

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale  
ingegneria meccanica

parte 5  
Analisi Macchinario Rotante

## Rotodinamica

La maggior parte delle macchine industriali ha organi rotanti! (molti di più di quelli traslanti!)

La rotodinamica si occupa di quelle macchine in cui una parte (rotore) ruota con un significativo momento angolare ed in particolare studia come questo si comporta (deforma) ai vari regimi di funzionamento (*deformate flessioni e torsionali*)

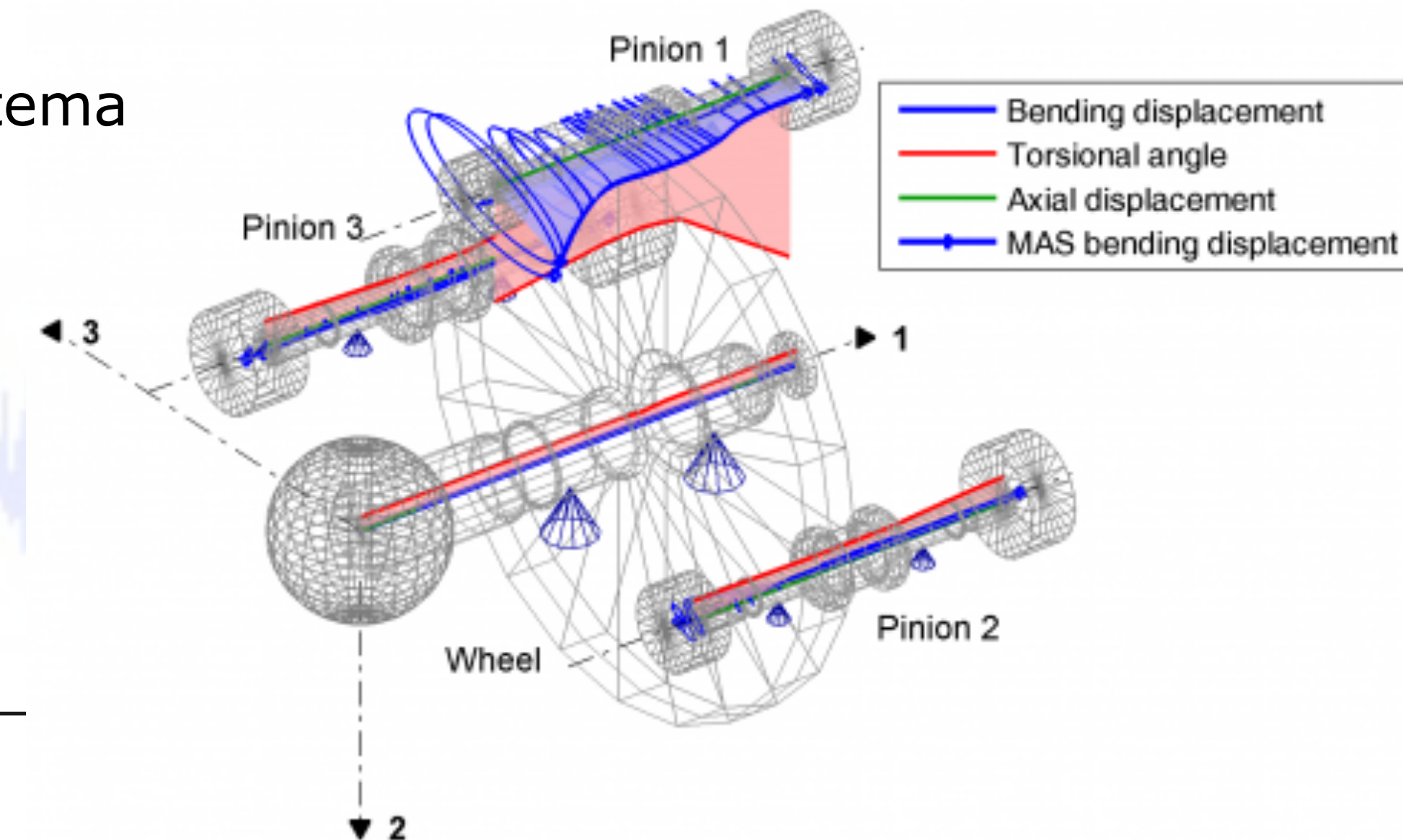
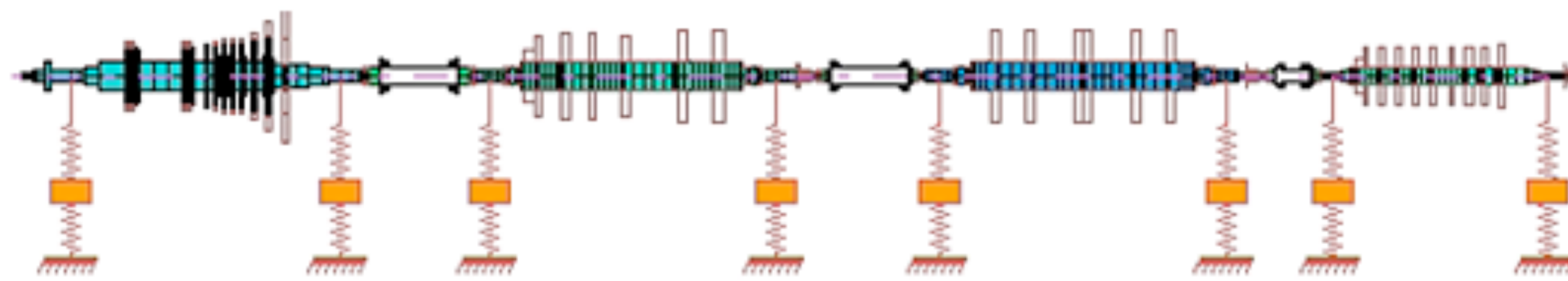
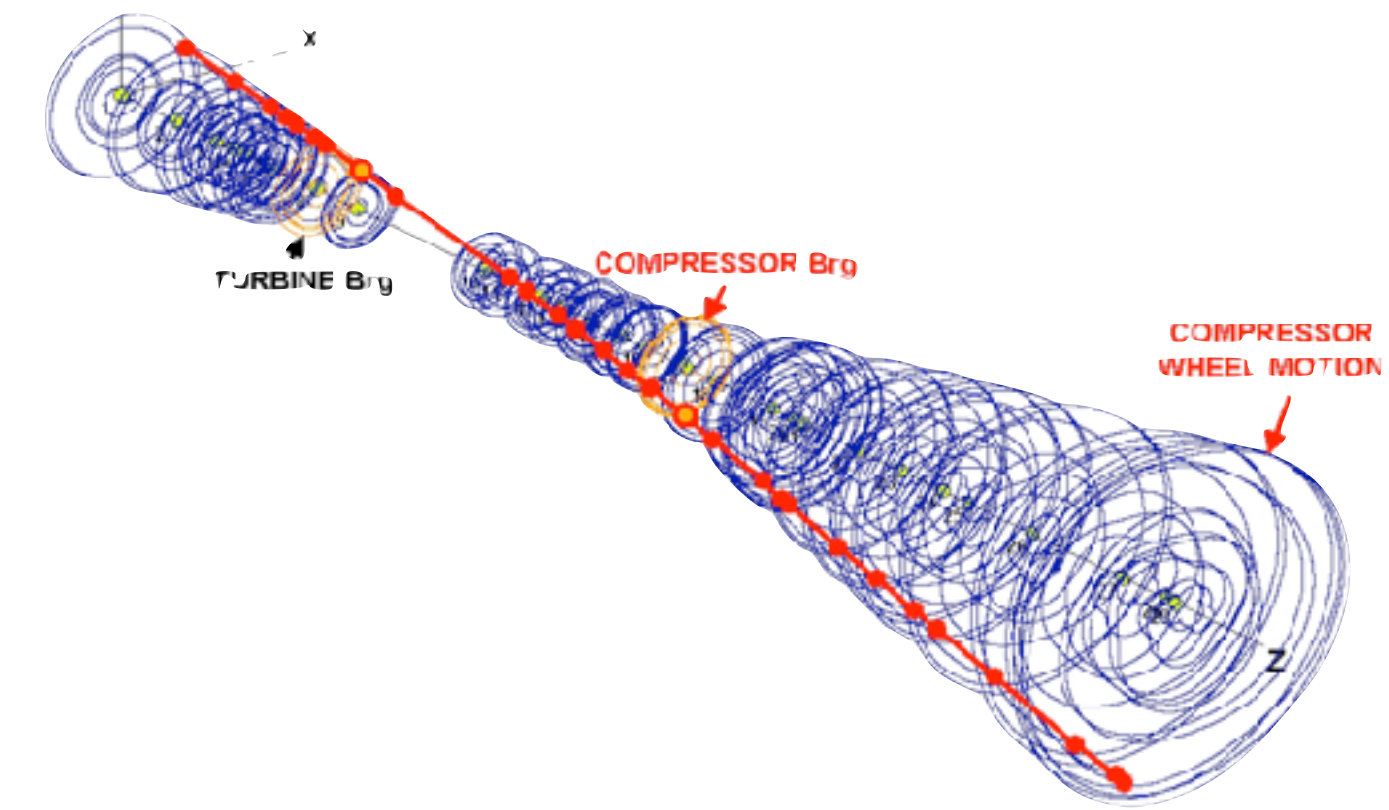
Si considerano acquisiti i concetti di squilibrio statico / dinamico / di coppia se non lo fossero .. sono da rivedere nel corso di Meccanica Applicata



# Rotodinamica

si occupa di:

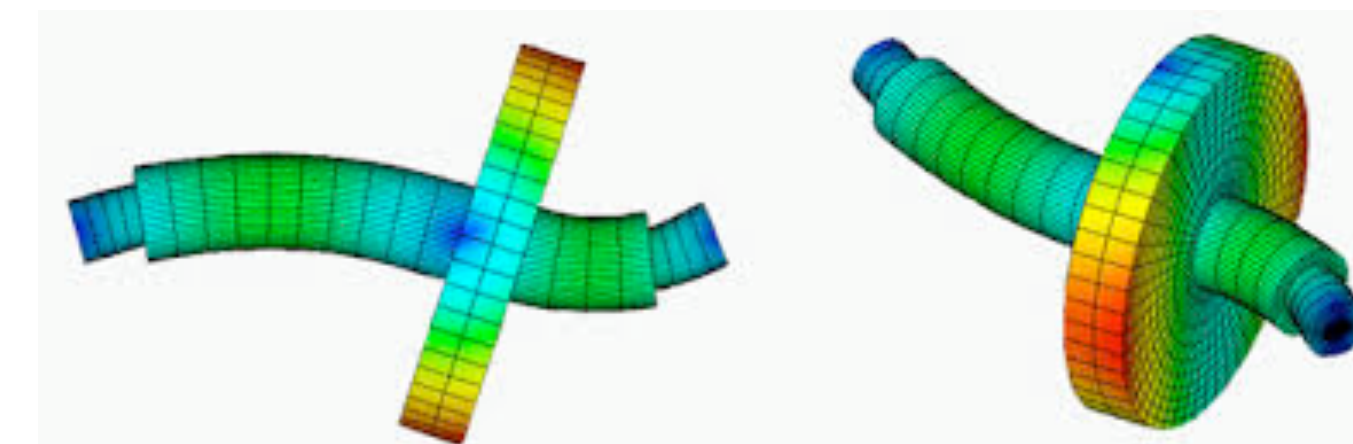
- predire le vibrazioni flessionali e torsionali (libere e forzate)
- predire le velocità critiche (coincidenza tra velocità rotore e frequenze naturali)
- progettare/realizzare le modiche che spostano le velocità critiche (lontane dai regimi di funzionamento)
- calcolare le correzioni di massa per i bilanciamenti
- predire le ampiezze di vibrazioni sincrone legate allo squilibrio
- predire le ampiezze di vibrazioni non sincrone legate alle instabilità del sistema
- progettare/realizzare le modiche che riducono le instabilità del sistema



## Rotodinamica - definizioni

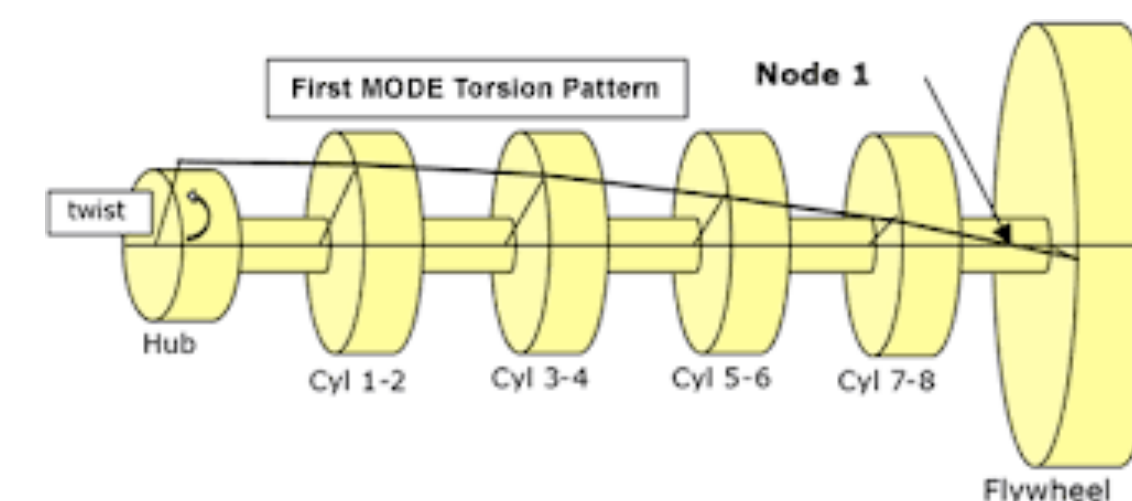
Vibrazioni Flessionali (-> risonanze flessionali)

l'asse del rotore si deforma su un piano contenente l'asse stesso  
(se non c'è smorzamento il piano è unico)



Vibrazioni Torsionali (-> risonanze torsionali)

l'asse del rotore deformato resta coincidente a quello del sistema indeformato



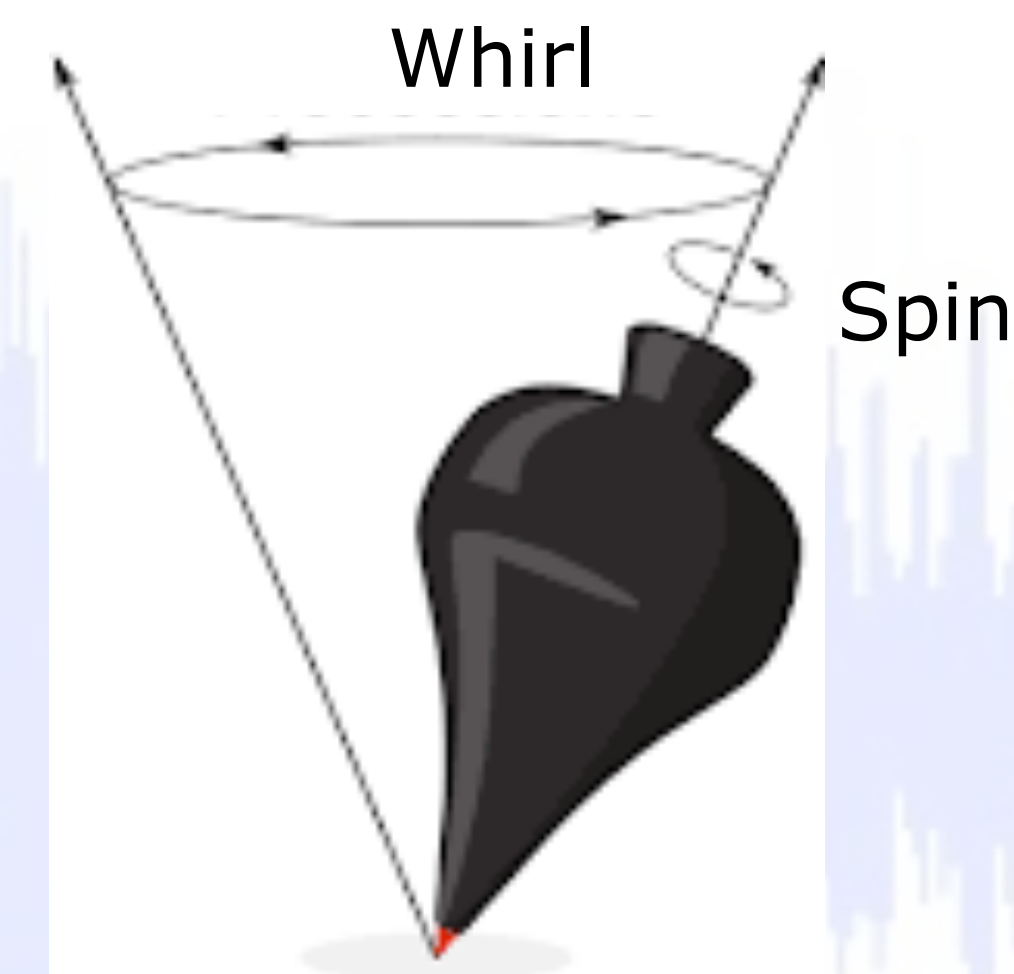
Velocità critiche

velocità di rotazione alle quali c'è il massimo della deformazione del rotore  
(modi di vibrare, legati alla distribuzione di massa e rigidità)

Velocità di rotazione (spin) Velocità di precessione (whirl)

spin: rotazione attorno all'asse del rotore

whirl: variazione della direzione dell'asse di rotazione

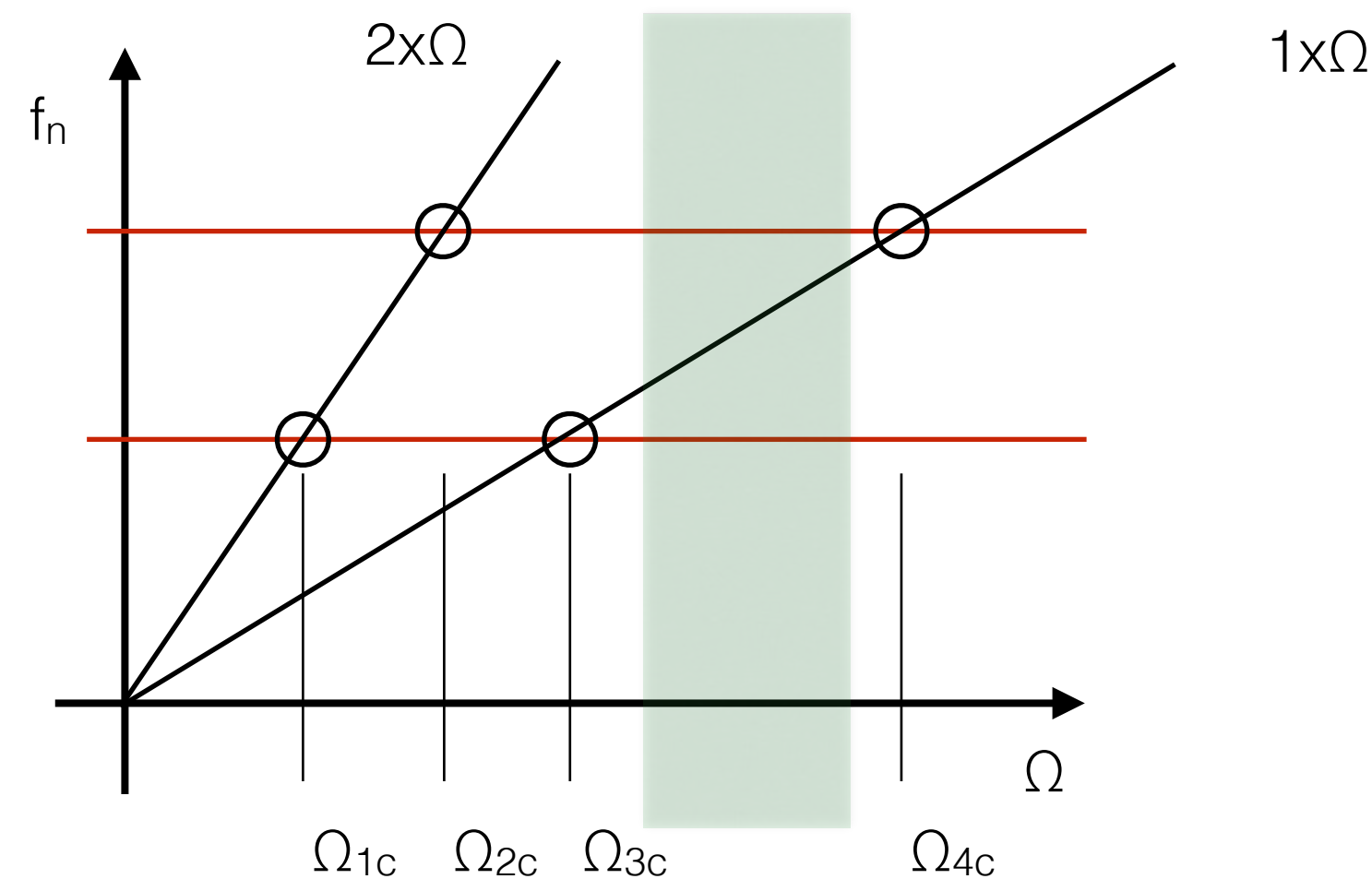


Vibrazioni sincrone alla velocità di rotazione (-> legate allo squilibrio)

