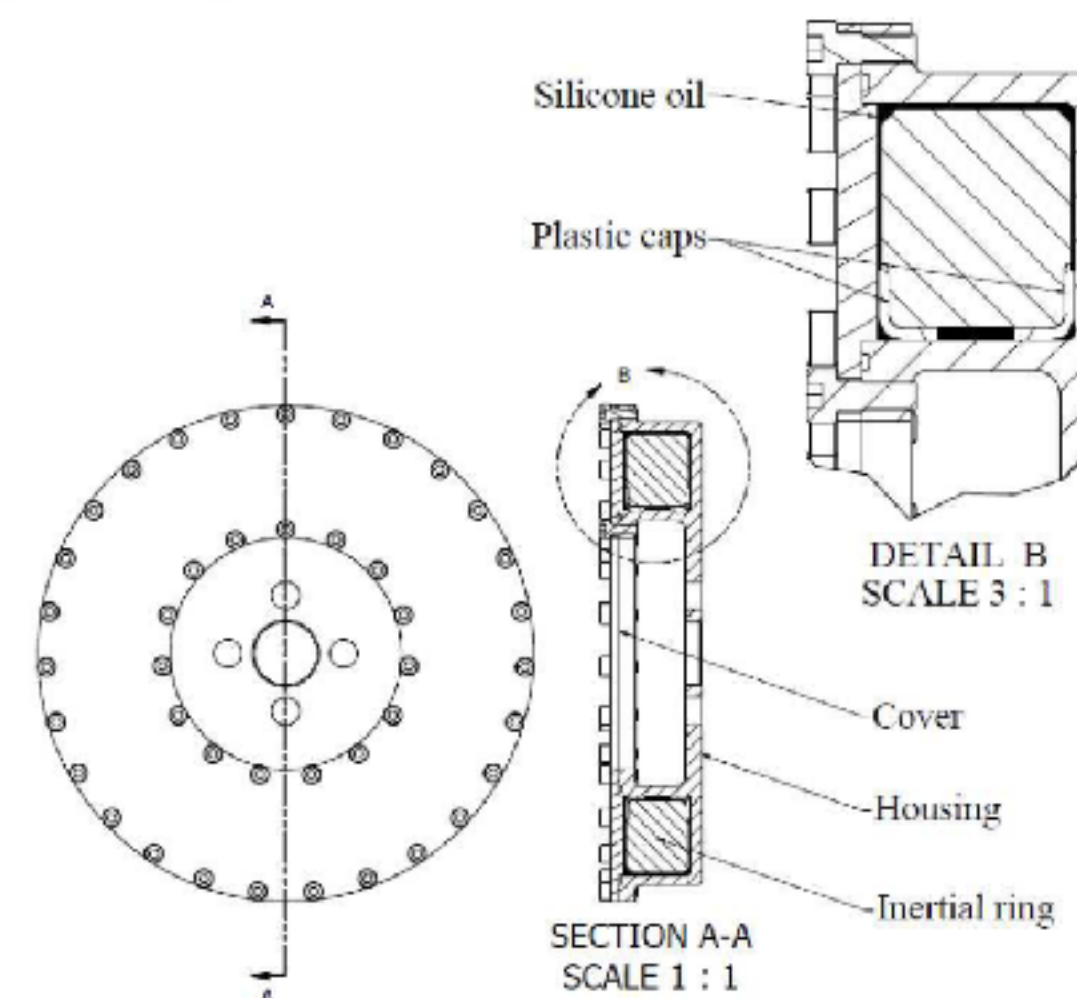


Figure 1. Details of TTMD

Esistono anche
versioni per i sistemi
torsionali

Tranquillizzatori torsionali

Pendolo centrifugo

Riducono la variazione della coppia assicurando una maggiore costanza della velocità dell'albero motore!

Centrifugal pendulum absorber.

The vibrations (1) in the **pendulum mass** generate a force (3) which counteracts the torsional vibrations (2) of the engine.

This keeps engine vibration to a minimum, particularly at low rpm.

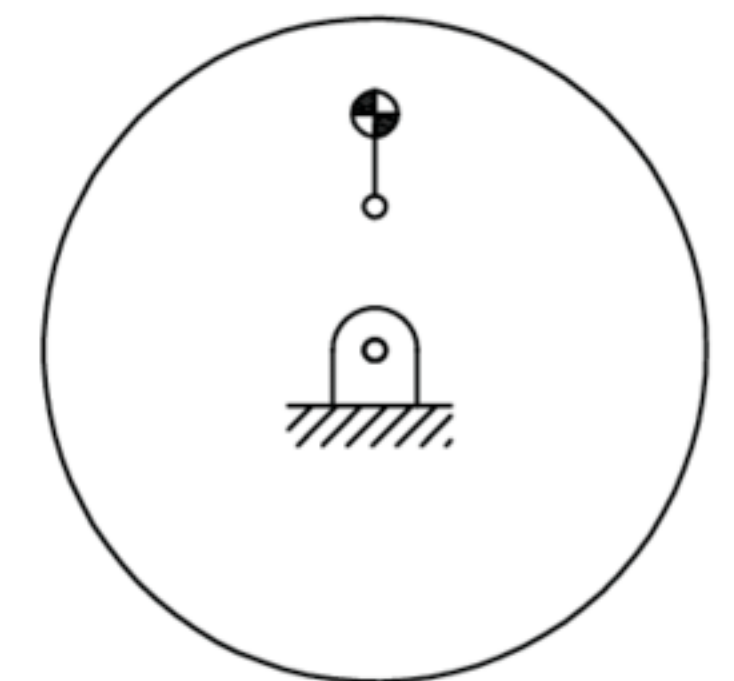
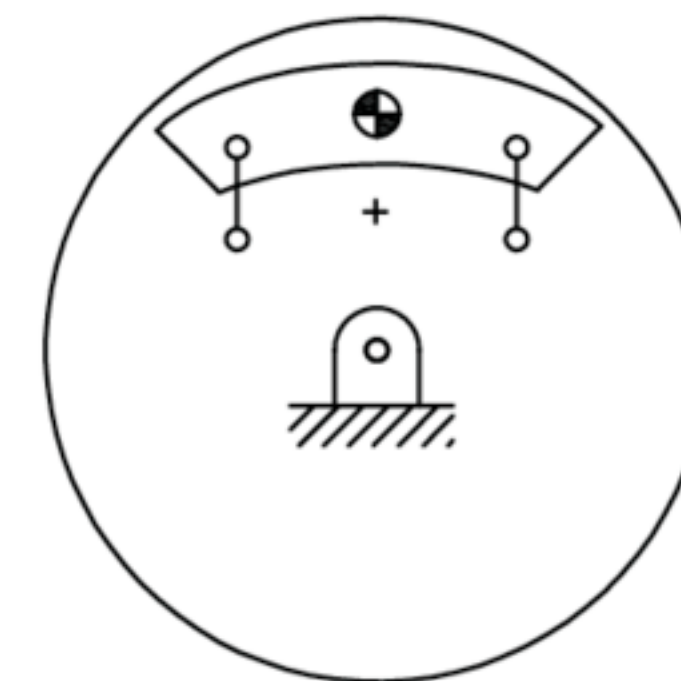
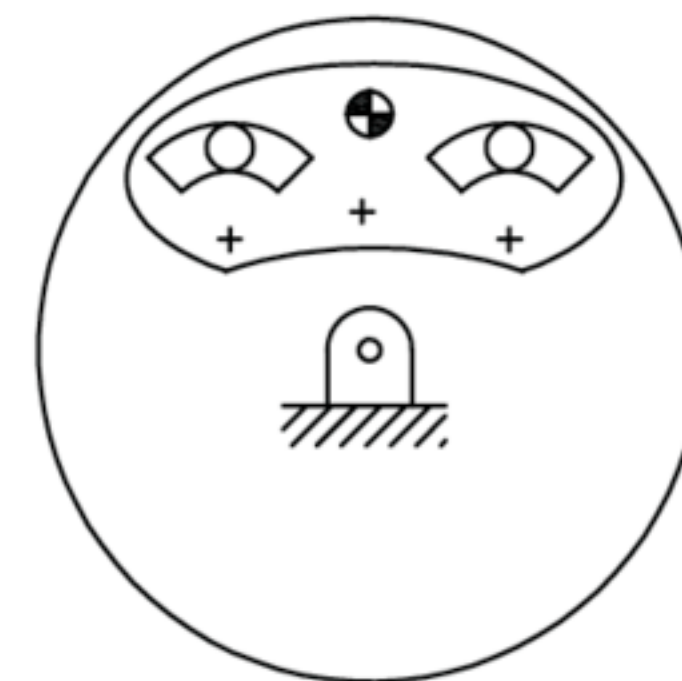
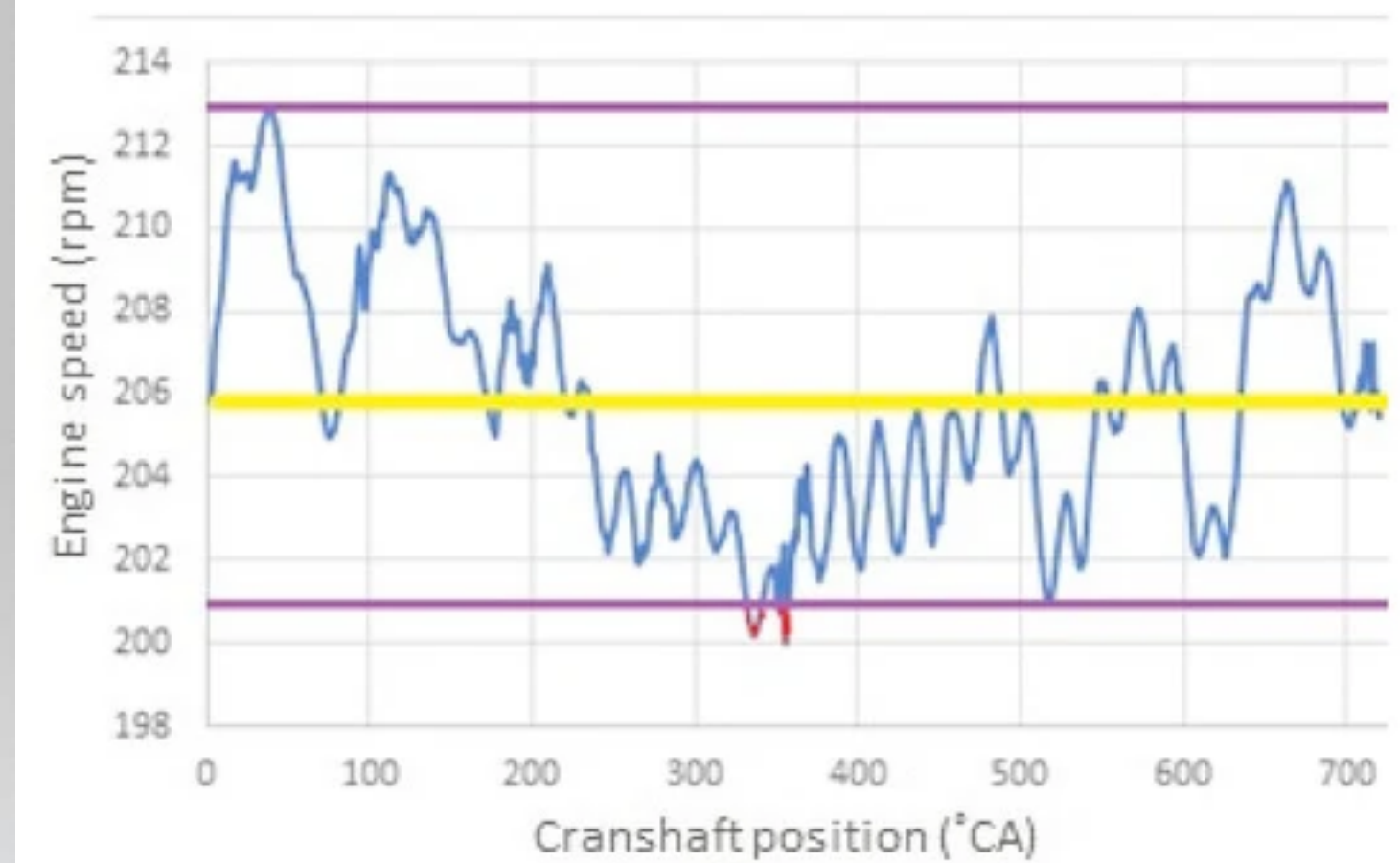
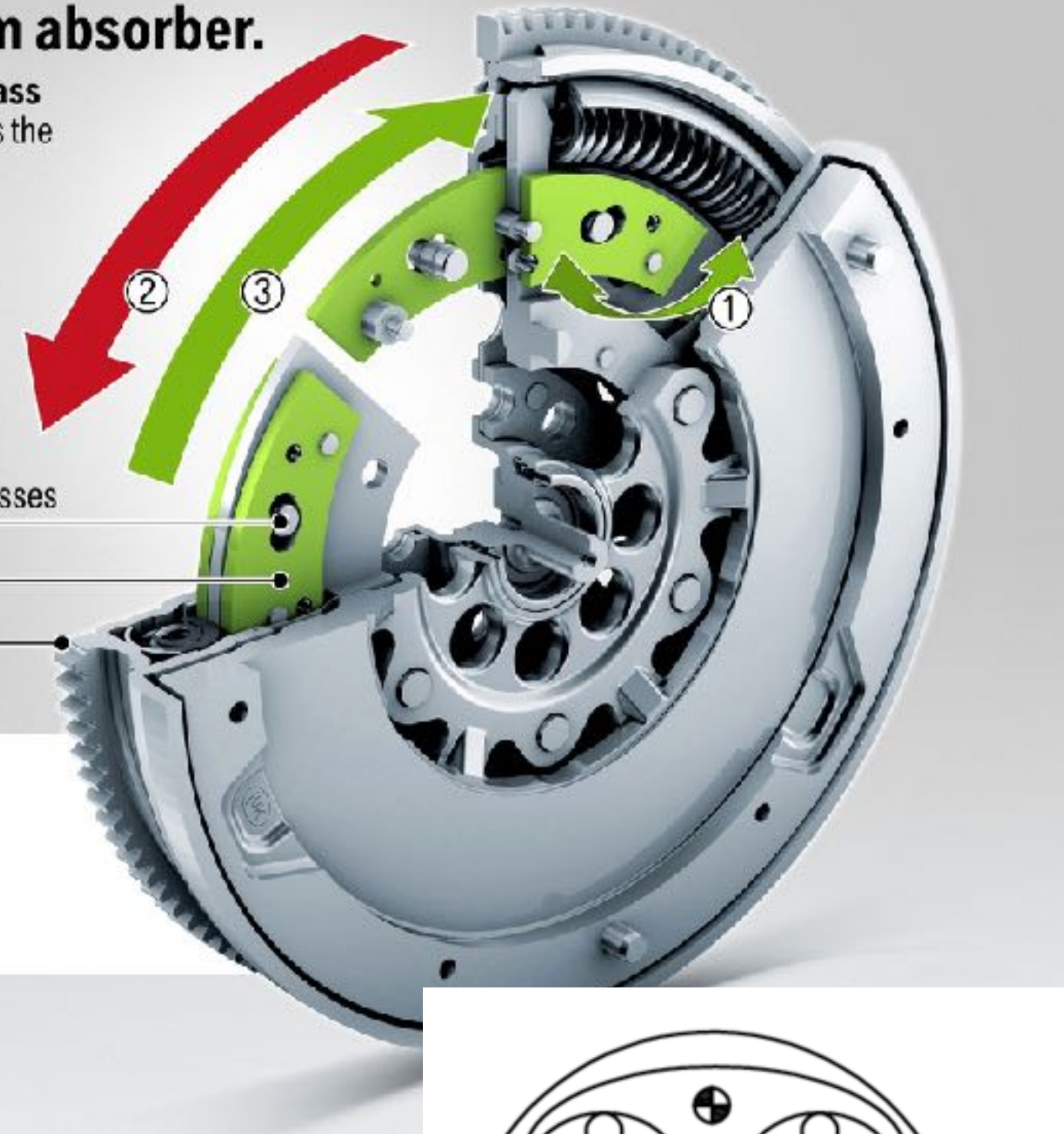
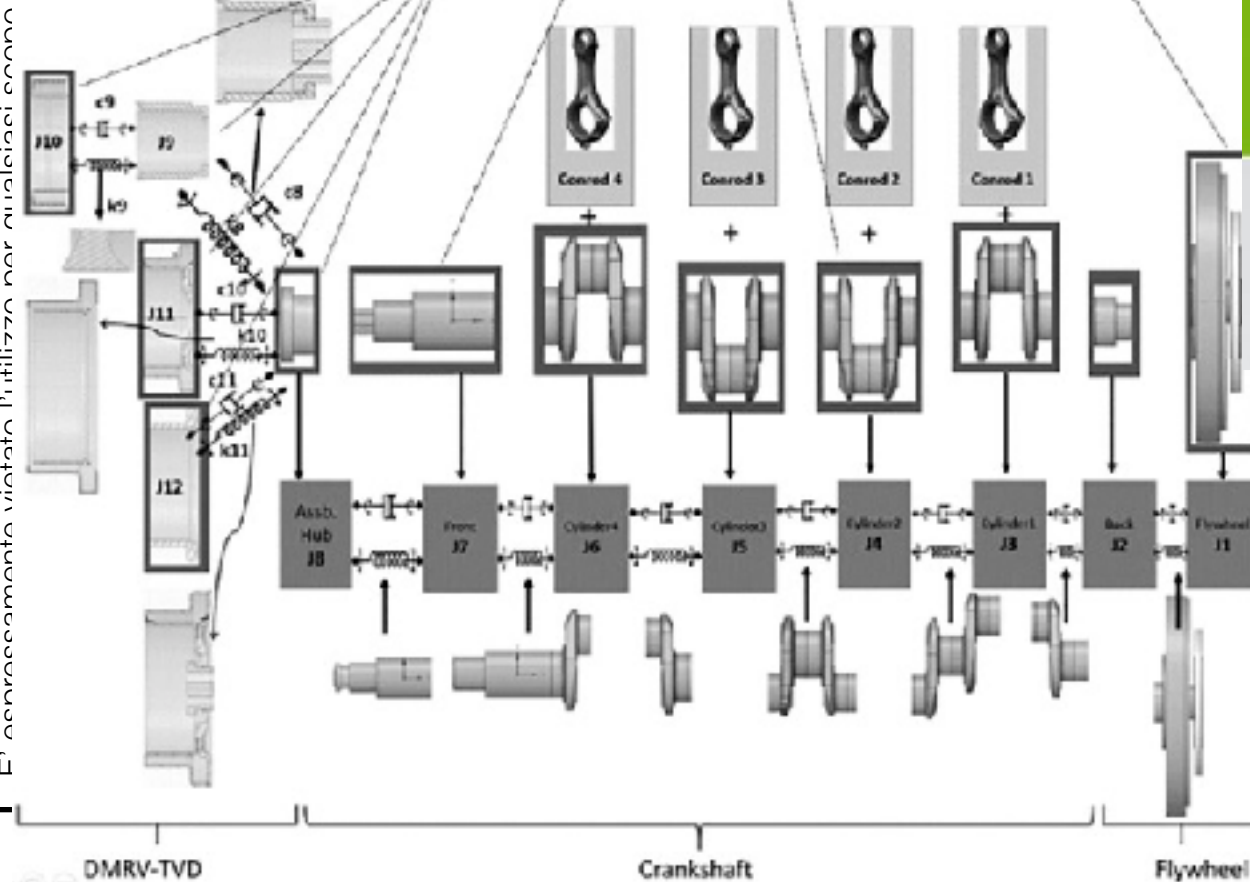
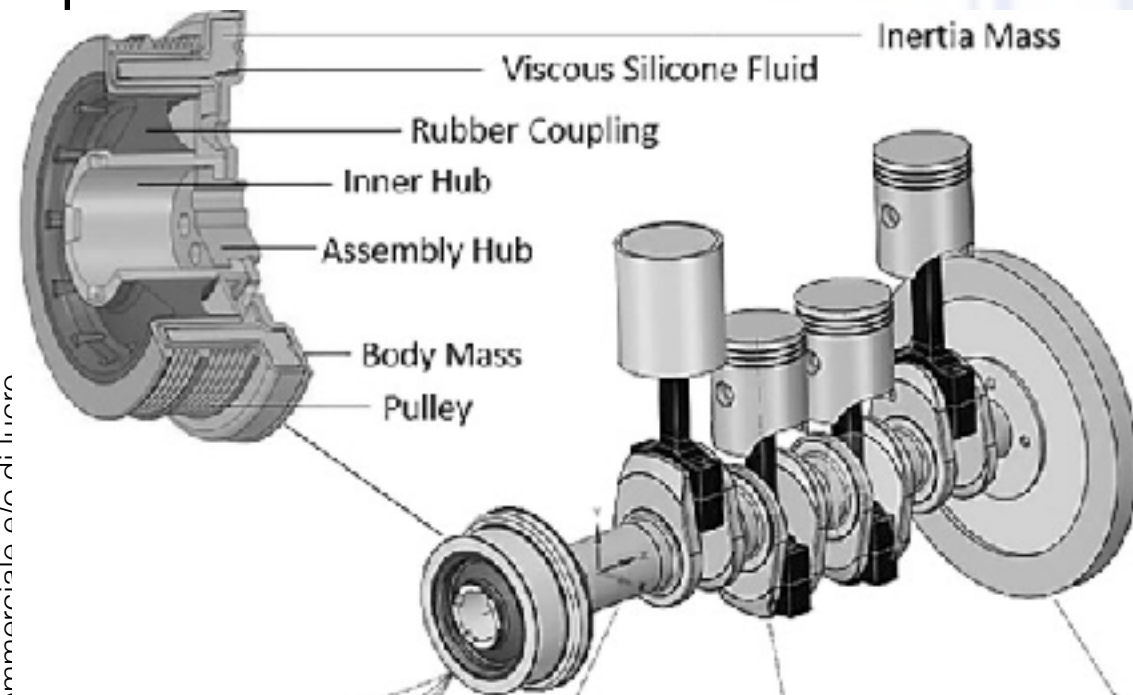
Rotational axes of pendulum masses

Pendulum mass

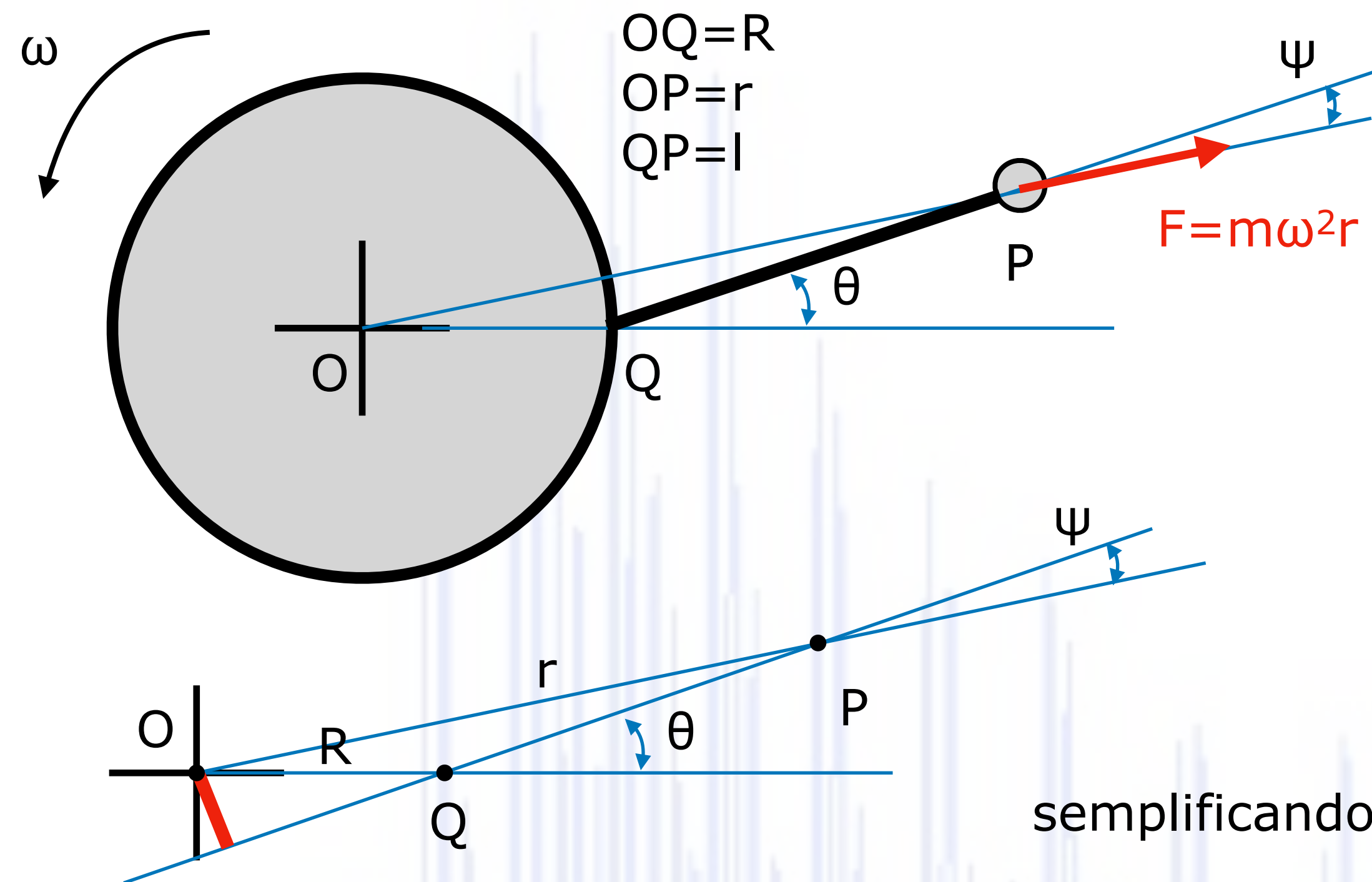
Primary flywheel with sprocket

Improved engine refinement and comfort.

Reduced fuel consumption, since drivers are encouraged to drive at lower rpm.



Si consideri un sistema costituito da un volano che ruota con velocità ω (non costante) a cui è attaccato un pendolo di lunghezza l e massa m , soggetto alla forza centrifuga F (funzionerà come uno smorzatore sintonizzato)



Per il pendolo potremmo scrivere:

$$ml^2\ddot{\theta} + F\sin\psi l = 0$$

esiste la relazione tra gli angoli $R\sin\theta = r\sin\psi$

$$\sin\psi = \frac{R}{r}\sin\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} + F\frac{R}{r}\sin\theta l = 0$$

$$ml^2\ddot{\theta} + m\omega^2 r \frac{R}{r}\sin\theta l = 0$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \frac{R}{l}\sin\theta = 0$$

semplificando:

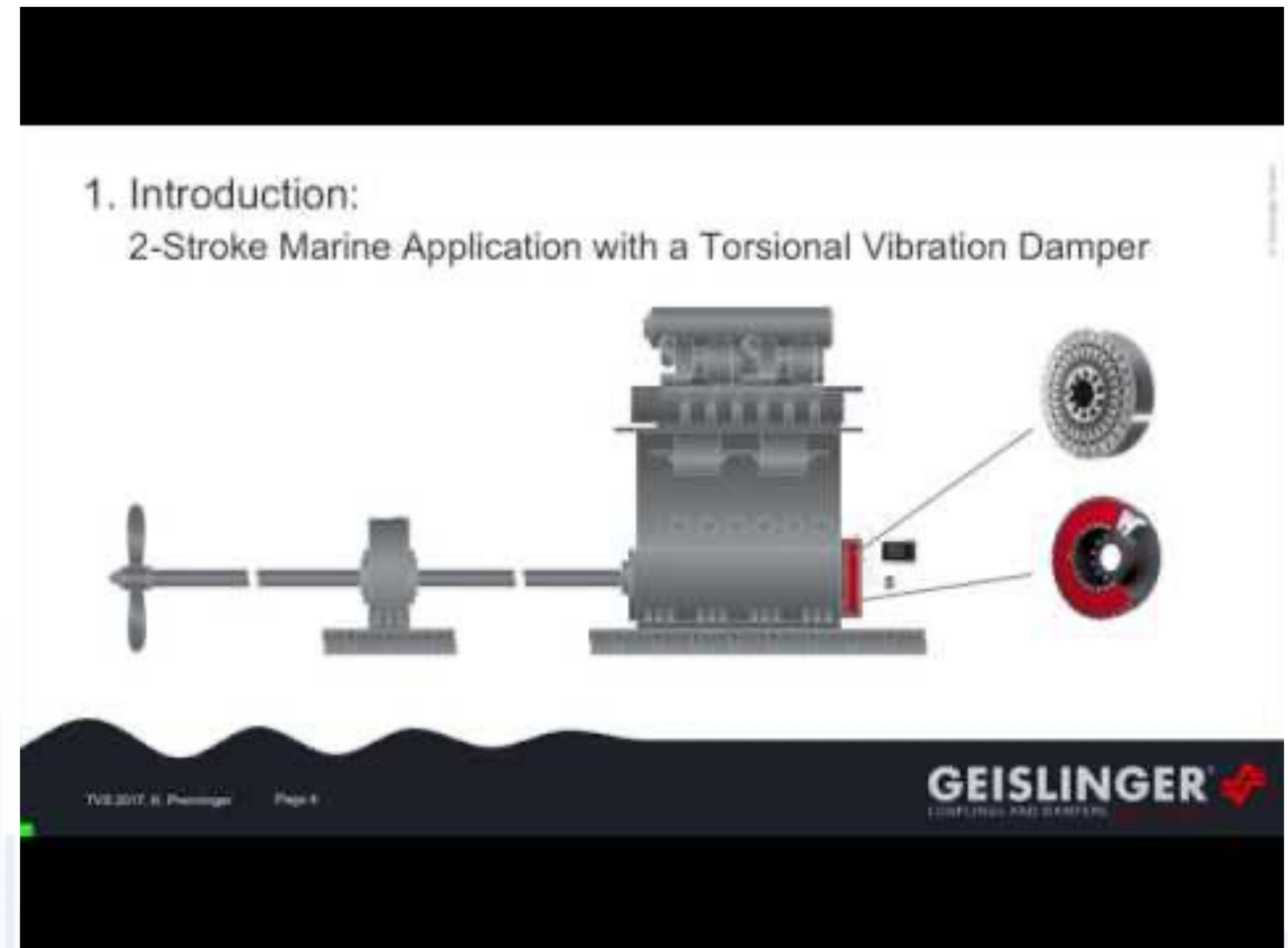
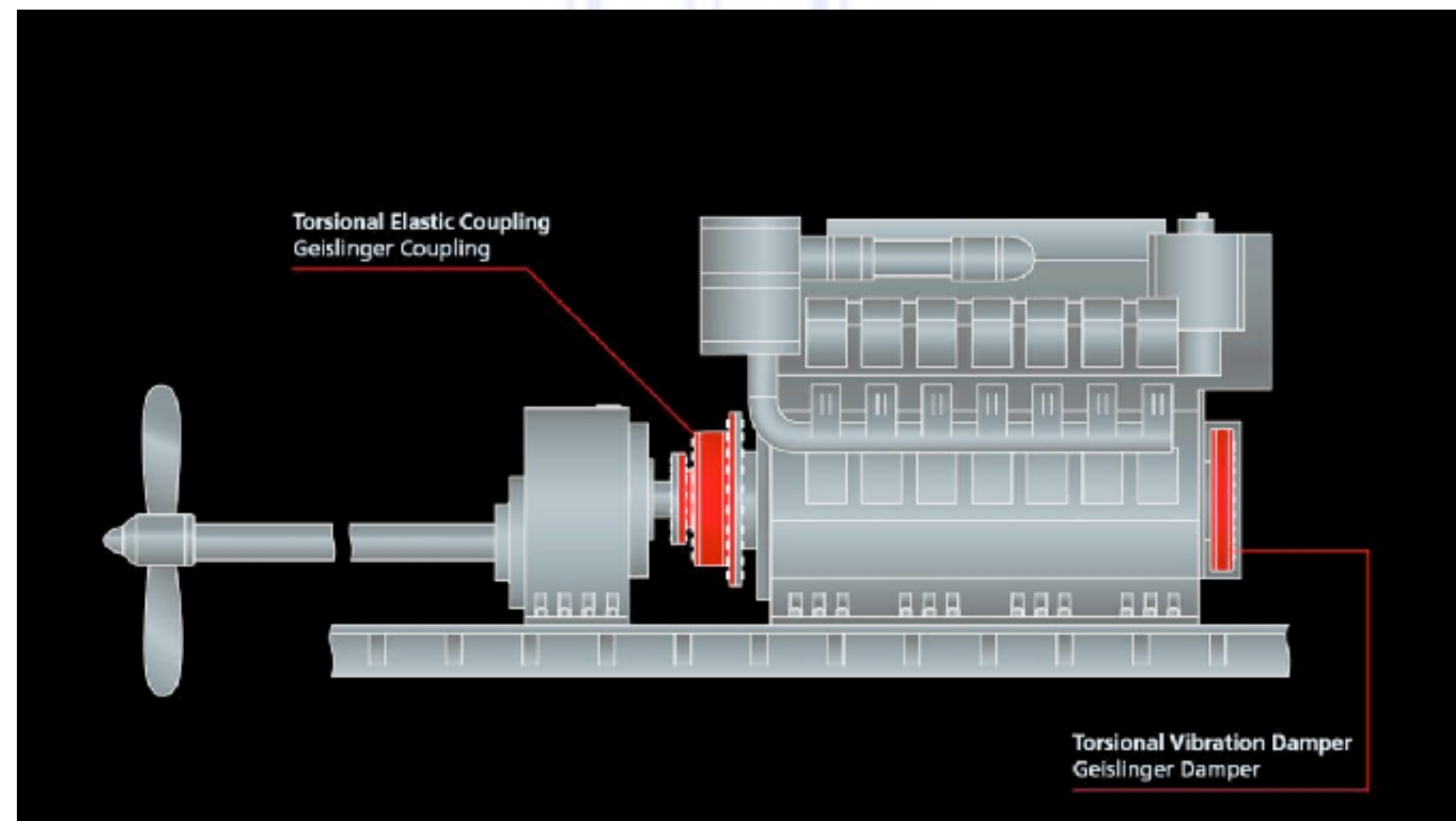
linearizzando:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \frac{R}{l}\theta = 0$$

si ottiene l'equazione della frequenza di oscillazione del pendolo centrifugo (sistema secondario) in funzione delle sue caratteristiche geometriche e dell'eccitazione

$$\omega_p = \omega \sqrt{\frac{R}{l}}$$

Le applicazioni degli smorzatori di vibrazione torsional sono molteplici !