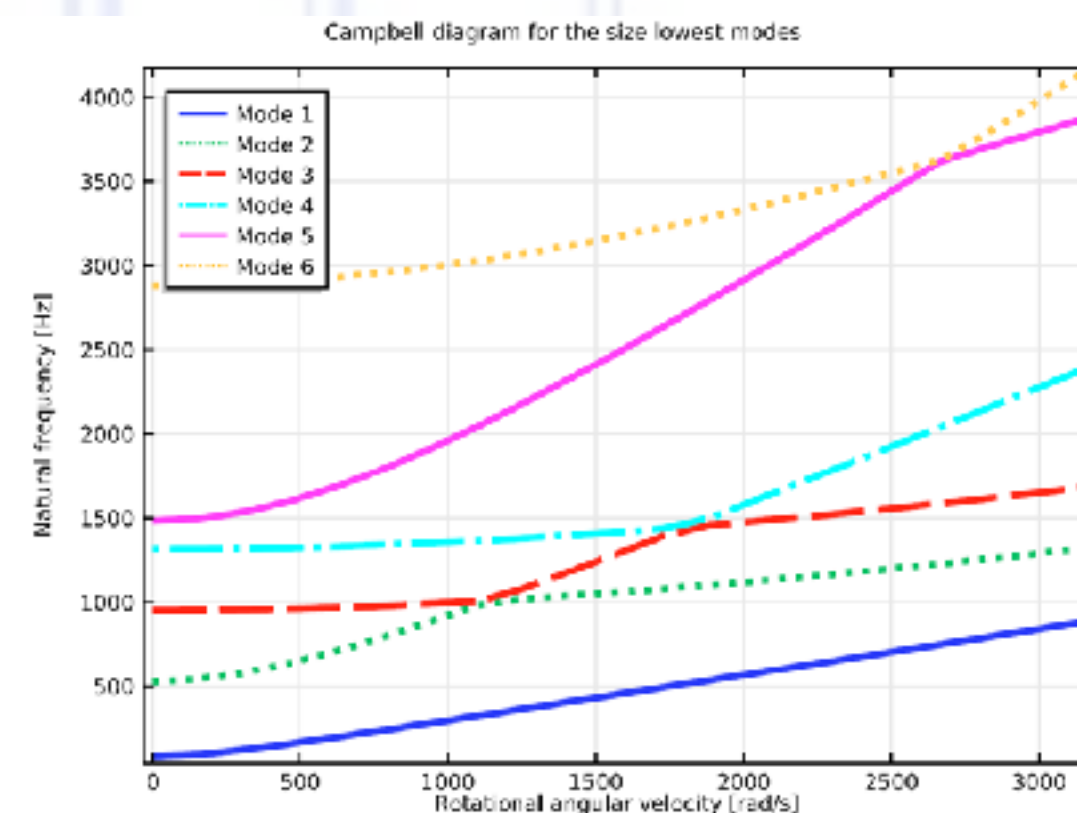
Vibrazioni non sincrone alla velocità di rotazione (-> legate alle instabilità)

Le vibrazioni vengono analizzate in maniera diversa se la macchina lavora in regime stazionario  
(turbina idraulica collegata ad alternatore, frequenza generata costante)  
o in regime variabile-transitorio  
(motore autoveicolo, velocità variabile in funzione del percorso)

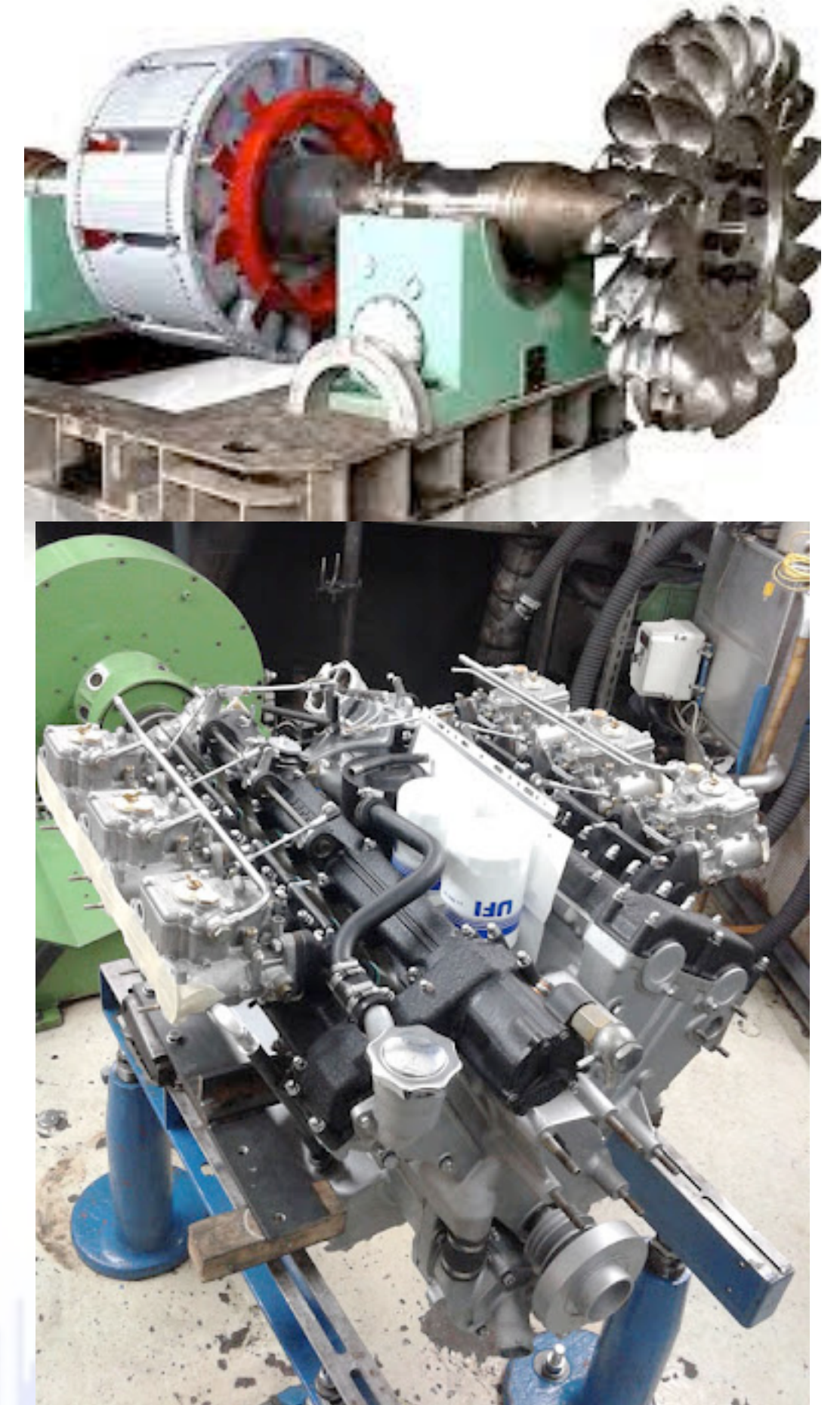
Nel caso di regime variabile è possibile che l'albero ecciti le frequenze naturali (flessionali e torsionali) del sistema.  
Bisogna evitare di lavorare a quelle velocità per limitare le deformate del sistema!

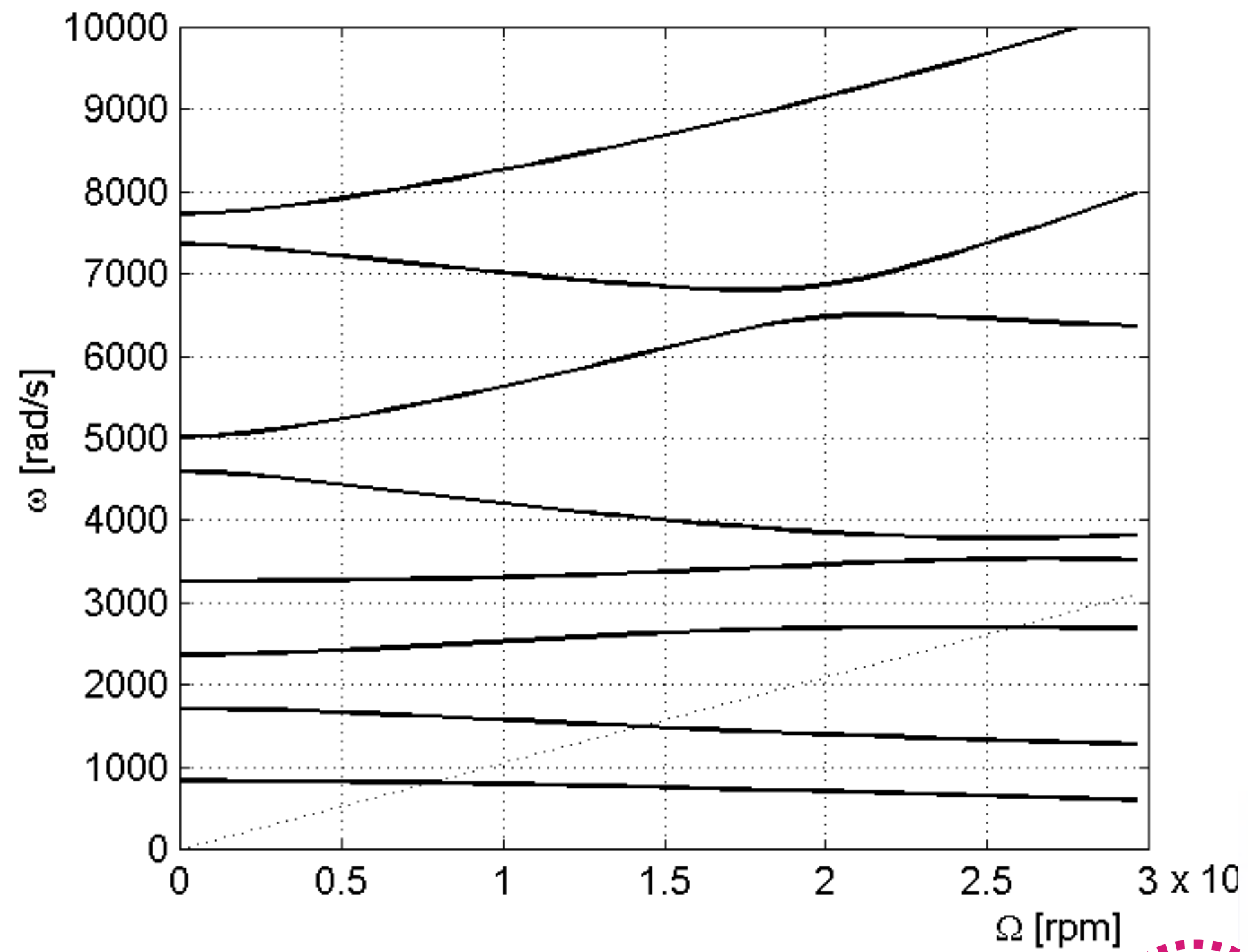


Il diagramma di Campbell permette di trovare tali velocità "critiche",  
ossia gli incroci tra velocità di rotazione e frequenze naturali

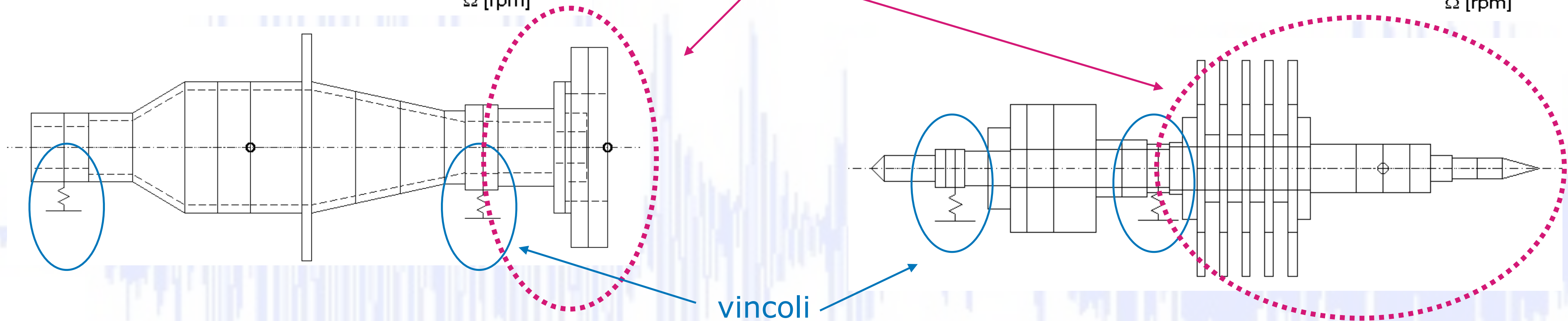
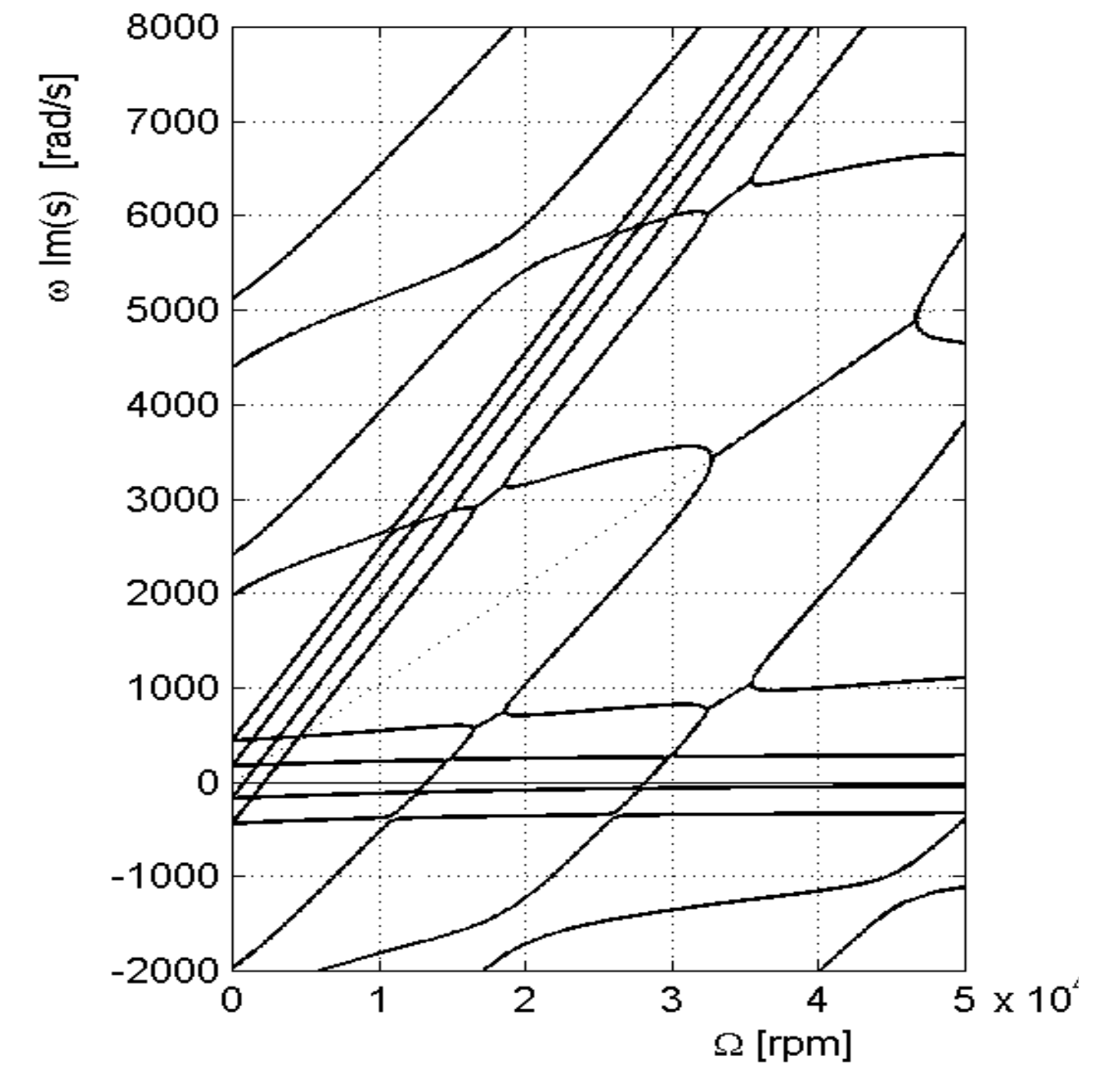


se si instaurano effetti "giroscopici"  
le cose si complicano un po!





Il diagramma di Campbell si complica quando gli effetti giroscopici diventano importanti



parte del rotore a sbalzo

vincoli

## Rotodinamica - ipotesi semplificative

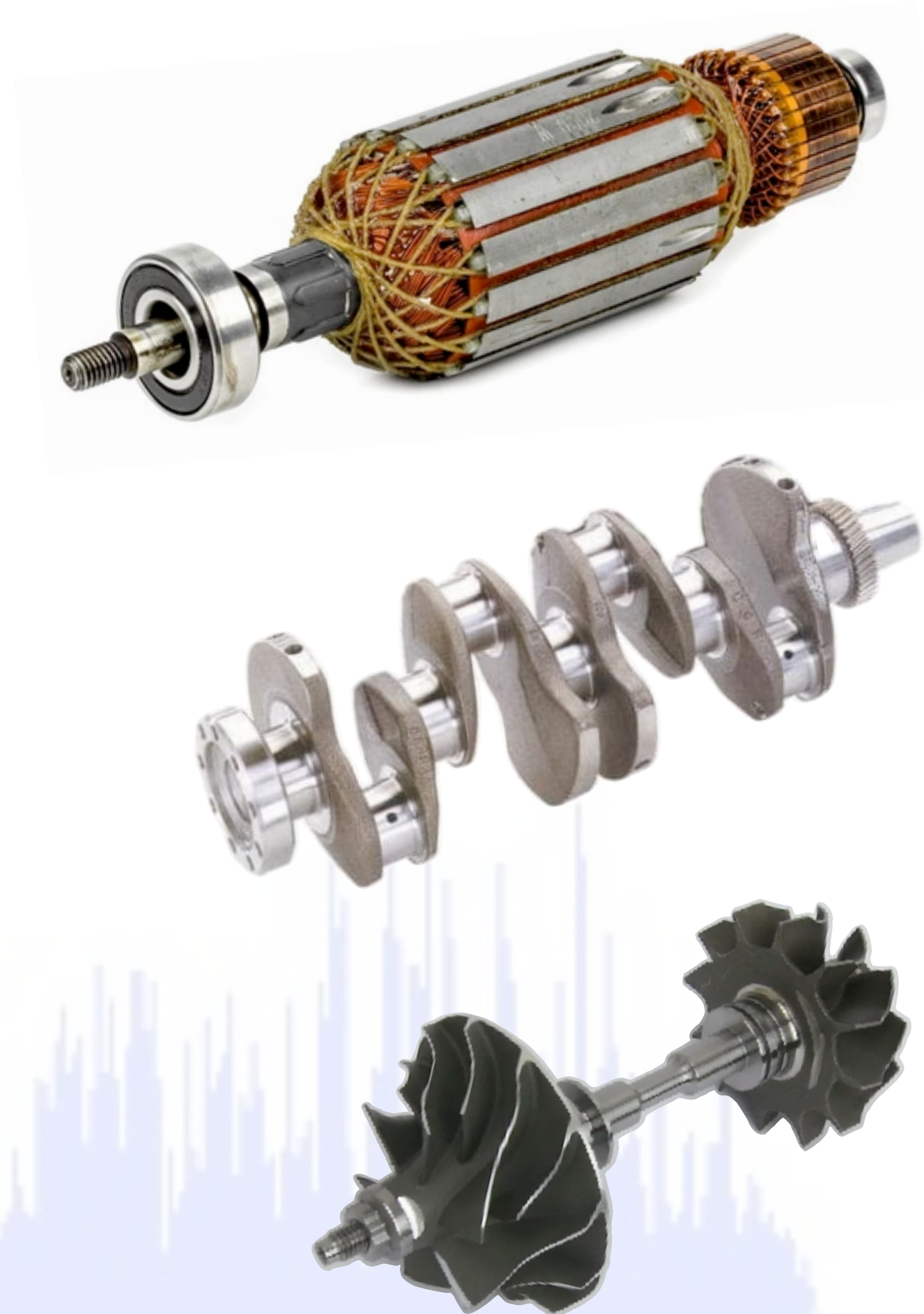
Si ipotizza che il ROTORE sia un corpo sospeso tramite una serie di cerniere cilindriche che gli permettono di ruotare liberamente attorno ad un asse! (statore..non si muove)

Si ipotizza che l'orientazione dell'asse di rotazione sia fisso nello spazio (non è vero nelle macchine semoventi automobili, aerei, navi..)

Si ipotizza che il rotore sia equilibrato (asse rotazione coincide asse principale d'inerzia), o se non lo è lo squilibrio e le deformazioni saranno piccole

Si ipotizza che il rotore sia assial-simmetrico (le equazioni son più semplici, e non serve lavorare con un sistema di riferimento solidale al rotore)

Si immagina che il rotore sia "mosso" dall'esterno.. (fornendo solo coppia)

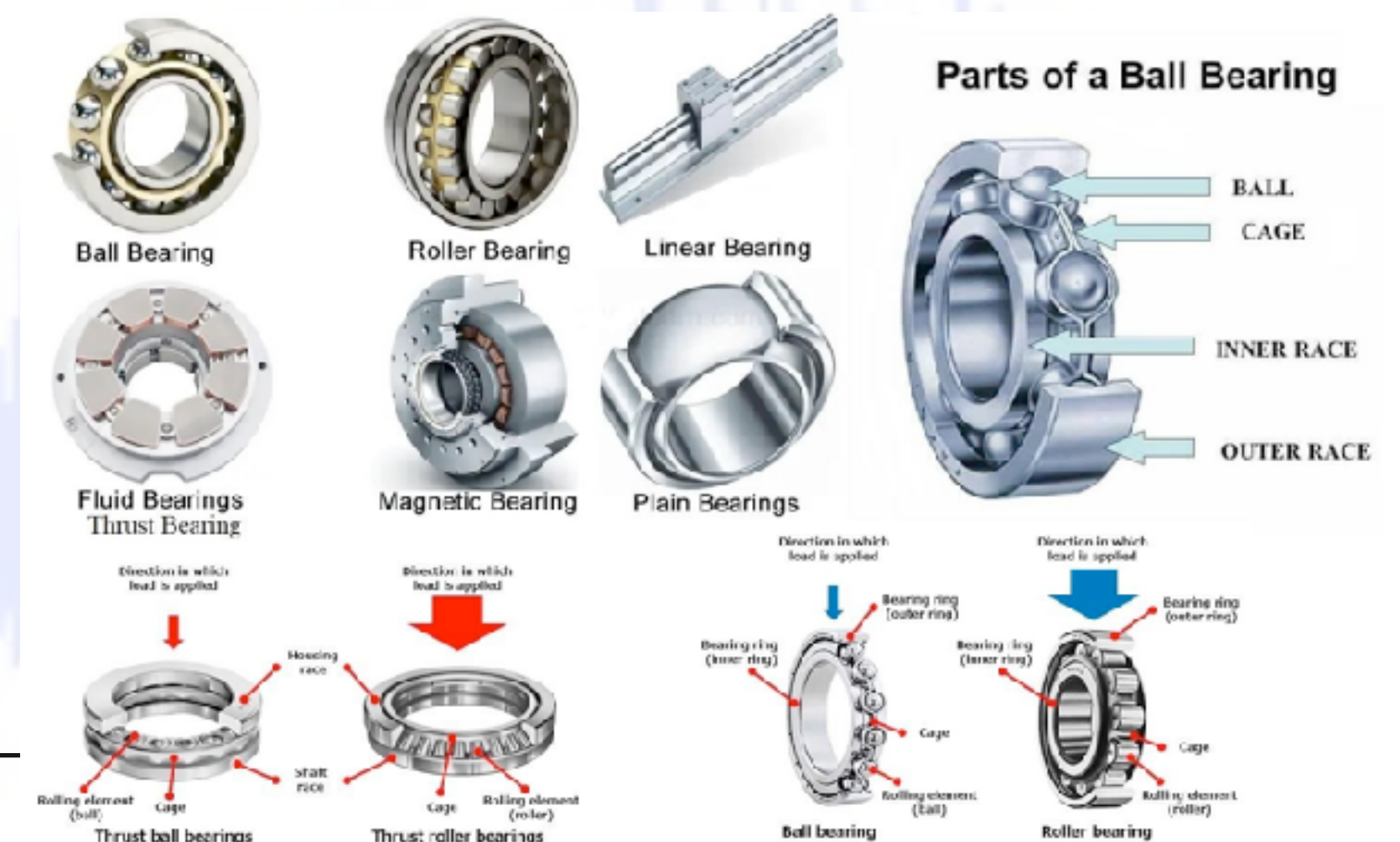
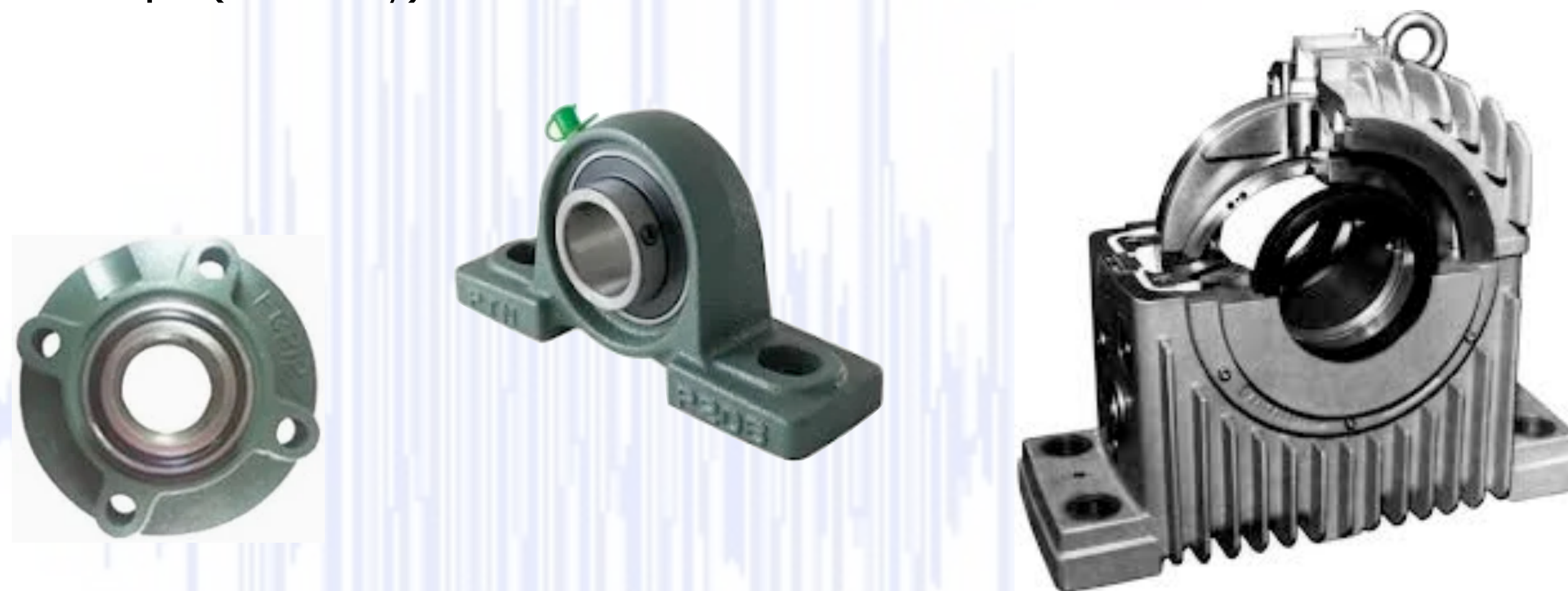
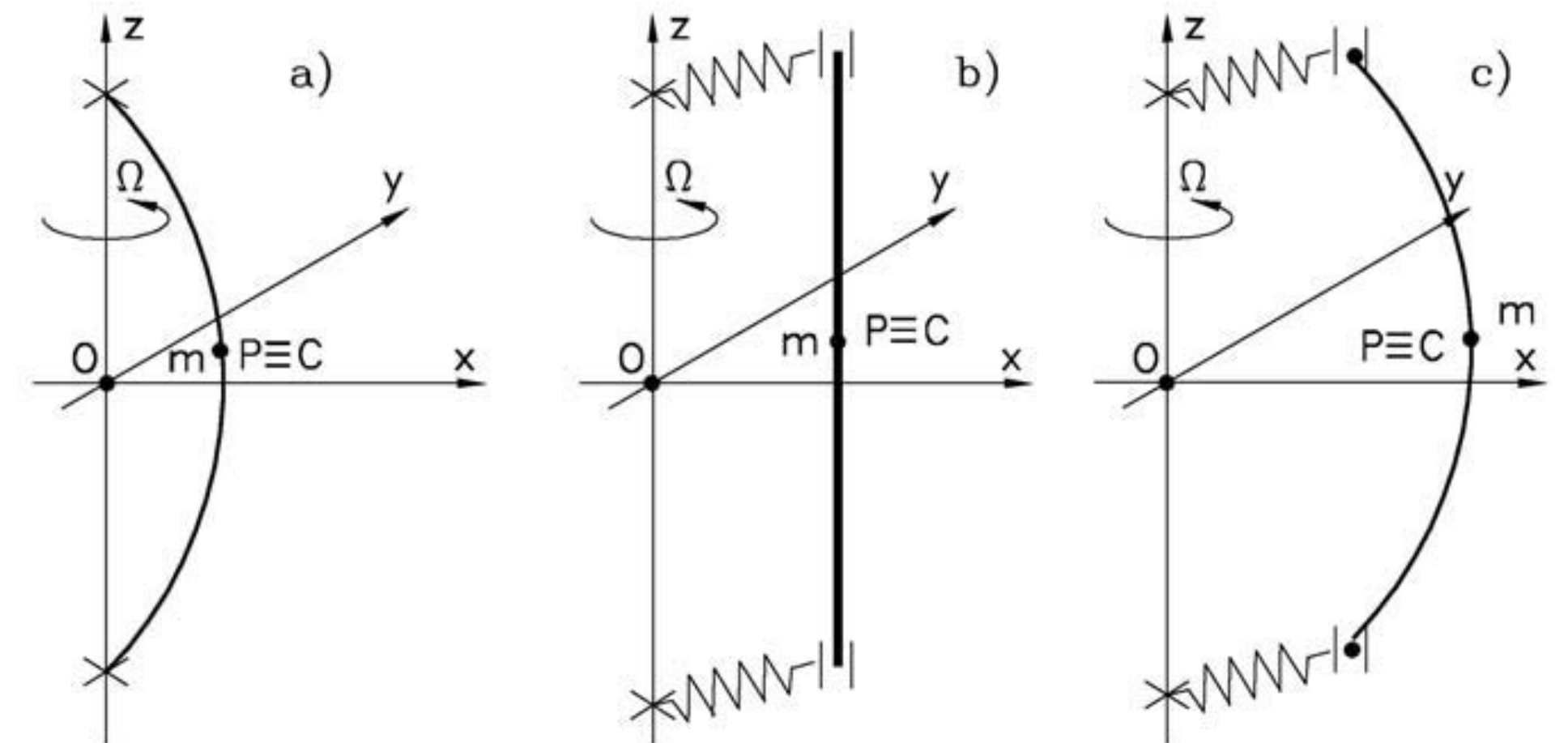


La rotodinamica si occupa di rotori e supporti che possono avere rigidità relative differenti  
Si possono definire tre classi, con complessità ed approcci risolutivi differenti:

- rotori flessibili con supporti rigidi
- rotori rigidi con supporti flessibili
- rotori flessibili con supporti flessibili

In considerazione che il moto del rotore è tridimensionale  
un ulteriore distinzione si può fare considerando sistemi  
con supporti

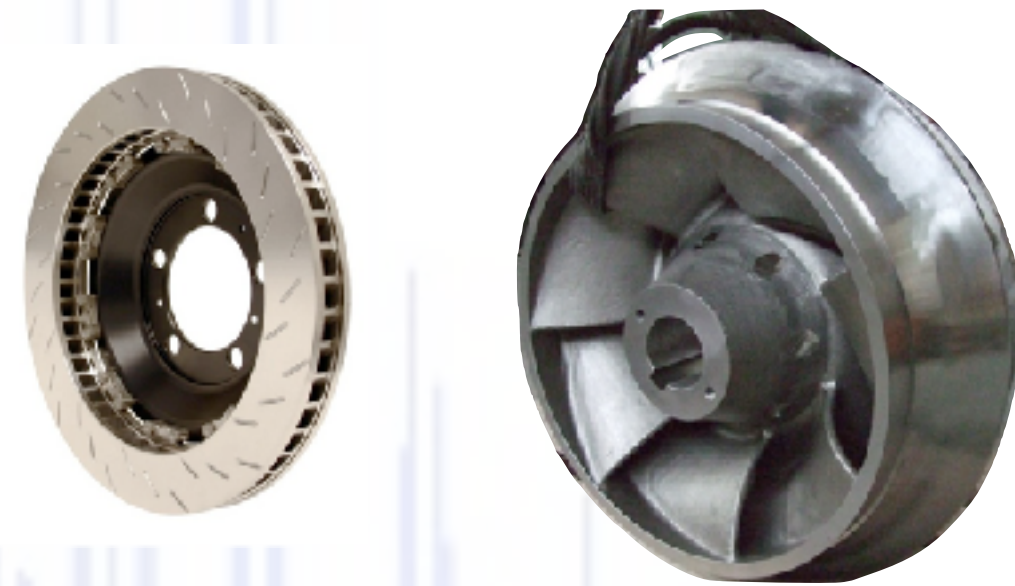
- isotropi ( $K_x = K_y$ )
- anisotropi ( $K_x \neq K_y$ )



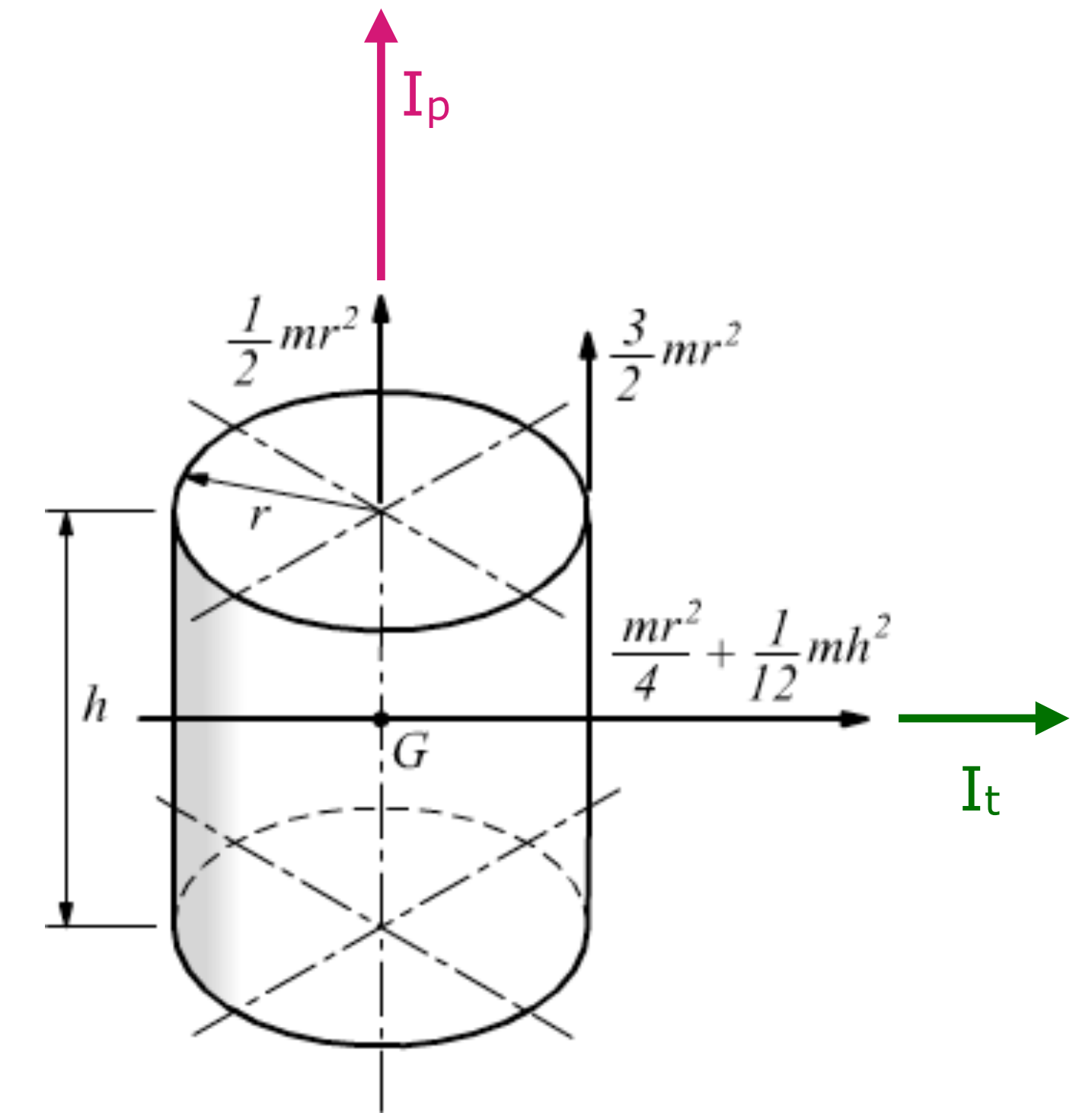
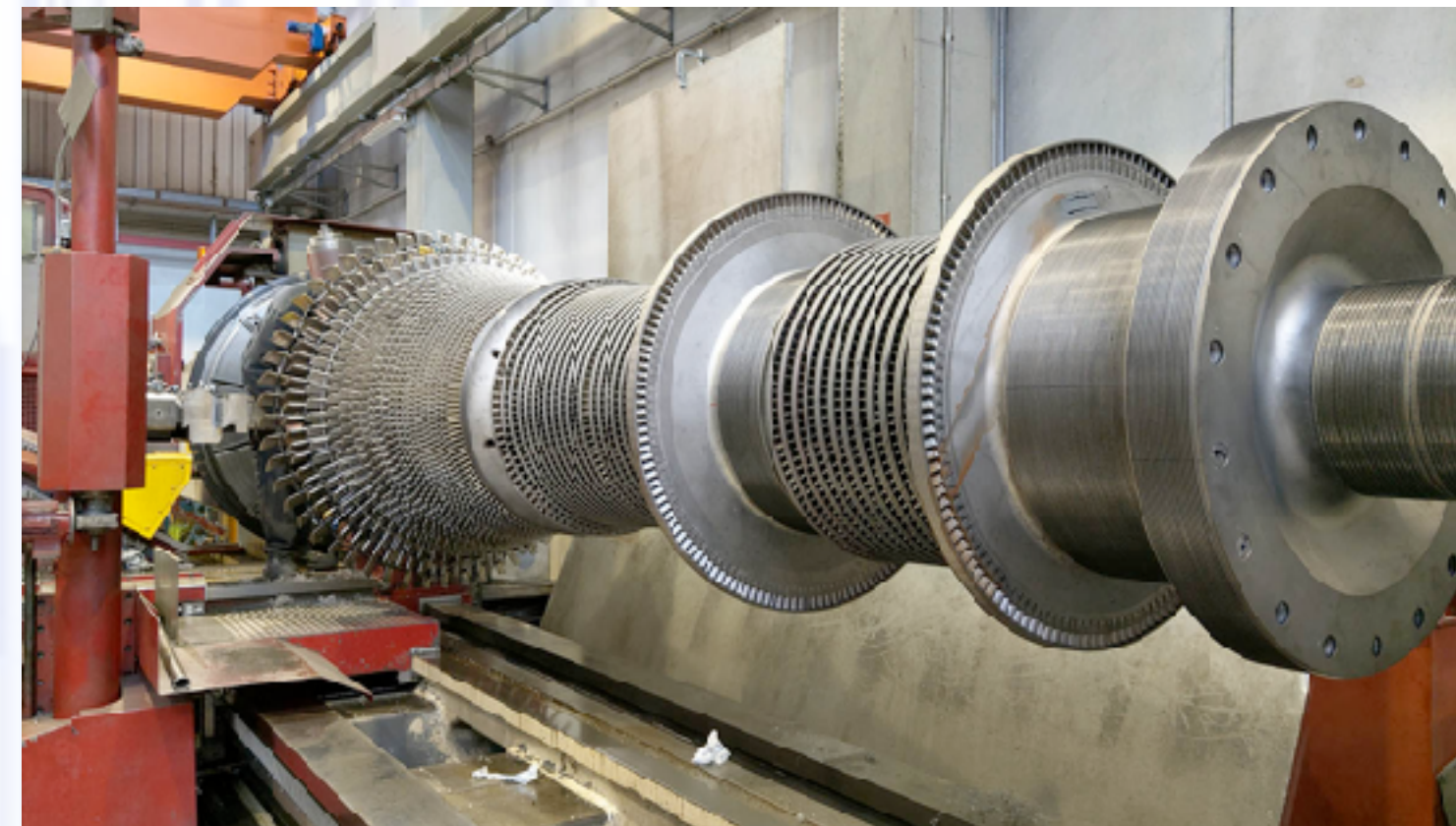
I rotori sono geometricamente caratterizzati dal momento d'inerzia polare  $I_p$  e dal momento d'inerzia trasversale  $I_t$ . (ricordate come si calcolano?)

A seconda del rapporto tra queste  $I_p$  e  $I_t$  si parlerà di

dischi ( $I_p > I_t$ )



rotori allungati ( $I_p < I_t$ )



attenzione al caso in cui  $I_p \approx I_t$ ...