Alcune estensioni sulla trasformazione modale

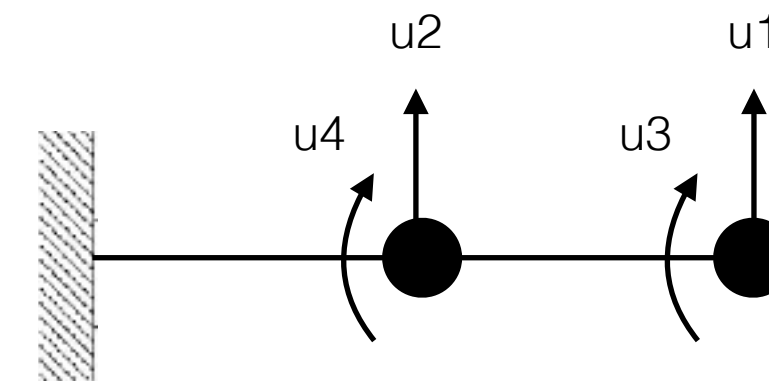
Le matrici di massa e rigidezza sono sempre simmetriche! (Teorema di Maxwell)

Le matrici sono definite positive (T e V sono positivi per ogni spostamento diverso da 0)

La matrice di rigidezza può essere semidefinita positiva!

Se il $\det[k]=0$, il rango < ordine ci saranno anche modi di corpo rigido (V uguale a 0)
altrimenti solo modi flessibili (V diverso 0)

La matrice di massa può essere semidefinita positiva!
nel caso in cui i gdl non hanno informazioni inerziali
(es i punti materiali hanno massa ma non inerzia angolare)



$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono tra loro ortogonali e costituiscono una base ortonormale con cui descrivere tutte le deformate del sistema

Gli autovalori si ordinano in ordine crescente, possono essere anche nulli e ripetuti $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \dots \leq \omega_N^2$

Gli autovalori nulli sono quelli relativi ai modi di corpo rigido, max 6 in un corpo nello spazio

Gli autovalori ripetuti si presentano nel caso in cui la struttura abbia piani di simmetria



Autovettori ortogonali

Si considerino due autovalori diversi ω_r, ω_s e i loro associati autovettori $\Phi_r,$

$$\omega_r \neq \omega_s$$

Per ciascuno di questi, valgono le seguenti relazioni:

$$([k] - \omega^2[m])\{X\} = 0 \quad ([k] - \omega_i^2[m])\{\phi_i\} = 0$$

$$[k]\{\phi_r\} = \omega_r^2[m]\{\phi_r\}$$

$$[k]\{\phi_s\} = \omega_s^2[m]\{\phi_s\}$$

$$\{\phi_s\}^T[k]\{\phi_r\} = \omega_r^2\{\phi_s\}^T[m]\{\phi_r\}$$

premultiplicazione
per autovettore diverso

$$\{\phi_r\}^T[k]\{\phi_s\} = \omega_s^2\{\phi_r\}^T[m]\{\phi_s\}$$

$$\{\phi_r\}^T[k]\{\phi_s\} = \omega_r^2\{\phi_r\}^T[m]\{\phi_s\}$$

trasposizione

$$\{\phi_r\}^T[k]\{\phi_s\} = \omega_s^2\{\phi_r\}^T[m]\{\phi_s\}$$

$$0 = (\omega_s^2 - \omega_r^2)\{\phi_r\}^T[m]\phi_s\}$$

$$\{\phi_r\}^T[m]\phi_s\} = 0$$

$$\{\phi_r\}^T[k]\phi_s\} = 0$$

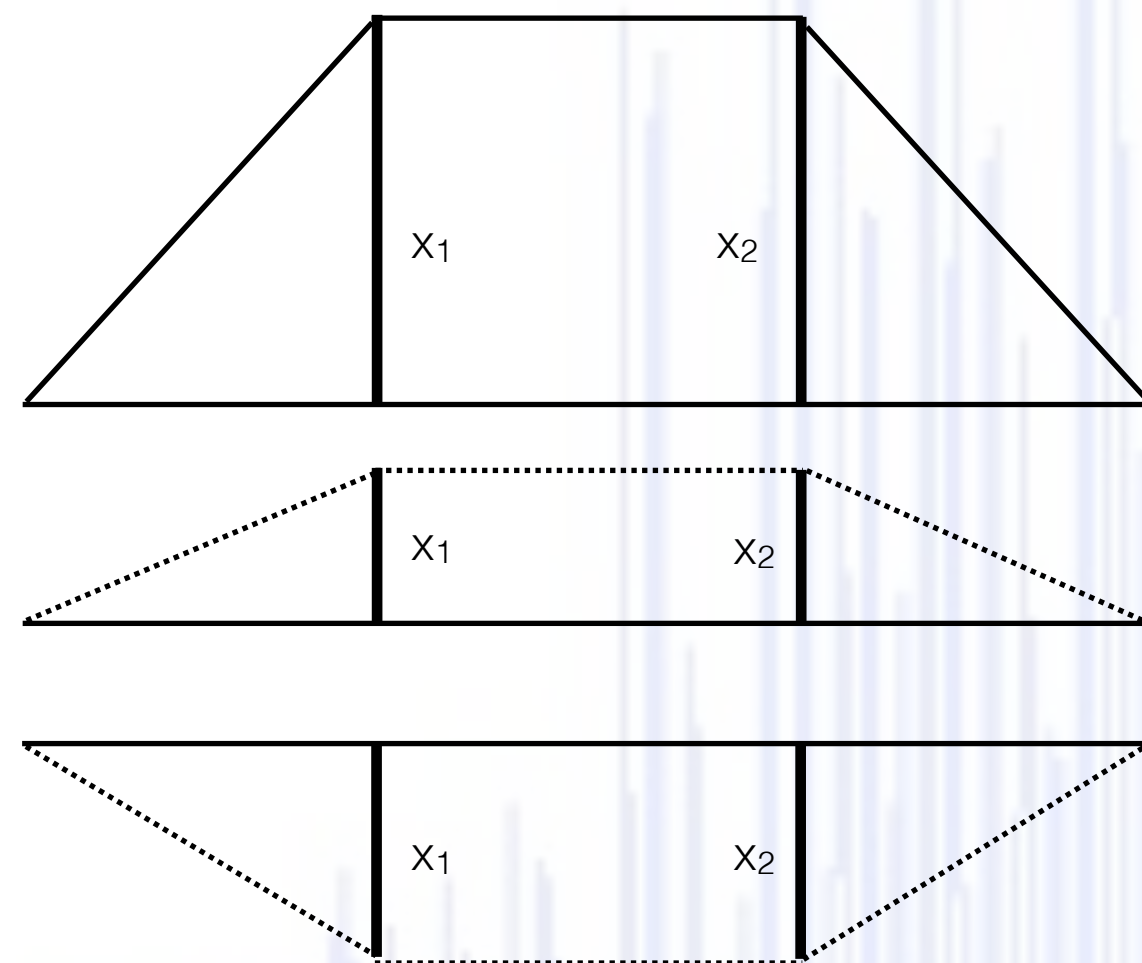
gli autovettori sono
ortogonali !

Scalatura degli autovettori

Dal momento che l'autovalore annulla il determinante della matrice di rigidezza dinamica, (rango è minore ordine N), una riga (colonna) del sistema dei equazioni è linearmente dipendente dalle altre!

Gli autovettori possono essere definiti con N-1 elementi .. coefficienti scalaggio β_i

Gli autovettori possono essere definiti a meno di una costante moltiplicativa!



Esistono diverse strategie di scalaggio:

Assegnare ad una coordinata un valore definito

$$\{\phi_i\}_r = 1$$

Assegnare alla coordinata con spostamento max un valore definito

$$\{\phi_{max}\}_r = 1$$

Assegnare alla massa modale un valore definito*

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_r = 1$$

Assegnare alla norma del vettore un valore definito (euclidea, infinito..)

$$\|\{\phi_i\}_r\|_n = 1$$

* solitamente preferita

Calcolo degli autovettori, siano distinti o ripetuti

Si parte dall'equazione che lega autovalori e auto vettori In condizioni di risonanza ω_r si può scrivere:

$$([k] - \omega^2[m])\{X\} = 0$$

$$([k] - \omega_r^2[m])\{\phi_r\} = 0$$

Assegno arbitrariamente
il valore unitario

La matrice di rigidezza dinamica può essere
partizionata opportunamente:

$$\begin{matrix} 1 \times 1 & 1 \times N-1 & 1 \times 1 \\ \begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} 1 \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r & = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ N-1 \times 1 & N-1 \times N-1 & N-1 \times 1 \end{matrix}$$

Se ω_r è un autovalore distinto,
il rango di $[D(\omega_r)]$ sarà $N-1$, per cui
 $[D_{bb}(\omega_r)]$ è sicuramente invertibile,
e si potrà scrivere:

$$\{\phi_b\} = -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1}\{D_{ba}(\omega_r)\}$$

L'auto vettore completo sarà uguale a :

$$\{\phi\}_r = \begin{Bmatrix} 1 \\ -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1}\{D_{ba}(\omega_r)\} \end{Bmatrix}$$

..se gli autovalori son ripetuti ($\Delta\omega < 1\%$) si modifica la procedura tenendo conto dalla molteplicità p dell'autovalore.

I queste condizioni il rango della matrice di rigidezza dinamica $[D(\omega_r)]$ sarà $N-p$, si partizione la matrice in maniera da avere una sottomatrice $[D_{bb}(\omega_r)]$ sicuramente invertibile

$$\begin{array}{ccccc} \text{pxp} & \text{pxN-p} & \text{px1} & & \\ \begin{bmatrix} D_{aa}(\omega_r) & D_{ab}(\omega_r) \\ D_{ba}(\omega_r) & D_{bb}(\omega_r) \end{bmatrix} & \begin{Bmatrix} \phi_a \\ \phi_b \end{Bmatrix}_r & = & \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} & \\ \text{Nxp} & \text{N-pxN-p} & \text{N-px1} & & \end{array}$$

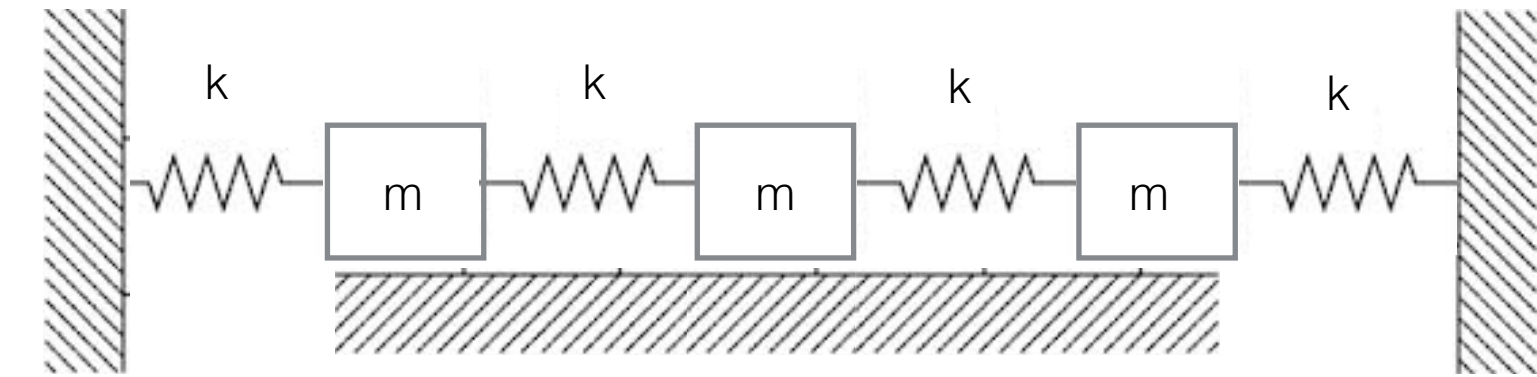
Sviluppando la seconda riga del sistema:

$$\{\phi_b\} = -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1}[D_{ba}(\omega_r)]\{\phi_a\}$$

Bisogna fare in modo che i Φ_r restino ortogonali tra loro, per farlo, si definiscono p vettori Φ_a , diversi tra loro da sostituire nella formula precedentemente trovata per Φ_b

$$\{\phi_a\}_r = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{Bmatrix}_r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}_r \quad \{\phi_a\}_{r+1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_a\}_{r+p-1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Esempio: sistema 3gdl non smorzato, non forzato



Si ipotizzi
 $m=1$
 $k=1$

$$[D(\omega)] = \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \omega^2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(\omega)] = (2 - \omega^2) \begin{bmatrix} 2 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$\det[D(\omega)] = (2 - \omega^2)(\omega^4 - 4\omega^2 + 2)$$

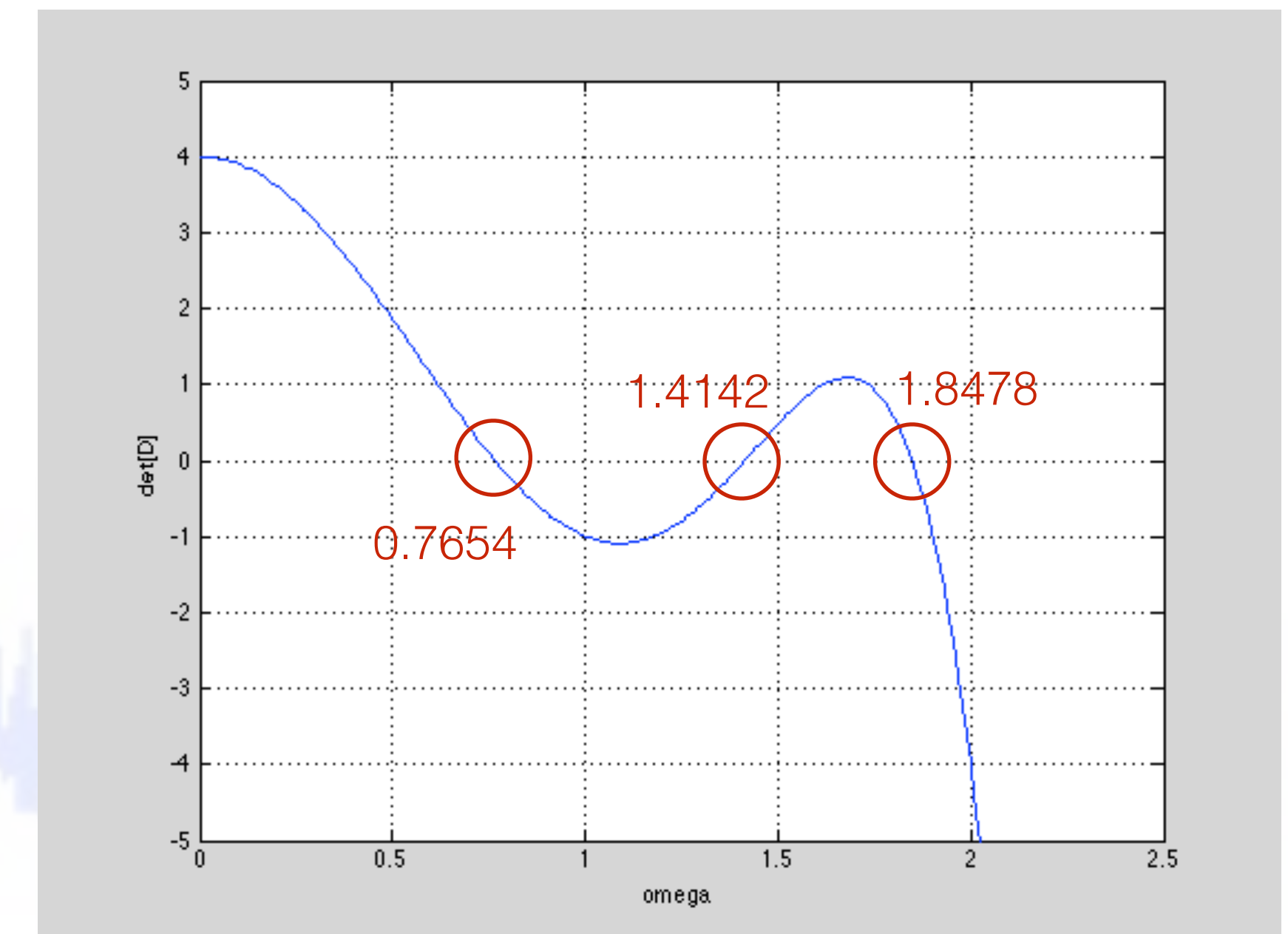
tre autovalori distinti!

..con il comando eig in Matlab

```
eivalue =
    0.5858    0    0
    0    2.0000    0
    0    0    3.4142
```

Si calcolino, con le formule appena viste l'autovettore associato con ω_2

andamento di $\det[D(\omega)]$



$$[D(\omega_2)] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{\phi_b\} = -[D_{bb}(\omega_r)]^{-1} \{D_{ba}(\omega_r)\}$$

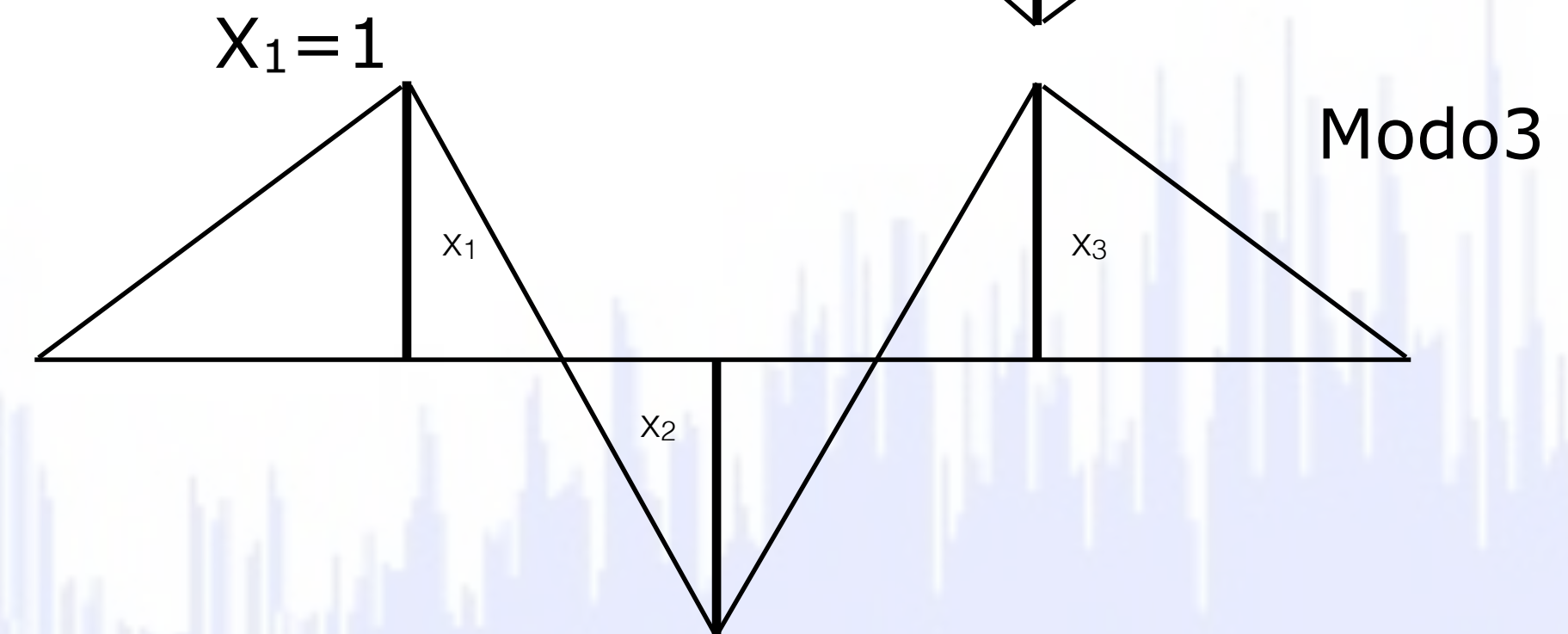
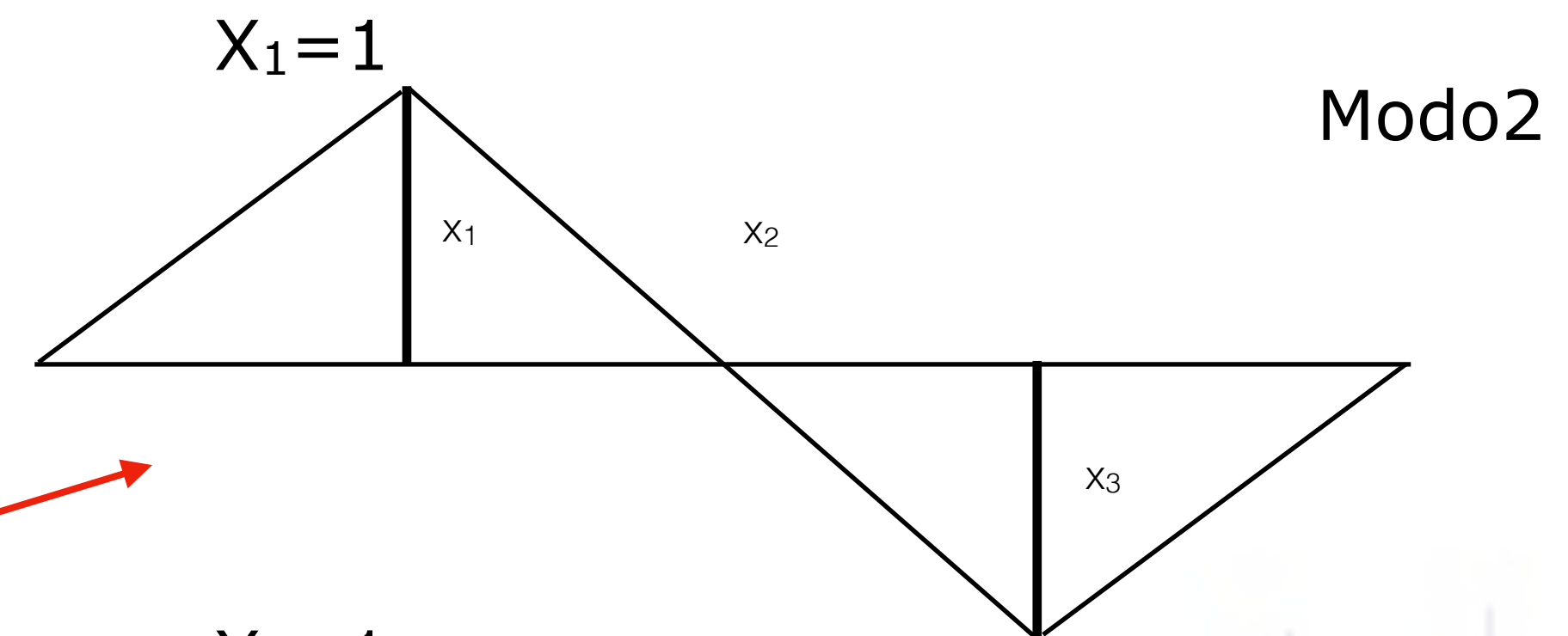
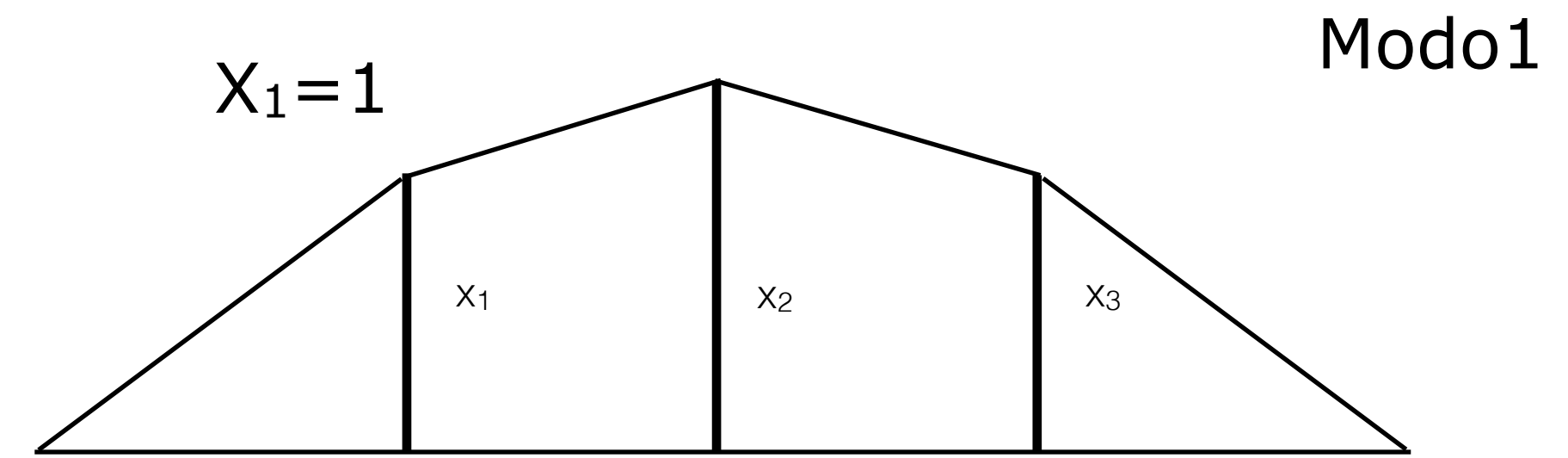
$$\{\phi_b\} = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

..con il comando eig in Matlab

eivector =

1.0000	1.0000	1.0000
1.4142	-0.0000	-1.4142
1.0000	-1.0000	1.0000



Si provi a scalare gli eivector in modo da avere la matrice modale unitaria..

Condizioni iniziali nella trasformazione modale

NB la notazione dei vettori
è stata tralasciata!

All'equazione del moto in coordinate fisiche bisogna aggiungere le C.I. per ottenere la soluzione specifica del moto.

$$\begin{matrix} nx1 & nx1 \\ \left\{ \begin{array}{l} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{array} \right. \end{matrix}$$

Si devono trasportare le condizioni iniziali in coordinate fisiche alle coordinate modali, sfruttando la matrice modale!

$$\begin{matrix} nx1 & nxn & nx1 \\ \{x\} = [\phi]\{q\} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x(0) = [\phi]q_0 \\ \dot{x}(0) = [\phi]\dot{q}_0 \end{cases}$$

moltiplicando tutto per $[\phi]^T[m]$ otteniamo

$$\begin{cases} [\phi]^T[m]x(0) = [\phi]^T[m][\phi]q_0 \\ [\phi]^T[m]\dot{x}(0) = [\phi]^T[m][\phi]\dot{q}_0 \end{cases}$$

ricordando che $[\phi]^T[m][\phi] = [M]$

$$\begin{matrix} nx1 & nxn & nxn & nx1 \\ \left\{ \begin{array}{l} q_0 = \frac{1}{M}[\phi]^T[m]x(0) \\ \dot{q}_0 = \frac{1}{M}[\phi]^T[m]\dot{x}(0) \end{array} \right. \end{matrix}$$

nello specifico per il modo r

$$\begin{matrix} 1x1 & 1xn & nxn & nx1 \\ \left\{ \begin{array}{l} q_{0r} = \frac{1}{M_r} \{\phi_r\}^T [m]x(0) \\ \dot{q}_{0r} = \frac{1}{M_r} \{\phi_r\}^T [m]\dot{x}(0) \end{array} \right. \end{matrix}$$

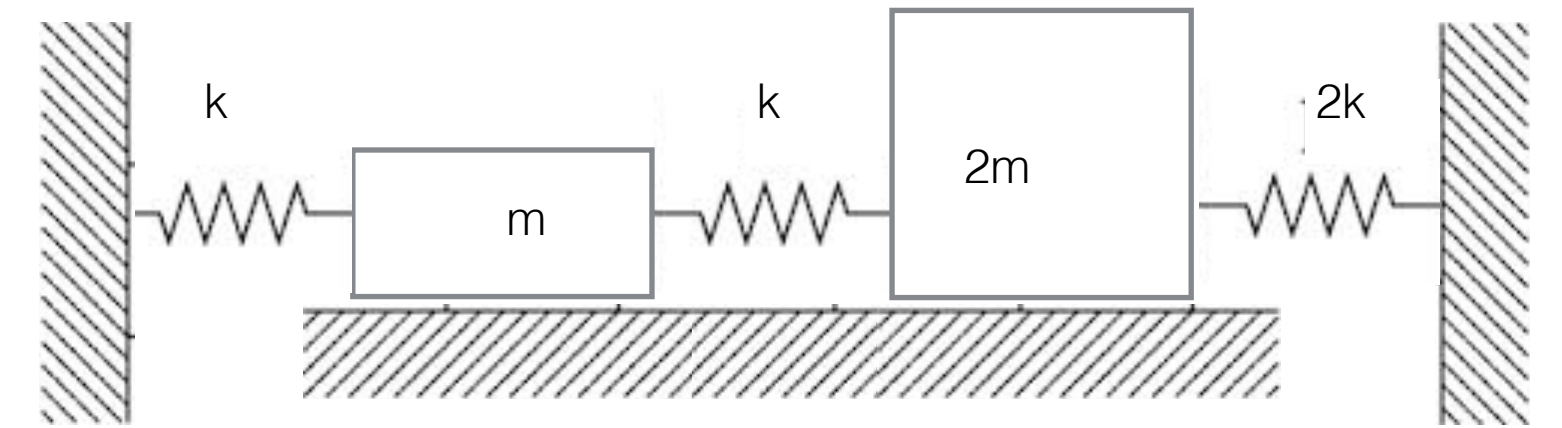
Esempio: sistema 2gdl, non smorzato con $CI \neq 0$

$$[m] = m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad [\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} \\ \dot{x}(0) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

Con le formule precedenti
si ottengono le CI di spostamento
e velocità per i 2 sistemi modali!



$$q_{1r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$q_{2r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ x_0 \end{Bmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\dot{q}_{1r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$\dot{q}_{2r} = \frac{1}{2m} \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}^T m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 0$$

Risposta di sistemi mgdl con sovrapposizione modale

Le forme modali costituiscono una base ortonormale con cui descrivere tutte le deformazioni del sistema (NB se il sistema è continuo, ha un numero di modo infinti.. servono tutti i modi in teoria! se non si usano tutti si otterrà solamente una rappresentazione approssimata)

Le coordinate modali sono dette anche coordinate principali / naturali / normali ($M_r=1$)

$$\overset{nx1}{\{x(t)\}} = \overset{nxn}{[\phi]} \overset{nx1}{\{q(t)\}} = \sum_{r=1}^N \phi_r \eta_r(t) \quad \text{con le già viste C.I.} \quad [\phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_N]$$

Qualora il numero di modi identificati non sia completo, la sommatoria si fermerà prima di N !

$$\{\hat{x}(t)\} = [\phi] \{\hat{q}(t)\} = \sum_{r=1}^{\hat{N}} \phi_r \eta_r(t) \quad [\phi] = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{\hat{N}}]$$

$$\eta_r(t) = \eta_r(0) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{1}{\omega_n} \right) \dot{\eta}_r(0) \sin(\omega_n t) + \left(\frac{1}{M_r} \right) \int_0^t P_r(\tau) \sin(\omega_r(t - \tau)) d\tau \quad \text{es. senza smorzamento}$$

Un esempio di un sistema mgdl

definizione del sistema

```
m=[1 0 0 0;
    0 2 0 0;
    0 0 2 0;
    0 0 0 3];

k=800*[1 -1 0 0;
      -1 3 -2 0;
      0 -2 5 -3;
      0 0 -3 7];

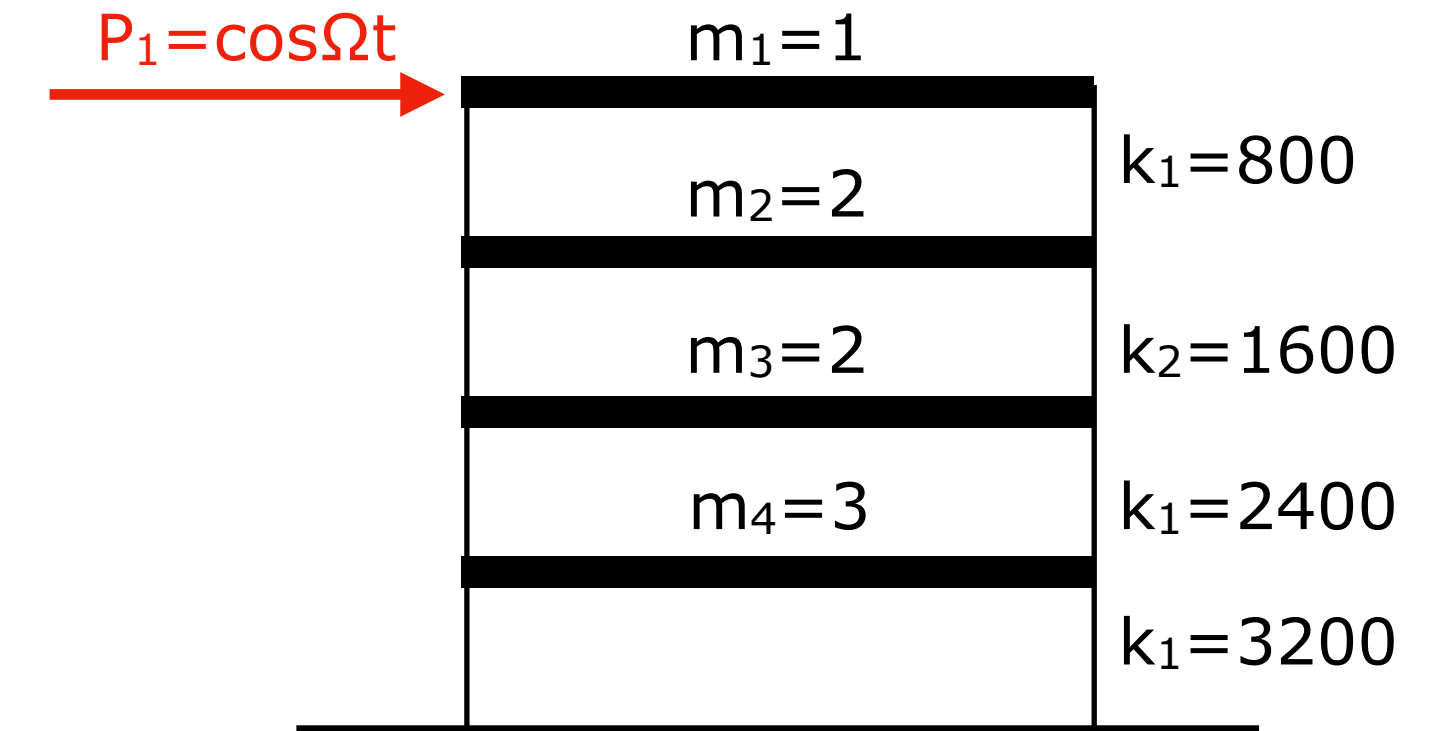
P=[1 0 0 0]';
```

calcolo autovalori e autovettori

```
[eigvector,eigvalue]=eig(k,m);
omega=sqrt(diag(eigvalue));
eigvector =
-0.5900 -0.6777 0.4314 -0.0809
-0.4597 0.0675 -0.4786 0.2348
-0.2930 0.3659 0.0759 -0.5240
-0.1387 0.2966 0.3388 0.3337

eigvalue =
1.0e+03 *
0.1767 0 0 0
0 0.8797 0 0
0 0 1.6875 0
0 0 0 3.1228

omega =
13.2935
29.6597
41.0787
55.8820
```



scalaggio autovettori

```
phi= eigvector./max(abs(eigvector))*-1;
```

```
phi =
1.0000 1.0000 -0.9015 0.1544
0.7791 -0.0996 1.0000 -0.4482
0.4966 -0.5399 -0.1586 1.0000
0.2351 -0.4376 -0.7080 -0.6369
```

elemento massimo unitario

calcolo matrici modali (disaccoppiate)