Vibrazioni Torsionali .. $I_p$

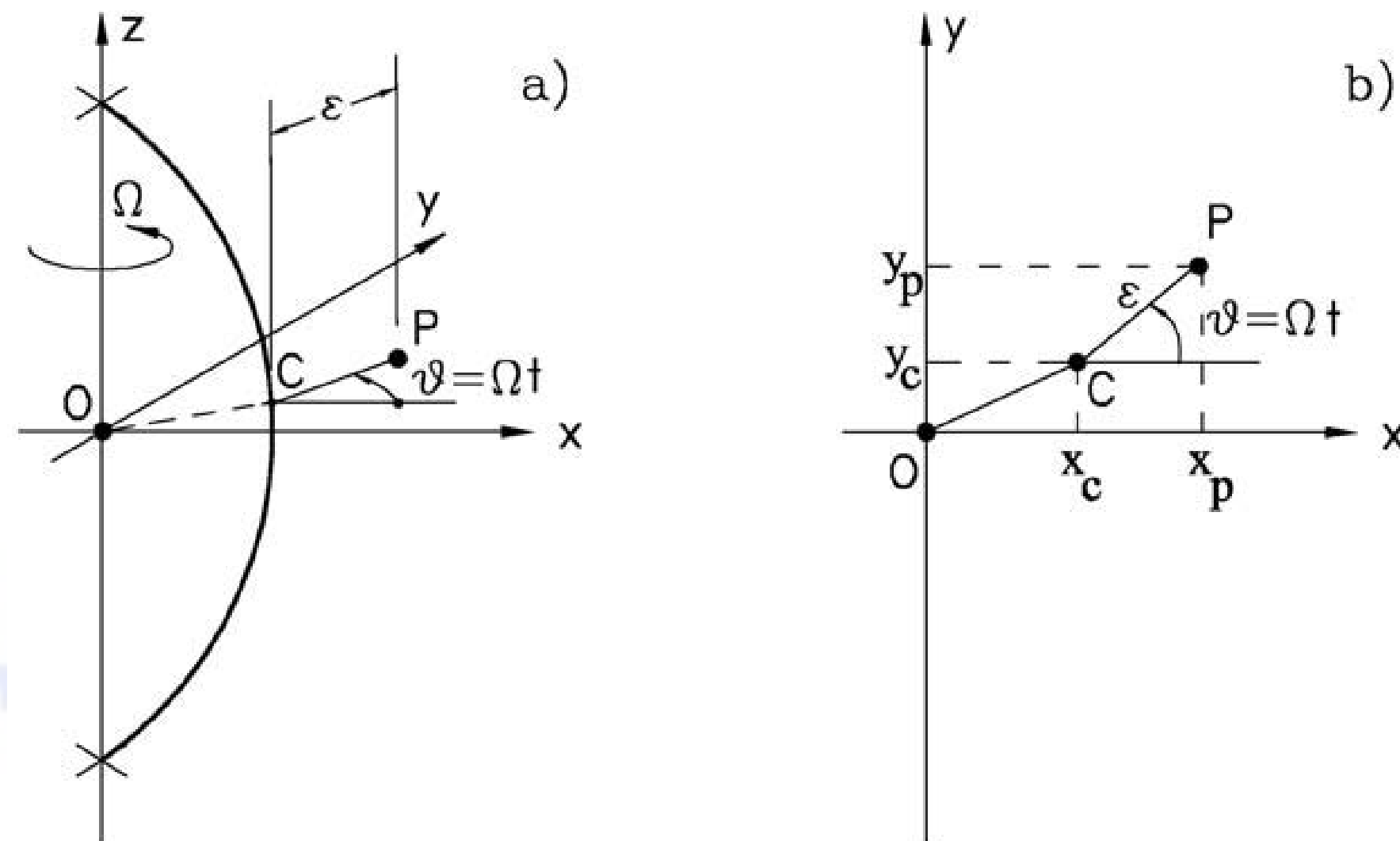
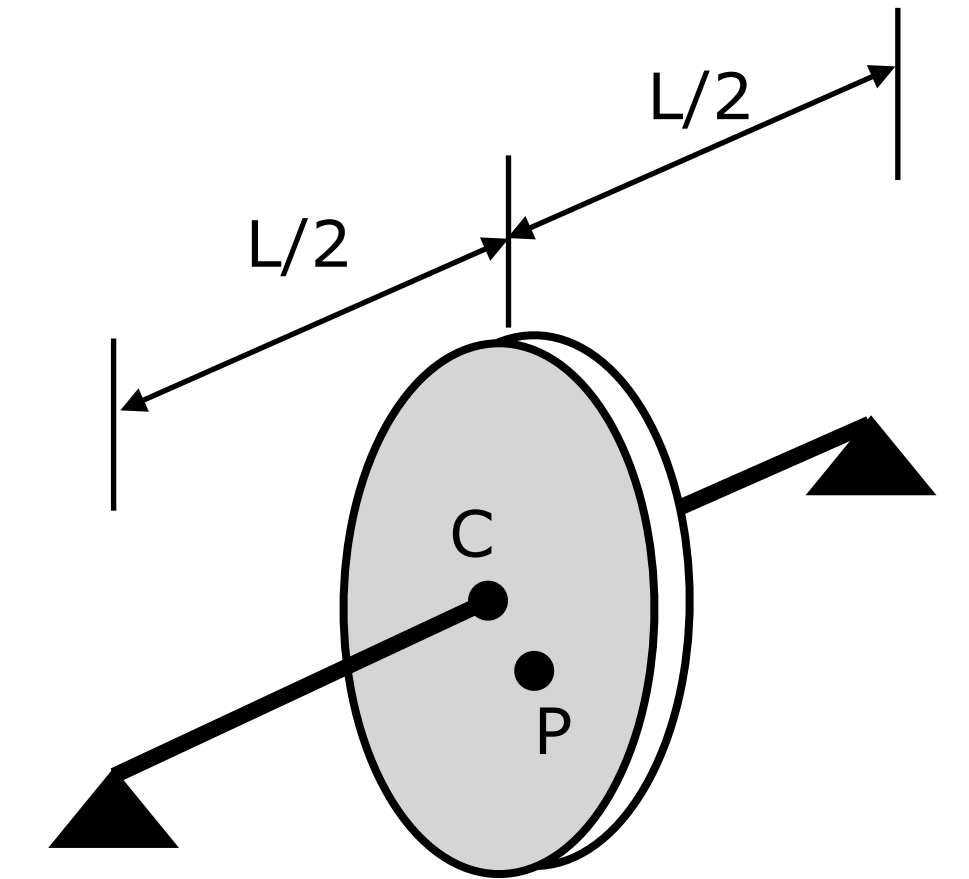
Vibrazioni Flessioni .. $I_t$

## Rotore di Jeffcott

Uno dei sistemi più semplici per capire il concetto di velocità critica è il rotore di Jeffcott

E' un rotore con albero flessibile, con supporti rigidi, simmetrico, in cui il baricentro P non coincide con l'asse di rotazione C (->rotore squilibrato!, massa residua squilibrata m ed eccentricità  $\epsilon$ )

Il rotore ruota (spin) con velocità  $\Omega$ , creando una forza centrifuga  $F_c = m\epsilon\Omega^2$  che deforma l'albero. L'albero ha una rigida flessionale k (questa dipende dalla sezione e lunghezza dell'albero e dal tipo di vincolo)



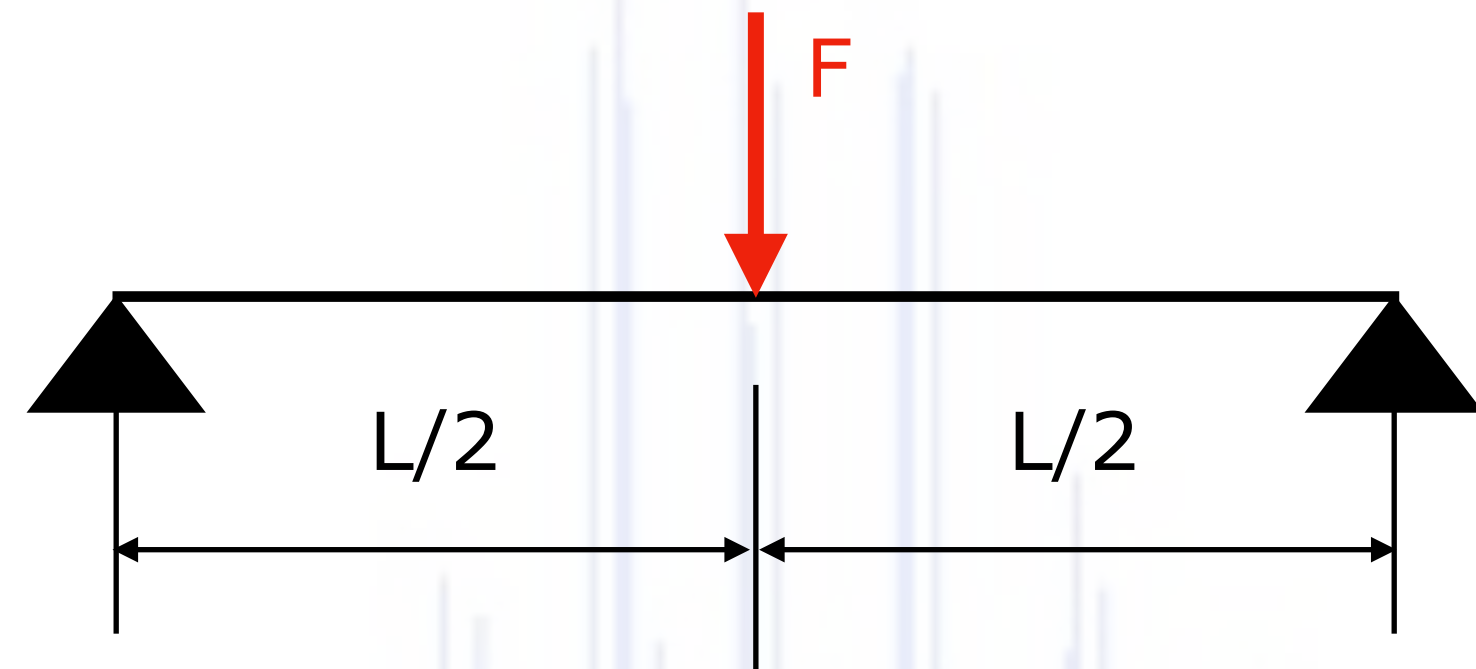
Scriviamo le equazioni del moto partendo dalla posizione del punto P

$$\mathbf{r}_p(t) = \begin{Bmatrix} x_p(t) \\ y_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_c(t) + \epsilon \cos(\Omega t) \\ y_c(t) + \epsilon \sin(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_p(t) = \begin{Bmatrix} \dot{x}_p(t) \\ \dot{y}_p(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_c(t) - \epsilon \Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_c(t) + \epsilon \Omega \cos(\Omega t) \end{Bmatrix}$$

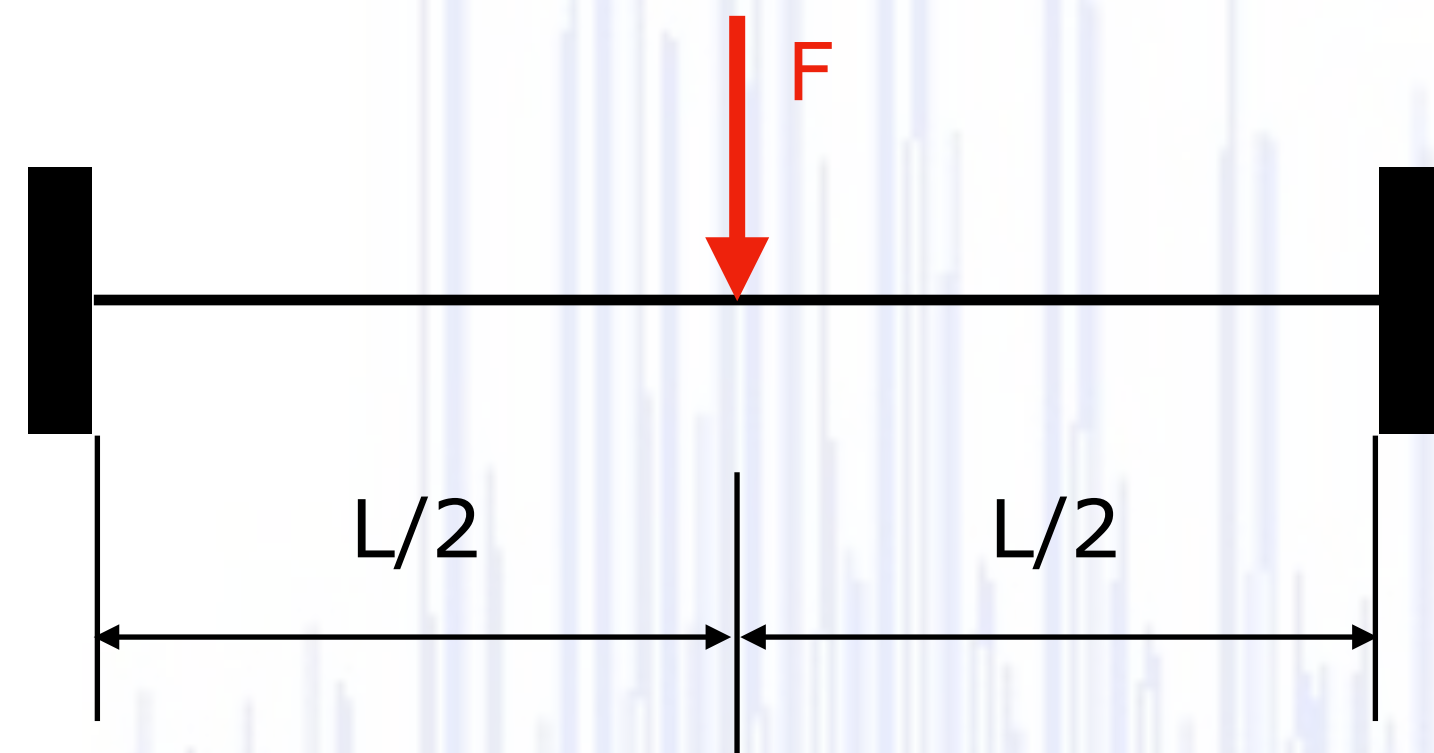
**inciso..**

k dipende dalla sezione e lunghezza dell'albero, dal tipo di vincolo e dal materiale..



estremità  
ruotano  
non traslano

$$k_f = 48 \frac{EJ}{L^3}$$



estremità  
non ruotano  
non traslano

$$k_f = 192 \frac{EJ}{L^3}$$

..con J momento d'inerzia trasversale  
della sezione dell'albero..

Con le equazioni del moto , scriviamo le equazioni dell'energia cinetica T e dell'energia potenziale elastica U (tralasciando il termine (t) per semplicità):

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) = \frac{1}{2}m \{ \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \epsilon^2\Omega^2 + 2\epsilon\Omega[-\dot{x}_c\sin(\Omega t) + \dot{y}_c\cos(\Omega t)] \}$$

$$U = \frac{1}{2}k(x_c^2 + y_c^2)$$

Sfruttando l'equazione di Lagrange  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial(T-U)}{\partial q_i} = Q_i$  e le opportune derivate si arriva a:

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = m\epsilon\Omega^2\cos(\Omega t) + F_x \\ m\ddot{y}_c + ky_c = m\epsilon\Omega^2\sin(\Omega t) + F_y \end{cases}$$

Senza squilibrio ( $\epsilon=0$ ) le equazioni si semplificano e tornano ad essere quelle di un sistema SDOF

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = F_x \\ m\ddot{y}_c + ky_c = F_y \end{cases}$$

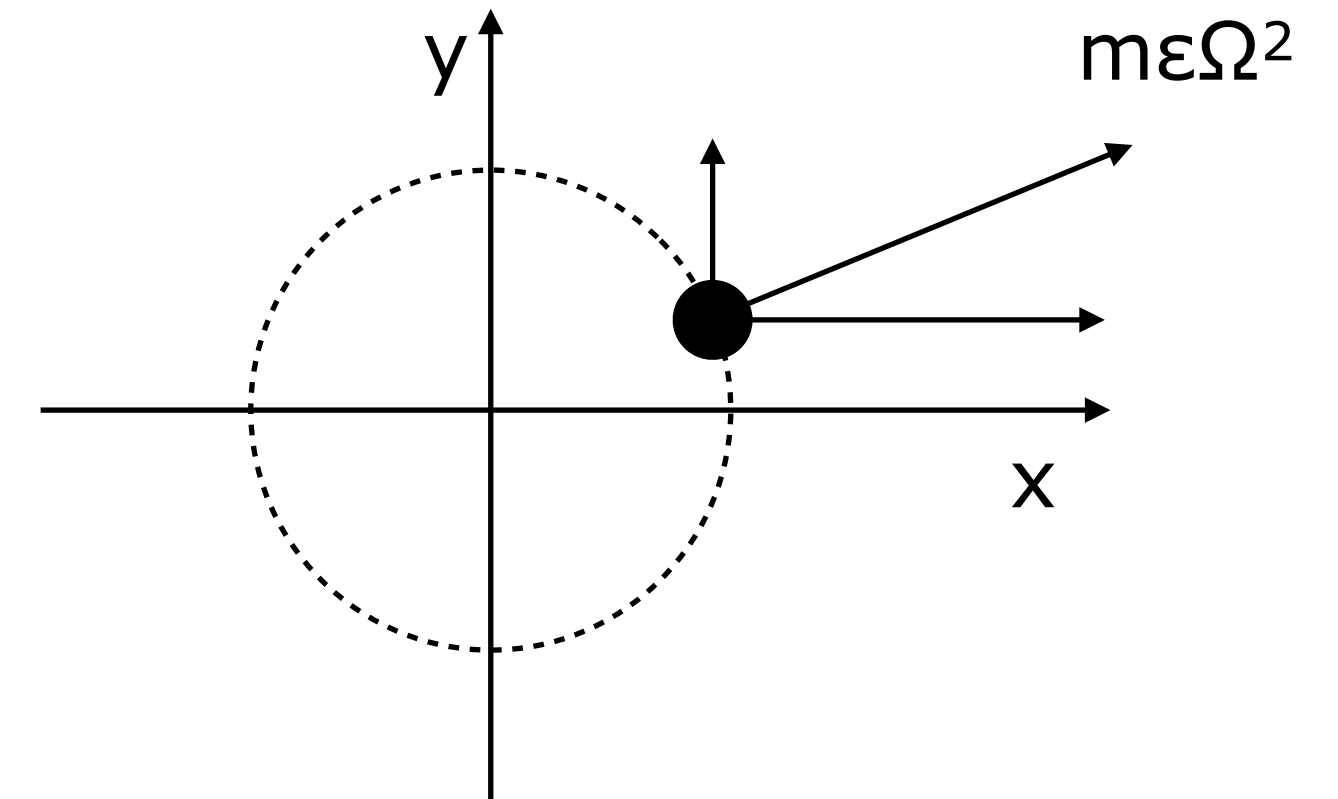
perché due equazioni?

Risolviemo le equazioni nel caso "con squilibrio", tralasciando eventuali forze esterne  $F_i$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c + kx_c = m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_c + ky_c = m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

con una soluzione di primo tentativo  
con le sue derivate possiamo scrivere

$$\begin{cases} x_c = x_{c0} e^{st} \\ y_c = y_{c0} e^{st} \end{cases}$$



$$\begin{cases} (k - m\Omega^2)x_{c0} = m\epsilon\Omega^2 \\ (k - m\Omega^2)y_{c0} = m\epsilon\Omega^2 \end{cases}$$

due equazioni uguali ed esprimono lo spostamento della massa squilibrata  $m$   
nelle due direzioni coordinate  
(a esser precisi le due equazioni sono sfasate tra loro di  $90^\circ$ )

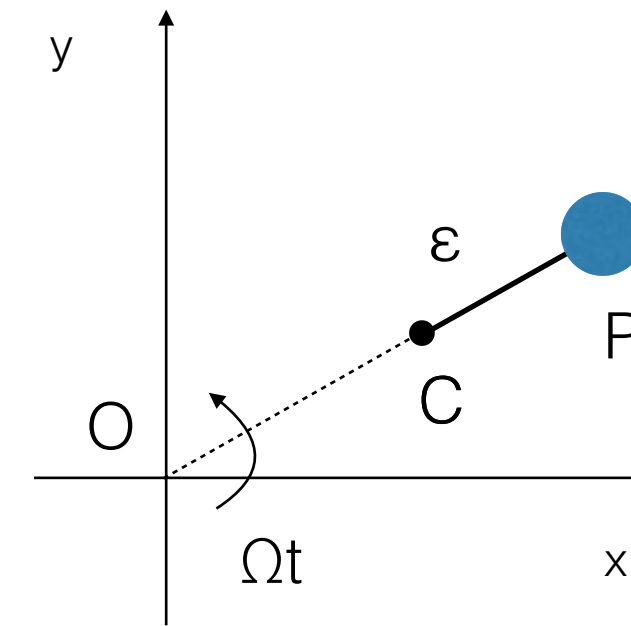
$$x_{c0} = y_{c0} = \epsilon \frac{m\Omega^2}{k - m\Omega^2} = \epsilon \frac{\Omega^2}{\omega_n^2 - \Omega^2} = \epsilon \frac{\frac{\Omega^2}{\omega_n^2}}{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_n^2}} = \epsilon \frac{r^2}{1 - r^2}$$

divido per  $m$                       divido per  $\omega_n^2$

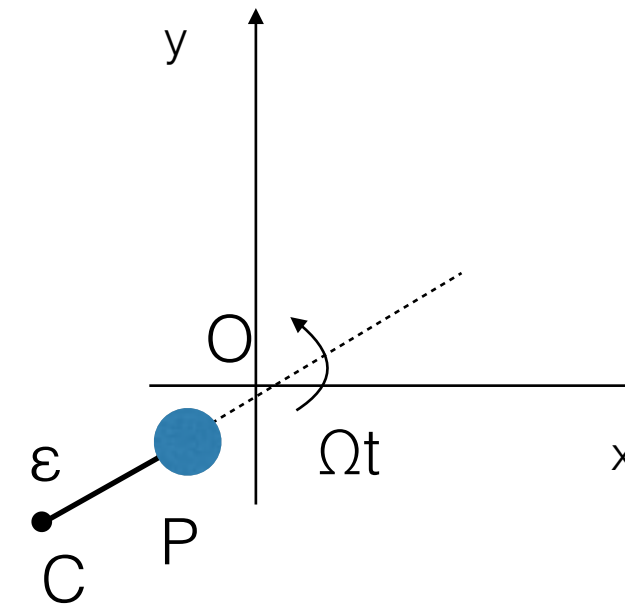
$\omega_n$  frequenza naturale del sistema  
 $r$  rapporto tra frequenza di rotazione  
e frequenza naturale

Si distinguono due condizioni di funzionamento..

$\Omega < \omega_n$  regime sub-critico  
la massa squilibrante ruota esternamente al  
centro geometrico del sistema

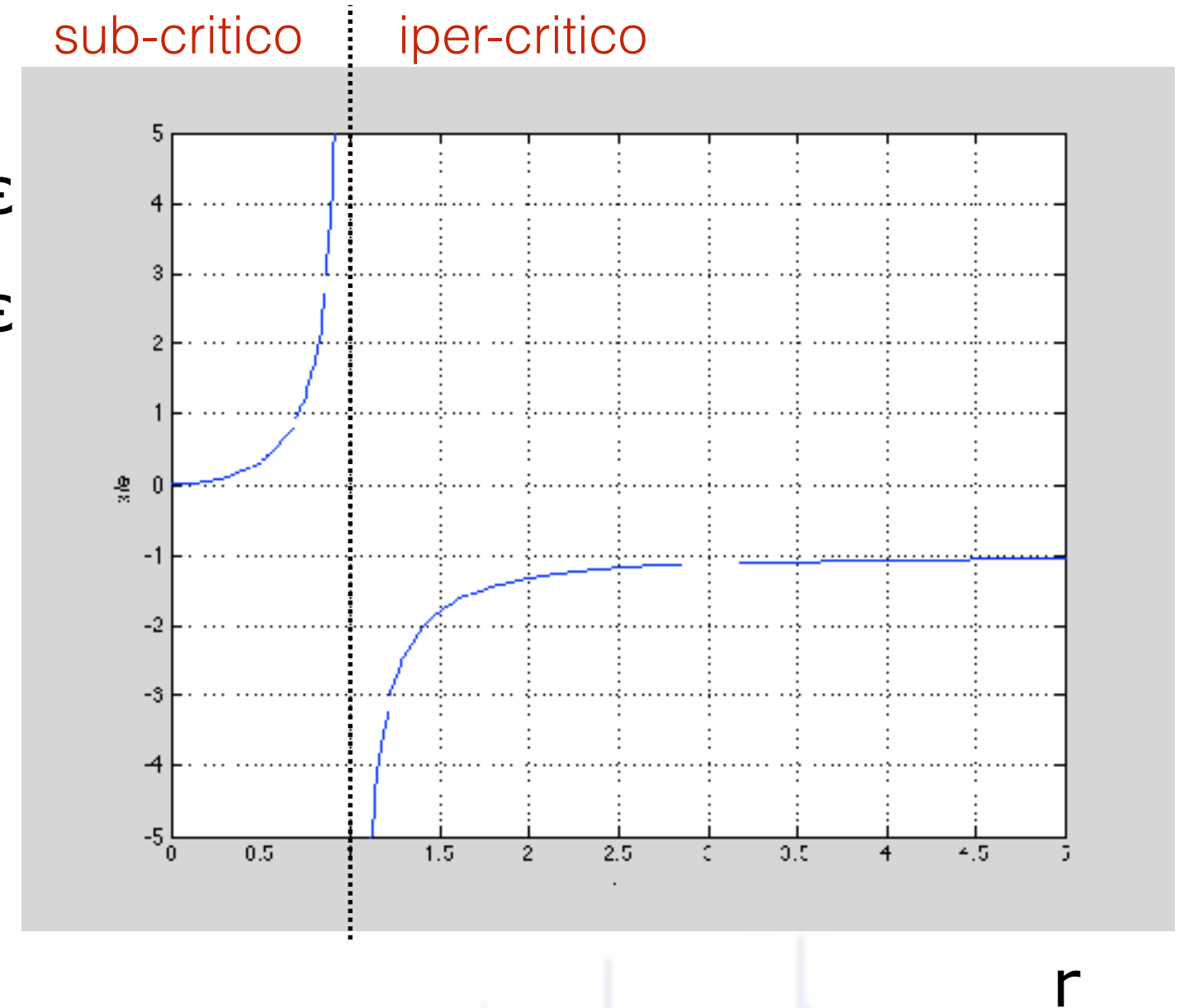


$\Omega > \omega_n$  regime iper-critico  
la massa squilibrante ruota internamente al  
centro geometrico del sistema



$$\frac{x_{co}}{\epsilon}$$

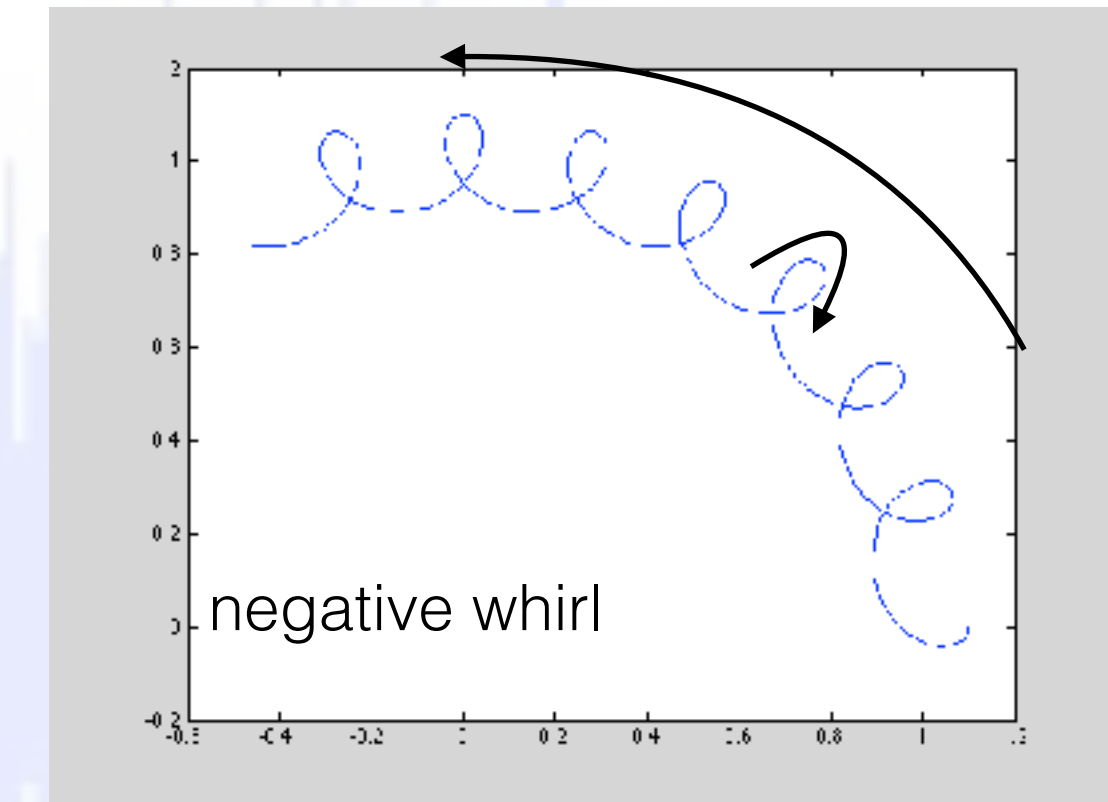
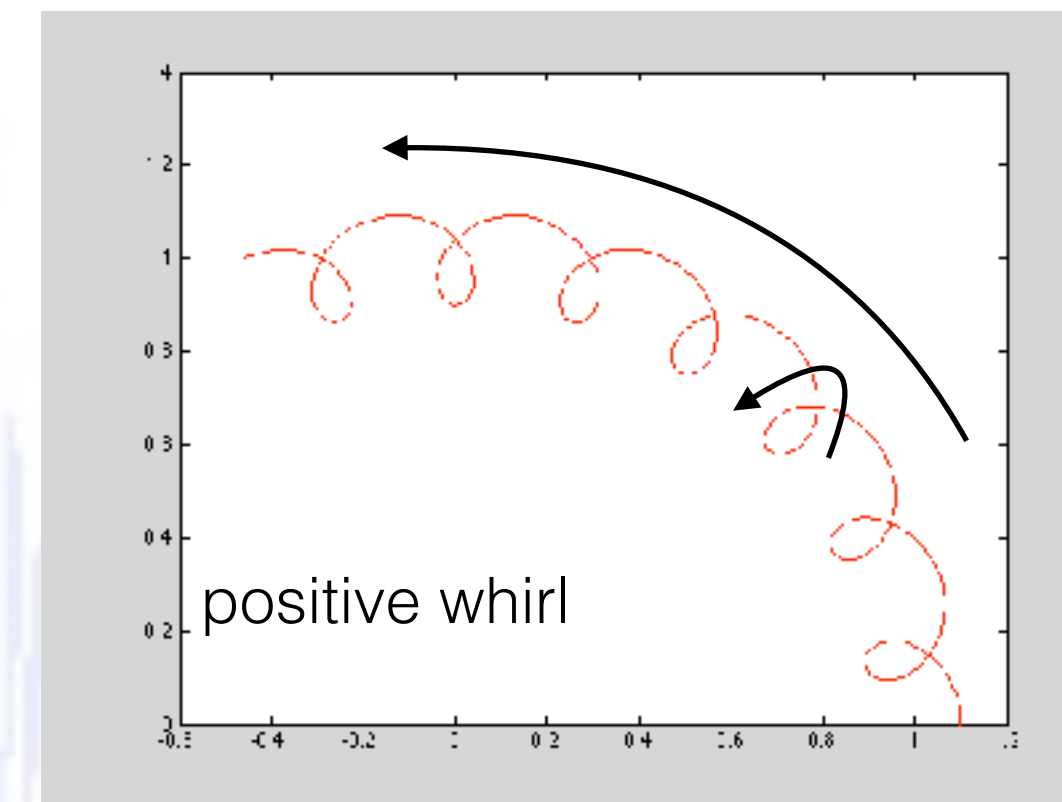
$$\frac{y_{co}}{\epsilon}$$



All'aumentare della velocità di rotazione  
la posizione della massa squilibrante  
tende a posizionarsi in corrispondenza  
del centro di rotazione geometrico O  
> auto-centratura

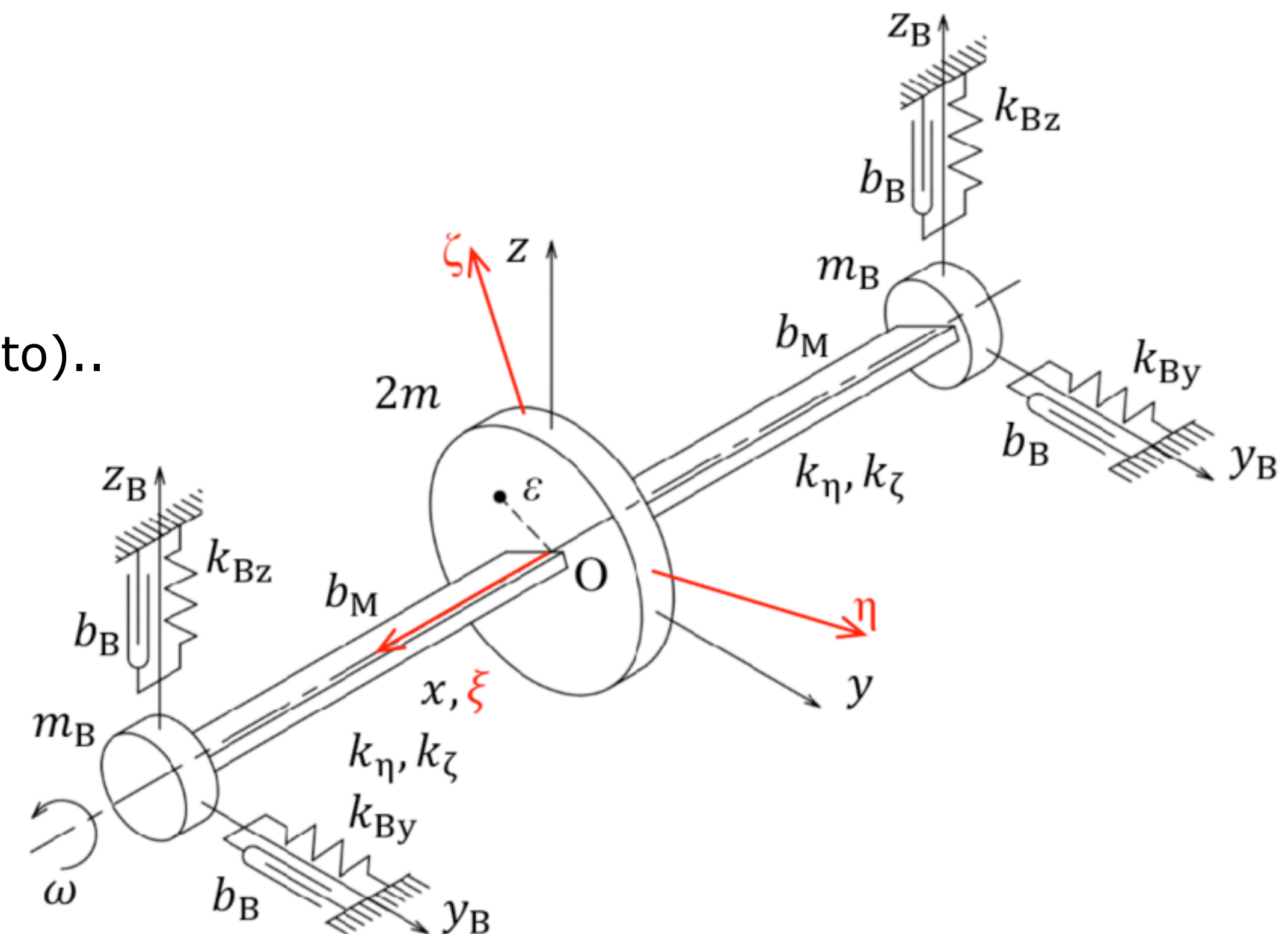
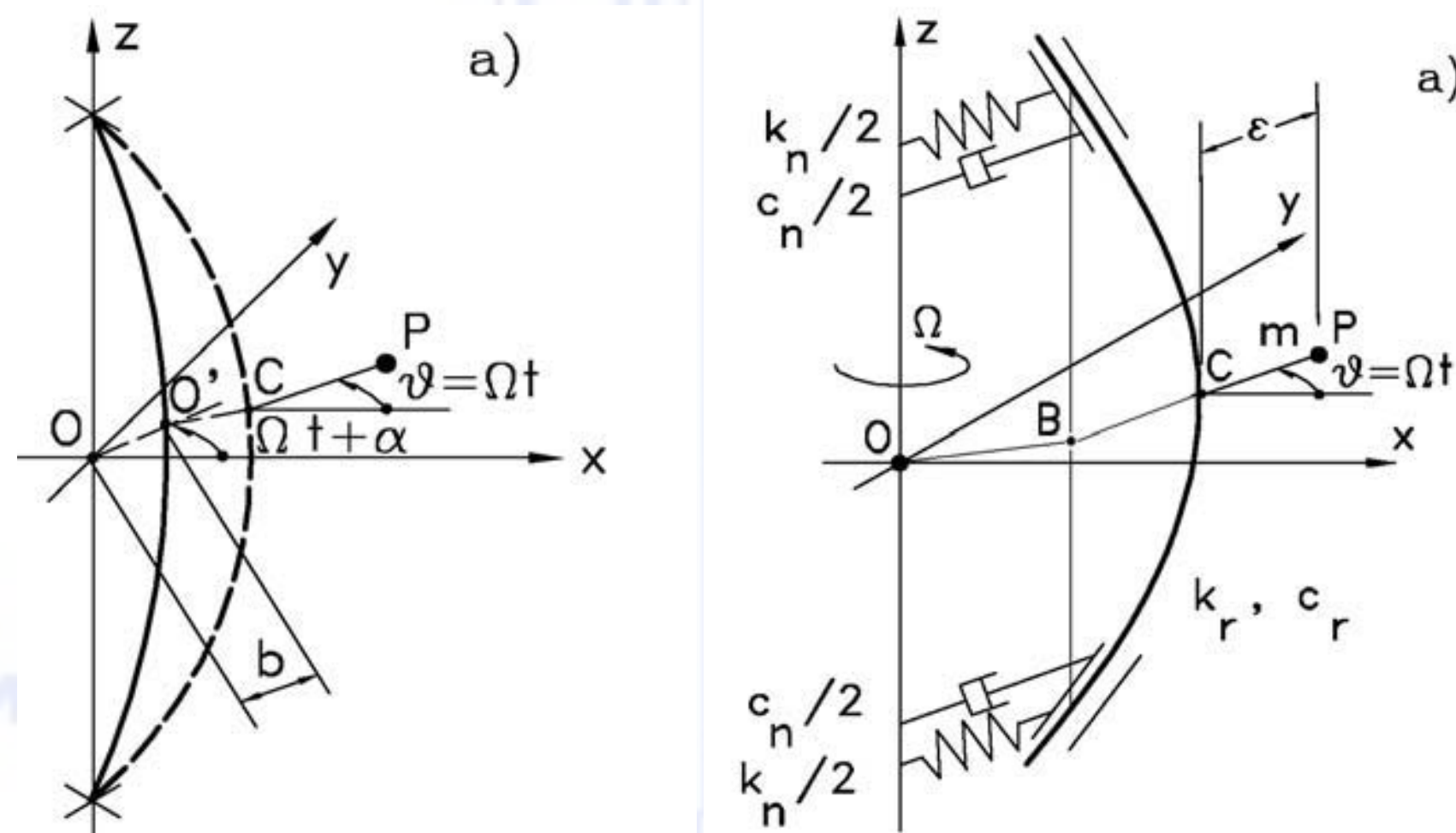
$$\frac{x_{co}}{\epsilon} \Rightarrow -1 \quad x_{co} = -\epsilon$$

$$\frac{y_{co}}{\epsilon} \Rightarrow -1 \quad y_{co} = -\epsilon$$



Oltre all'effetto dello squilibrio residuo con il rotore di Jeffcott si potrebbero studiare gli effetti

- ..della posizione non centrata del disco
- ..della piegatura (flessione statica) dell'albero
- ..dell'anisotropia (sezione non radial simmetrica) dell'albero (non necessariamente nel piano dello squilibrio)..
- ..della presenza di smorzamento (nelle fondazioni e/o nell'albero, di tipo viscoso, strutturale..)
- ..dell'anisotropia dei vincoli ..
- ..della variazioni di coppia dovute a resistenze interne (legati a fenomeni dissipativi quali smorzamento, strisciamento)..
- ..



- ..con coordinate solidali alla macchina (fisse)..
- ..con coordinate solidali al rotore (rotanti)..