ModM=phi'*m*phi; ModM_diag=diag(ModM)

ModK=phi'*k*phi; ModK_diag=diag(ModK)

ModP=phi'*P

ModM_diag =
2.8729
2.1773
4.3666
3.6424

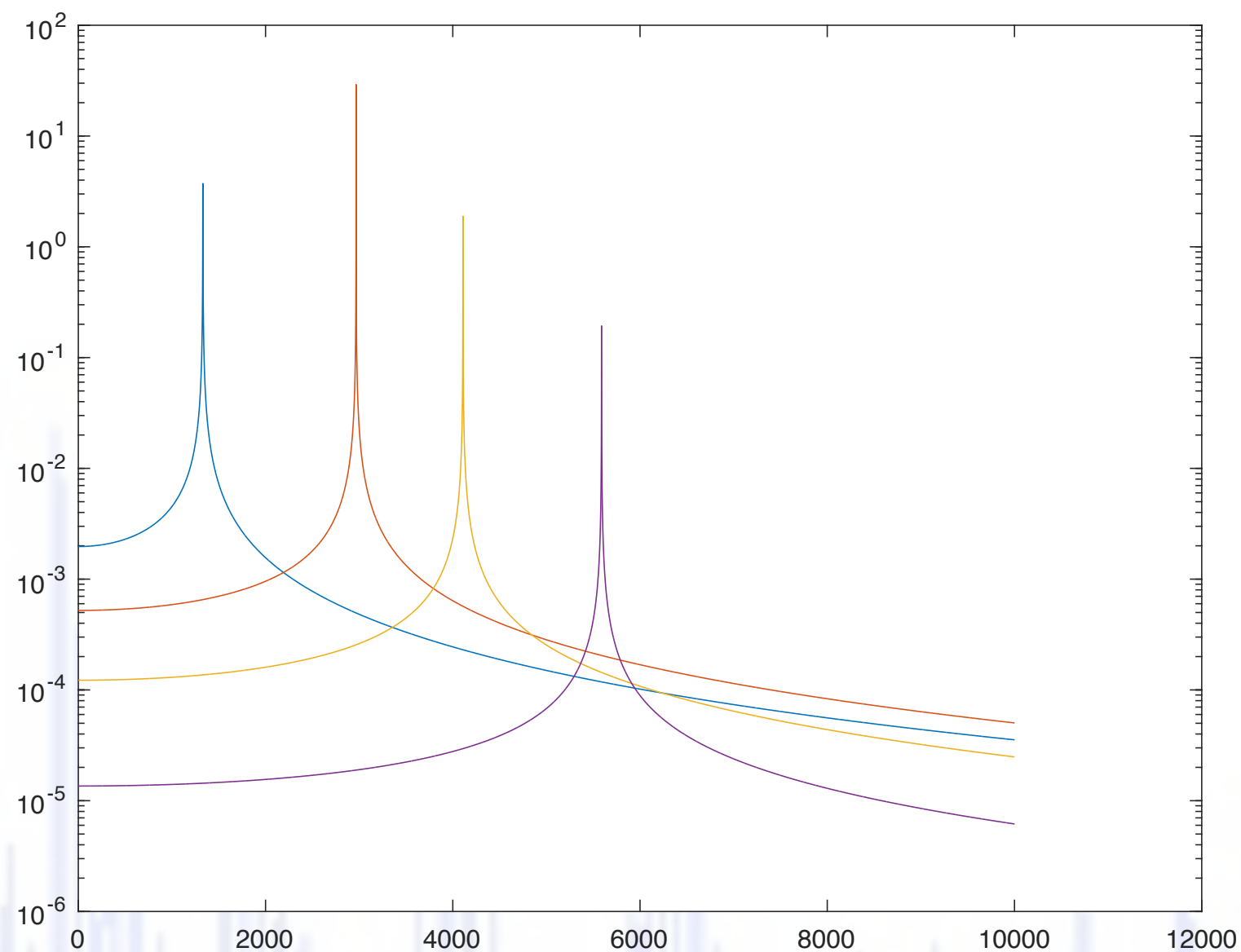
ModK_diag =
1.0e+04 *
0.0508
0.1915
0.7368
1.1374

ModP =
1.0000
1.0000
-0.9015
0.1544

calcolo $|q_r|$

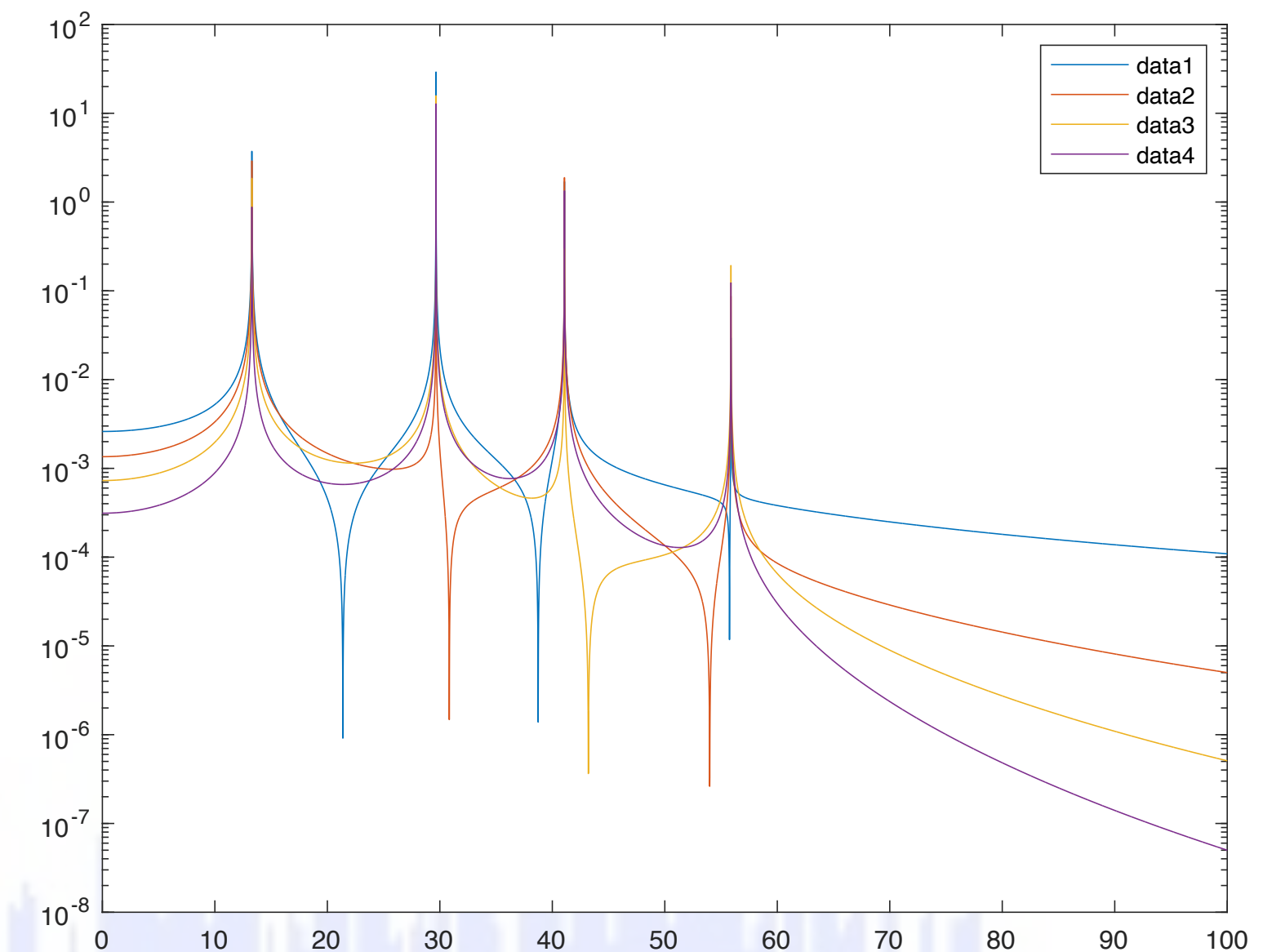
$$q_r = \frac{(F_r/K_r)}{1 - r_r^2}$$

Omega=0:.01:100;
r=Omega./omega;
q=(ModP./ModK_diag)./(1-r.^2)
semilogy(abs(q'))



calcolo x

x=phi*q;
semilogy(Omega,abs(x'))



data1= x1/F1
data2= x2/F1
data3= x3/F1
data4= x4/F1

..provate a fare il calcolo della risposta nel dominio del tempo..
NB dovreste fissare un valore di Ω per la forzante..

$$q_r = \frac{(F_r/K_r) \cos \Omega t}{1 - r_r^2}$$

Le funzioni di risposta in frequenza per sistema Ngdl

Si ricordi quanto fatto nel modulo 2..

La matrice delle FRF è simmetrica, è tridimensionale, è l'inversa della matrice di rigidezza dinamica ..

Ogni FRF H_{ij} ($=x_i/F_j$) essere rappresentata come

rapporto di polinomi

guadagni zeri e poli

sommatoria di residui (complessi coniugati)

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\text{adj}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega - z_1)(j\omega - z_2) \dots (j\omega - z_p)}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2) \dots (j\omega - \lambda_{2N})}$$

$$H_{pq}(j\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_{pqr}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{A_{pqr}^*}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

Se ci sono Ngdl, ci sono anche 2N frequenze naturali, 2N modi..

Proprietà matrice dei residui - Sintesi delle FRF

Si ricordi che la matrice delle FRF può essere ottenuta come somma di residui!

Se N è il grado del sistema, le matrici dei residui, sono di dimensione NxN e sono quanti sono i modi del sistema!

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{\overset{nxn}{[A_r]}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\overset{nxn}{[A_r^*]}}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\begin{bmatrix} A_{11r} & A_{12r} \\ A_{21r} & A_{22r} \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{\begin{bmatrix} A_{11r}^* & A_{12r}^* \\ A_{21r}^* & A_{22r}^* \end{bmatrix}}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

Stante la simmetria delle matrici di partenza [m], [c], [k], non servirà calcolare tutti gli elementi delle matrici [A_r]

ma si sfrutterà il fatto che la matrice dei residui [A_r] è proporzionale all'autovettore {Φ_r}

$$[A_r] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r$$

$$\begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix}$$

Partendo dall'identità basata sulla matrice di rigidezza dinamica e la sua inversa si può scrivere:

$$[Z(\omega)][Z(\omega)]^{-1} = [I] \quad \text{ricordando la definizione dell'inversa} \quad [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\text{adj}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]}$$

$$[Z(\omega)] \frac{\text{adj}[Z(\omega)]}{\det[Z(\omega)]} = [I]$$

$$[Z(\omega)] \text{adj}[Z(\omega)] = \det[Z(\omega)][I]$$

$$[Z(\lambda_r)] \text{adj}[Z(\lambda_r)] = \{0\}$$

$$[Z(\lambda_r)] \{Z(\lambda_r)\}_i^A = \{0\}$$

$$[Z(\lambda_r)] \{X\}_{\lambda_r} = [Z(\lambda_r)] \{\phi\}_r = \{0\}$$

$$\{\phi_r\} = \beta_{ir} \{Z(\lambda_r)\}_i^A$$

Da cui si deduce che la colonna della matrice aggiunta è proporzionale all'autovettore Φ_r

Si valuti l'espressione in corrispondenza dell'autovalore λ_r (si ricordi che è una radice dell'eq. caratteristica e annulla il determinante della matrice di Z)

Si consideri la colonna i della matrice aggiunta.. e si osservi che il prodotto è nullo!

Analogamente, il prodotto della matrice di rigidezza dinamica, in corrispondenza dell'autovalore λ_r , moltiplicata per l'autovettore Φ_r da un prodotto nullo!

Stante la simmetria delle matrici di partenza, anche la matrice aggiunta è simmetrica quindi lo stesso discorso di proporzionalità può anche essere fatto per le sue righe!

Per tanto vale la relazione:

$$adj[Z(\lambda_r)] = Q_r \{\phi\}_r \{\phi\}_r^T = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1\phi_1 & \phi_1\phi_2 & \dots & \phi_1\phi_N \\ \phi_2\phi_1 & \phi_2\phi_2 & \dots & \phi_2\phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N\phi_1 & \phi_N\phi_2 & \dots & \phi_N\phi_N \end{bmatrix} = [A_r]$$

Ripartendo dall'espressione della matrice delle FRF

$$[H(\omega)] = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

concentrando l'attenzione sulla colonna k

$$\begin{Bmatrix} H_{1k}(\omega) \\ H_{2k}(\omega) \\ \dots \\ H_{Nk}(\omega) \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^N \frac{\{A_r\}_k}{j\omega - \lambda_r} + \frac{\{A_r\}_r^*}{j\omega - \lambda_r^*}$$

si osservi che questa dipende dalla colonna k delle matrici dei residui ..che è proporzionale all'autovettore $\{\Phi_r\}$

Estraendo la colonna k dalla matrice dei residui, varranno le seguenti relazioni:

$$[A_r] = Q_r \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 & \dots & \phi_1 \phi_N \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 & \dots & \phi_2 \phi_N \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_N \phi_1 & \phi_N \phi_2 & \dots & \phi_N \phi_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{1k} \\ A_{2k} \\ \dots \\ A_{Nk} \end{Bmatrix}_r = Q_r \begin{Bmatrix} \phi_1 \phi_k \\ \phi_2 \phi_k \\ \dots \\ \phi_N \phi_k \end{Bmatrix}_r = Q_r \phi_{kr} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_N \end{Bmatrix}_r$$

$$A_{pqr} = Q_r \phi_{pr} \phi_{qr}$$

il generico elemento della matrice dei residui..

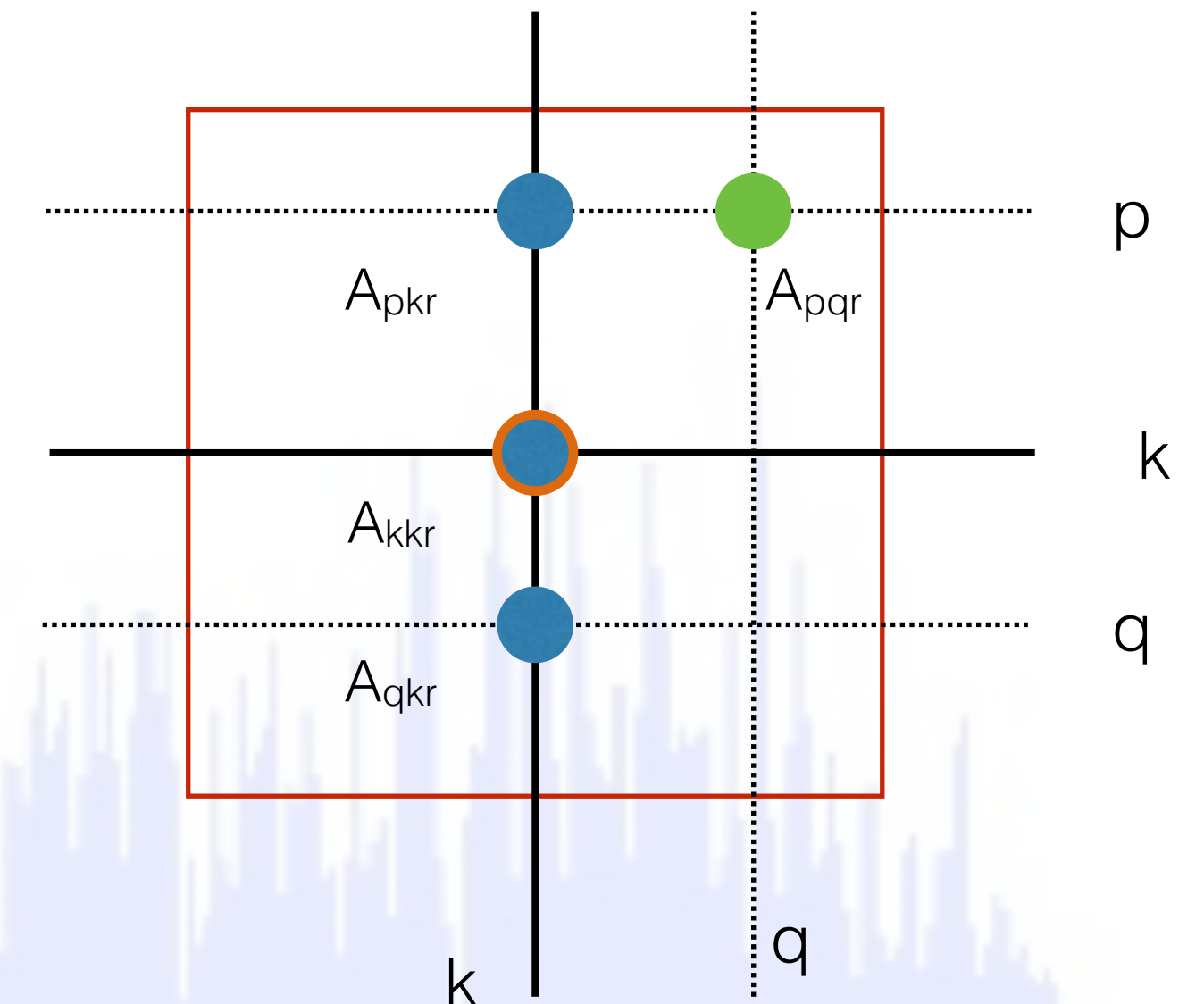
$$A_{pqr} = \frac{A_{kpr} A_{kqr}}{A_{kkk}} = \frac{Q_r \phi_{kr} \phi_{pr} Q_r \phi_{kr} \phi_{qr}}{Q_r \phi_{kr} \phi_{kr}}$$

..e la formula per sintetizzare tutti gli altri elementi, anche fuori dalla colonna k

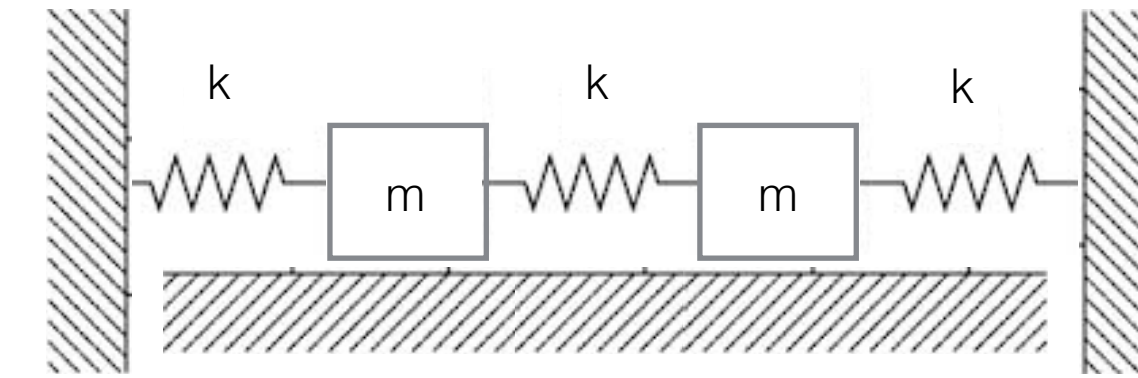
NB è fondamentale avere a disposizione l'elemento diretto A_{kkk}

NB2 Con una colonna (o riga) completa di A_r è possibile sintetizzare tutti gli elementi mancanti!

matrice A_r



Esempio: rappresentazione delle FRF



$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

equazioni del moto

$$[Z(\omega)] = \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix}$$

matrice di rigidezza dinamica

$$[H(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} k_{22} - \omega^2 m_{22} & -(k_{21} - \omega^2 m_{21}) \\ -(k_{12} - \omega^2 m_{12}) & k_{11} - \omega^2 m_{11} \end{bmatrix}}{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21})}$$

matrice di risposta in frequenza

$$(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) - (k_{12} - \omega^2 m_{12})(k_{21} - \omega^2 m_{21}) = \\ (j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)$$

polinomio caratteristico e
poli del sistema

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(\omega) = H_{21}(\omega) = \frac{k_{12} - \omega^2 m_{12}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

funzioni di risposta
(rapporto di polinomi)

$$H_{22}(\omega) = \frac{k_{11} - \omega^2 m_{11}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

Si concentri l'attenzione su H_{11} e si valuti la rappresentazione a frazioni parziali

$$H_{11}(\omega) = \frac{k_{22} - \omega^2 m_{22}}{(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_1^*)(j\omega - \lambda_2)(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$= \frac{c_1}{(j\omega - \lambda_1)} + \frac{c_2}{(j\omega - \lambda_2^*)} + \frac{c_3}{(j\omega - \lambda_2)} + \frac{c_4}{(j\omega - \lambda_2^*)}$$

$$c_1 = \frac{k_{22} - \lambda_1^2 m_{22}}{(\lambda_1 - \lambda_1^*)(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_2^*)} = A_{111} \quad c_2 = \frac{k_{22} - \lambda_1^{*2} m_{22}}{(\lambda_1^* - \lambda_1)(\lambda_1^* - \lambda_2)(\lambda_1^* - \lambda_2^*)} = A_{111}^*$$

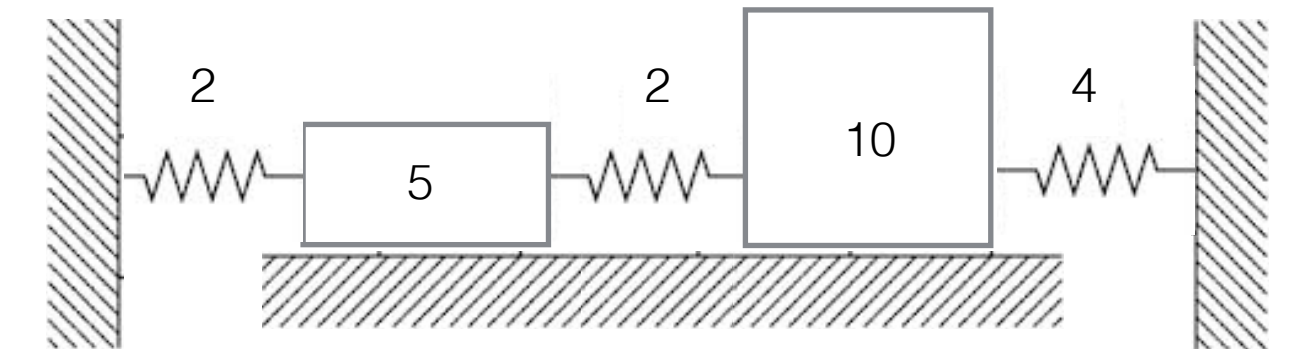
$$c_3 = \frac{k_{22} - \lambda_2^2 m_{22}}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1^*)(\lambda_2 - \lambda_2^*)} = A_{112} \quad c_4 = \frac{k_{22} - \lambda_2^{*2} m_{22}}{(\lambda_2^* - \lambda_1)(\lambda_2^* - \lambda_1^*)(\lambda_2^* - \lambda_2)} = A_{112}^*$$

Ser calcolare c_1
si moltiplica tutto per $(j\omega - \lambda_1)$
e valuta il risultato per $j\omega = \lambda_1$

Analogamente per gli altri c_i e per le altre FRF,.. vale sempre la simmetria, non servirà calcolare tutti i residui!!

Esempio: calcolo delle FRF, sistema senza, con smorzamento proporzionale, con smorzamento non proporzionale

$$[m] = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad [k] = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{matrici del sistema}$$



$$\left[\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = \{0\} \quad \text{problema autovalori/autovettori}$$

$$\left[\begin{bmatrix} 3/10 & 1/10 \\ 1/10 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} + \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{aligned} & \left[[k] + s^2 [m] \right] = \{0\} \\ & \left[[m]^{-1} [k] + s^2 [I] \right] = \{0\} \\ & \left[[k]^{-1} [m] + \frac{1}{s^2} [I] \right] = \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

Interessa la soluzione non banale,
=> valori di s che annullano il determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 + \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \{0\}$$

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{s^2} \right) \left(2 + \frac{1}{s^2} \right) - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{equazione caratteristica}$$

$$\alpha = \frac{1}{s^2}$$

$$\alpha^2 + \frac{7}{2}\alpha + \frac{5}{2} = 0$$

$$\alpha_{1,2} = \begin{Bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \pm j \end{cases}$$

poli del sistema,
smorzamento nullo:
puramente immaginari, a due a due complessi coniugati

$$\lambda_1 = \pm j\sqrt{\frac{2}{5}} \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_1 = \{0\} \quad -X_1 + X_2 = \{0\} \quad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}$$

Si sostituiscano i poli in



per trovare gli autovettori:

$$\lambda_1 = \pm j \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}_2 = \{0\} \quad \frac{1}{2}X_1 + X_2 = \{0\} \quad \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2}X_1 \end{Bmatrix}$$

Con gli autovettori si
costruisca la matrice modale:

$$[\phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \text{scalabile in maniera opportuna!}$$

Ad esempio con
matrice di massa modale unitaria

$$[\phi]^T [m] [\phi] = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

Si ottengono
due equazioni

$$5X_1^2 + 10X_1^2 = 1$$

$$5X_1^2 + \frac{5}{2}X_1^2 = 1$$

e da qui i due termini di scalaggio
(modo1 e modo2)

$$X_{11} = \pm \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$X_{12} = \pm \sqrt{\frac{2}{15}}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix}$$

$$\{x\} = [\Phi] \{q\}$$

$$[\Phi]^T [m] [\Phi] \{\ddot{q}\} + [\Phi]^T [k] [\Phi] \{q\} = \{0\}$$

matrice modale scalata,
che permette
la trasformazione modale
e il disaccoppiamento
delle equazioni del moto

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{15}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \sqrt{\frac{1}{15}} & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{15}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \{0\}$$

Esempio: calcolo delle FRF dalla matrice di rigidezza dinamica:

$$[Z(s)] = \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}$$

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 4 & -2 \\ -2 & 10s^2 + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{(5s^2 + 4)(10s^2 + 6) - 4}$$

con i poli già noti $\rightarrow [H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 6 & 2 \\ 2 & 5s^2 + 4 \end{bmatrix}}{50 \left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)}$

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 6}{50 \left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) \left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right) (s - j)(s + j)}$$

con la rappresentazione
a frazioni parziali



$$H_{11}(s) = \frac{A_{111}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{111}^*}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}} \right)} + \frac{A_{112}}{(s - j)} + \frac{A_{112}^*}{(s + j)}$$

$$A_{111} = -\frac{j\sqrt{2/5}}{12}$$

$$A_{111}^* = \frac{j\sqrt{2/5}}{12}$$

$$A_{112} = -\frac{j}{15}$$

$$A_{112}^* = \frac{j}{15}$$

Sviluppando tutte le funzioni ed i residui

..simmetria, poli & residui complessi coniugati..

$$[H(s)] = \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} & -\frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s - j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \\ \frac{j\sqrt{2/5}}{12} & \frac{j\sqrt{2/5}}{12} \end{bmatrix}}{\left(s + j\sqrt{\frac{2}{5}}\right)} + \frac{\begin{bmatrix} -\frac{j}{15} & \frac{j}{30} \\ \frac{j}{30} & -\frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s-j)} + \frac{\begin{bmatrix} \frac{j}{15} & -\frac{j}{30} \\ -\frac{j}{30} & \frac{j}{60} \end{bmatrix}}{(s+j)}$$

$$Q_1 = \pm j \frac{\sqrt{2/5}}{12} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\textcircled{Q_1} = \pm \frac{j}{60} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \phi_1 & \phi_1 \phi_2 \\ \phi_2 \phi_1 & \phi_2 \phi_2 \end{bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Si ritrova la stessa matrice modale!

$$[\phi] = [\{\phi\}_1 \{\phi\}_2] = \begin{bmatrix} X_1 & X_1 \\ X_1 & -\frac{1}{2}X_1 \end{bmatrix}$$

Se c'è smorzamento proporzionale: $[c] = \frac{1}{2}[k] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

La trasformazione modale, disaccoppia anche questa matrice

$$[\Phi]^T \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} [\Phi] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{\ddot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \{\dot{q}\} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \{q\} = \begin{Bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{Bmatrix}$$

Supponendo ci sia una forzante..
I modi sono gli stessi che nel caso non smorzato,
ma cambiano le funzioni di risposta in frequenza!!!

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 2s + 4 & -s - 2 \\ -s - 2 & 10s^2 + 3s + 6 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 10s^2 + 3s + 6 & s + 2 \\ s + 2 & 5s^2 + 2s + 4 \end{bmatrix} \frac{1}{50s^4 + 35s^3 + 75s^2 + 20s + 20}$$

Termini dispari > poli complessi
(spostati verso sinistra nel piano di Laplace)

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{1,2}}} = \begin{cases} -\frac{1}{10} \pm j\frac{\sqrt{39}}{10} \\ -\frac{1}{4} \pm j\frac{\sqrt{15}}{4} \end{cases}$$

Si calcolino le FRF (rapporto polinomi / frazioni parziali)

$$H_{11}(s) = \frac{10s^2 + 3s + 6}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)} \quad H_{11}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{-j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{j\frac{4\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

$$H_{12}(s) = \frac{s + 2}{50(s - \lambda_1)(s - \lambda_1^*)(s - \lambda_2)(s - \lambda_2^*)} \quad H_{12}(s) = \frac{-j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1)} + \frac{j\frac{\sqrt{39}}{117}}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2)} + \frac{-j\frac{2\sqrt{15}}{225}}{(s - \lambda_2^*)}$$

Le forme modali non cambiano!

$$Q_1 = \pm j\frac{\sqrt{39}}{117}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$Q_1 = \pm \frac{j\sqrt{15}}{225}$$

$$\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

Se c'è smorzamento non proporzionale

$$[c] = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\phi'^* c \phi$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 45 \end{bmatrix}$$

La trasformazione modale
già vista non disaccoppia le matrici del sistema!