## Richiamo momento giroscopici

..principio di conservazione della quantità di moto  $\vec{p} = m\vec{v}$

se la forza risultante delle forze agenti sul sistema è nulla, la quantità di moto resta costante...  
(sistema non accelera o decelera)

$$\sum \vec{F}_{ris} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

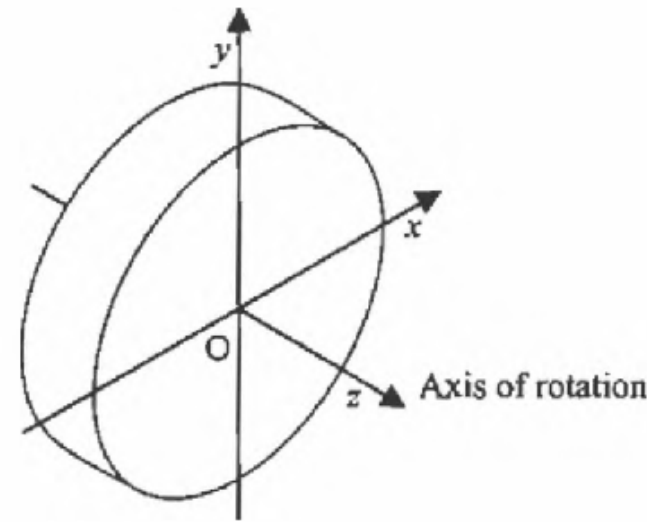
$$\sum \vec{F}_{ris} = 0 \quad \vec{p} = const \quad \vec{p}_i = \vec{p}_f$$

..principio di conservazione del momento angolare  $\vec{L} = I\vec{\omega}$

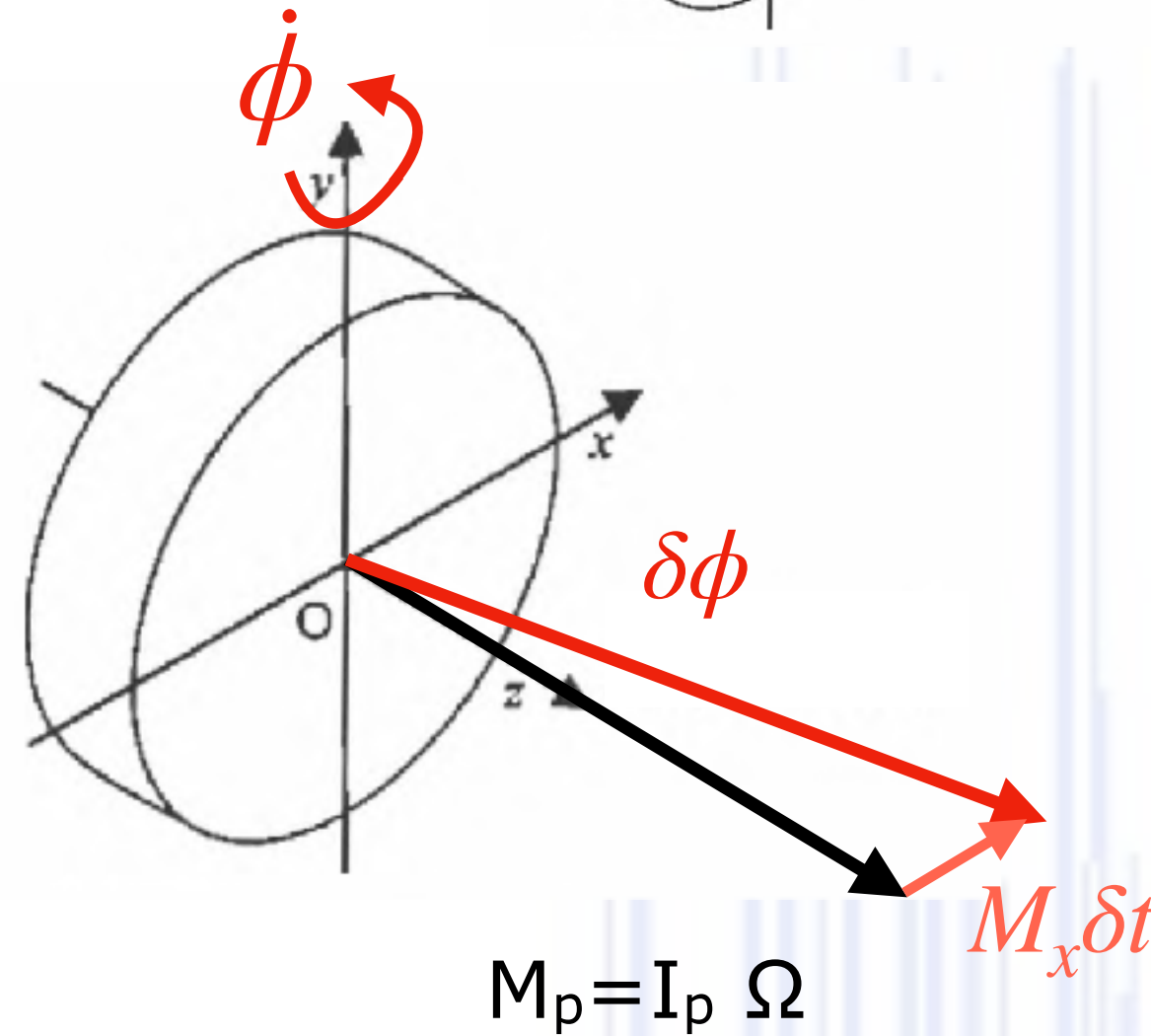
se la somma dei momenti delle forze agenti sui sistema è nulla, il momento angolare resta costante...  
(sistema non accelera o decelera)

$$\sum \vec{M}_{ris} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\sum \vec{M}_{ris} = 0 \quad \vec{L} = const \quad \vec{L}_i = \vec{L}_f$$



Supponiamo di avere in disco con momento d'inerzia polare  $I_p$  e trasversale  $I_t$ .  
Se questo ruota con velocità  $\Omega$  attorno all'asse  $z$ , questo avrà un momento angolare pari a  $I_p \Omega$



Supponiamo ruoti attorno all'asse  $OY$  con velocità  $\dot{\phi}$ , in un intervallo  $\delta t$   
il momento angolare ruoterà nel piano  $OX$  di una quantità  $\delta\phi = \dot{\phi}\delta t$

$$M_x \delta t = I_p \Omega \delta\phi$$

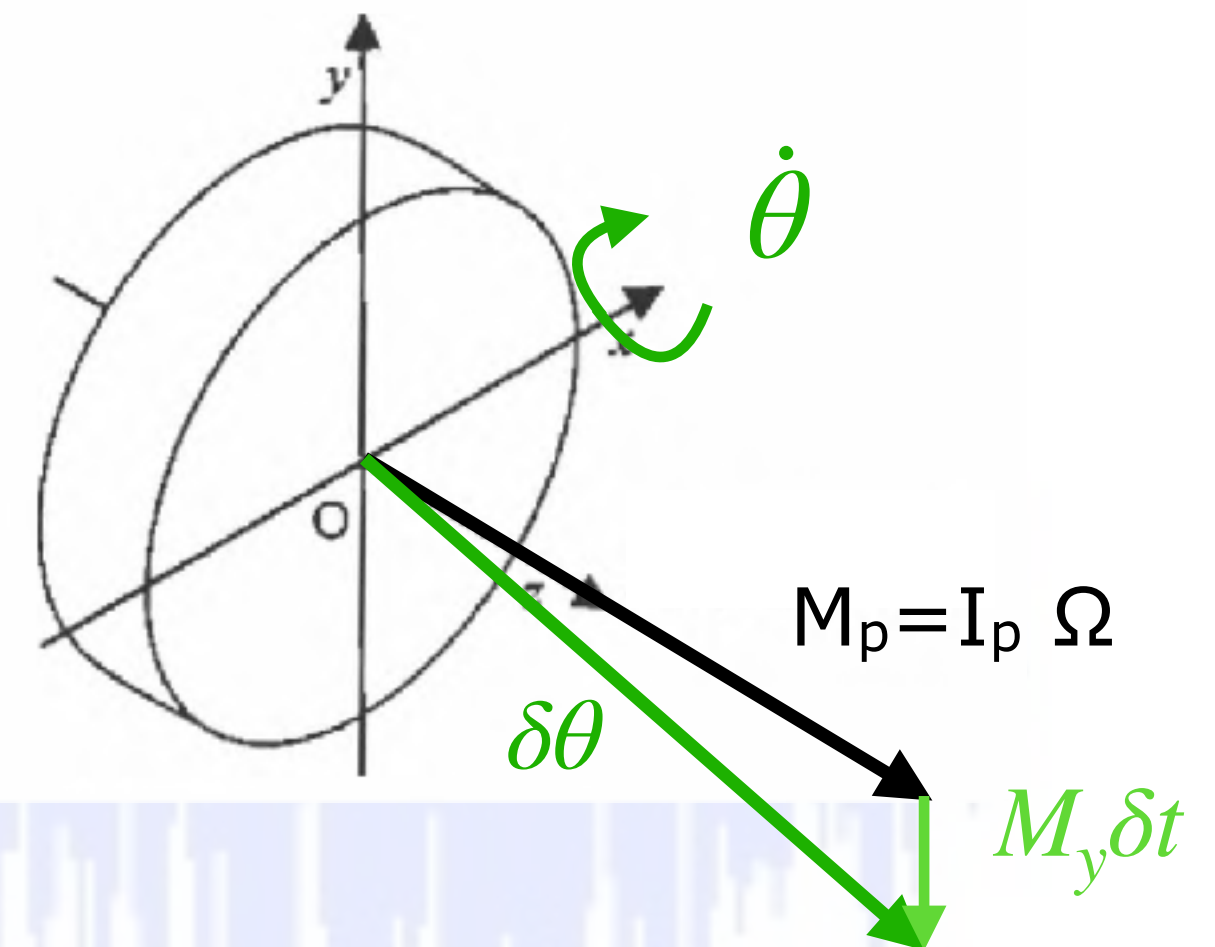
$$M_x = I_p \Omega \frac{\delta\phi}{\delta t} = I_p \Omega \dot{\phi} \quad \text{Momento torcente attorno all'asse } OX$$

*Attenzione alle direzioni ed ai segni!*

Supponiamo ruoti attorno all'asse  $OX$  con velocità  $\dot{\theta}$ , in un intervallo  $\delta t$   
il momento angolare ruoterà nel piano  $OY$  di una quantità

$$-M_y \delta t = I_p \Omega \delta\theta$$

$$M_y = -I_p \Omega \frac{\delta\theta}{\delta t} = -I_p \Omega \dot{\theta} \quad \text{Momento torcente attorno all'asse } OY$$



Il disco (rotore) potrebbe ruotare simultaneamente lungo gli assi OX e OY  
quindi i contributi del momento trasversale d'inerzia devono essere tenuti in considerazione.

$$I_t \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} = M_x$$

$$I_t \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} = M_y$$

Si osservi che le equazioni che derivano dalla considerazioni dei momenti giroscopici (rotazione dei "dischi" lungo gli assi OX e OY) sono accoppiate! (appaiono entrambi gli angoli nella stessa equazione) e che la matrice dei momenti giroscopici è **skew** simmetrica !

$$\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_p \Omega \\ -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix}$$

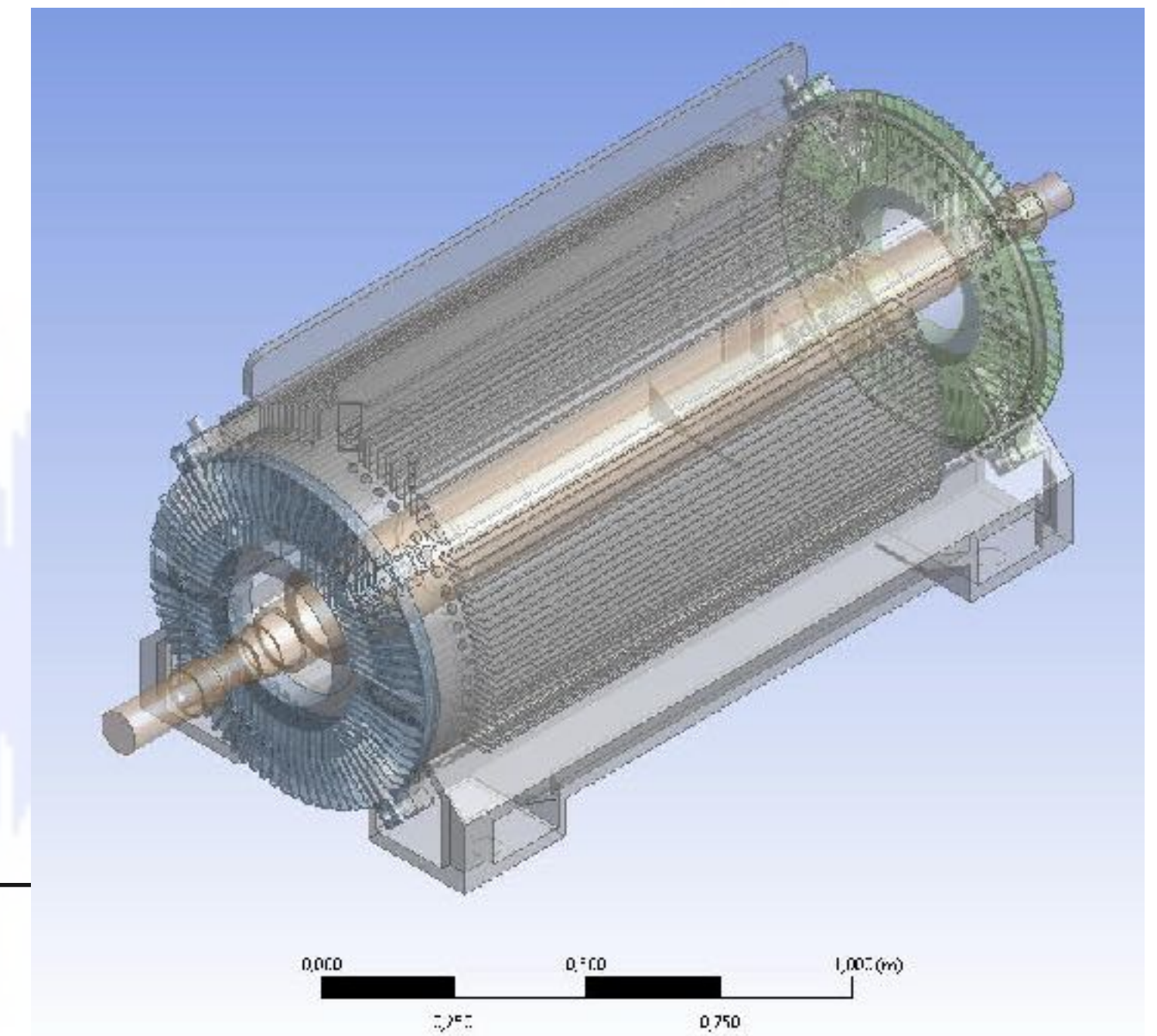
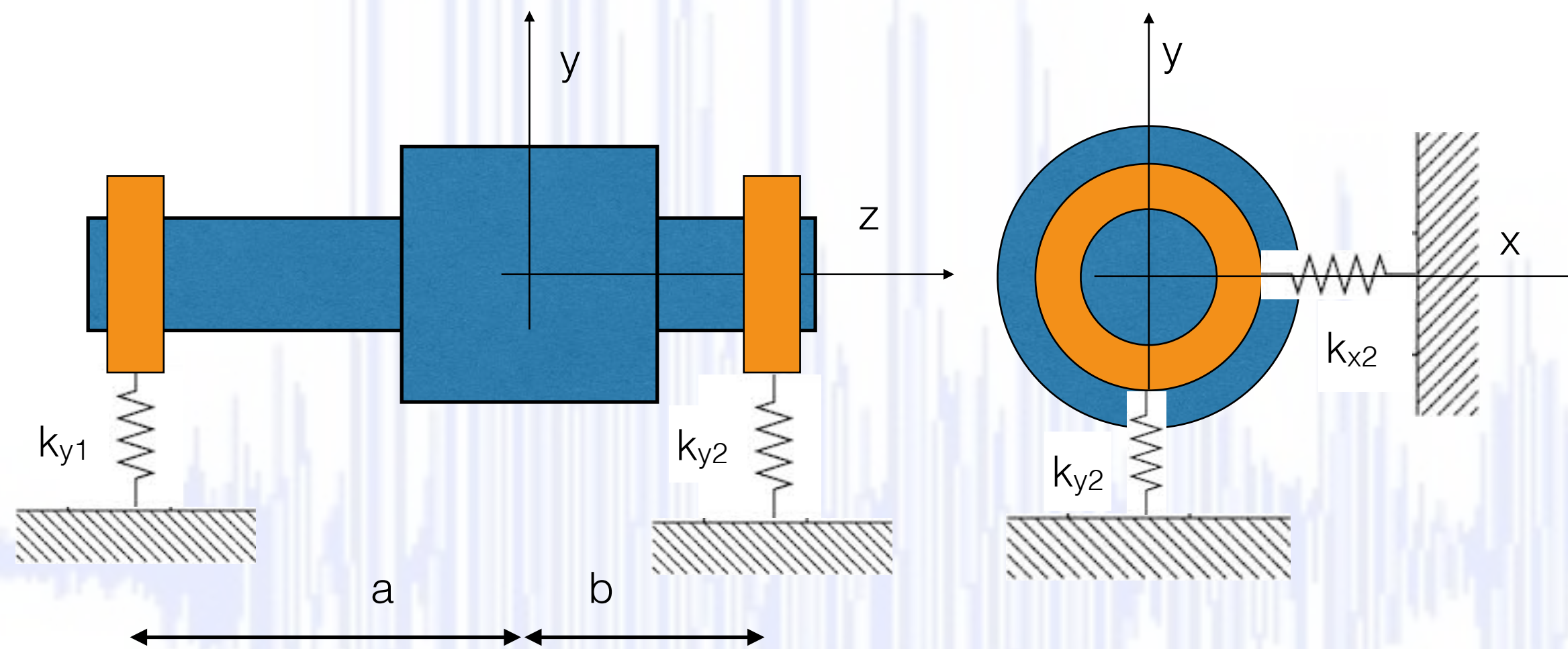
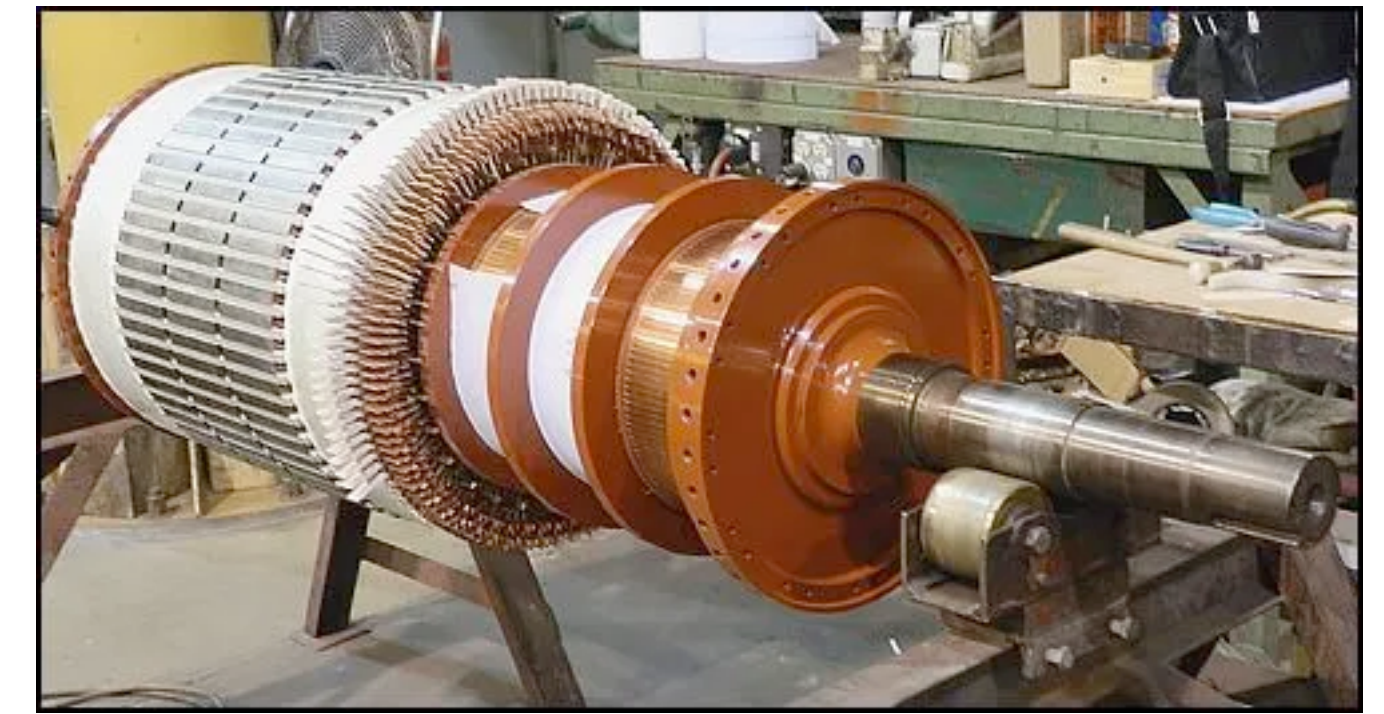
La matrice dei momenti giroscopici risulta moltiplicata per il vettore delle velocità...  
e potrebbe ricordare uno smorzamento viscoso... ma non ci sono effetti dissipativi!!

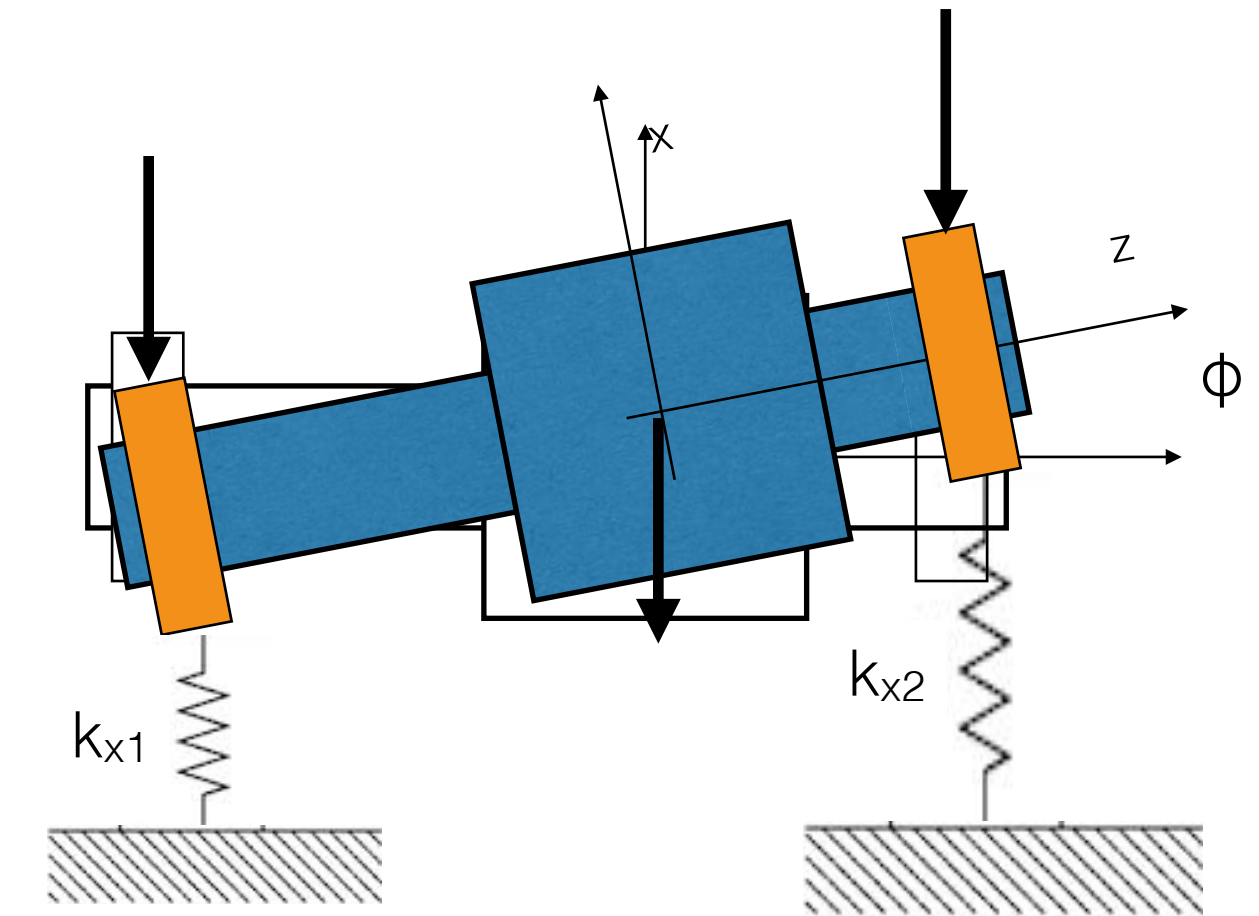
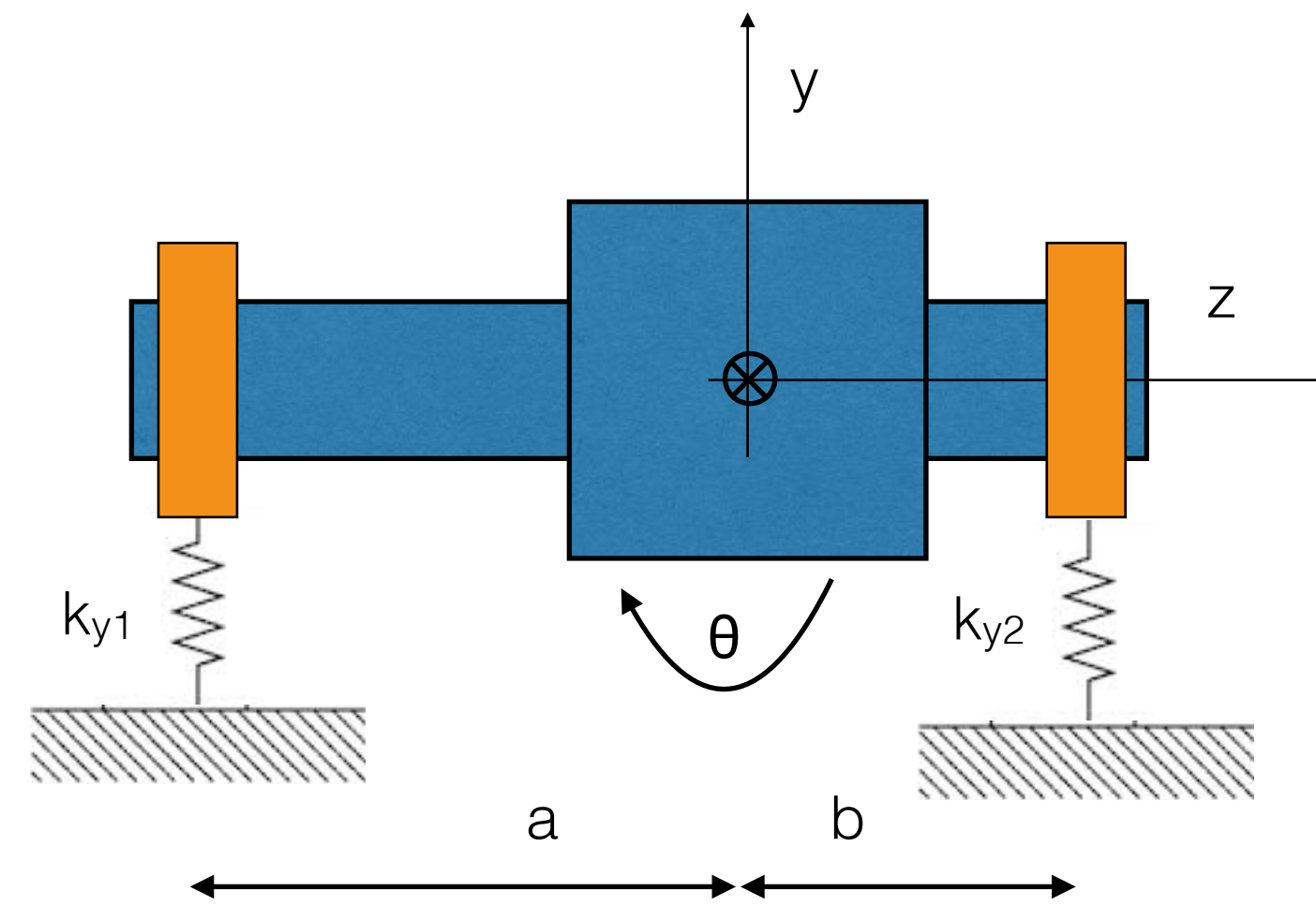
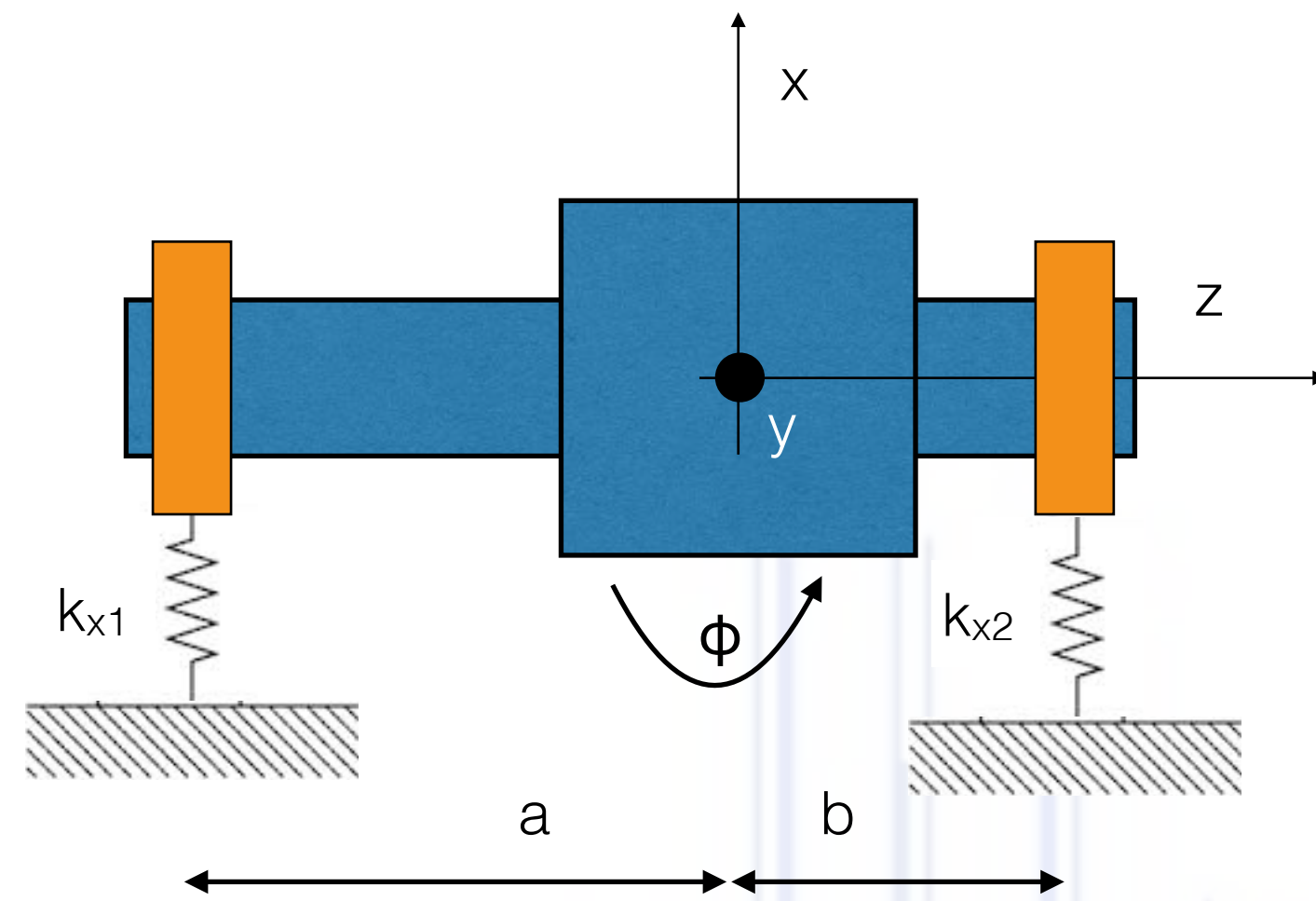
## Rotore rigido su supporti flessibili

Si concentri l'attenzione su un rotore rigido su supporti flessibili.

Questo sistema ha 4 gradi di libertà (due traslazioni e due rotazioni) rispettivamente nei piani orizzontale XZ e verticale YZ.

Ipotizzando che i cuscinetti non abbiano rigidità angolare (short bearings), che si possano muovere solamente nel piano orizzontale e verticale, e in queste direzioni abbiano rigidità indicate con  $k_x$  e  $k_y$  (possono essere uguali tra loro o diverse, sia all'interno del cuscinetto che tra i cuscinetti) è possibile scrivere le equazioni del moto (4) con l'approccio Newtoniano o Lagrangiano





Si possono scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione nei due piani, ipotizzando che il rotore sia equilibrato e ruoti con una velocità  $\Omega$  attorno all'asse  $z$  ..

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_{x1}(x - a\phi) + k_{x2}(x + b\phi) = 0 \\ m\ddot{y} + k_{y1}(y + a\theta) + k_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + ak_{y1}(y + a\theta) - bk_{y2}(y - b\theta) = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} - ak_{x1}(y - a\phi) + bk_{x2}(x + b\phi) = 0 \end{cases}$$

momenti giroscopici dipendenti da  $\Omega$

Equilibrio forze in direzione  $x$  (piano  $XZ$ )

Equilibrio forze in direzione  $y$  (piano  $YZ$ )

Equilibrio momenti attorno  $\theta$

Equilibrio momenti attorno  $\phi$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oppure:

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

↑ ↑ ↓ ↓

momenti giroscopici
accoppiamento tra i GDL x e  $\phi$ 
accoppiamento tra i GDL y e  $\theta$

avendo sostituito nelle equazioni del moto le seguenti espressioni compatte..

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

in forma condensata le equazioni del moto risultano così scritte:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

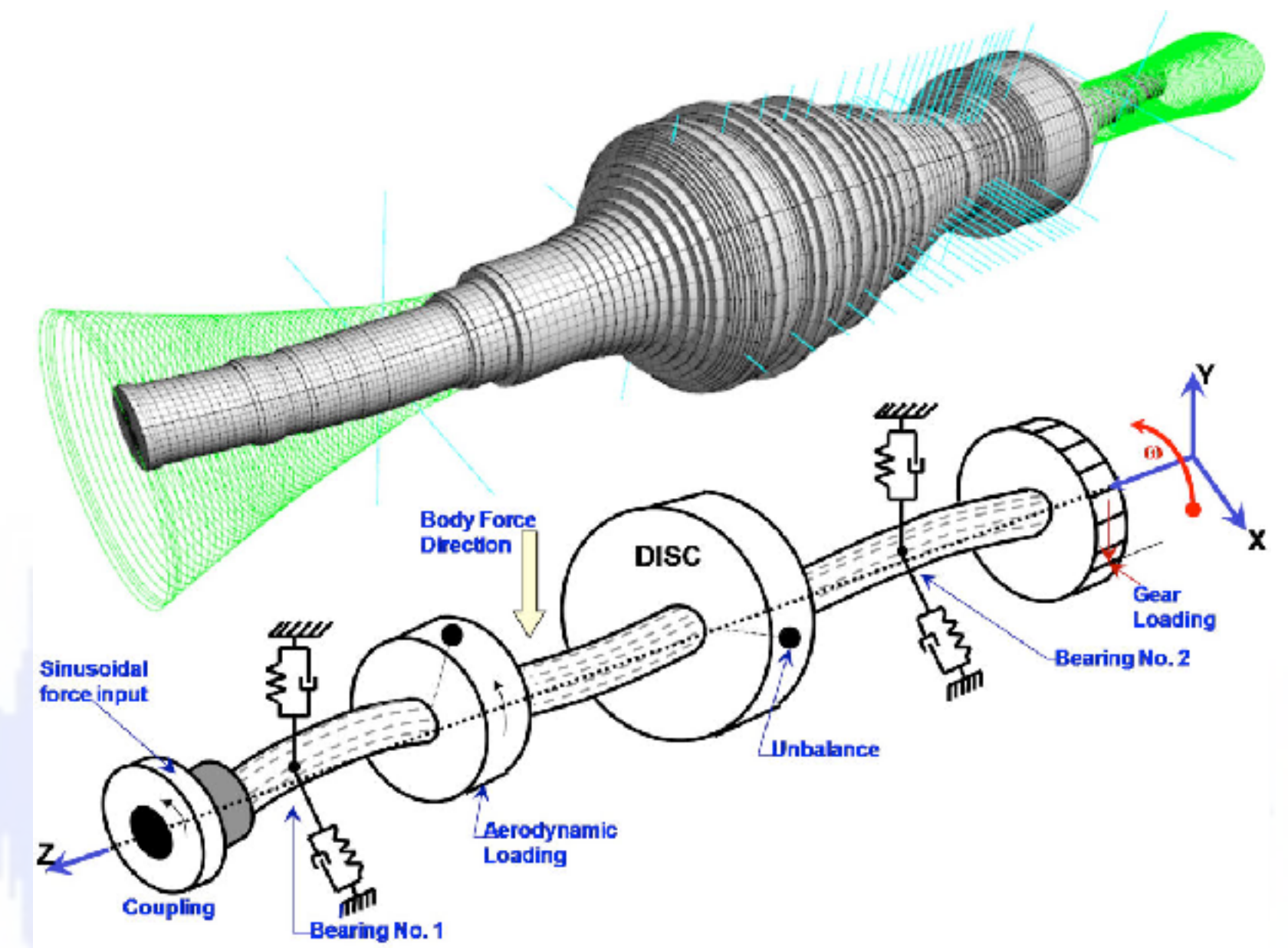
..l'accoppiamento elastico lega le coordinate della 1&4 e 2&3 equazione

..i momenti giroscopici quello della 3&4 equazione

Bisogna risolverle le equazioni con attenzione! e quelle accoppiate dovranno essere risolte simultaneamente (!)

Le quattro coordinate che descrivono il moto del sistema ( $x$ ,  $y$ ,  $\theta$ ,  $\phi$ ) potranno variare indipendentemente tra loro o simultaneamente, (in funzione della presenza o meno di accoppiamento) dando luogo a moti più o meno complessi!

Si analizzano di seguito alcune combinazioni particolari..



## Caso 1 Rotore rigido su supporti isotropi

Caso 1.1 rotore rigido, fermo, vincoli uguali isotropi, senza accoppiamento elastico..

Caso 1.2 rotore rigido, fermo, vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..

Caso 1.3 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, senza accoppiamento elastico..

Caso 1.4 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..

## Caso 2 Rotore rigido su supporti anisotropi

Cosa implicano le diverse combinazioni?

supporti isotropi / anisotropi ==> stesso / diverso comportamento nei piani XZ e YZ

rotore fermo / in moto ==> presenza / assenza dei momenti giroscopici

con / senza accoppiamento elastico ==> il baricentro coincide / non coincide con il centro elastico

## Caso 1 Rotore rigido su supporti isotropi

Per l'isotropia dei vincoli risulteranno le semplificazioni :

$$k_{xT} = k_{yT} = k_T$$

$$k_{xC} = k_{yC} = k_C$$

$$k_{xR} = k_{yR} = k_R$$

da cui le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Ricordiamo le espressioni compatte:

$$\begin{cases} k_{xT} = k_{x1} + k_{x2} & k_{yT} = k_{y1} + k_{y2} \\ k_{xC} = -ak_{x1} + bk_{x2} & k_{yC} = -ak_{y1} + bk_{y2} \\ k_{xR} = a^2k_{x1} + b^2k_{x2} & k_{yR} = a^2k_{y1} + b^2k_{y2} \end{cases}$$

Ipotizzando che il rotore sia fermo  $\Omega=0$ ,  
spariscono i termini giroscopici!

Ipotizzando in più che  
il baricentro coincida con il centro elastico  
si riducono a:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Caso 1.1 rotore rigido, fermo, vincoli isotropi, senza accoppiamento elastico..

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

Le equazioni viste sono disaccoppiate e possono essere risolte indipendentemente !