Bisogna utilizzare l'espansione di Duncan Collar

Le FRF cambiano ulteriormente!

$$[H(s)] = \frac{\text{adj} \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 5s^2 + 6s + 4 & -4s - 2 \\ -4s - 2 & 10s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix}} = \frac{\begin{bmatrix} 10s^2 + 5s + 6 & 4s + 2 \\ 4s + 2 & 5s^2 + 6s + 4 \end{bmatrix}}{50s^4 + 85s^3 + 84s^2 + 40s + 20}$$

e con loro i poli, i residui e le forme modali.

$$\begin{cases} \lambda_1 = -0.095 + j0.629 \\ \lambda_1^* = -0.095 - j0.629 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -0.754 + j0.645 \\ \lambda_2^* = -0.754 - j0.645 \end{cases}$$

$$H_{22}(s) = \frac{0.0037 - j0.0587}{(s - \lambda_1)} + \frac{0.0037 + j0.0587}{(s - \lambda_1^*)} + \frac{0.0037 - j0.0163}{(s - \lambda_2)} + \frac{0.0037 + j0.0163}{(s - \lambda_2^*)}$$

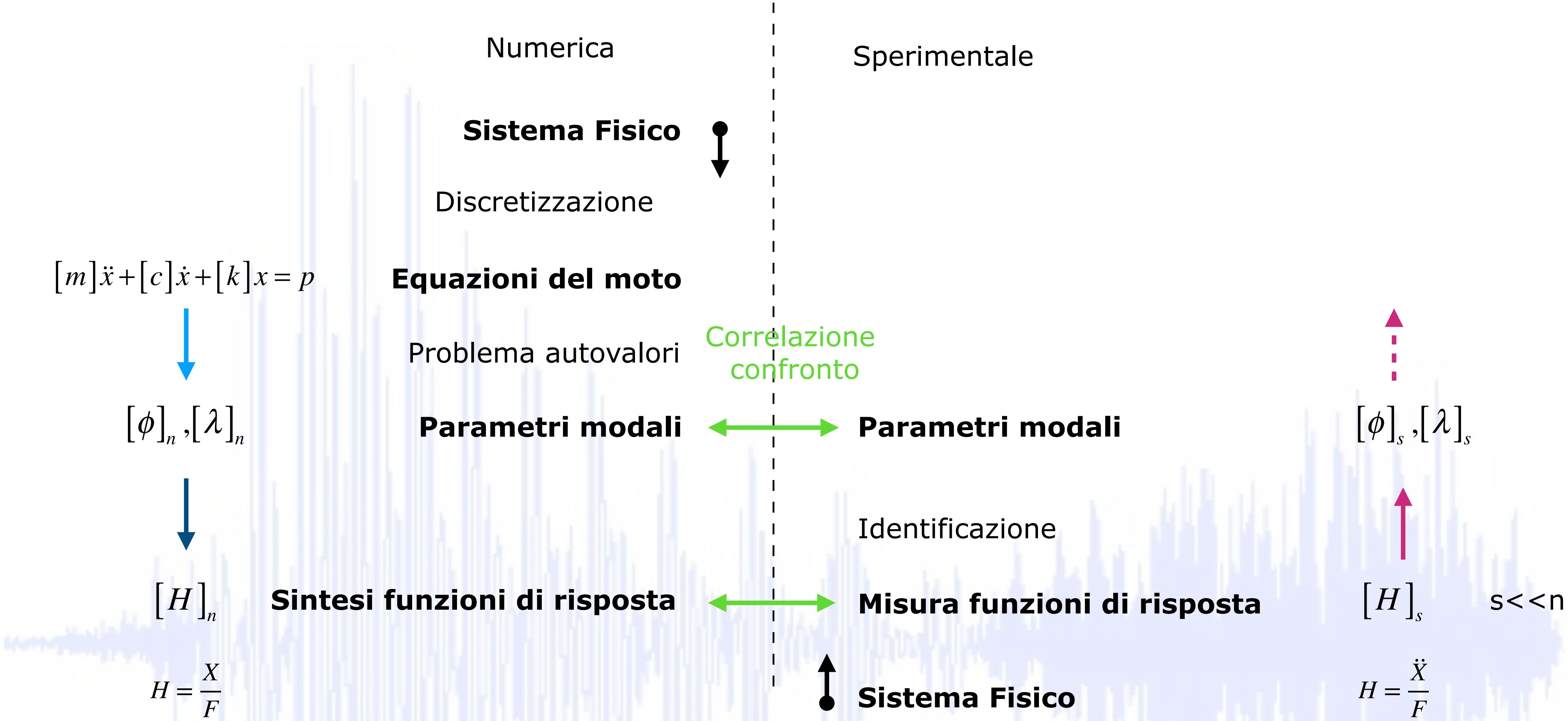
$$\text{per } \lambda_1 \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} -0.0034 - j0.0501 \\ 0.0037 - j0.0587 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0502 & -93.96^\circ \\ 0.0588 & -86.93^\circ \end{Bmatrix}$$

Le forme modali diventano complesse!
I gdl non raggiungono lo spostamento massimo in fase!

$$\text{per } \lambda_2 \quad \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} -0.0034 + j0.0452 \\ 0.0037 - j0.0163 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0454 & +94.30^\circ \\ 0.0167 & -77.21^\circ \end{Bmatrix}$$

(c'è chi arriva prima e chi arriva dopo
in funzione dello smorzamento)

Analisi modale numerica e sperimentale

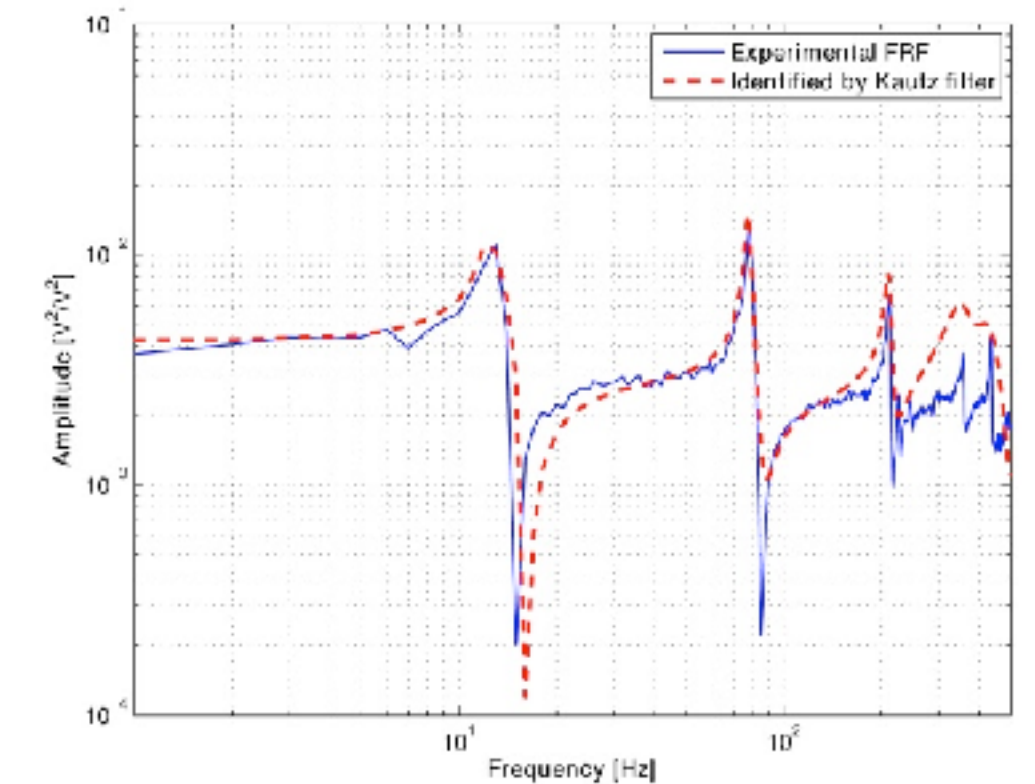


L'analisi modale sperimentale parte dalla misura delle FRF sul sistema fisico (dettagli nella parte 4 Strumenti e metodi sperimentali)

Si misura una (o più) colonna (o una o più righe) completa della matrice H

Tramite il processo di identificazione si ricavano da queste FRF i parametri modali (auto-valori, -vettori, smorzamento)

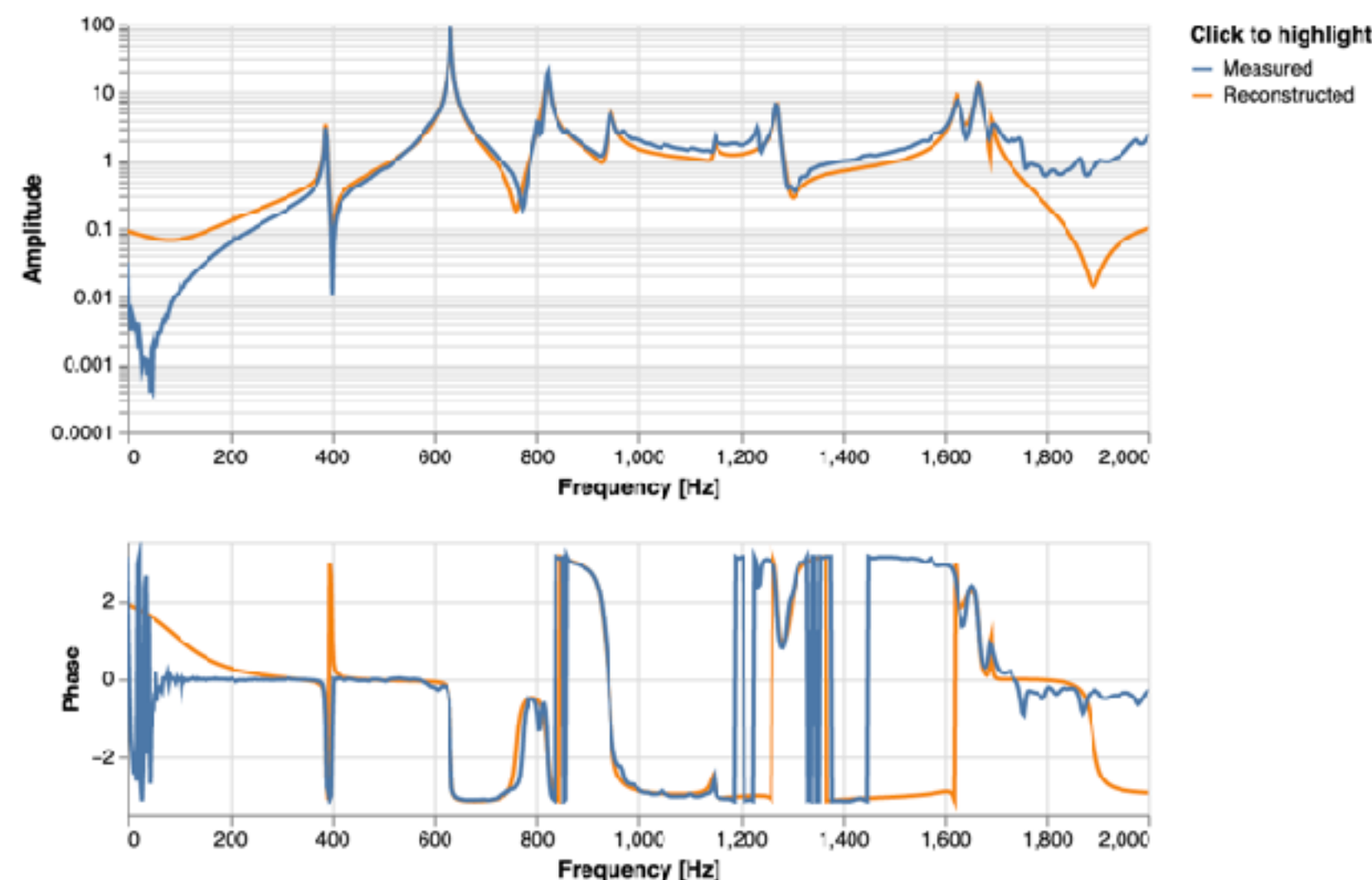
Con questi, si sintetizzano le FRF in modo tale che siano le più prossime possibili a quelle misurate. =identificazione corretta!



$$[H(\omega)]_s = \begin{bmatrix} H_{11}(\omega) & H_{12}(\omega) & \dots & H_{1N}(\omega) \\ H_{21}(\omega) & H_{22}(\omega) & \dots & H_{2N}(\omega) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{N1}(\omega) & H_{N2}(\omega) & \dots & H_{NN}(\omega) \end{bmatrix}$$

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)}$$

$$[H(j\omega)] = [V][j\omega[I] - [\lambda]]^{-1}[L]$$



matrice modale $[V] = \begin{bmatrix} \{\phi\}_1 & \{\phi\}_2 & \dots & \{\phi\}_N \end{bmatrix}$

matrice di partecipazione modale $[L] = [Q][V]^T$

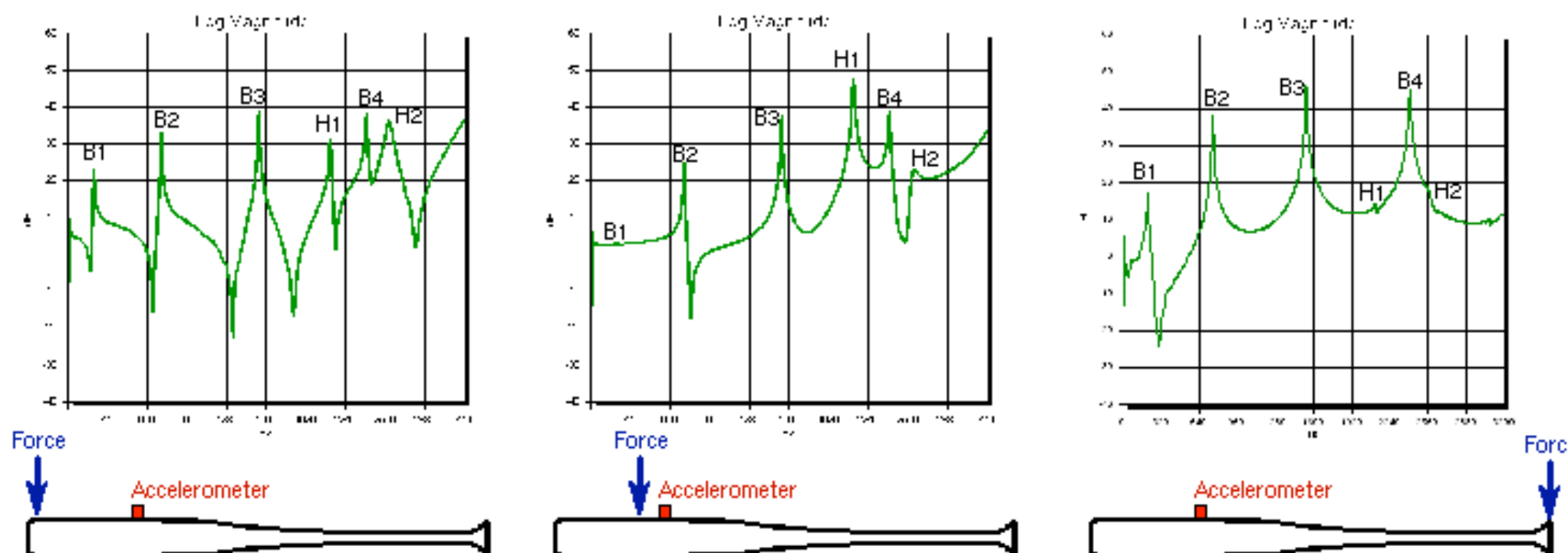
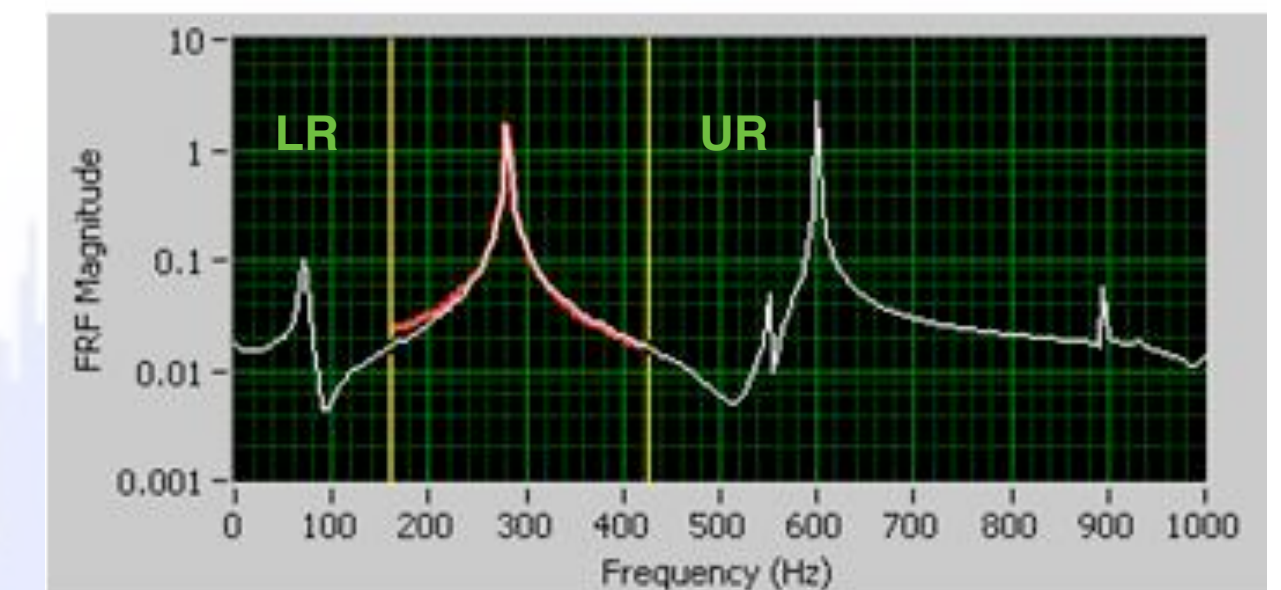
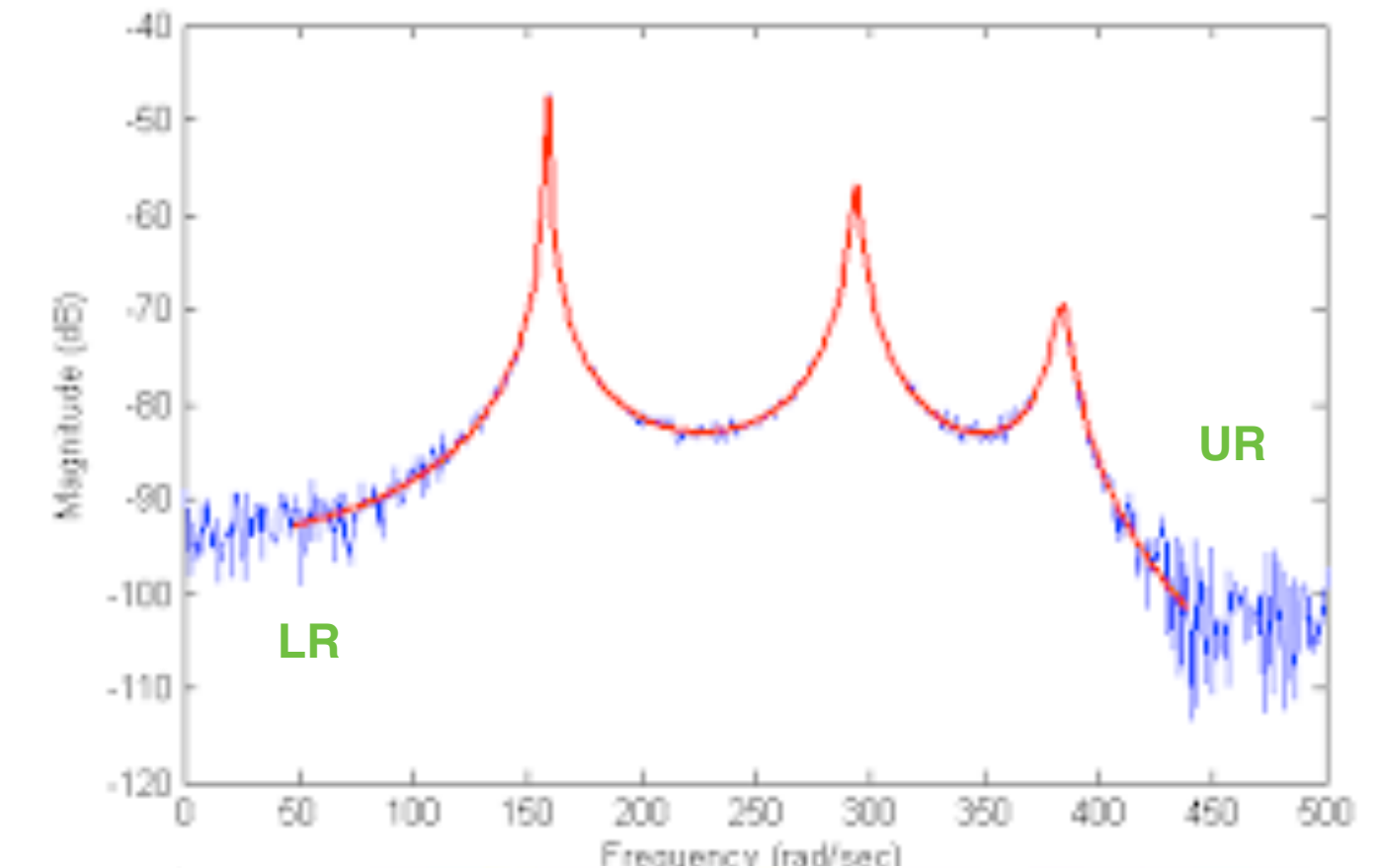
Dal momento che le strutture fisiche sono continue, queste teoricamente hanno infiniti modi, da identificare nella banda in frequenza tra 0 e ∞ ..

E' un compito impossibile! ci si limita ad identificare quelli presenti in una banda finita, (legata alle capacità sperimentali)
compensando per i contributi dei modi fuori banda con dei residui particolari

$$[H(j\omega)] = \sum_{r=1}^N \frac{[A_r]}{(j\omega - \lambda_r)} + \frac{[A_r^*]}{(j\omega - \lambda_r^*)} + [UR] - \frac{[LR]}{\omega^2}$$

$[UR]$ Upper residual - costante

$\frac{[LR]}{\omega^2}$ Lower residual - decrescente con la frequenza



Qualcuno identifica l'errore?

Metodi di identificazione si classificano:

SDOF vs MDOF: un solo modo o più modi nella banda d'interesse

LOCALI vs GLOBALI: non tengono o tengono conto del fatto che
i poli non dipendono da i, j , p modi non dipendono dal punto di eccitazione j ,
i coefficienti di partecipazione non dipendono dal punto di misura i

S excitation vs M excitation: si considera una a più colonne contemporaneamente

MODALI vs DIRETTI: identificano i parametri modali o le matrici di m, c, k

REALI vs COMPLESSI: identificano forme modali reali o complesse

TEMPO vs FREQUENZA: identificano parametri modali dalle risposte all'impulso
o dalle risposte in frequenza ..schemino..

<https://www.mpihome.com/en/products/dynamic-signal-analysis/modal-analysis.html>

<http://macl.caeds.eng.uml.edu/umlspace/mspace.html>

<https://pyfbs.readthedocs.io/en/latest/index.html>

Utilizzo dei risultati dell'analisi modale

L'analisi modale è disponibile dalla fine degli anni '70.
Inizialmente era utilizzato solo per "vedere" come vibrava una struttura

Attualmente i parametri modali si possono utilizzare per

l'analisi di pretest

l'analisi di sensitività alle variazioni dei parametri fisici di un modello

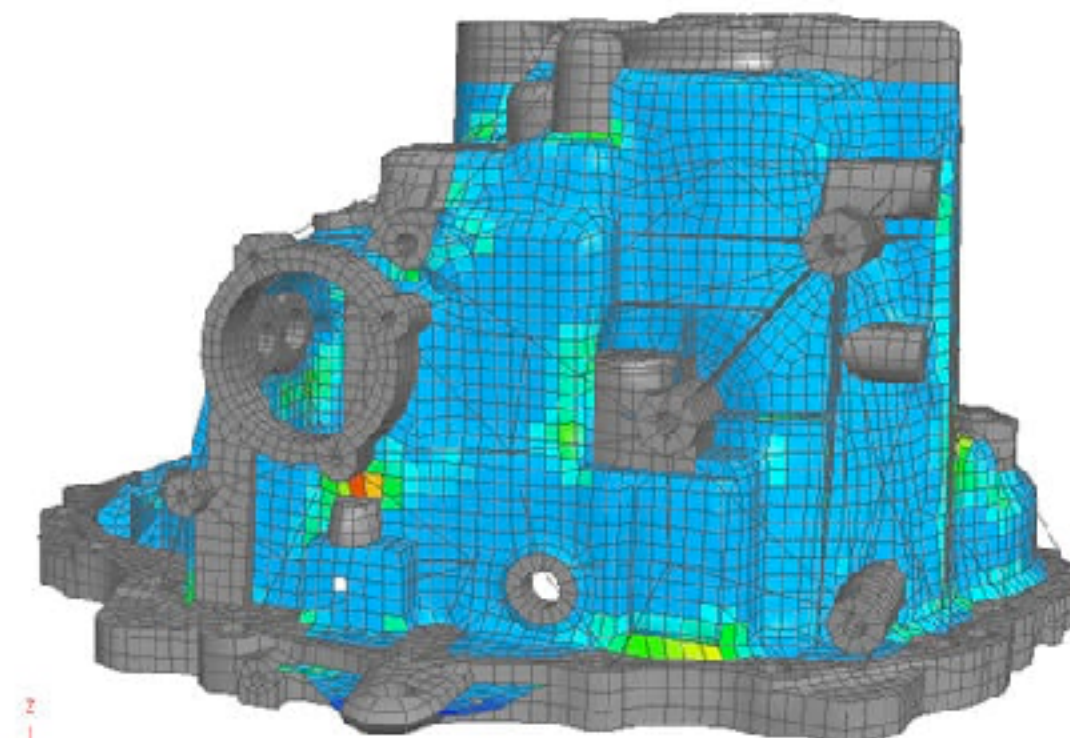
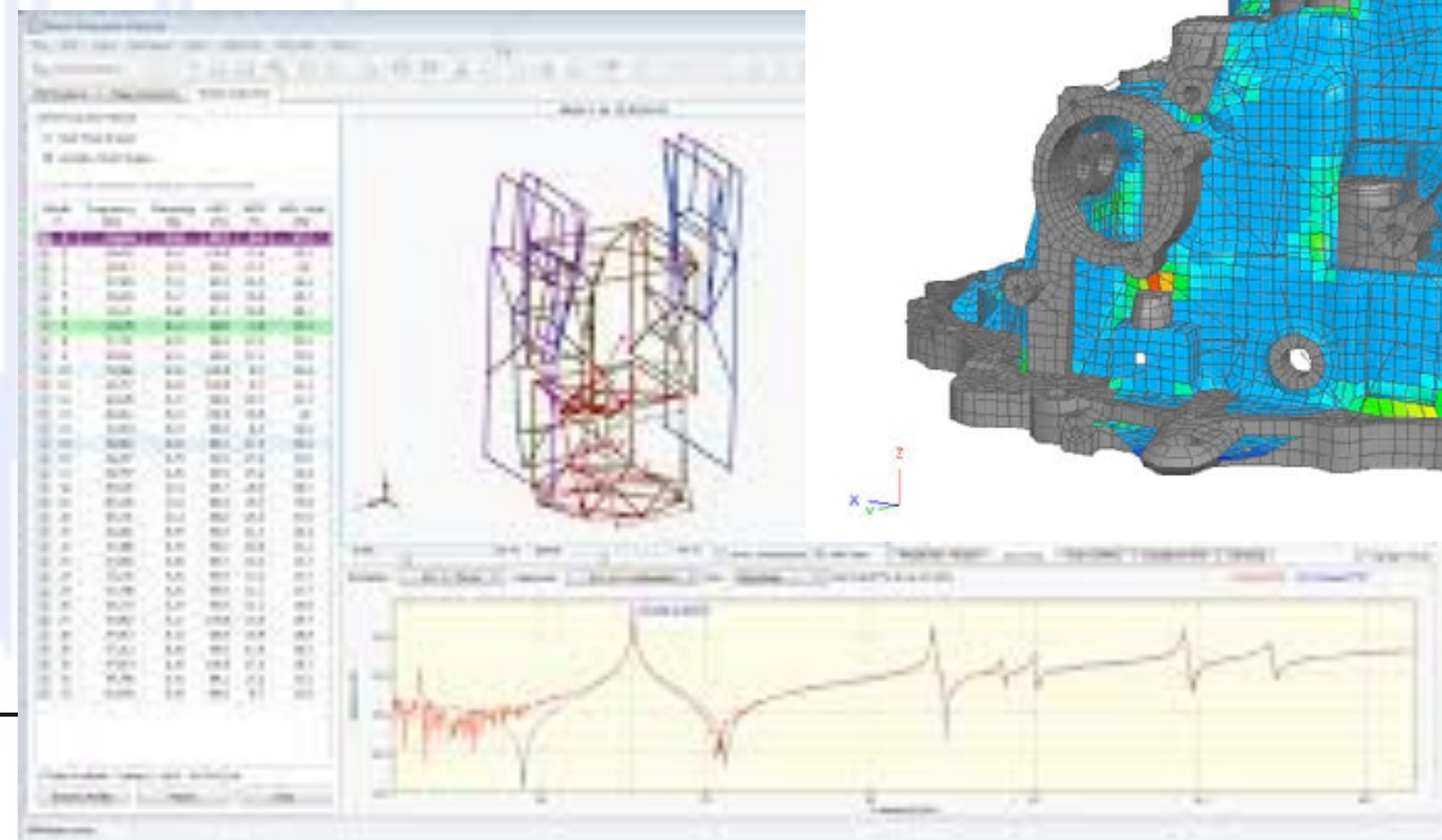
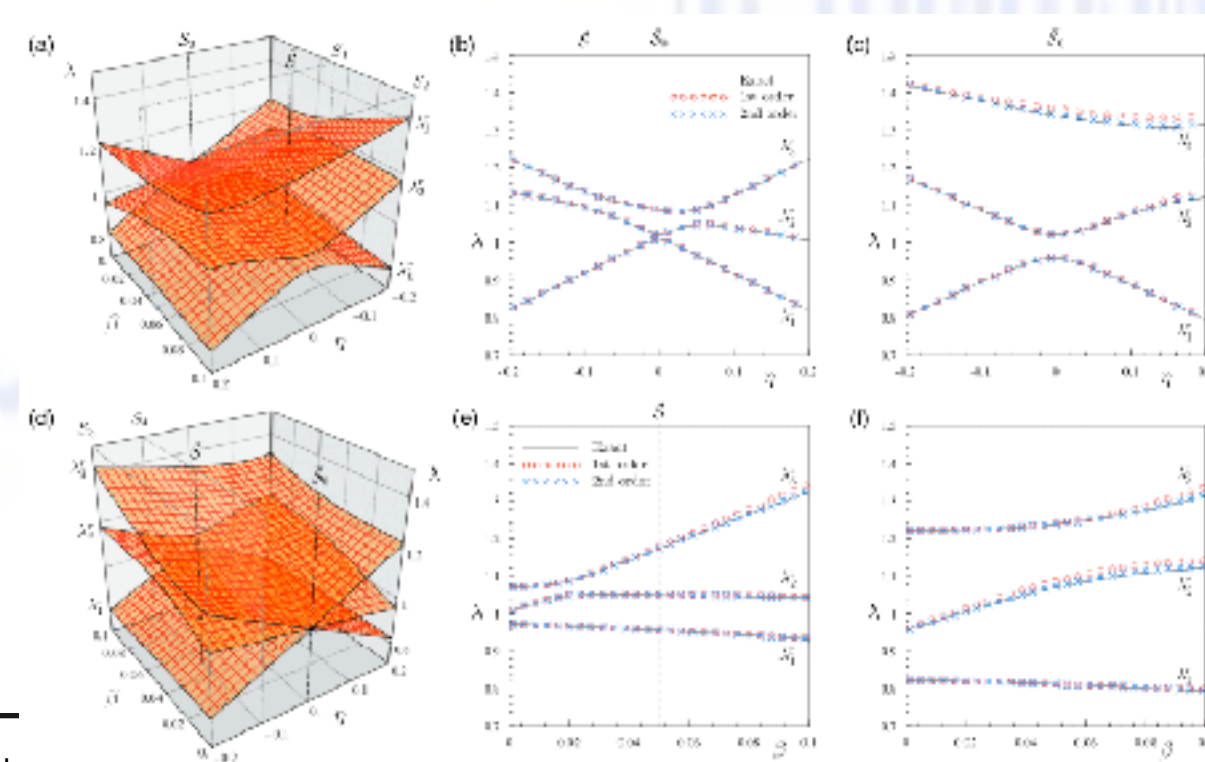
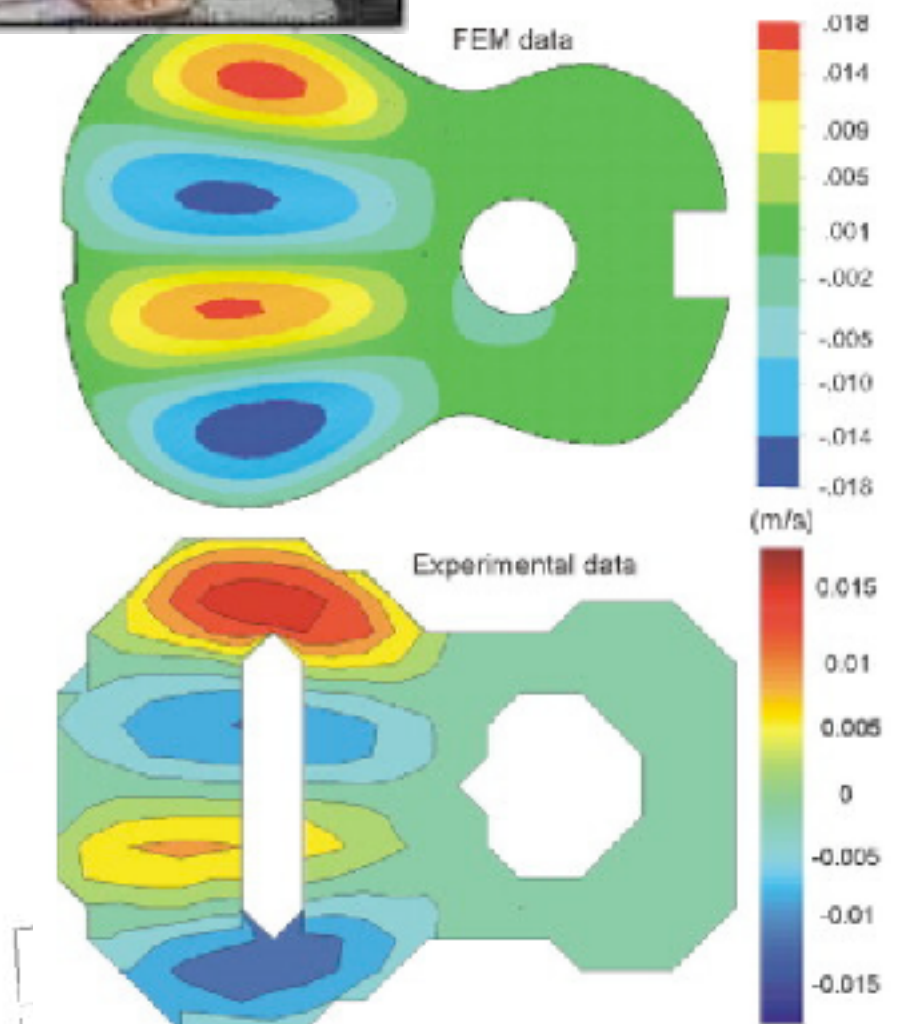
il calcolo della risposta forzata di un sistema

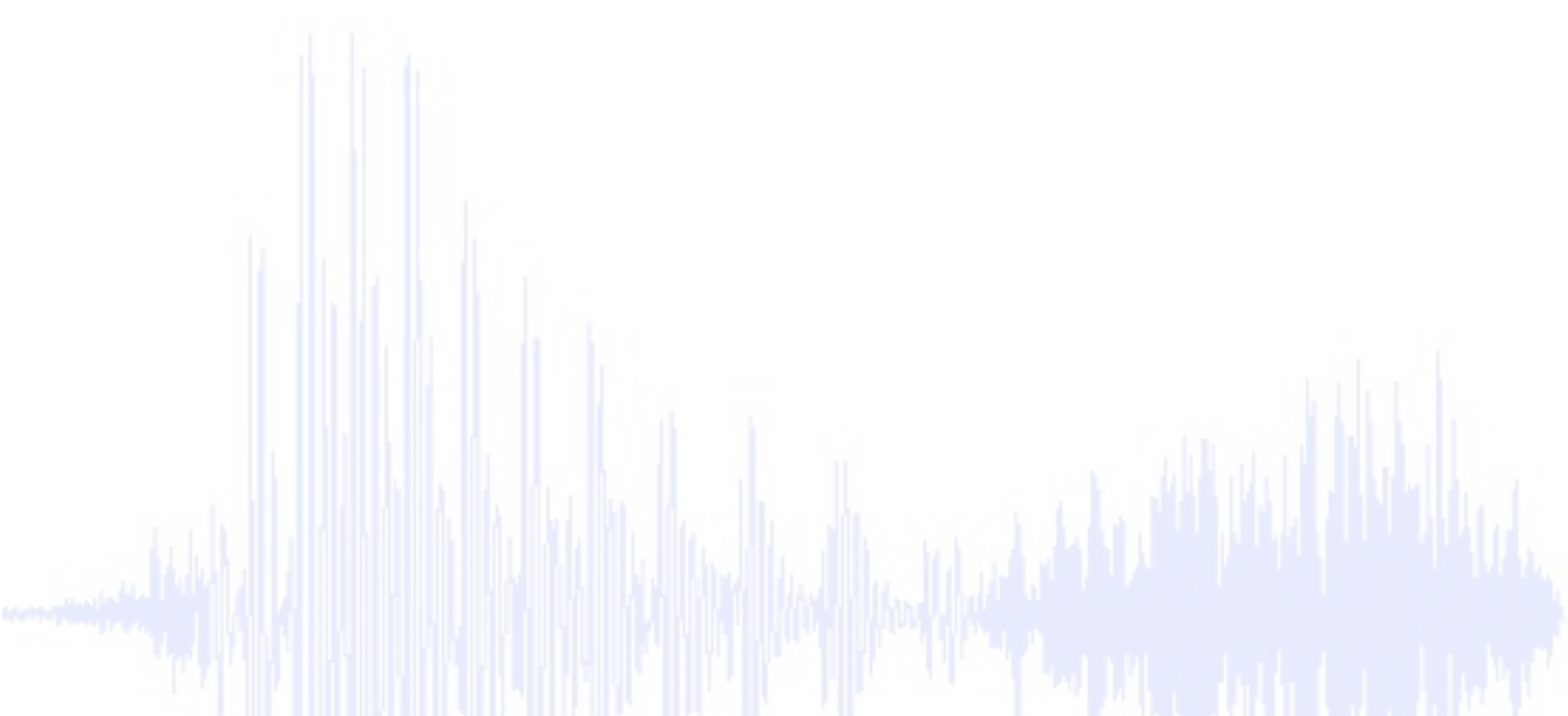
l'effetto di modifiche strutturali

l'aggiornamento dei modelli numeri (model updating)

la sintesi della dinamica di componenti accoppiati

...





Analisi modale numerica

UNITS mette a disposizione il software commerciale ANSYS..
Si trovano tutte le informazioni possibili on-line,
e tutti tutorial ... basta volerli cercare!

Ansys Workbench

Modal Analysis

<https://innovationspace.ansys.com/courses/courses/modal-analysis/lessons/intro-to-modal-analysis-lesson-1/>

<https://innovationspace.ansys.com/courses/courses/modal-analysis-in-ansys-mechanical/lessons/how-to-perform-modal-analysis-lesson-1-2/>

Ansys APDL

Modal Analysis

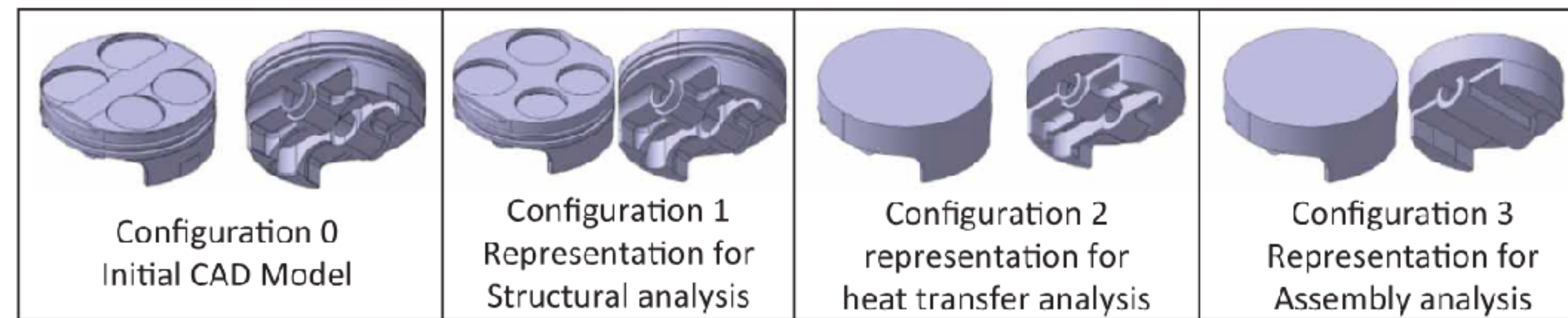
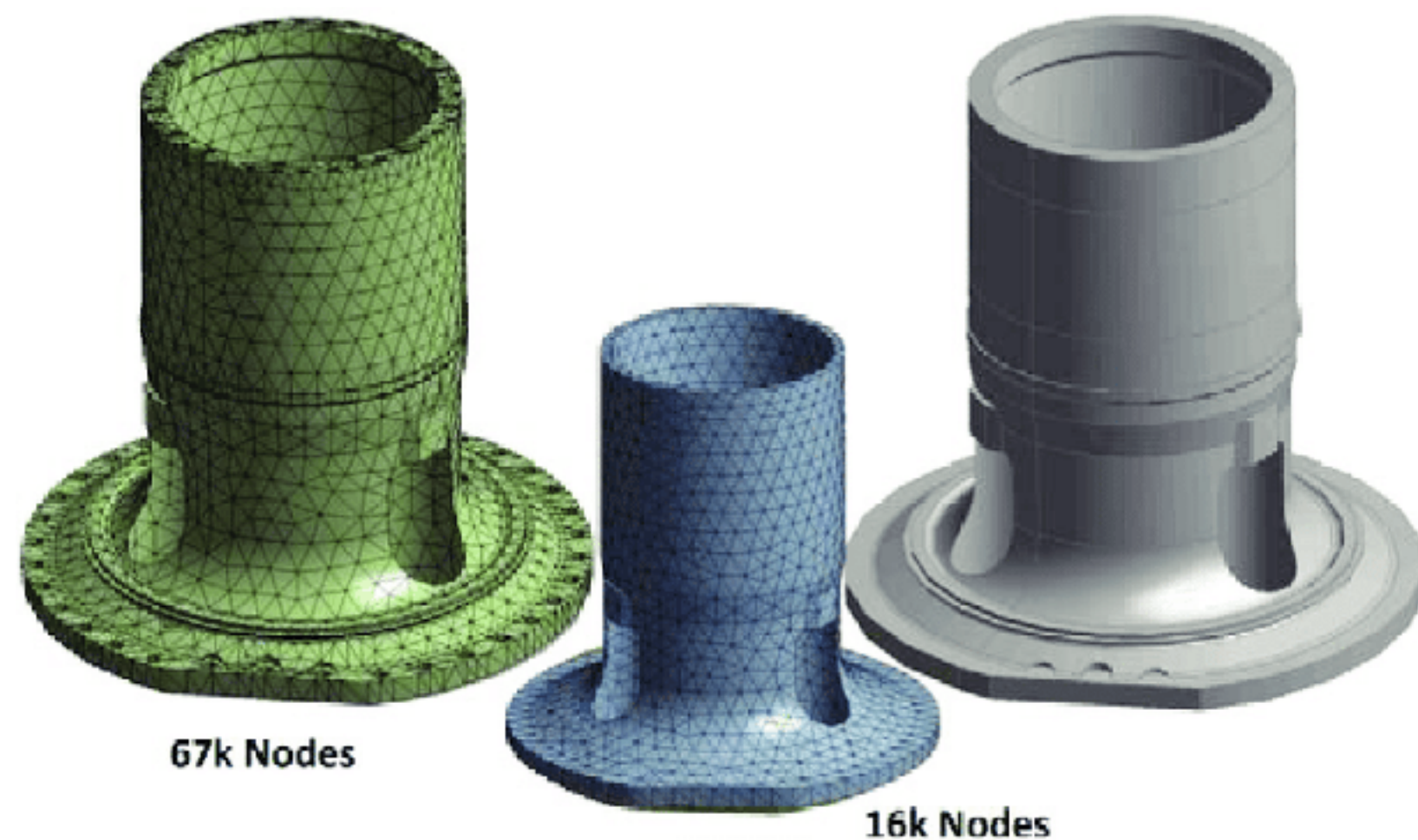
https://ansyshelp.ansys.com/public/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v242/en/ans_str/Hlp_G_STR3.html

Damping

https://ansyshelp.ansys.com/public/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v242/en/ans_str/Hlp_G_STR1D.html

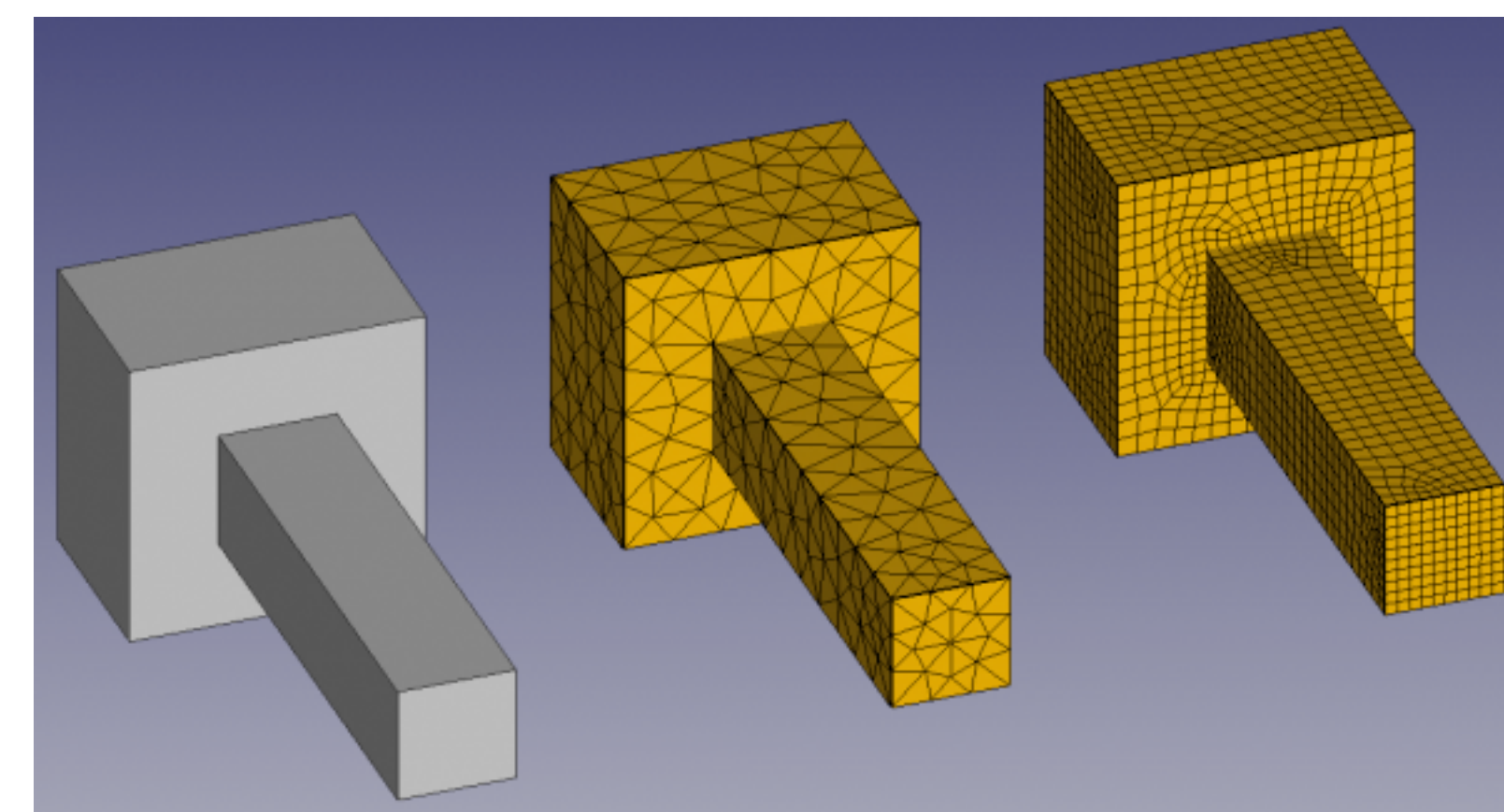
Per l'**analisi modale** numerica (frequenze naturali / modi di vibrare) servono i seguenti passaggi:

- definizione della geometria (semplificazioni del caso - defeaturing)
- definizione materiale (attenzione alle dimensioni es. lunghezze in mm & modulo di Young in ??)
- realizzazione della mesh (attenzione a: tipo, caratteristiche, dimensioni degli elementi scelti, transizioni, modelli con elementi di tipo diverso es beam&shell&solid.. compress, merge, reorder,..)
- definizioni vincoli
- definizioni carichi (servono o non servono? es. analisi modale pre-stressata)
- definizione metodo di risoluzione (es. Block Lanczos, PCG Block Lanczos, Supernode, Subspace, Unsymmetric, Damped, QR Damped..)
- definizione numero di modi da estrarre (fattore di partecipazione modale, massa effettiva..)
- visualizzazione dei risultati (direzionali / combinati, statica / animazioni...)

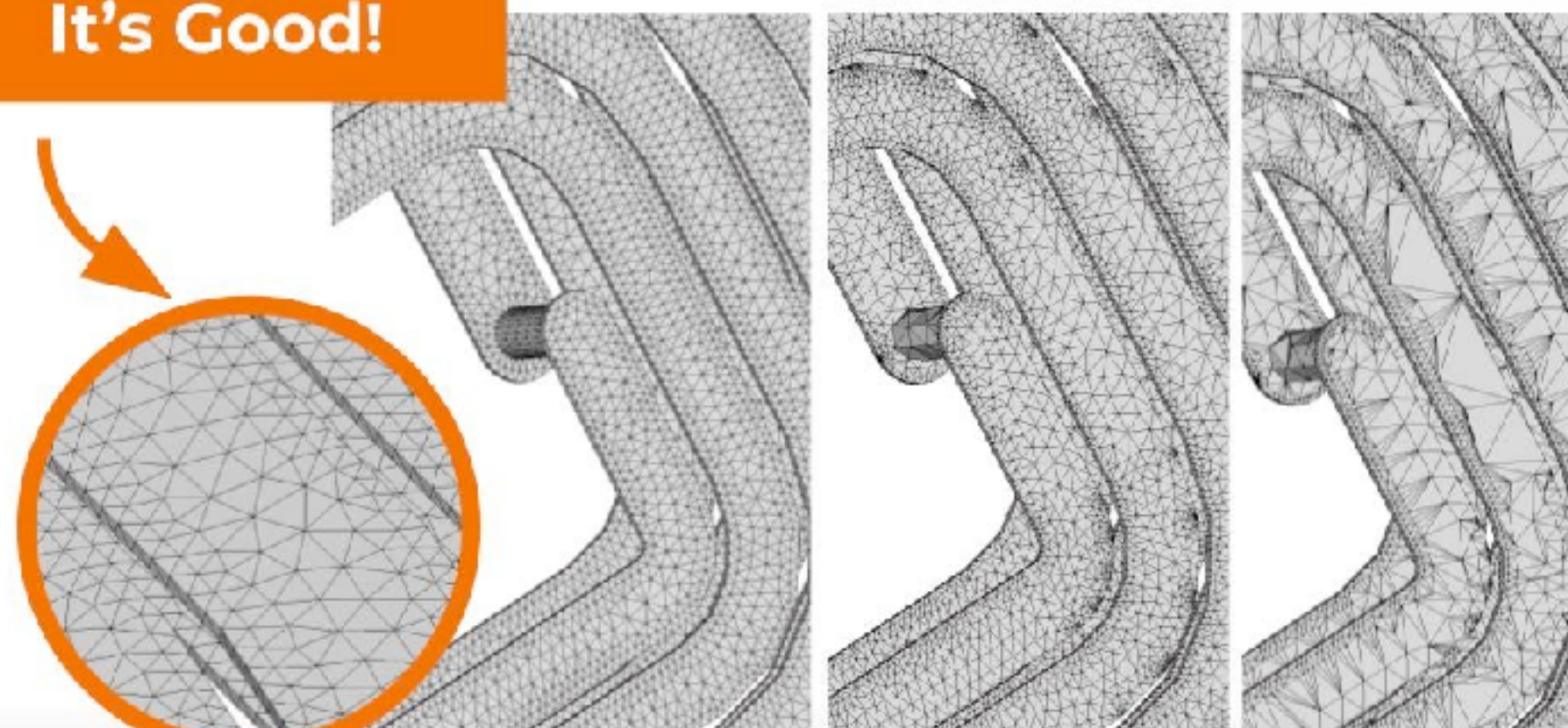


Punti fondamentali da considerare:

- Accuratezza
- Tempo di calcolo
- RAM



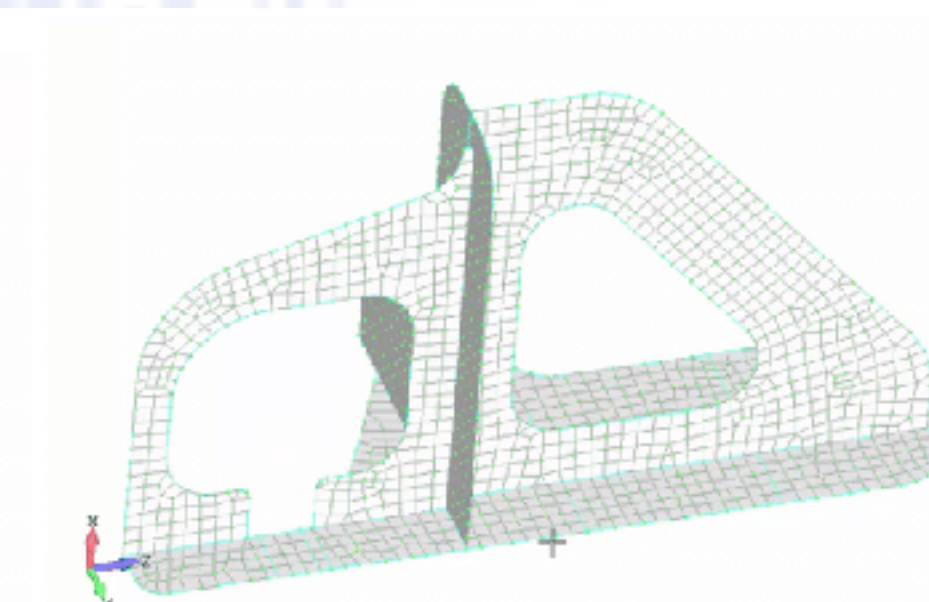
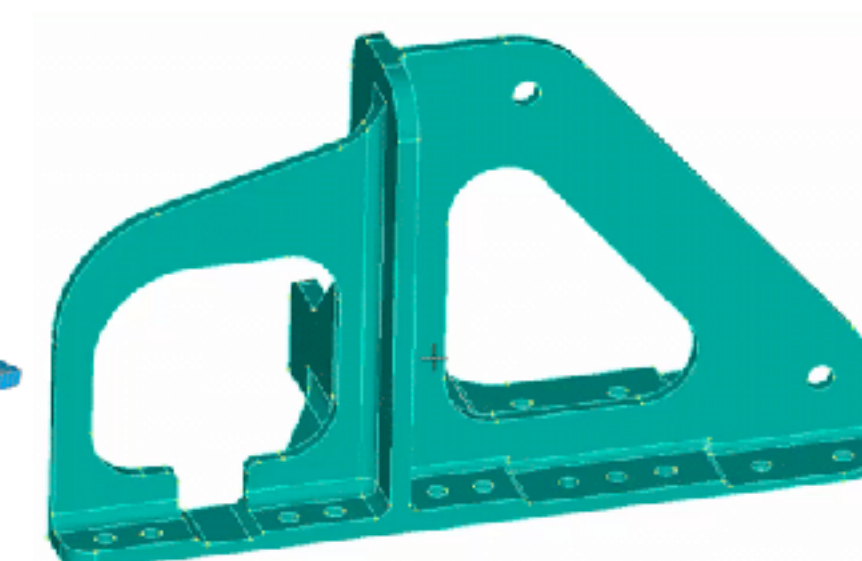
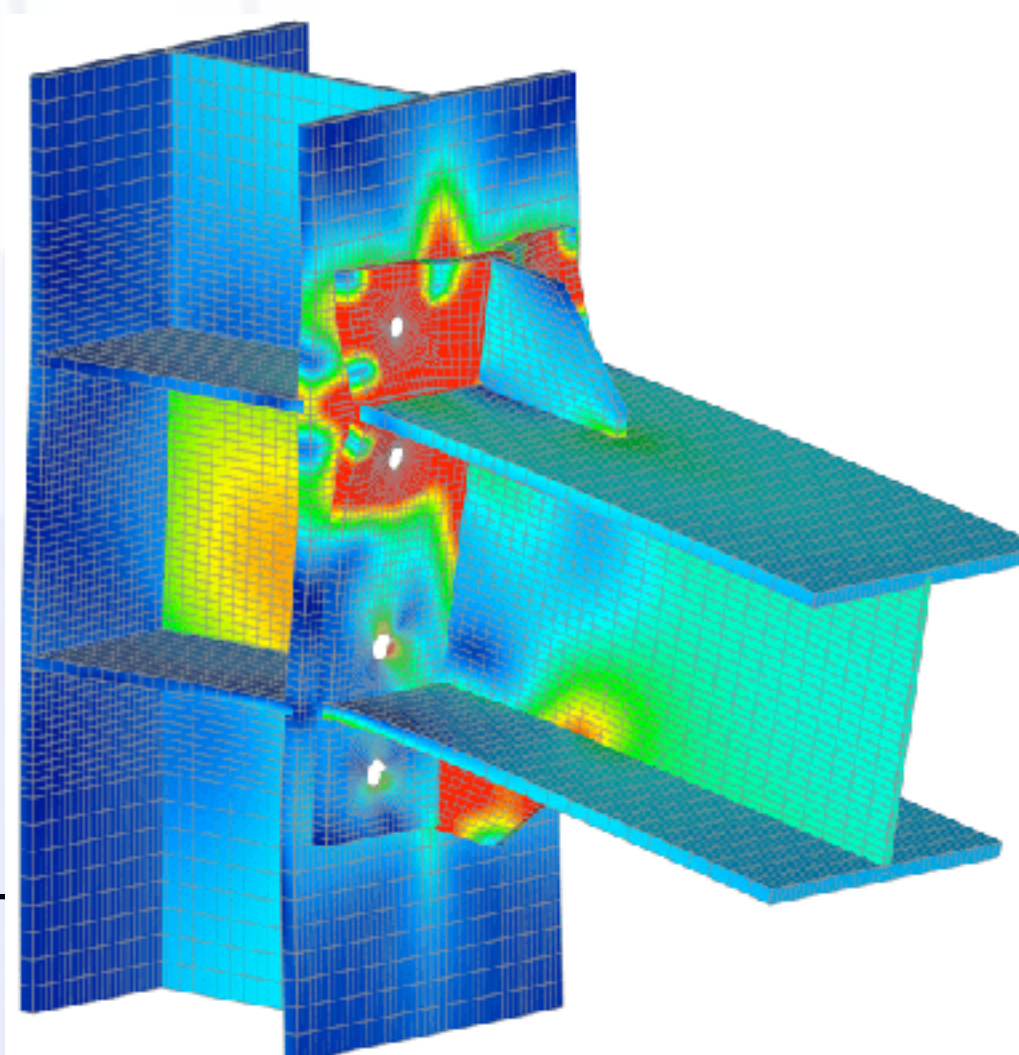
It's Good!



The Good

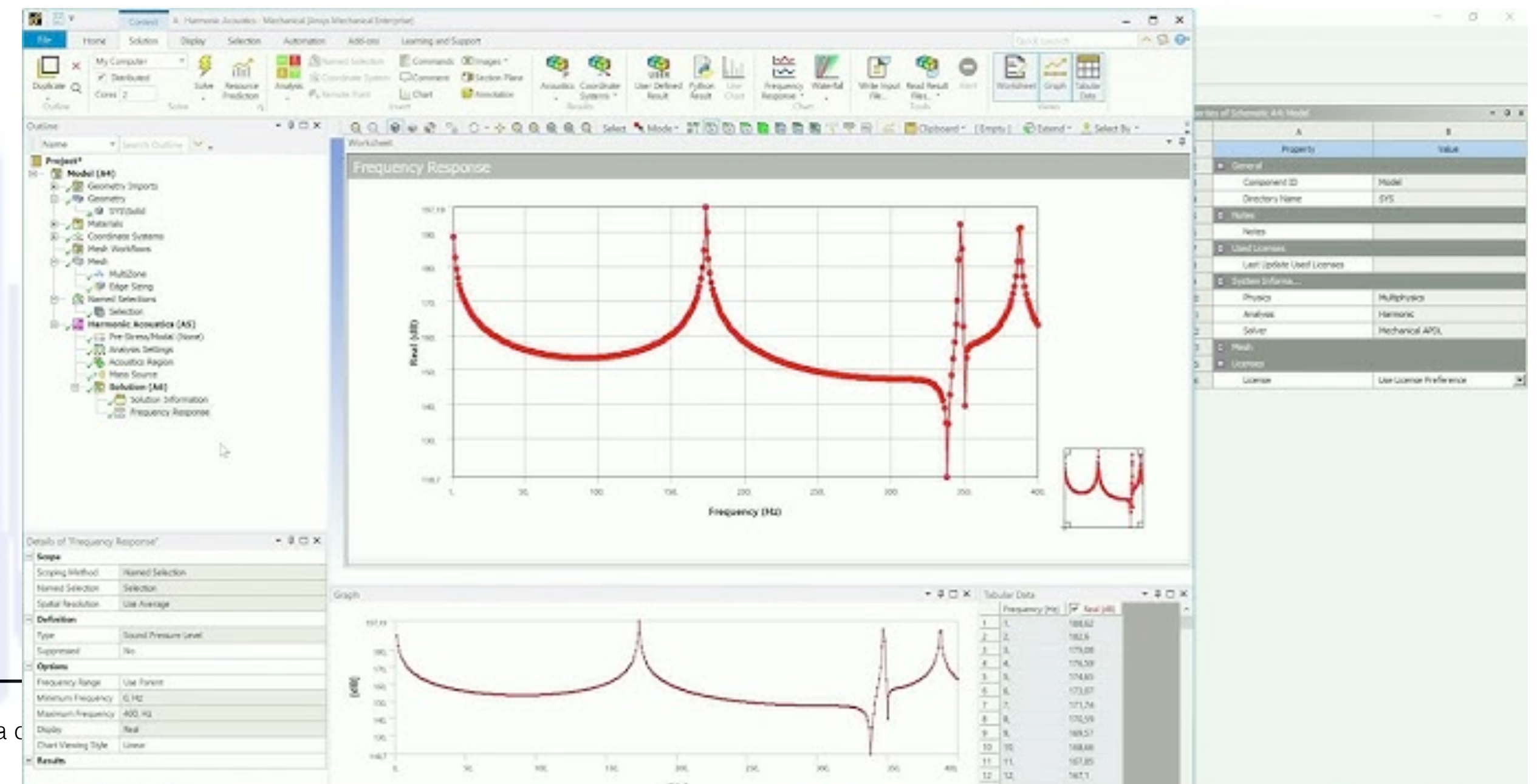
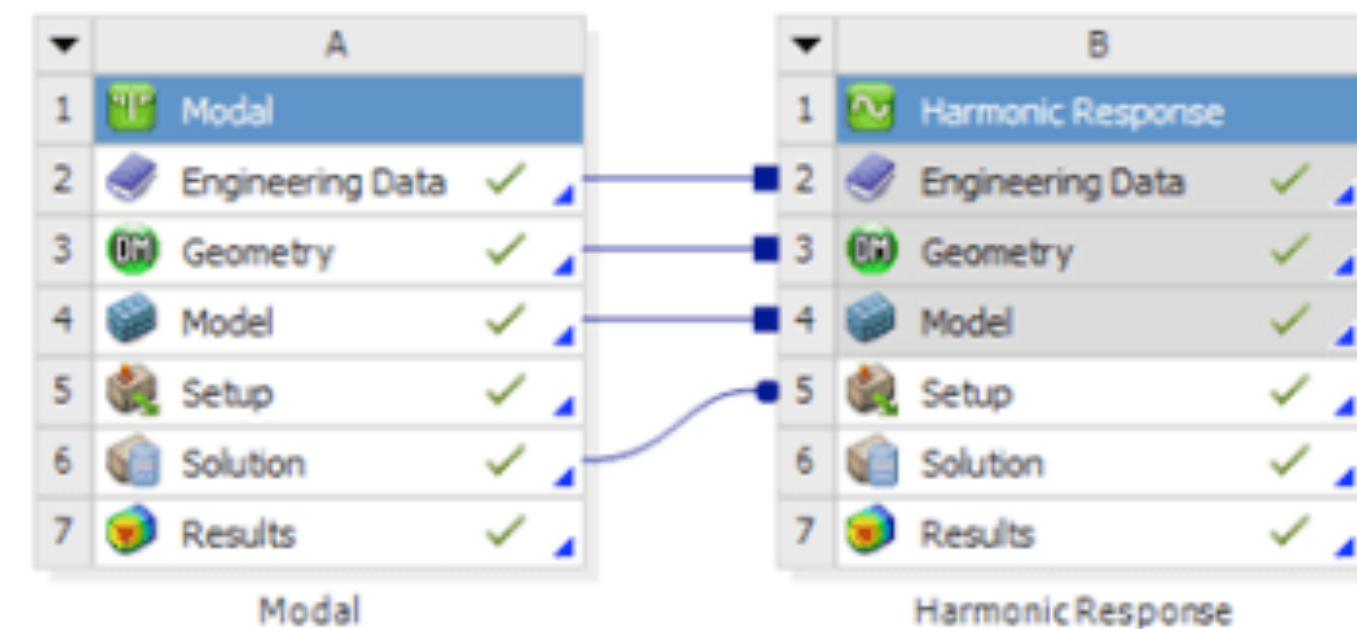
The Bad

The Ugly

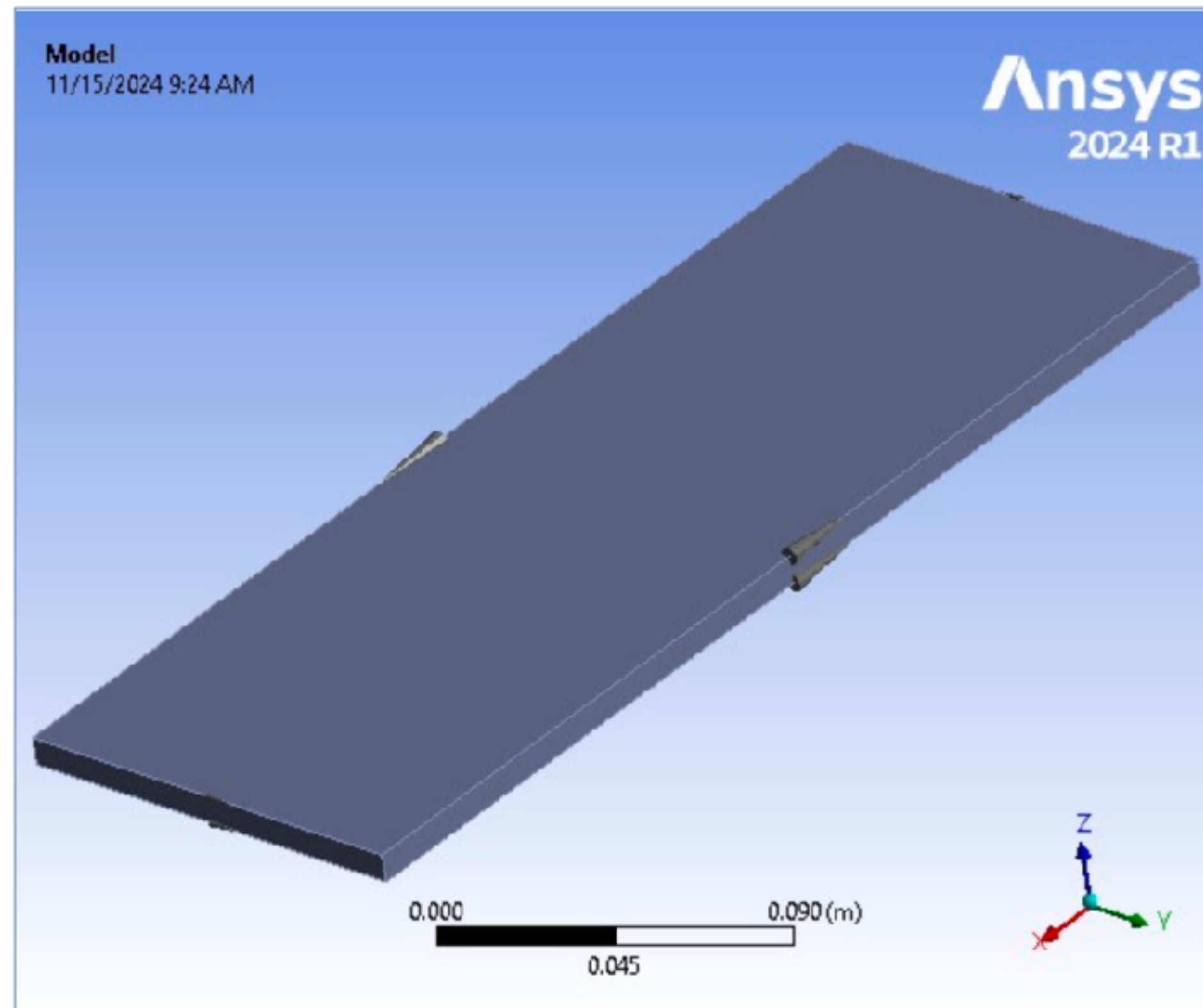


Per l'**analisi armonica** numerica (funzioni di risposta in frequenza) servono i seguenti passaggi:

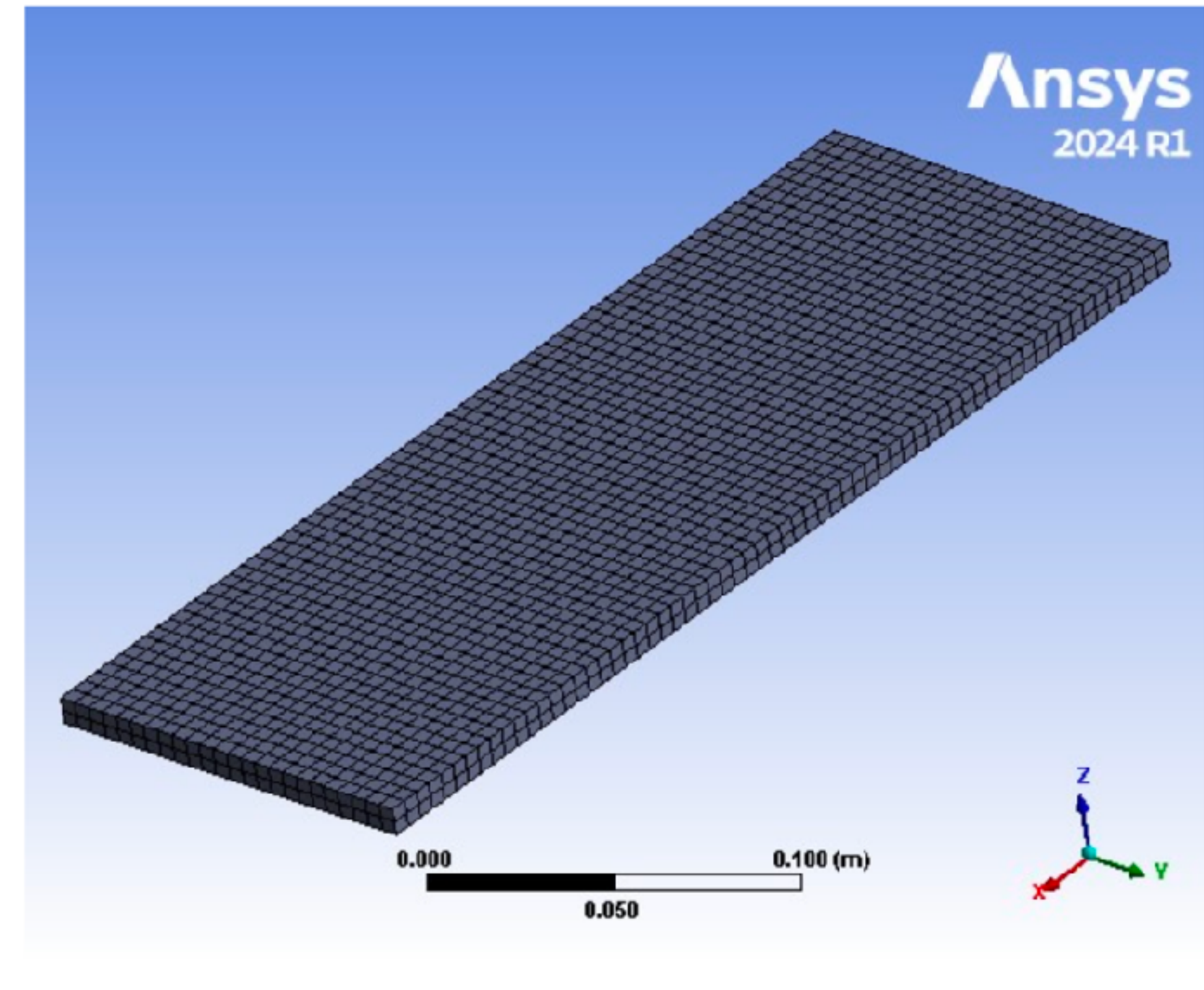
- partendo da un analisi modale completa (con i modi calcolati in una banda opportuna)
- definizione dei carichi (punto e direzione di applicazione della forza / momento)
- definizione dello smorzamento (modello di smorzamento e valori numerici dei coefficienti)
- definizione del metodo di risoluzione (soluzione diretta o con sovrapposizione modale)
- definizione del range e risoluzione in frequenza (se MS quanti modi? in che banda?)
- visualizzazione dei risultati



Esempio calcolo delle FRF su un piastra in condizioni di vincolo libero-libero



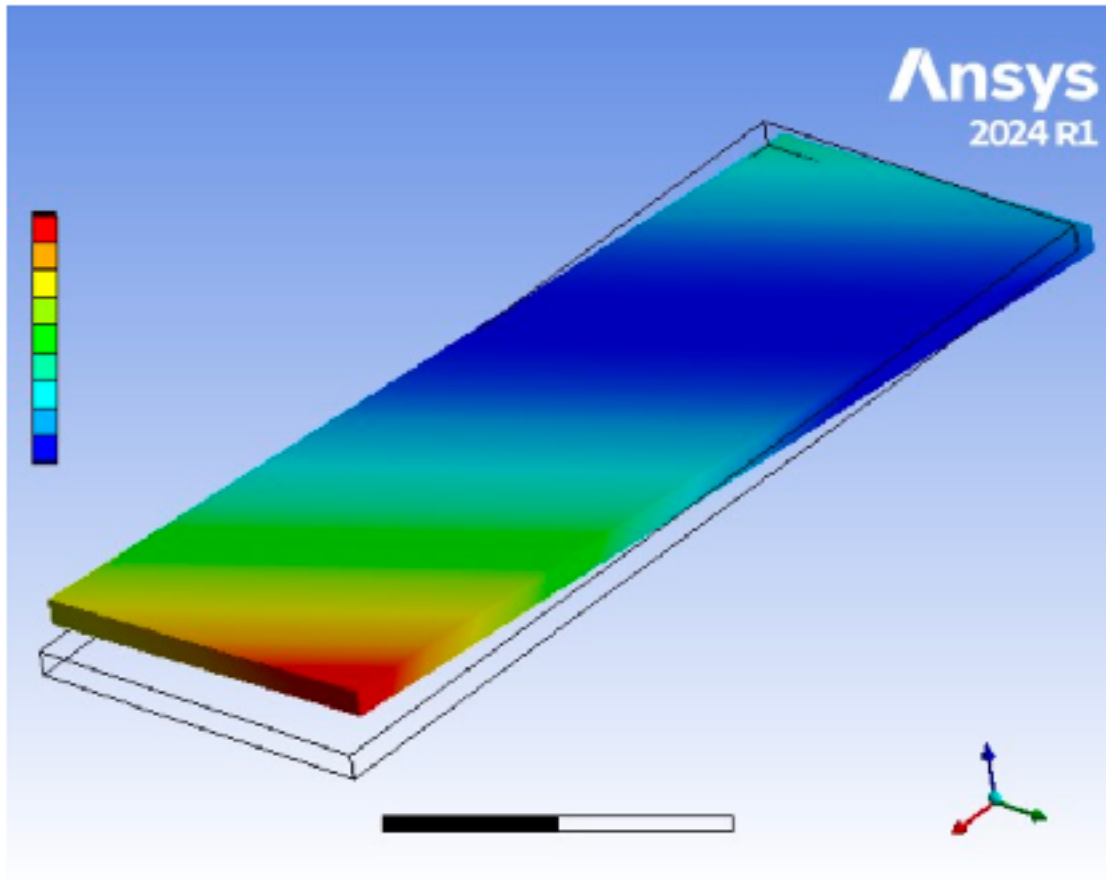
geometria



mesh

come si stabilisce se la mesh è adeguata?

(lo dovrete già sapere)

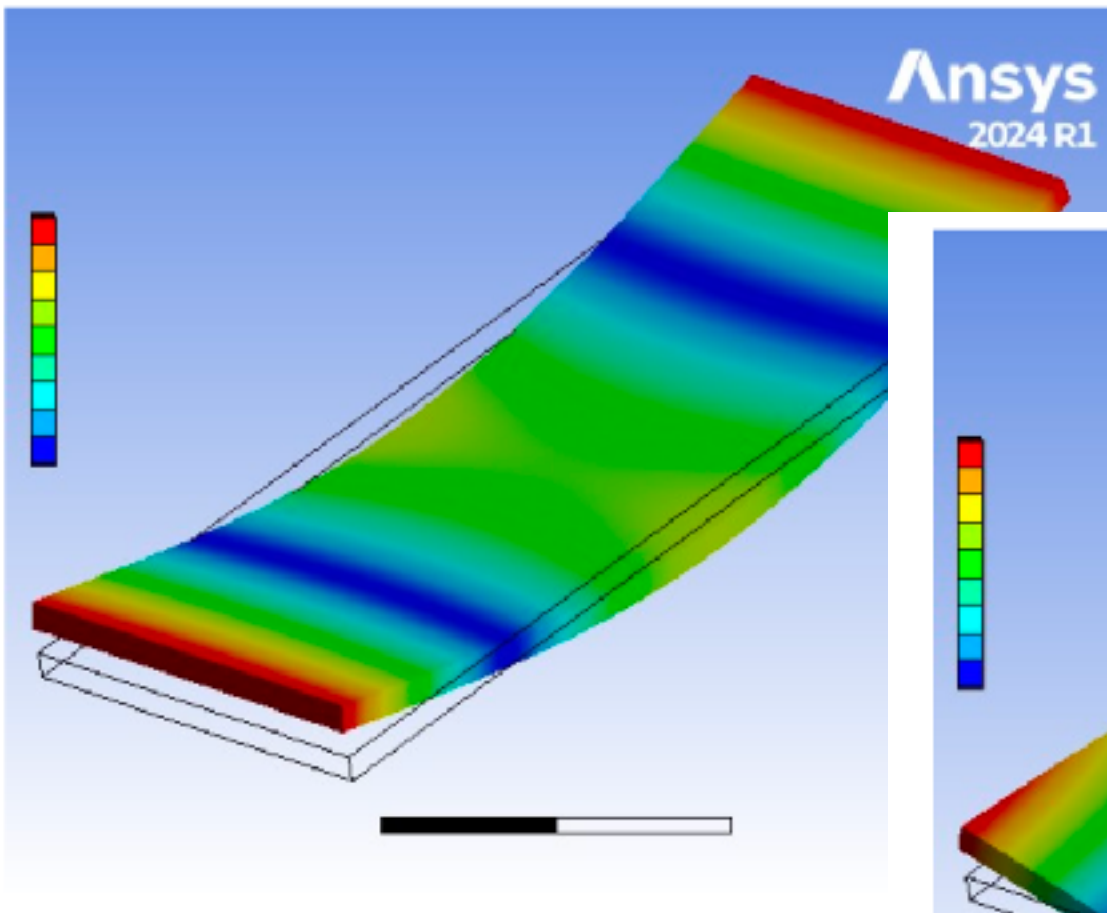


modo rigido 6

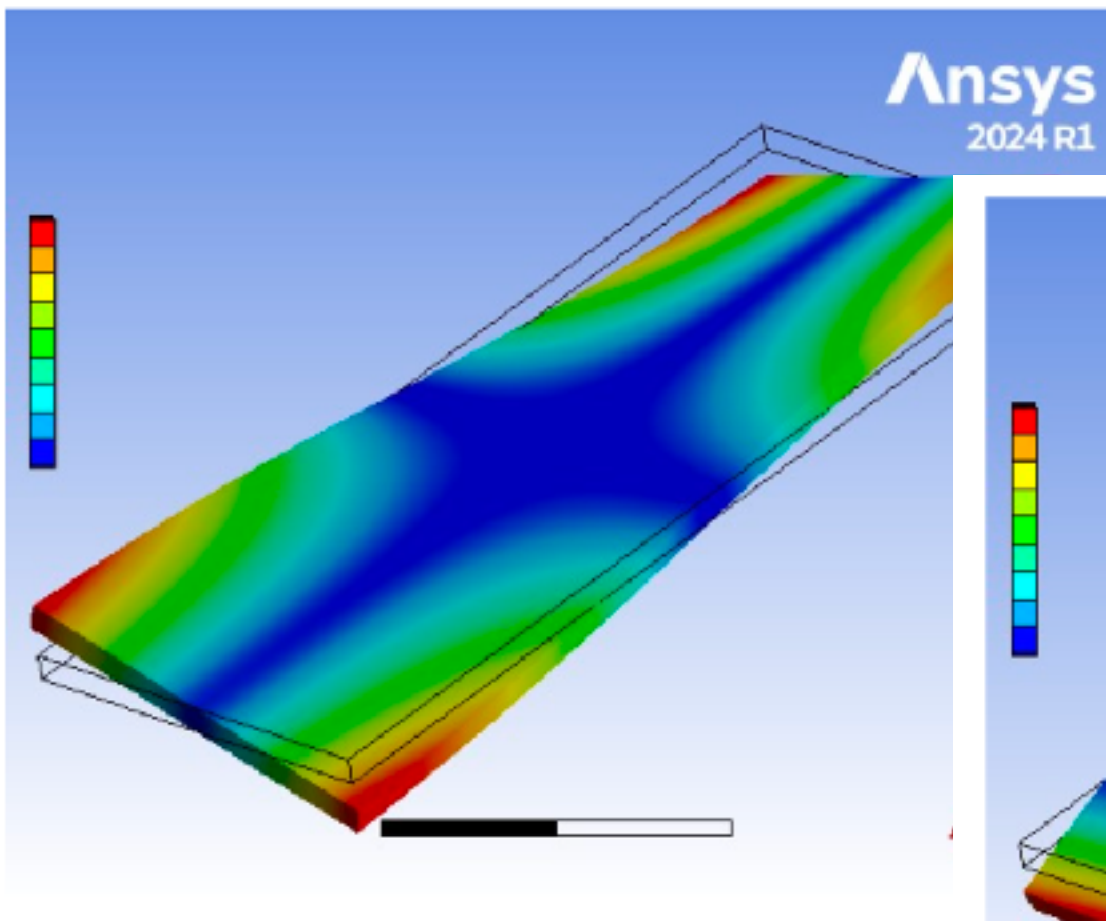
Frequenze naturali e
Forme modali

come si stabilisce se il numero dei
modi è adeguato?

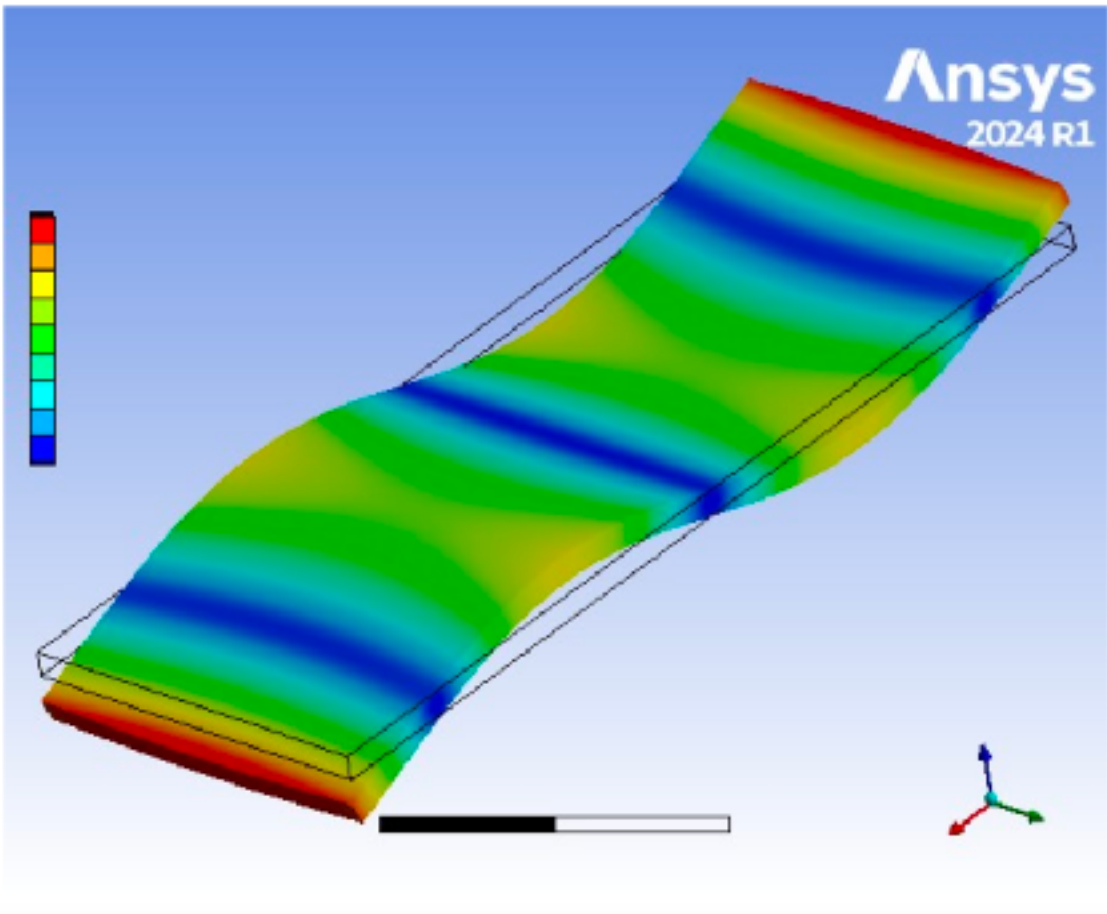
Mode	Frequency [Hz]
1.	0.
2.	
3.	
4.	3.1682e-003
5.	7.8556e-003
6.	1.3887e-002
7.	408.76
8.	668.79
9.	1130.1
10.	1420.4
11.	2205.2
12.	2334.9
13.	3113.4
14.	3291.6
15.	3483.2
16.	3734.8
17.	4114.1
18.	4390.6
19.	4911.2
20.	5223.7



modo flessibile 1

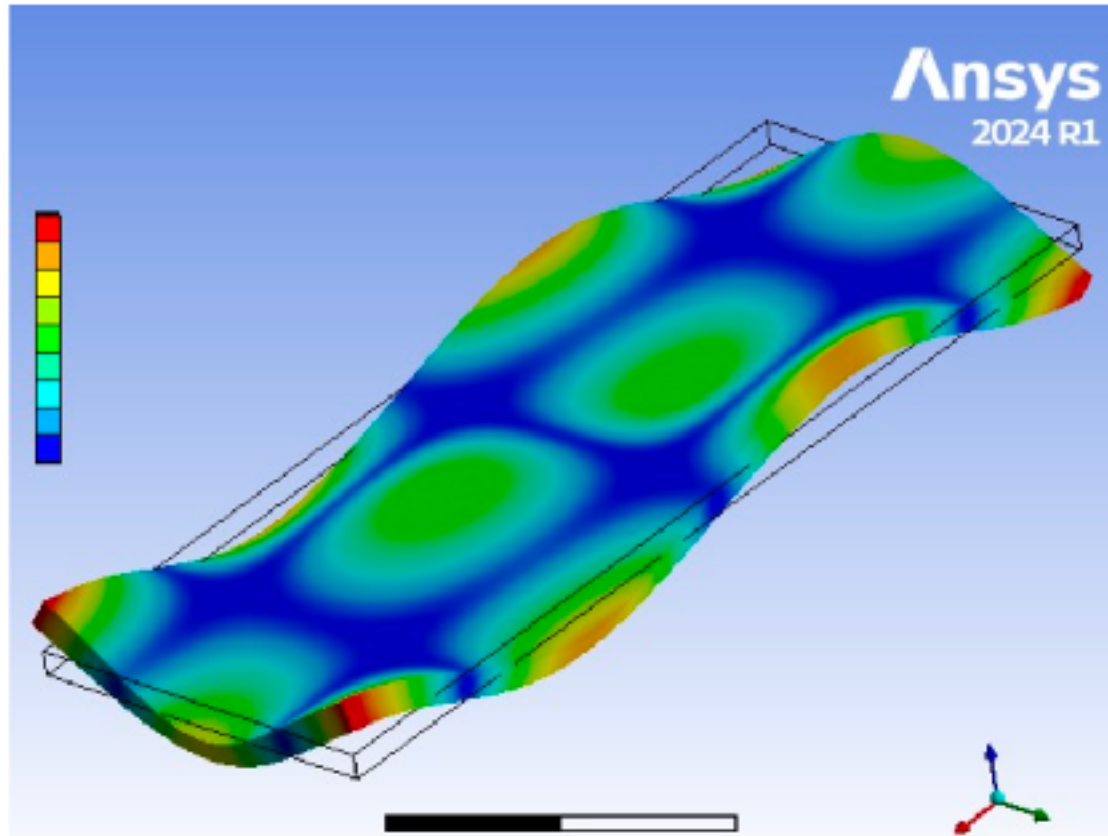


modo flessibile 2



modo flessibile 3

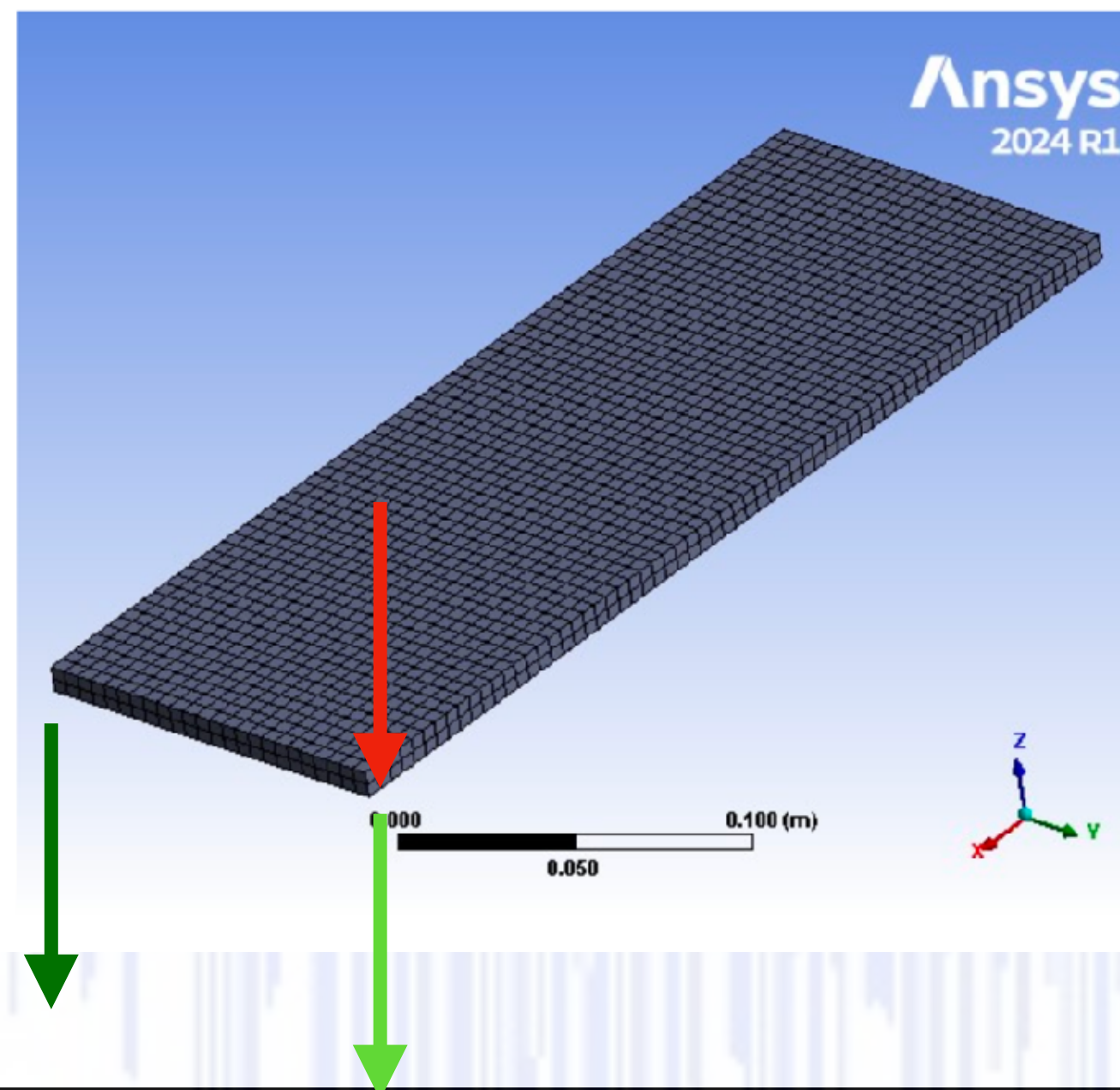
....



modo flessibile 20

Effetto dei diversi modelli di smorzamento in Ansys

Damping Ratio	0.5 - 0.05 - 0.005 - 0.0005
Stiffness Matrix Coefficient β ($\alpha=0$)	0.01 - 0.0001 - 0.000001 - 0.00000001
Mass Matrix Coefficient α ($\beta=0$)	1 - 10 - 100 - 1000

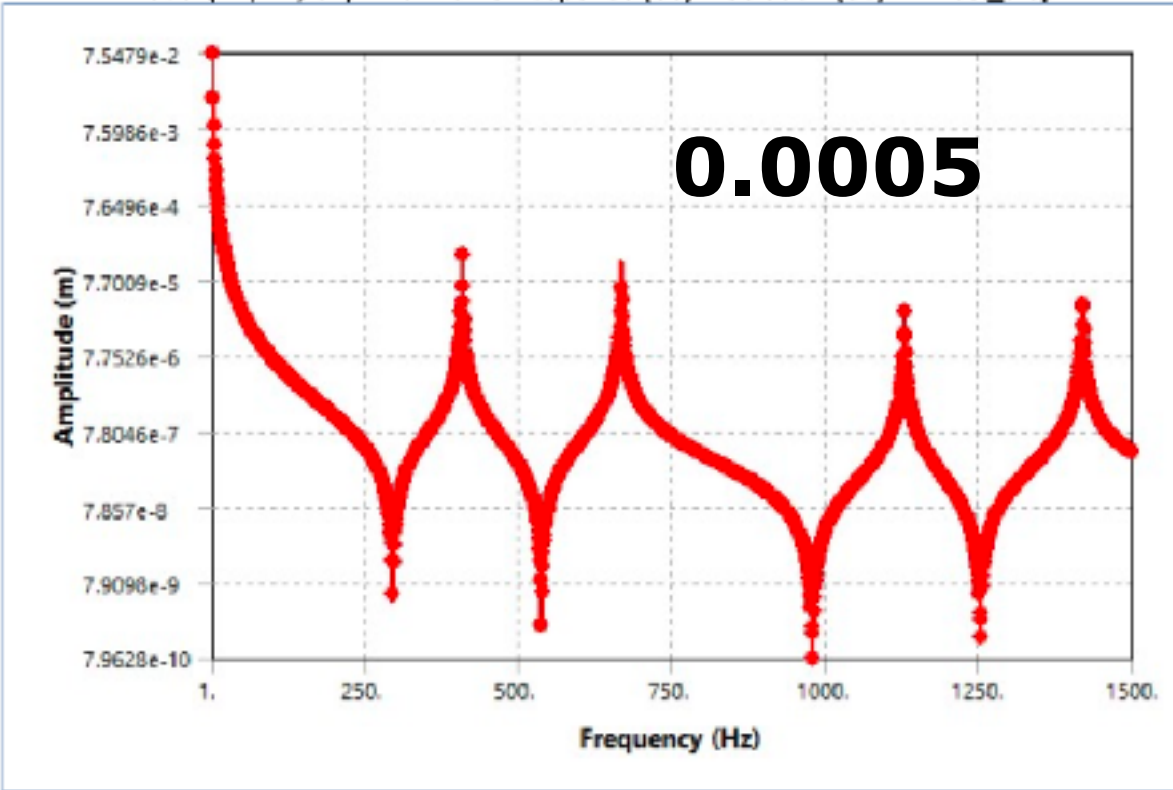
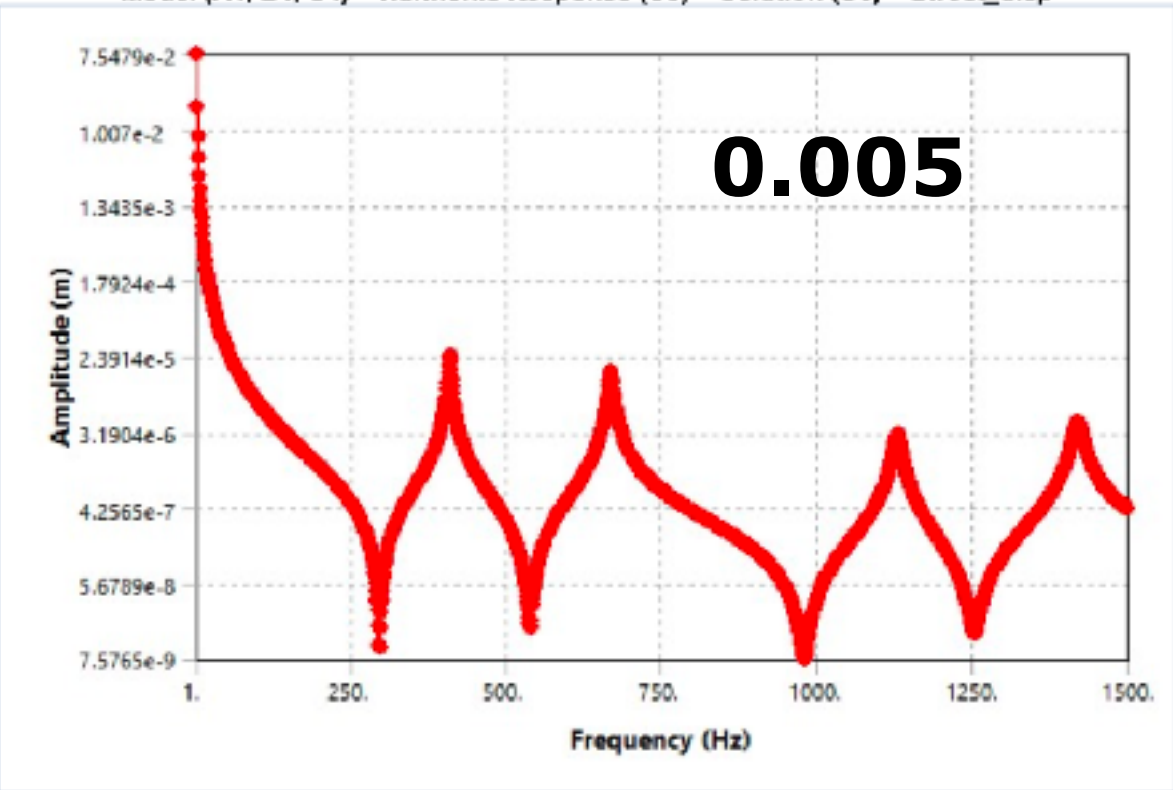
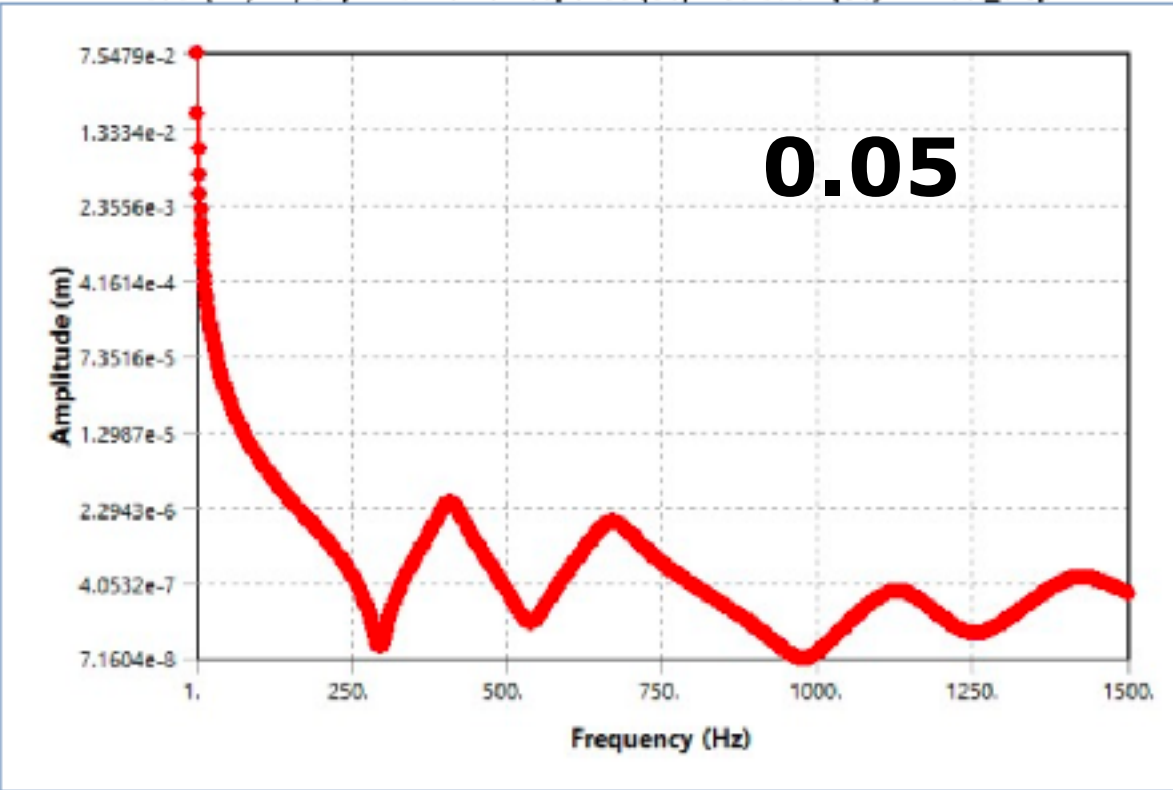
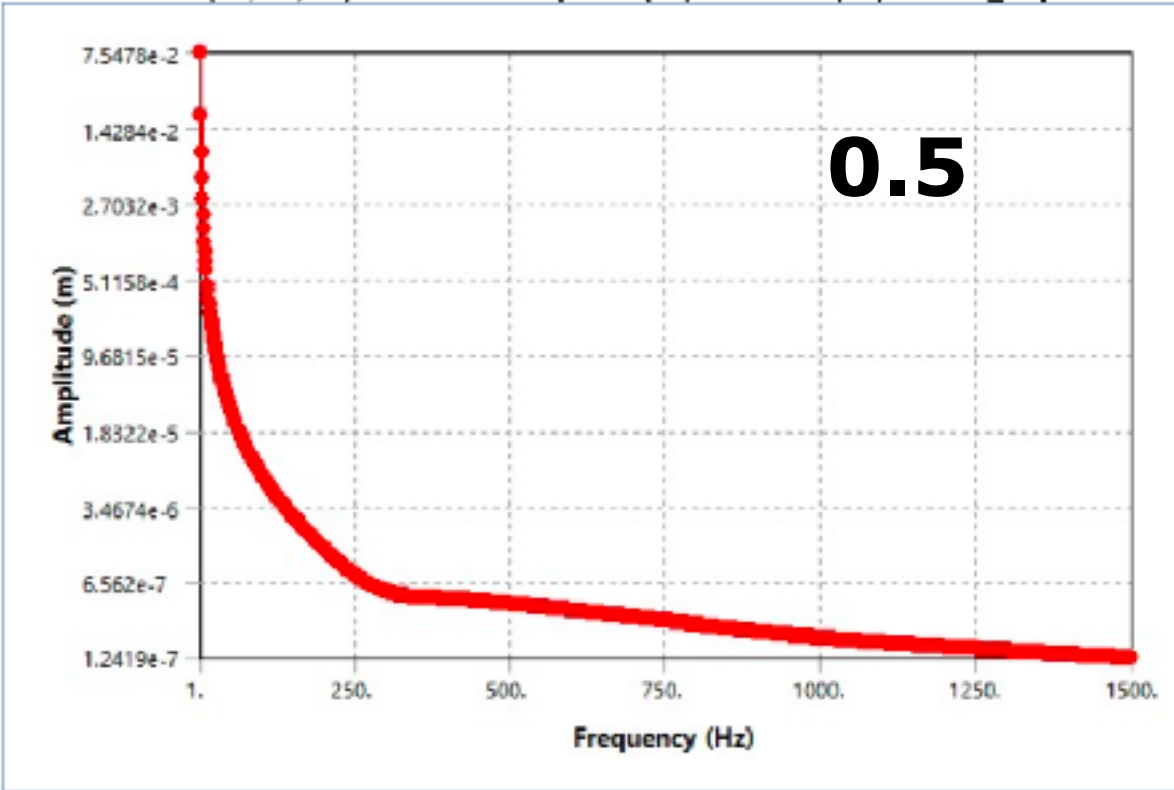


Eccitazione F_z e Risposte $z - z$

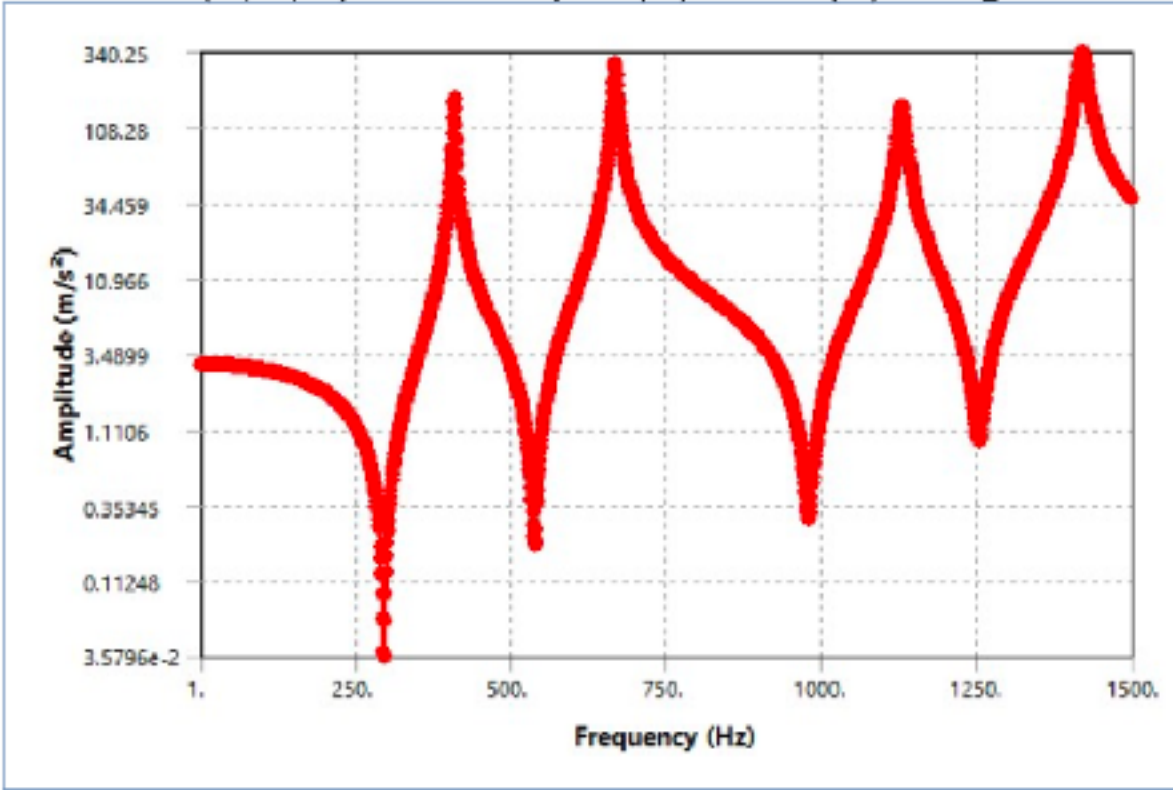
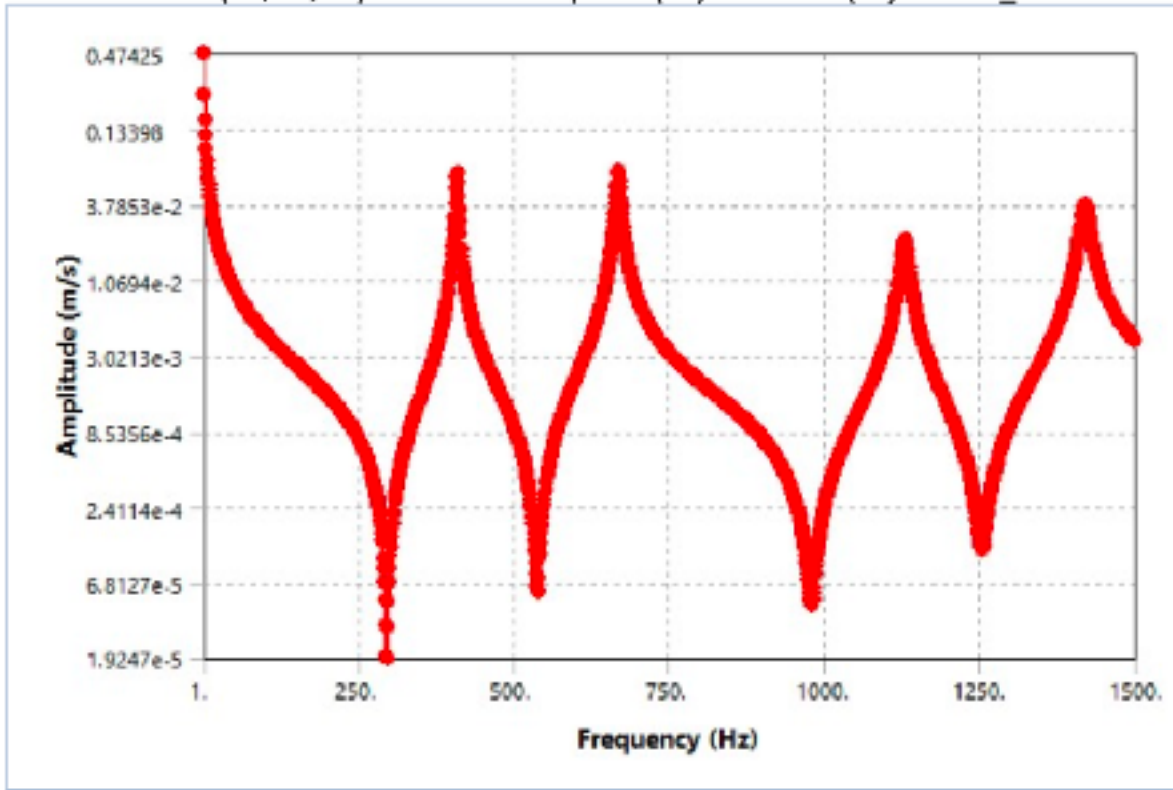
range: 1-1500Hz (NB non il valore 0 non è calcolato)
risoluzione: 1 Hz
metodo: sovrapposizione modale

FRF diretta "spostamento / forza"

Damping Ratio=> 0.5 - 0.05 - 0.005 - 0.0005



FRF diretta "velocità / forza"



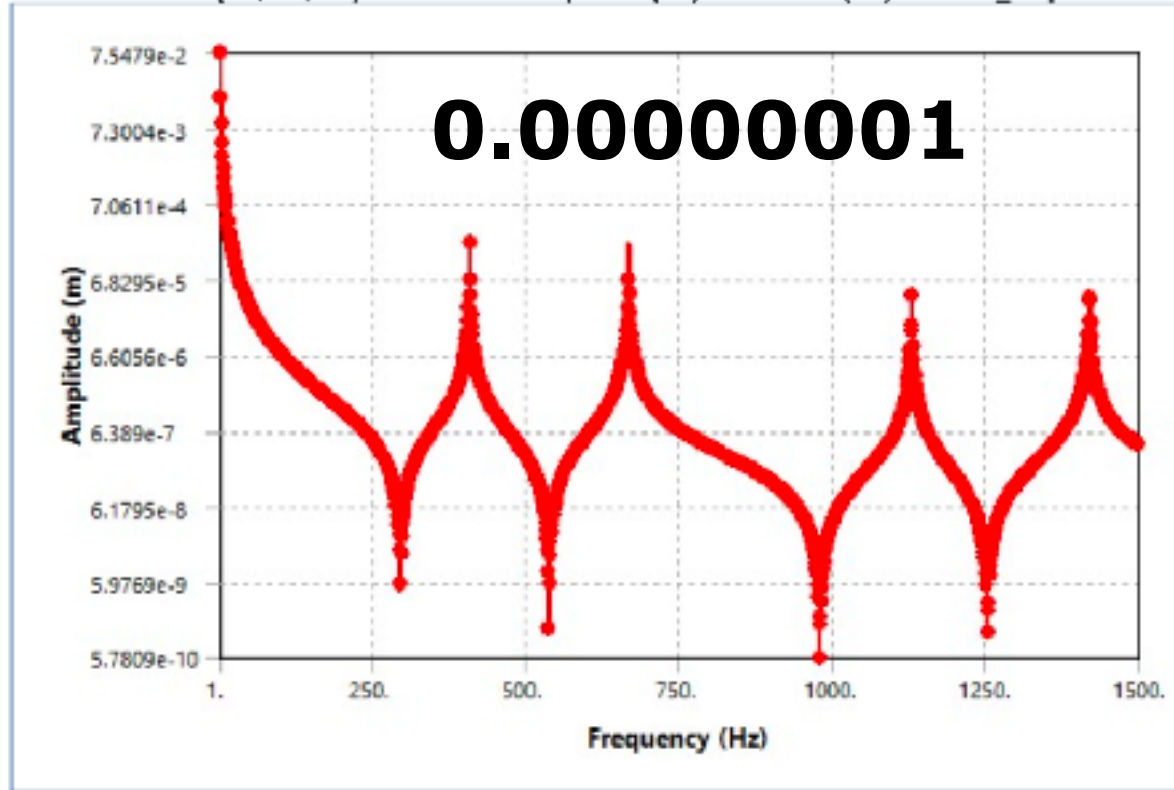
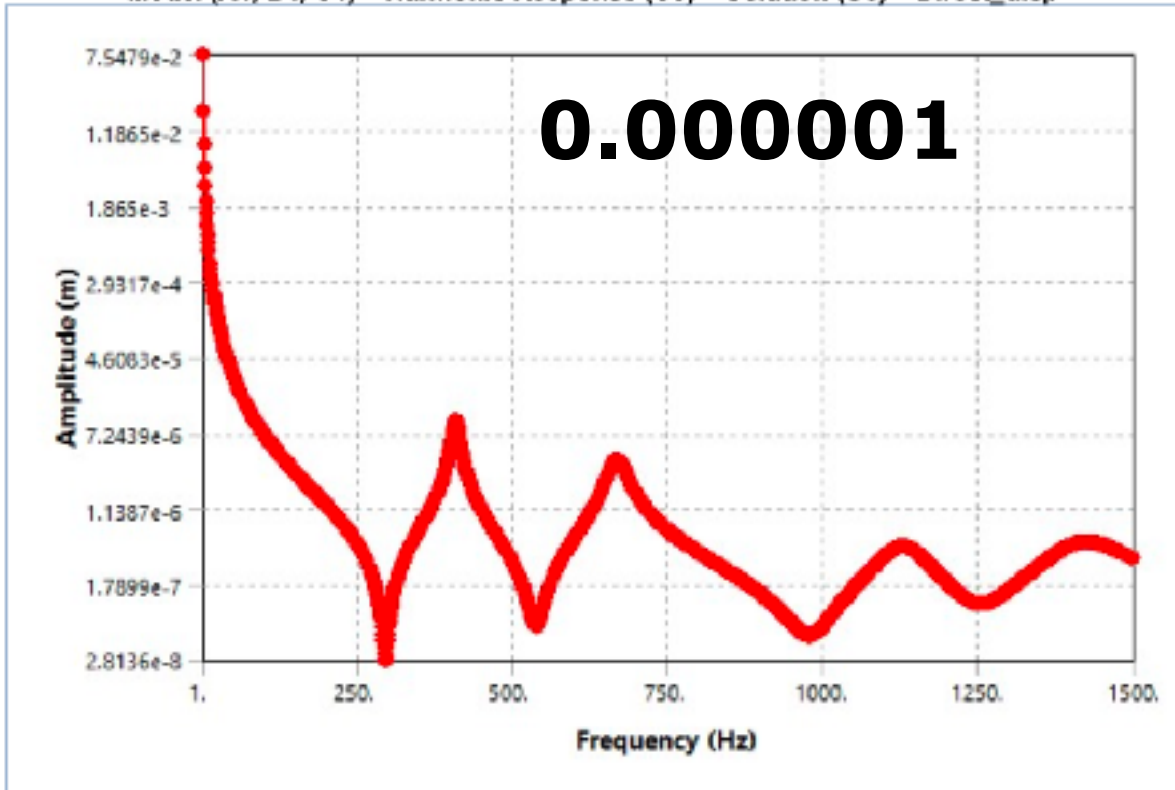
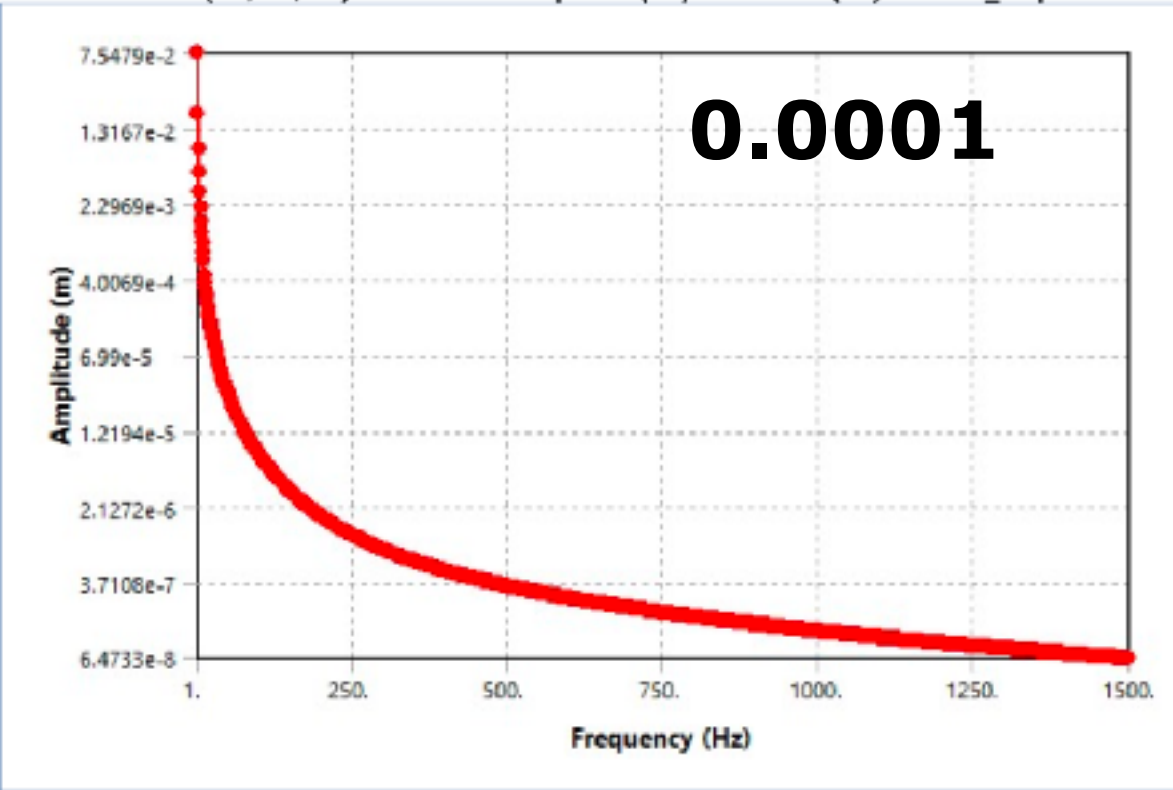
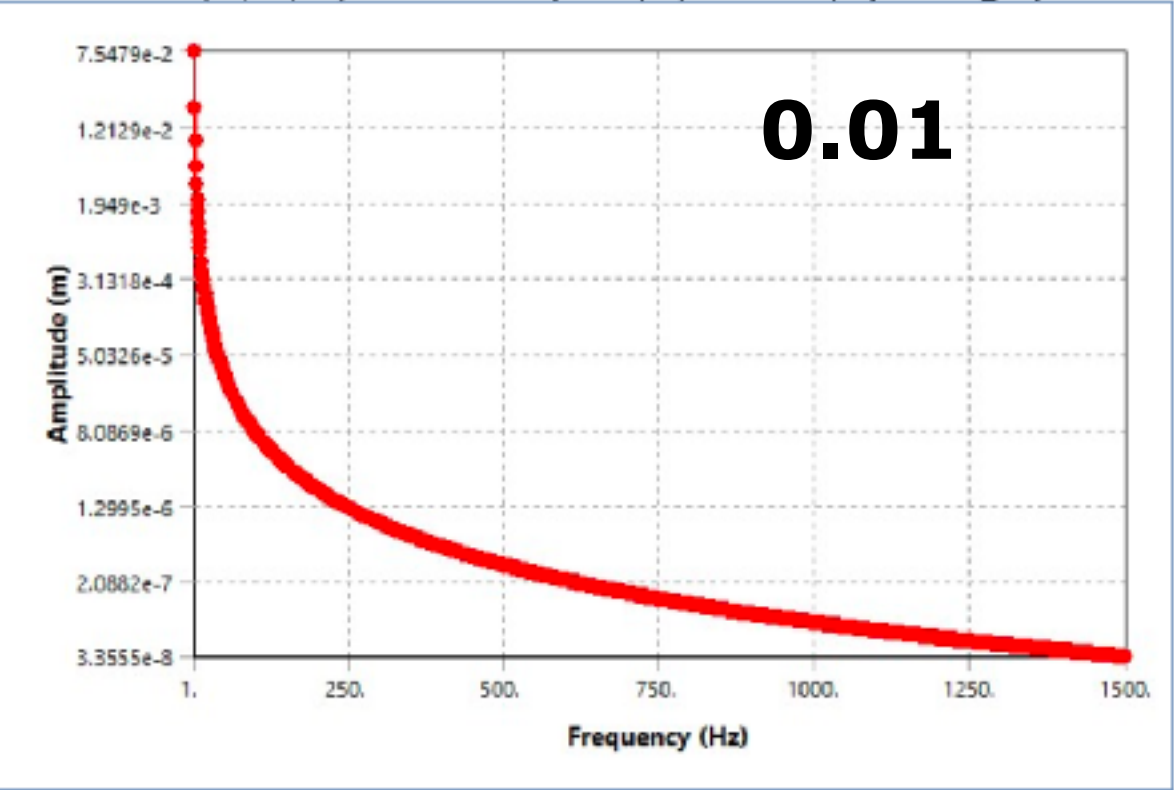
FRF diretta "accelerazione / forza"

..notare sequenza
risonanza/antirisonanza

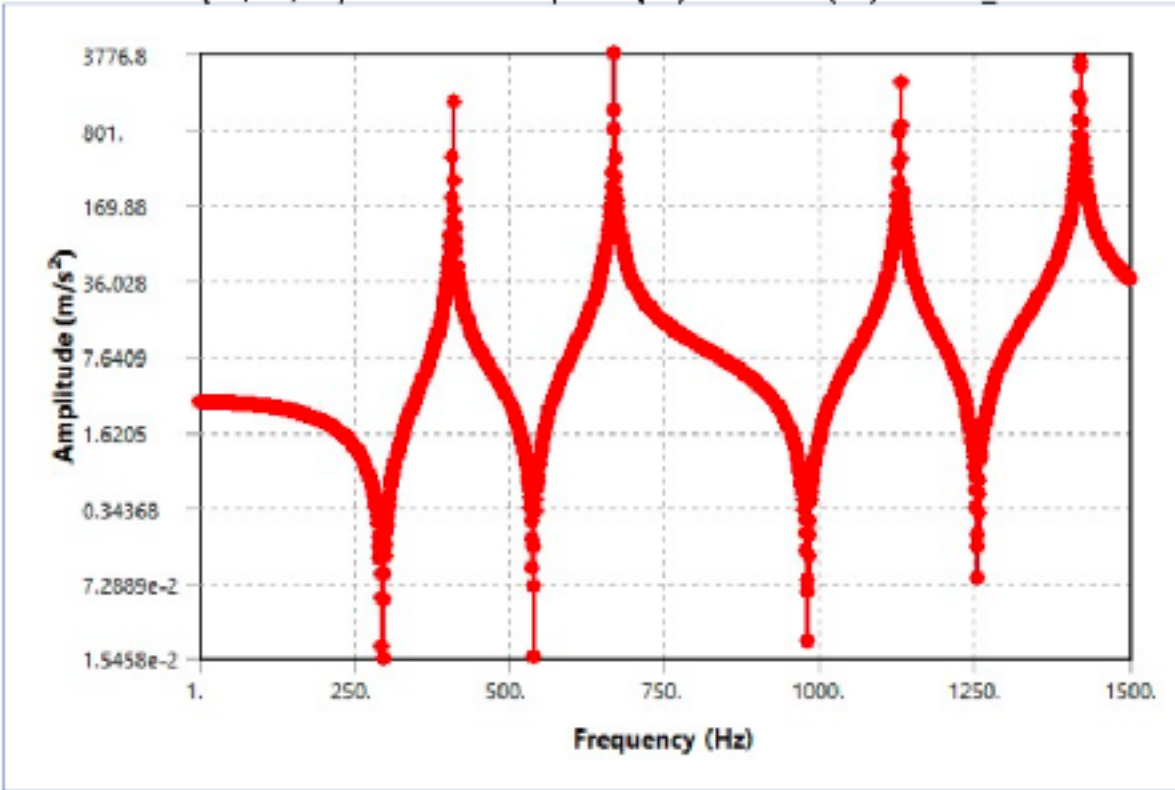
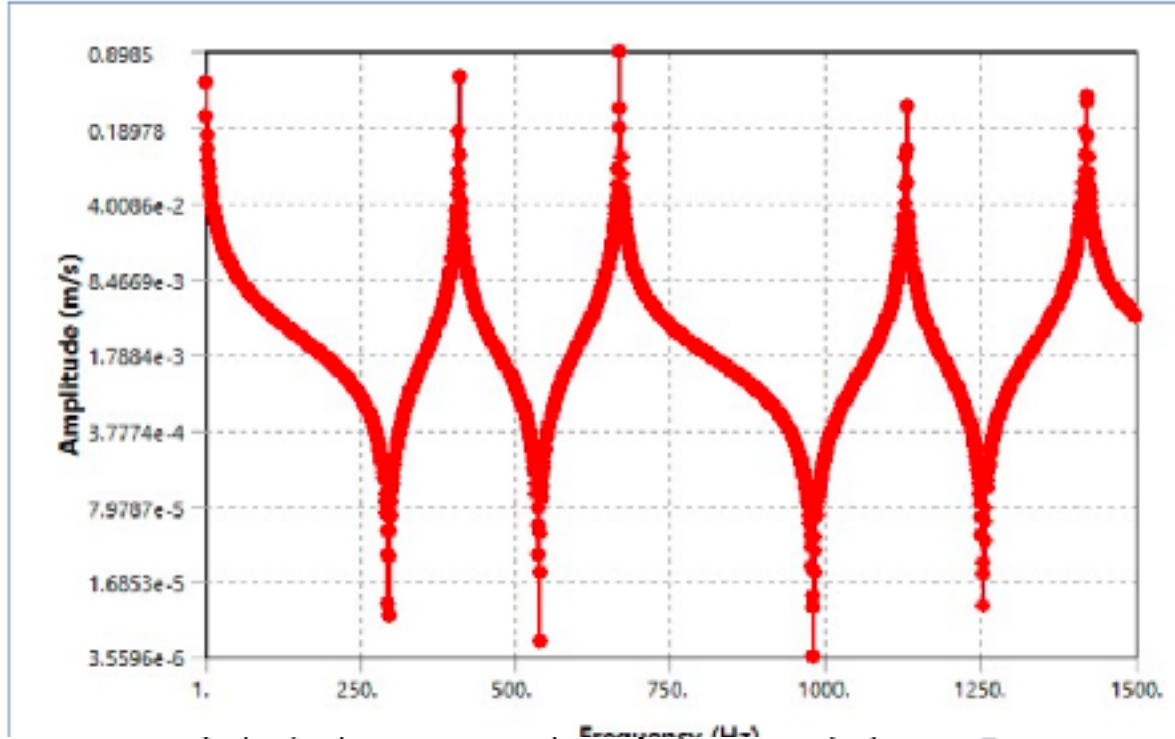
E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

FRF diretta "spostamento / forza"

Stiffness Matrix Coefficient $\beta=0.01 - 0.0001 - 0.000001 - 0.00000001$
($\alpha=0$)



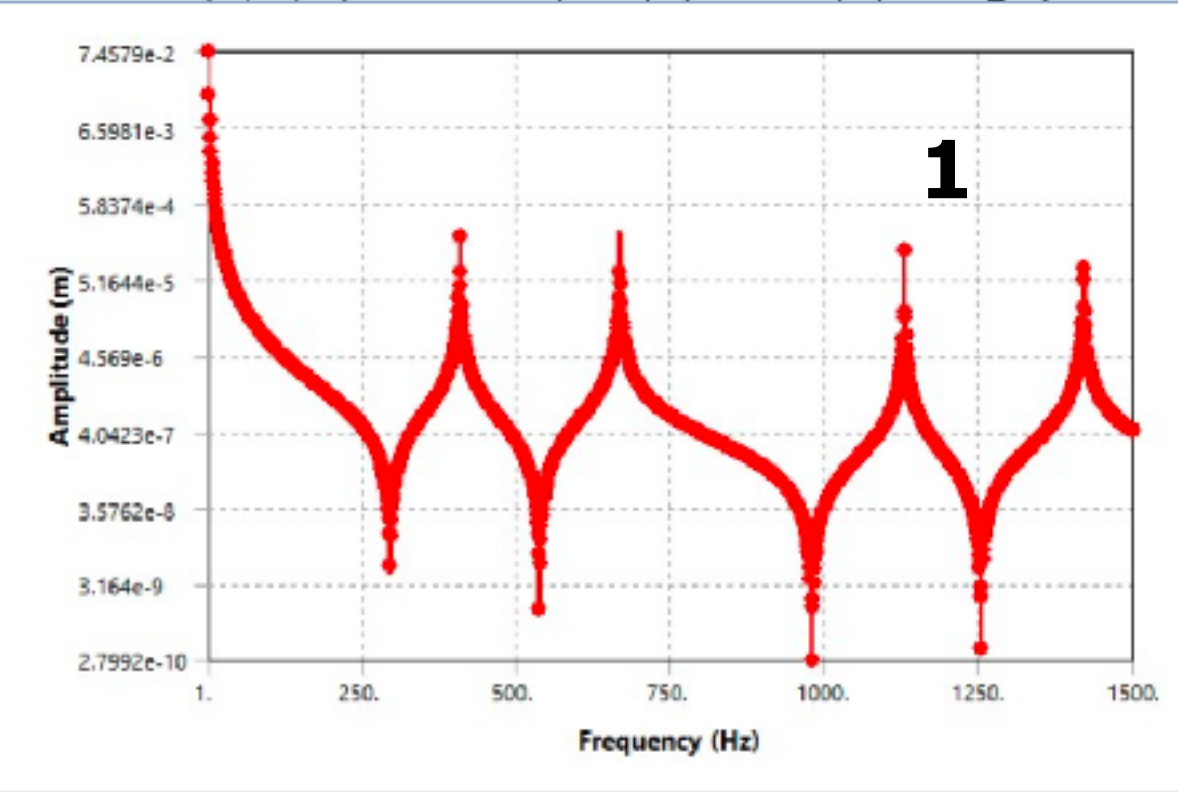
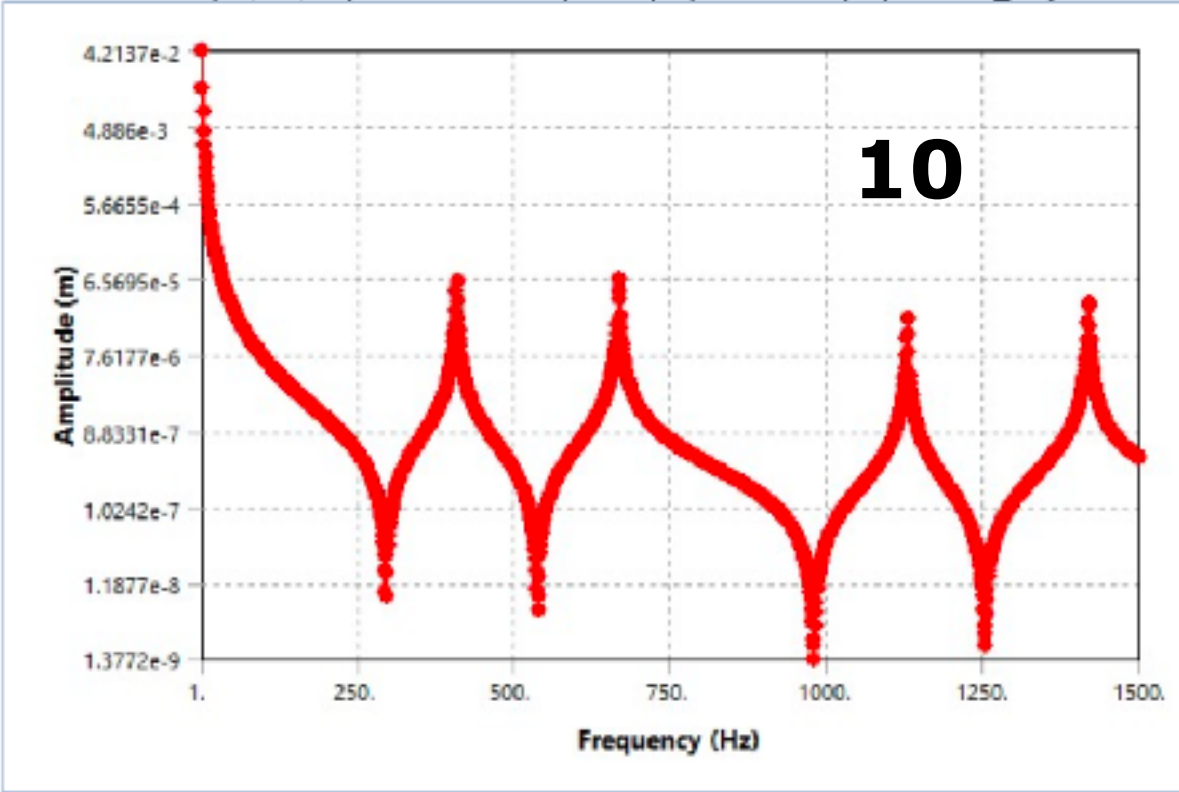
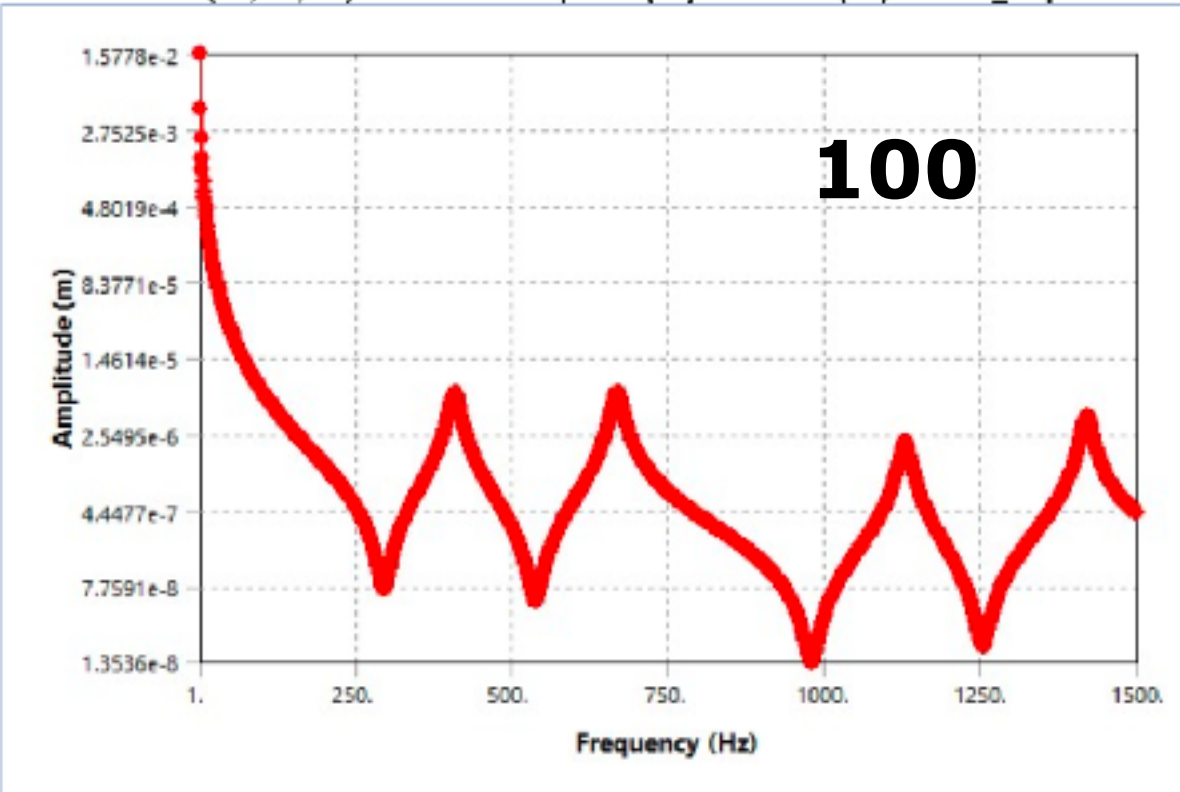
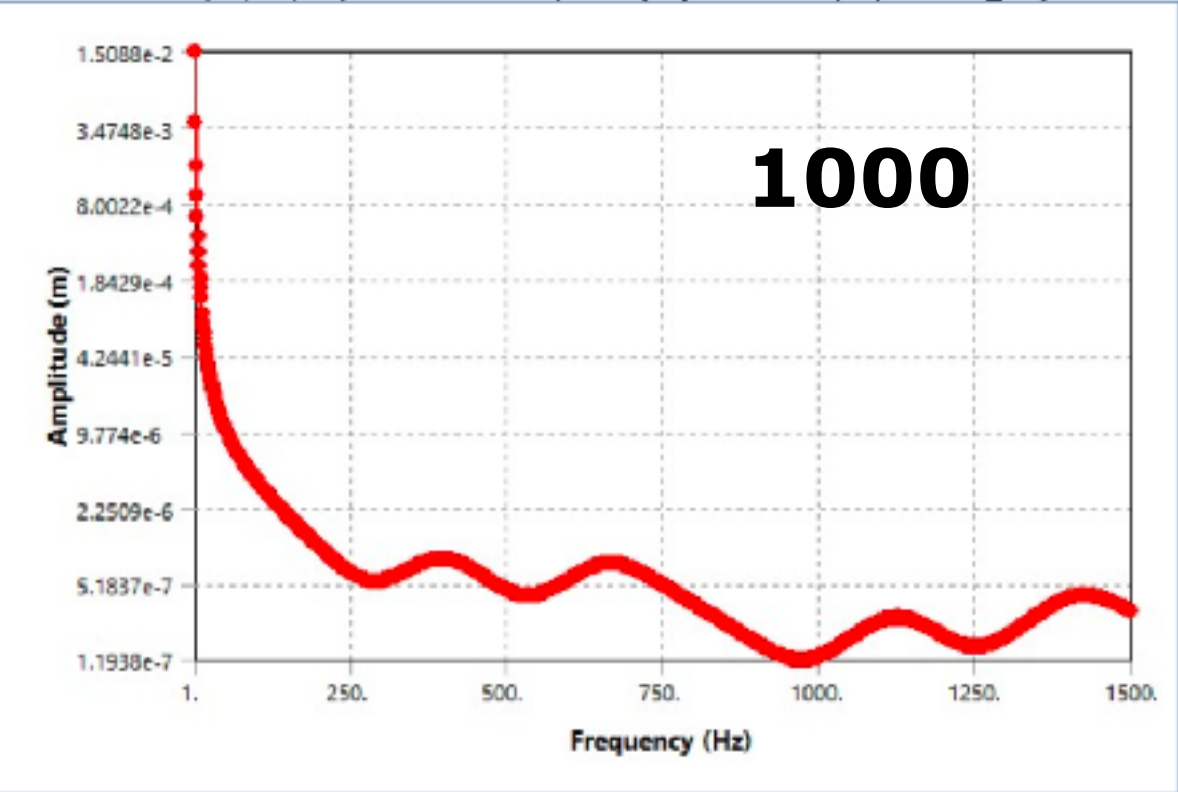
FRF diretta "velocità / forza"



FRF diretta "accelerazione / forza"

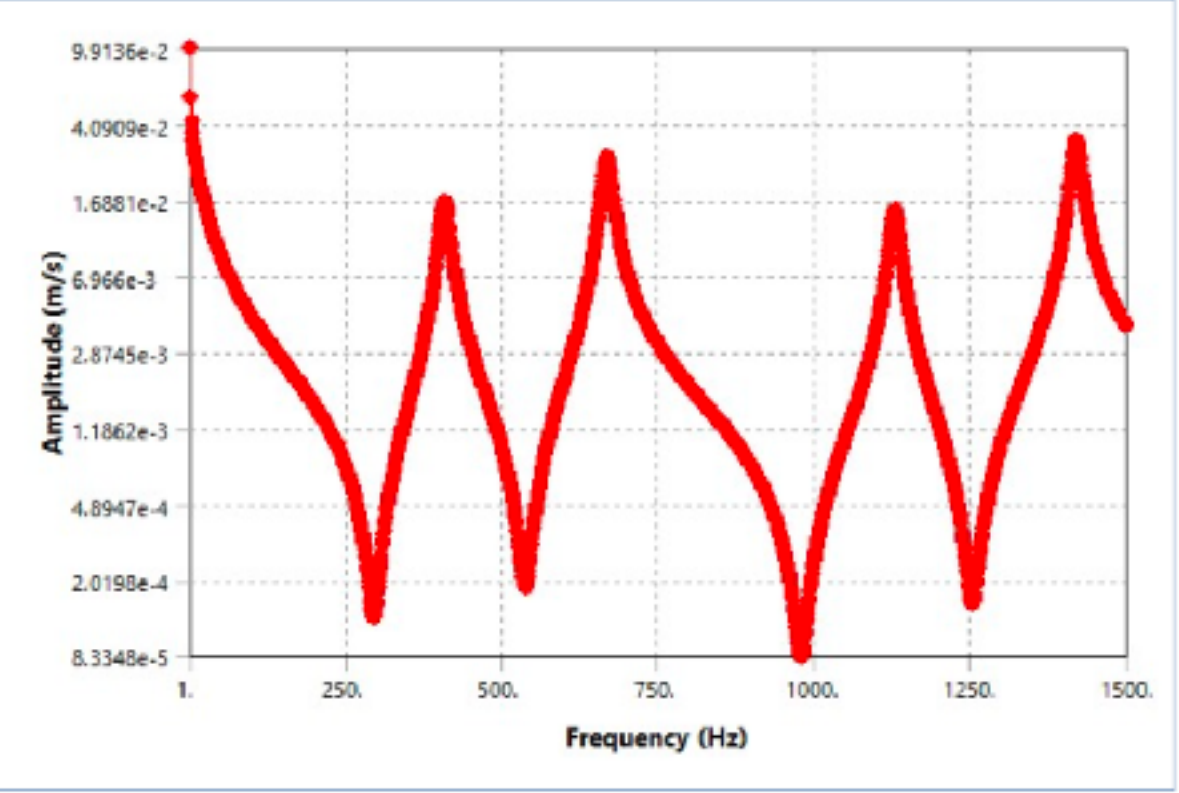
E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

FRF diretta "spostamento / forza"

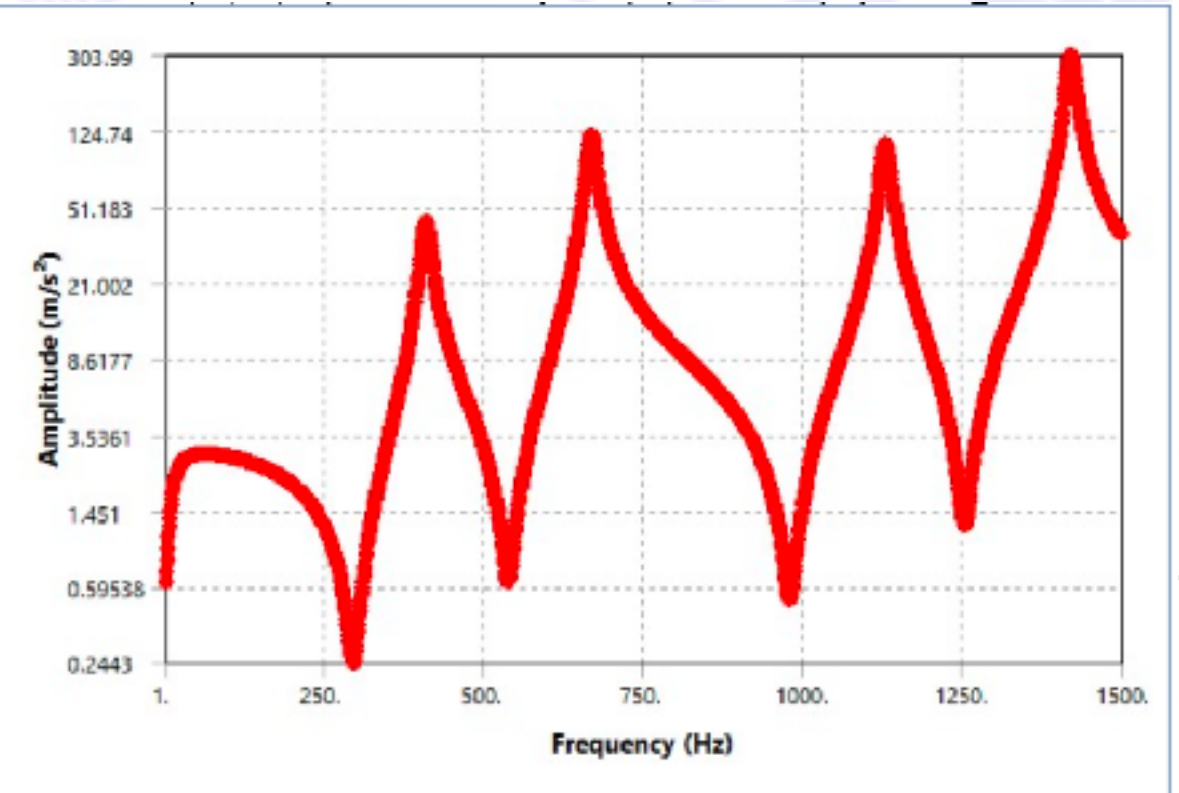


Mass Matrix Coefficient $\alpha = 1000 - 100 - 10 - 1$
($\beta = 0$)

FRF diretta "velocità / forza"



FRF diretta "accelerazione / forza"

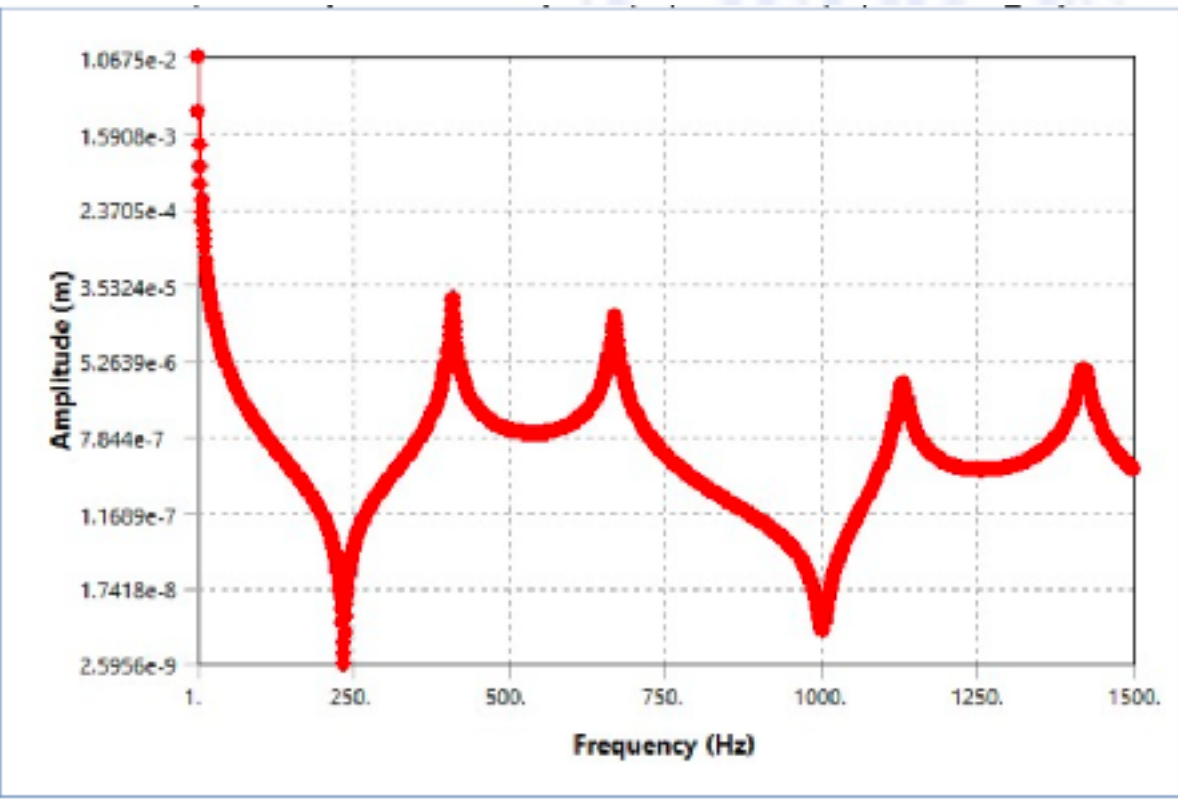
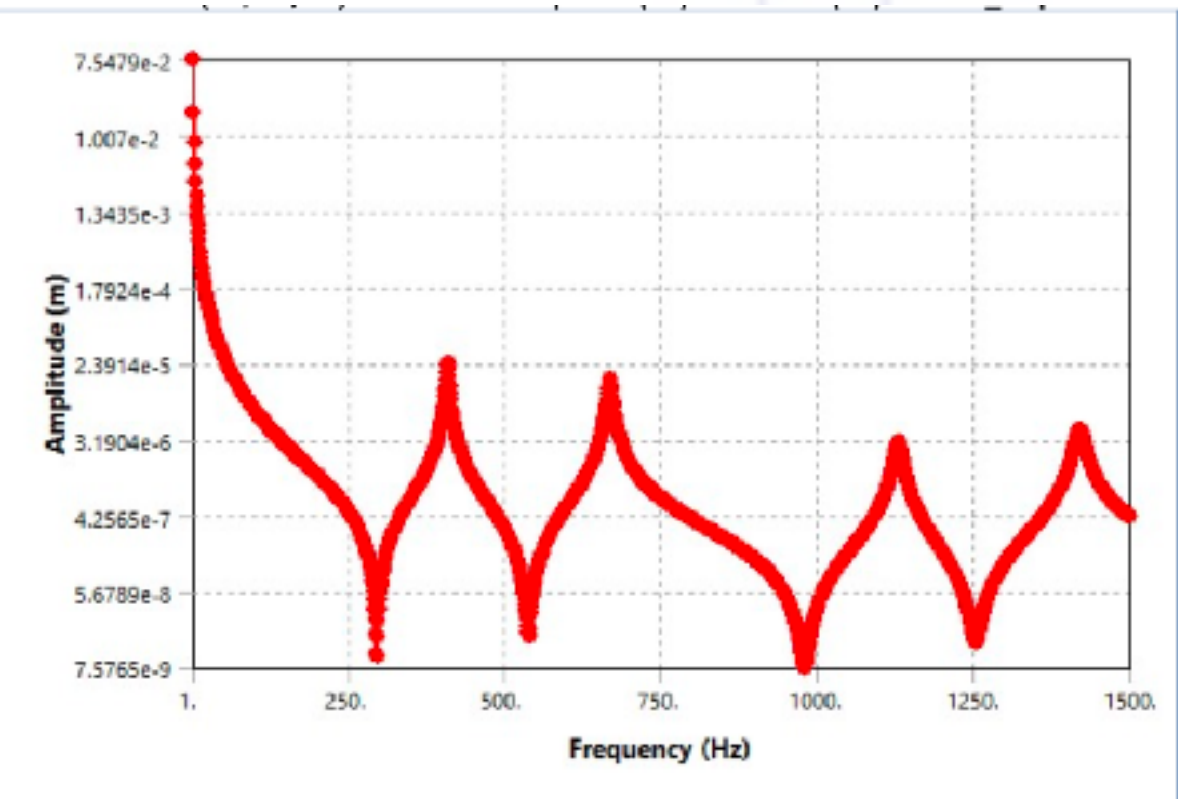


E' vietato ogni utilizzo diverso da quello inerente la preparazione dell'esame del corso di Meccanica delle Vibrazioni @Units
E' espressamente vietato l'utilizzo per qualsiasi scopo commerciale e/o di lucro

Come cambia una FRF di trasferimento rispetto ad una FRF diretta??

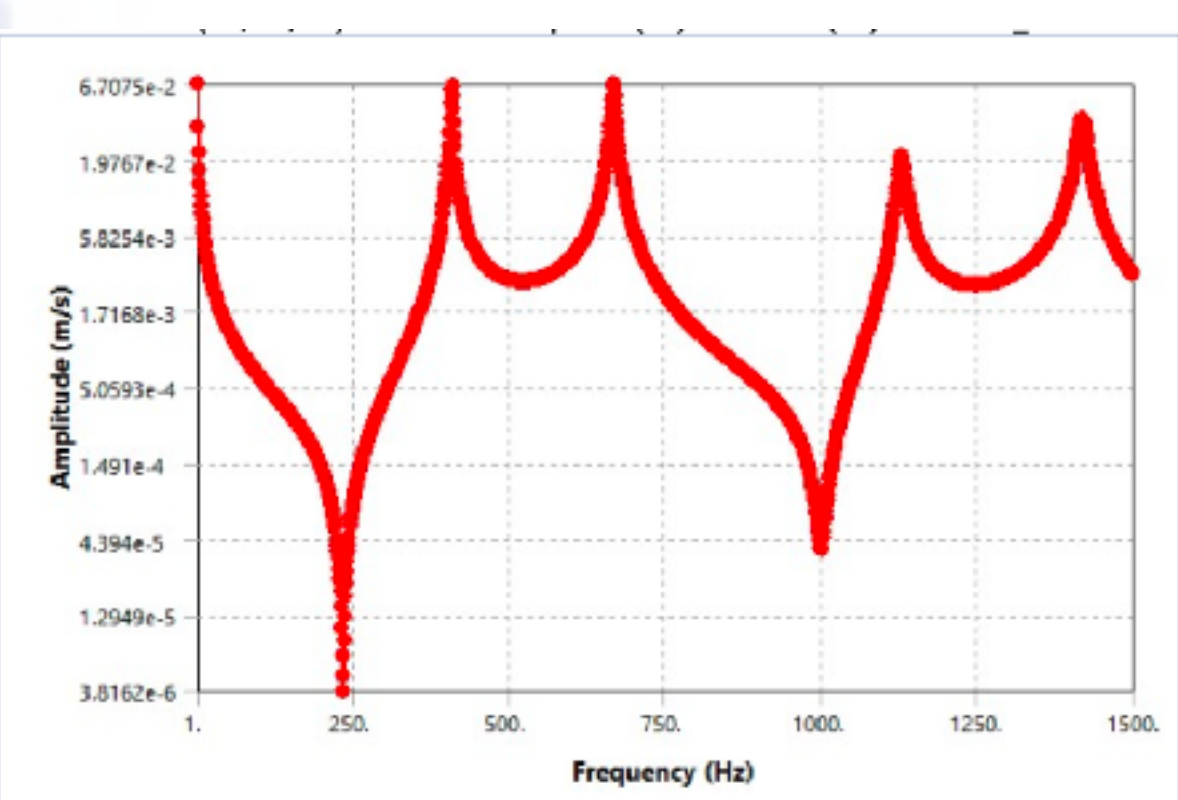
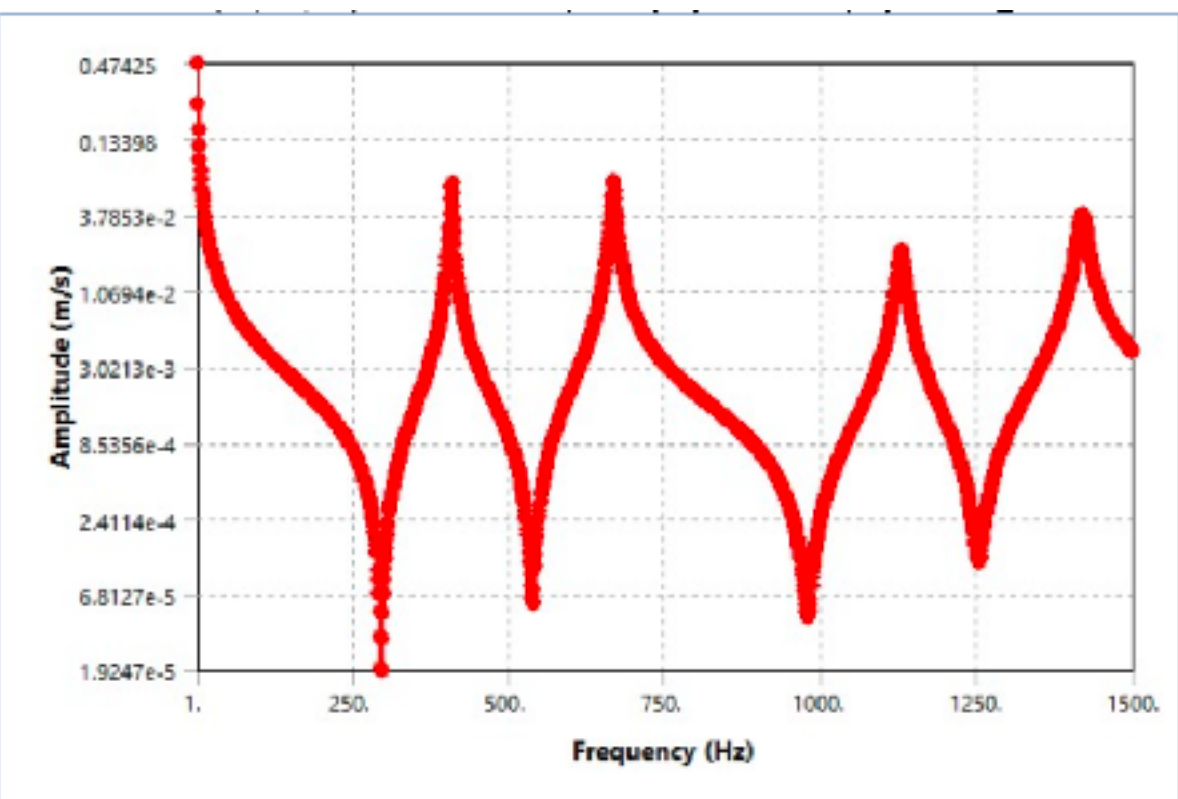
Damping Ratio 0.005

FRF diretta "spostamento / forza"



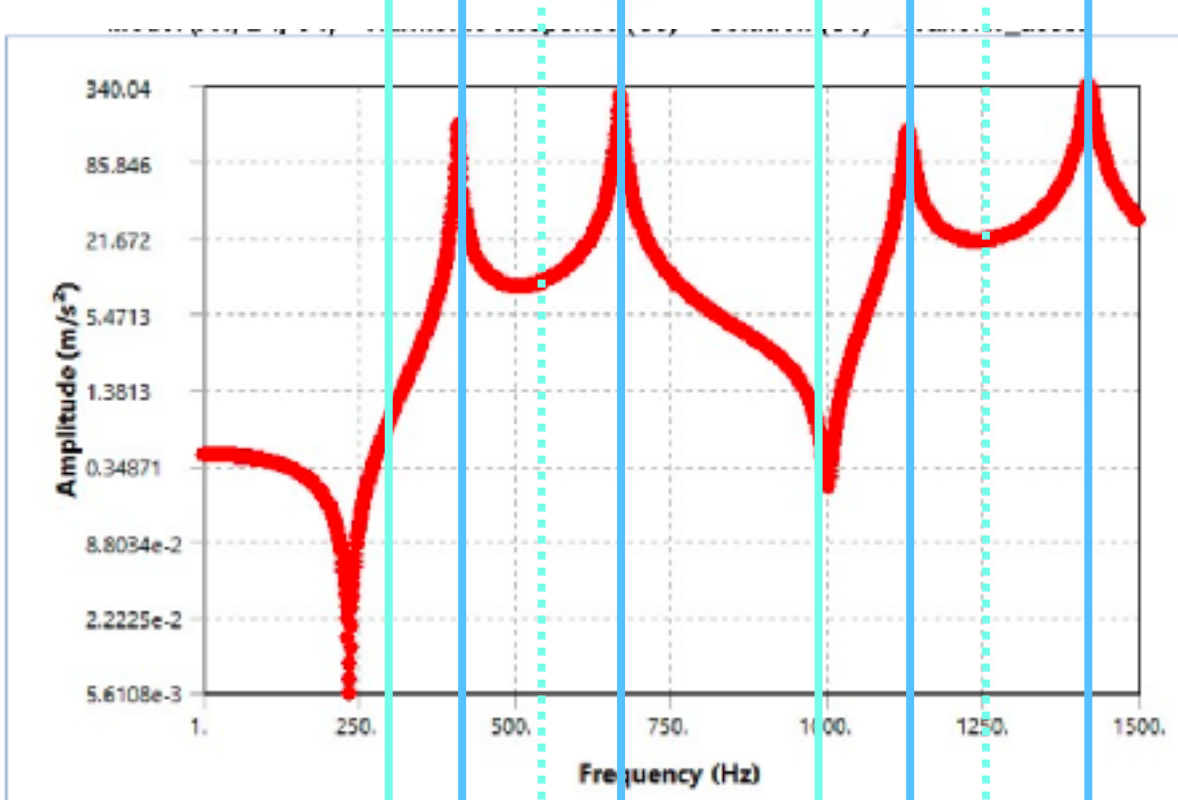
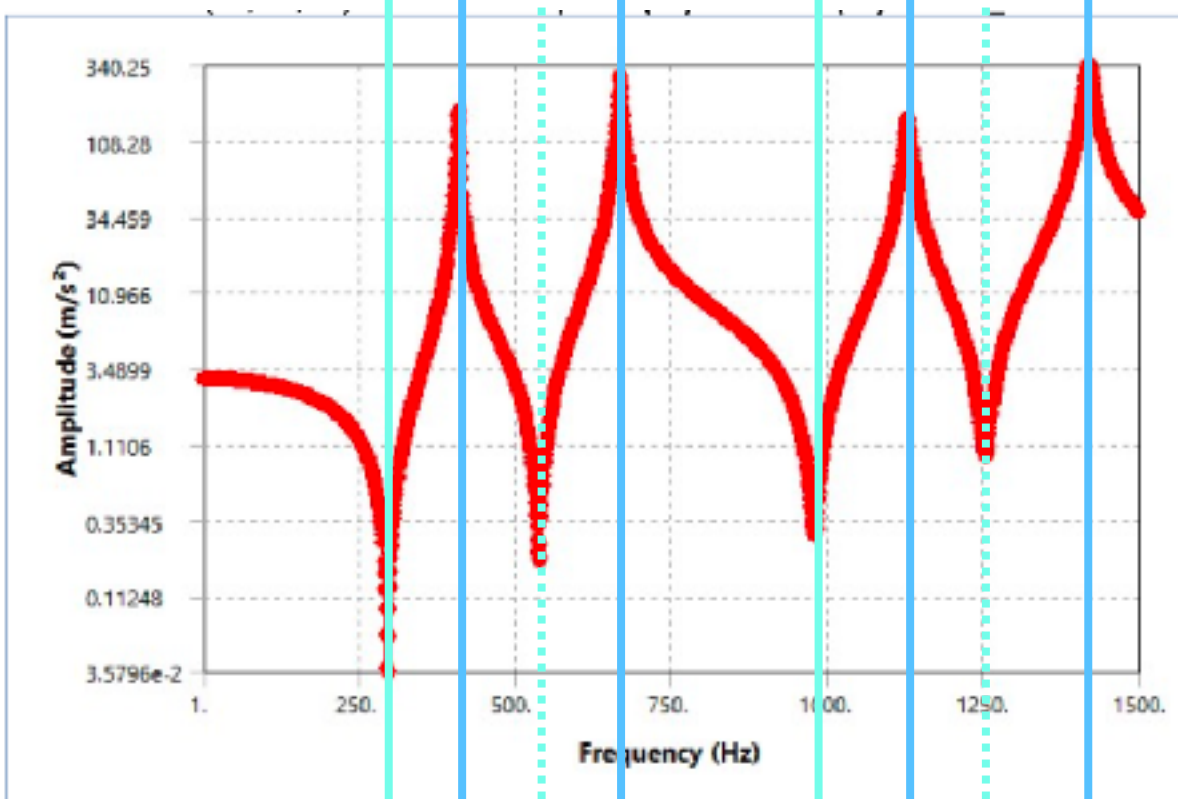
FRF indiretta "spostamento / forza"

FRF diretta "velocità / forza"



FRF indiretta "velocità / forza"

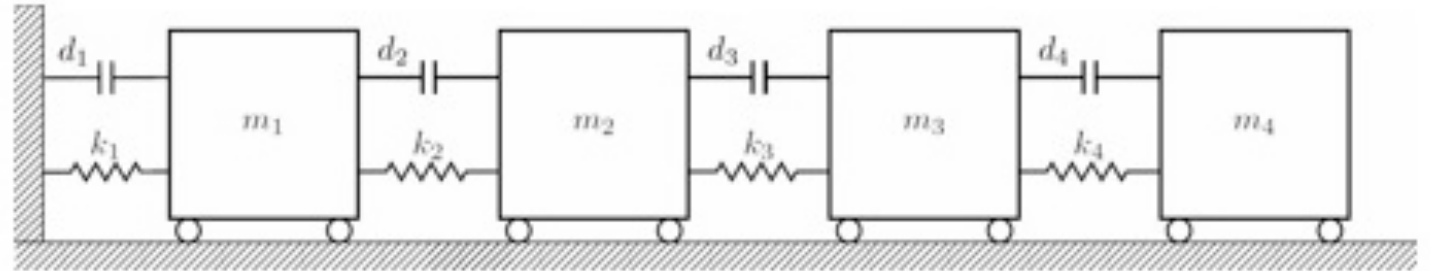
FRF diretta "accelerazione / forza"



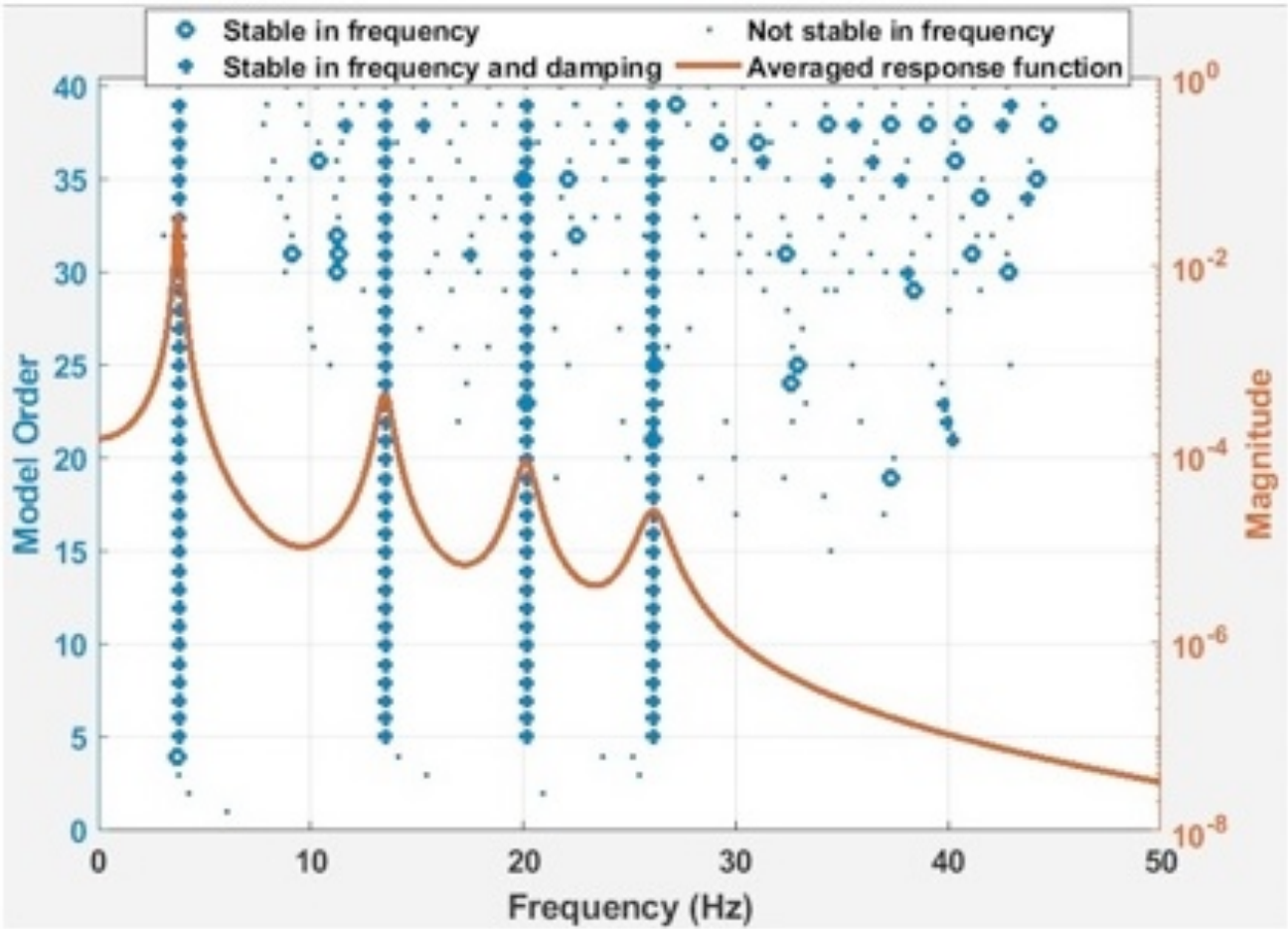
FRF indiretta "accelerazione / forza"

zeri
poli

Analytical model



Defined matrix				Estimated matrix (0% noise)				Estimated matrix (1% noise)			
90.0	-55.0	0.0	0.0	90.0	-55.0	0.0	0.0	89.0	-53.7	-3.7	2.7
-55.0	125.0	-70.0	0.0	-55.0	125.0	-70.0	0.0	-52.2	124.3	-69.2	-1.3
0.0	-70.0	115.0	-45.0	0.0	-70.0	115.0	-45.0	-6.6	-66.9	117.9	-46.7
0.0	0.0	-45.0	45.0	0.0	0.0	-45.0	45.0	4.5	-3.0	-46.2	46.0



Model



Damping



Stabilization plot

Case study



8	-32	6	23	-43	-11	49	-55	49	-35	15	17
-34	-13	-38	3	-2	4	-16	5	-3	2	0	-1
7	-32	-12	-15	32	-18	6	10	-21	0	40	-6
21	2	-14	-18	18	-40	13	-30	4	-10	-79	-50
-39	-3	29	18	16	-17	8	4	8	-5	-36	30
-12	5	-12	-41	-12	20	-18	-17	-41	-3	15	2
51	-14	7	14	9	-21	-1	-20	-41	58	14	42
-62	6	11	-27	2	-16	-26	3	-21	6	22	-35
47	-4	-24	6	11	-49	-32	-19	-1	0	-5	5
-33	1	-1	-4	-6	-12	61	4	-4	30	-88	15
14	1	44	-71	-42	18	12	27	-9	-74	-7	4
19	-2	-8	-44	36	6	47	-29	4	23	7	-6