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si scrivono le usuali equazioni del moto in s:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 e^{st} = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 e^{st} = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 e^{st} = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 e^{st} = 0 \end{cases}$$

si cercano i valori di s (radici eq. caratteristica) che annullano i termini tra parentesi tonde!

da eq. I e II

$$s^2 = -\frac{k_T}{m}$$

$$s_1 = s_2 = j\sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

$$s_3 = s_4 = -j\sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

da eq. III e IV

$$s^2 = -\frac{k_R}{I_d}$$

$$s_5 = s_6 = j\sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

$$s_7 = s_8 = -j\sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

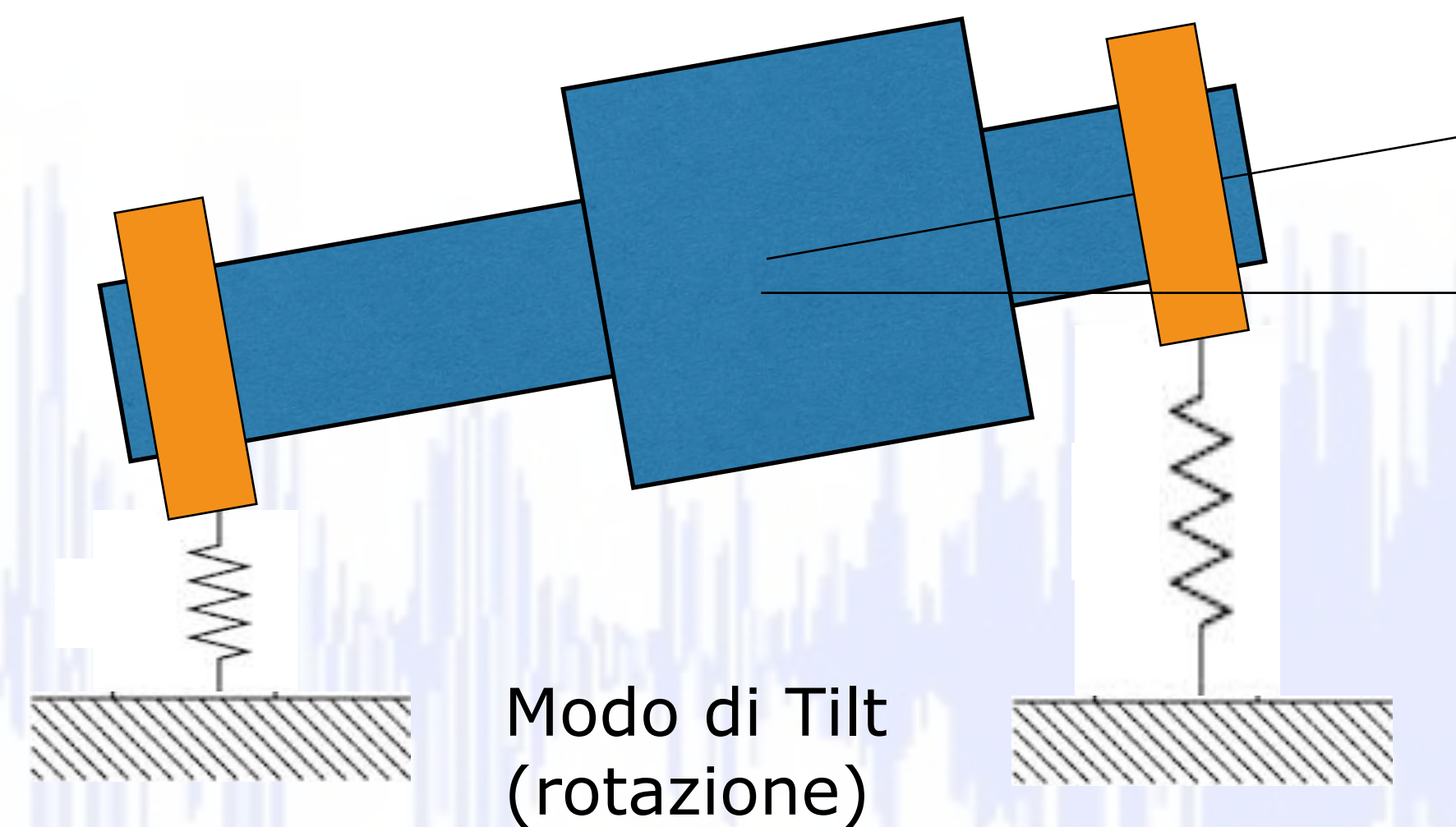
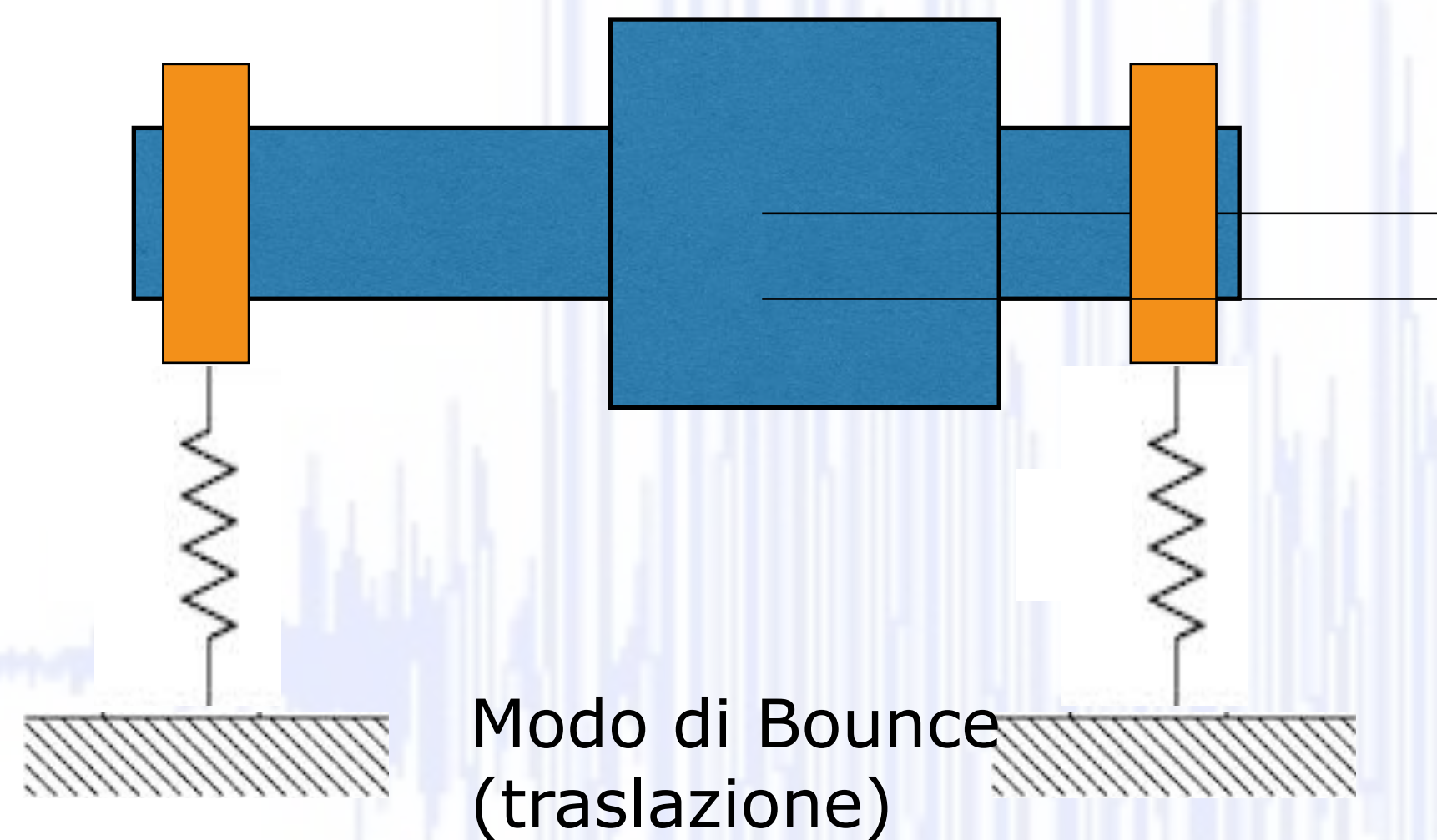
4 GDL > 8 soluzioni per le equazioni del moto!, a due a due, tra loro complesse coniugate!

Non c'è smorzamento, quindi sono puramente immaginarie!

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

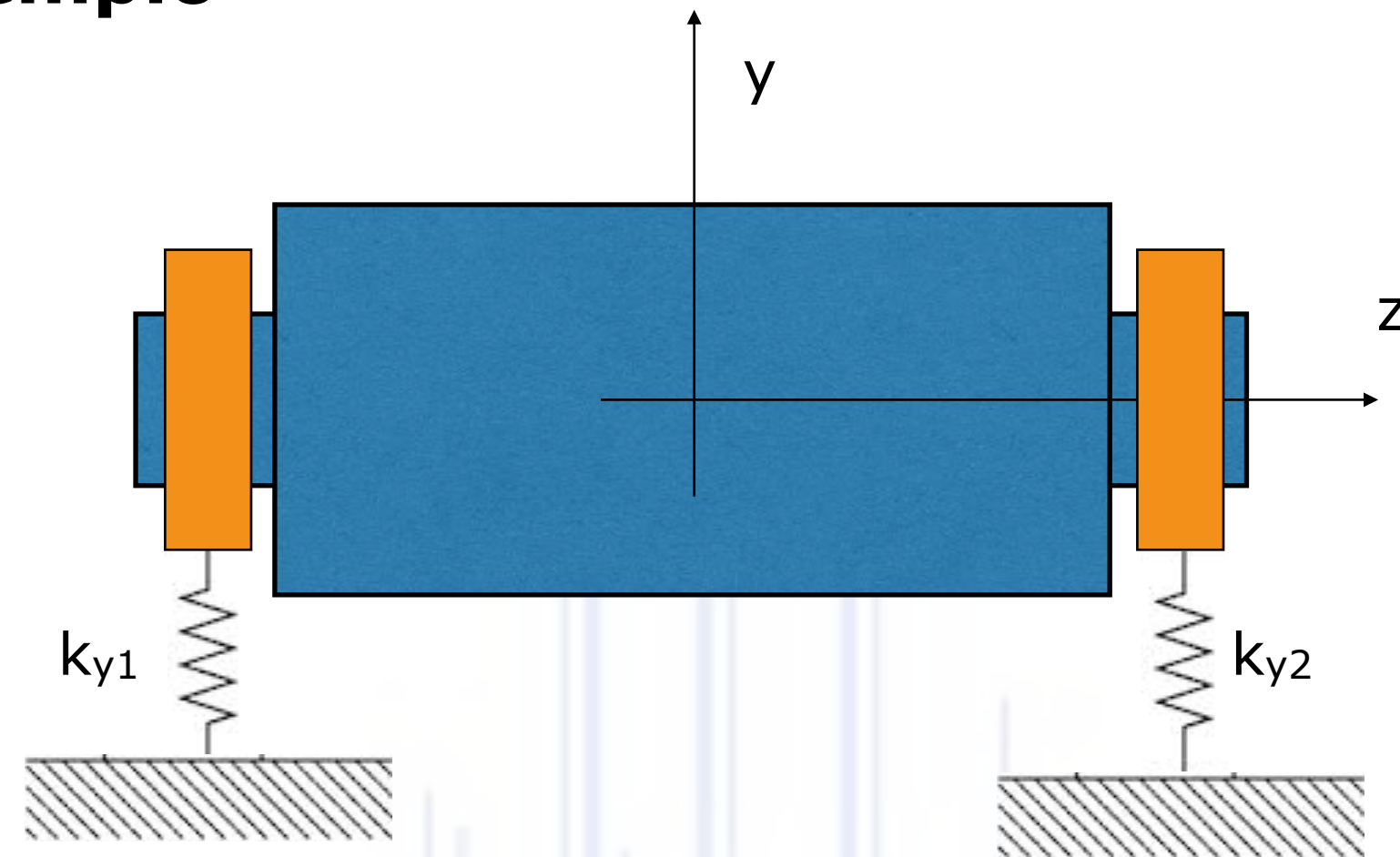
$$\omega_5 = \omega_6 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}}$$

Dal valori numerici dei parametri di sistema ci sarà prima un modo o l'altro.



La stessa cosa avviene sul piano XZ e YZ!

## Esempio



Si consideri un rotore rigido su supporti isotropi

### Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_x=k_y=1\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

### Condizioni Iniziali

$X_0=1\text{mm}$   
 $Y_0=0.5\text{mm}$   
 $V_{x0}=30\text{mm/s}$   
 $V_{y0}=0$

Calcolo proprietà inerziali:

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68\text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134\text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625\text{kgm}^2$$

Calcolo proprietà elastiche:

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000\text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0\text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125\text{kNm}$$

Quali sono le Frequenze naturali ?  
Come si calcola la risposta del baricentro del rotore?

Dalle formule viste:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s} \quad f_1 = f_2 = 20.32 \text{ Hz}$$

$$\omega_5 = \omega_6 = \sqrt{\frac{k_R}{I_d}} = 208.97 \text{ rad/s} \quad f_5 = f_6 = 33.26 \text{ Hz}$$

Con questi valori  
primo modo Bounce  
secondo modo Tilt

Con le solite equazioni, sostituendo le CI per trovare i valori della costanti Ai e Bi si determinano le leggi del moto del baricentro (traslazioni x e y, analogamente per le rotazioni  $\theta$  e  $\Phi$ )

$$\begin{cases} x = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_1 t) \\ y = B_1 \sin(\omega_2 t) + B_2 \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

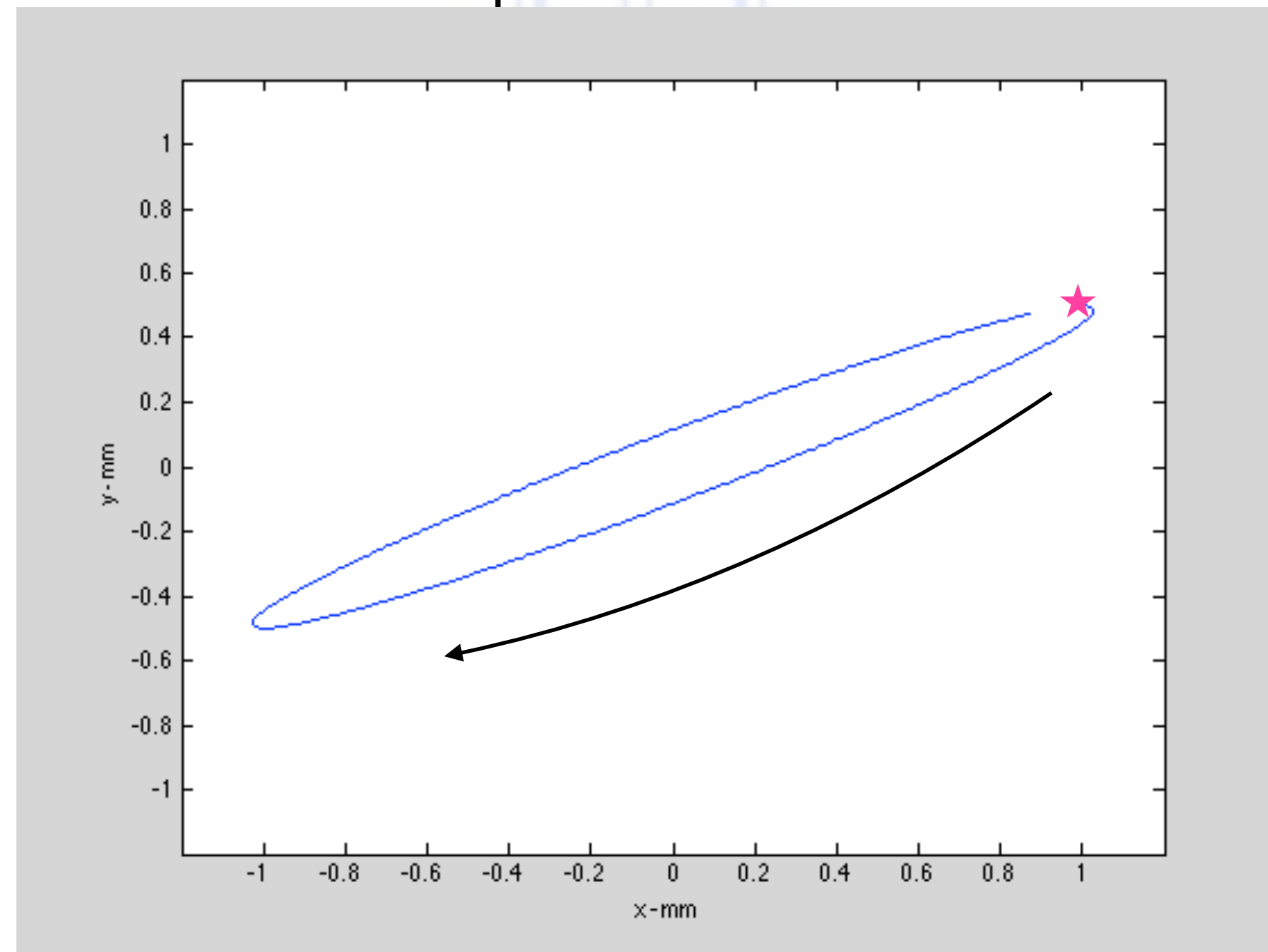
$$\begin{cases} \dot{x} = A_1 \cos \omega_1(\omega_1 t) - A_2 \sin \omega_1(\omega_1 t) \\ \dot{y} = B_1 \omega_2 \cos(\omega_2 t) - B_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \left( \frac{30}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t) + \cos(\omega_1 t) \\ y = \frac{1}{2} \cos(\omega_2 t) \end{cases}$$

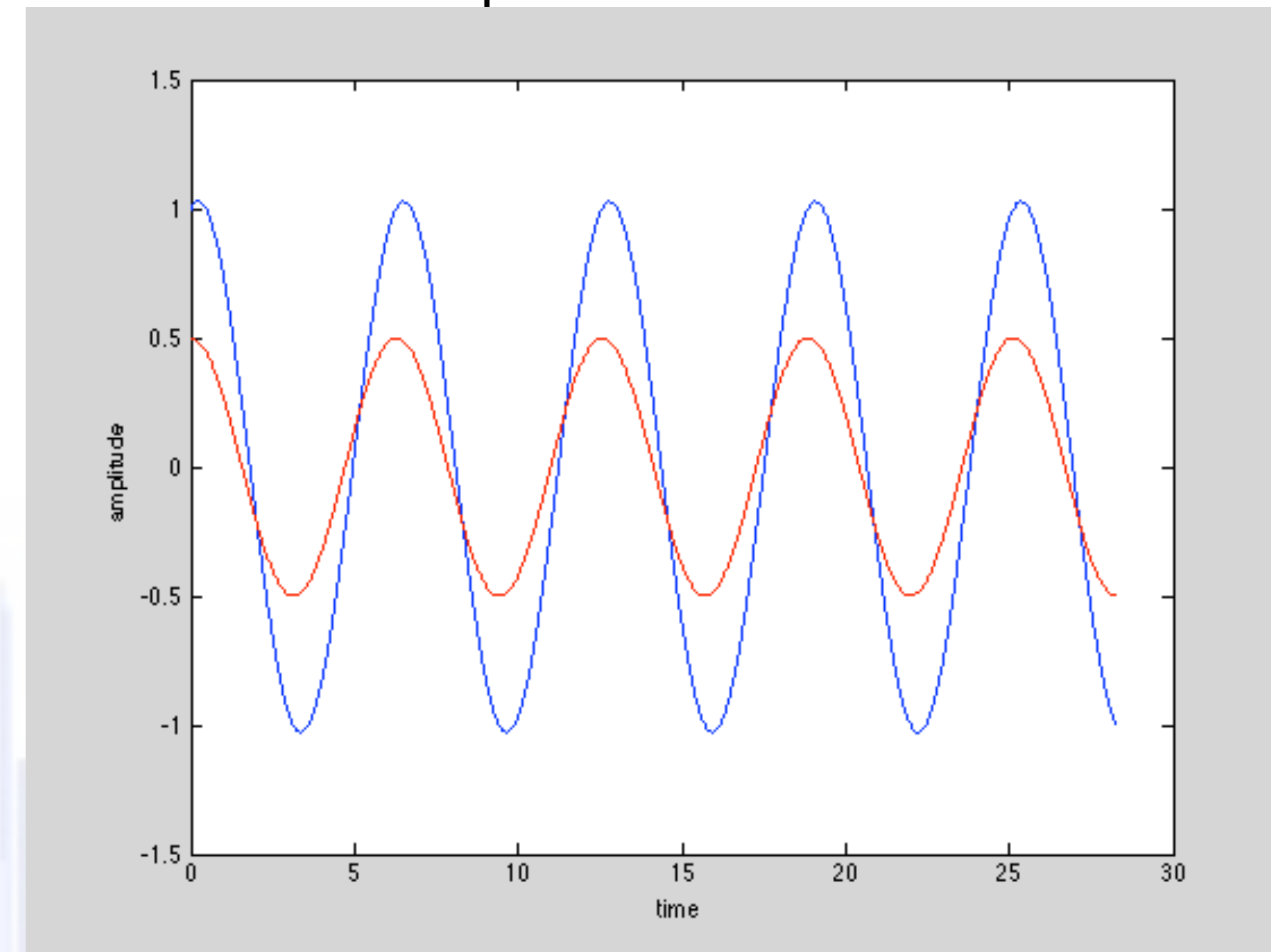
Ricordando le condizioni iniziali:  
 $X_0 = 1 \text{ mm}$   
 $Y_0 = 0.5 \text{ mm}$   
 $V_{x0} = 30 \text{ mm/s}$   
 $V_{y0} = 0$

Con le equazioni scritte è possibile costruire un programma che calcoli e visualizzi la posizione del baricentro..

diagramma orbitale  
nel piano XY



spostamento XZ(blu) YZ(rosso)  
nel tempo t



★ posizione iniziale

Caso 1.2 rotore rigido, fermo, vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..

In questo caso è evidente l'accoppiamento tra le equazioni, da momento che i  $k_C$  sono diversi da 0

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

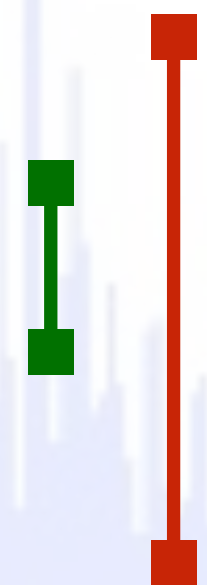
$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_T & 0 & 0 & k_C \\ 0 & k_T & -k_C & 0 \\ 0 & -k_C & k_R & 0 \\ k_C & 0 & 0 & k_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica  
soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si scrivono le  
usuali equazioni  
del moto in s:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C \Phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C \Theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 + k_C X_0 = 0 \end{cases}$$



bisogna risolvere le equazioni simultaneamente!

Per farlo si estrae ed eguaglia  $X_0$  dalla I e IV equazione:

$$\bullet \quad X_0 = -\frac{k_C \Phi_0}{(ms^2 + k_T)} = -\frac{(I_d s^2 + k_R) \Phi_0}{k_C} \quad (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_R^2 = 0$$

e similmente estraendo ed eguagliando  $Y_0$  dalla II e III equazione:

$$\bullet \quad Y_0 = \frac{k_C \Theta_0}{(ms^2 + k_T)} = \frac{(I_d s^2 + k_R) \Theta_0}{k_C} \quad (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_R^2 = 0$$

NB equazioni uguali

Sviluppando il prodotto si ricava l'equazione caratteristica..

..le cui radici in  $s^2$  sono:

$$s^4 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 + \frac{k_R k_T - k_C^2}{m I_d} = 0$$

$$s^2 = -\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}}$$

compattiamo questa radice con  $\gamma$ :

$$\gamma = \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{m I_d}}$$

Nuovamente servono 8 radici..

$$s_1 = s_2 = j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma} \quad s_3 = s_4 = -j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) - \gamma}$$

$$s_5 = s_6 = j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma} \quad s_7 = s_8 = -j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma}$$

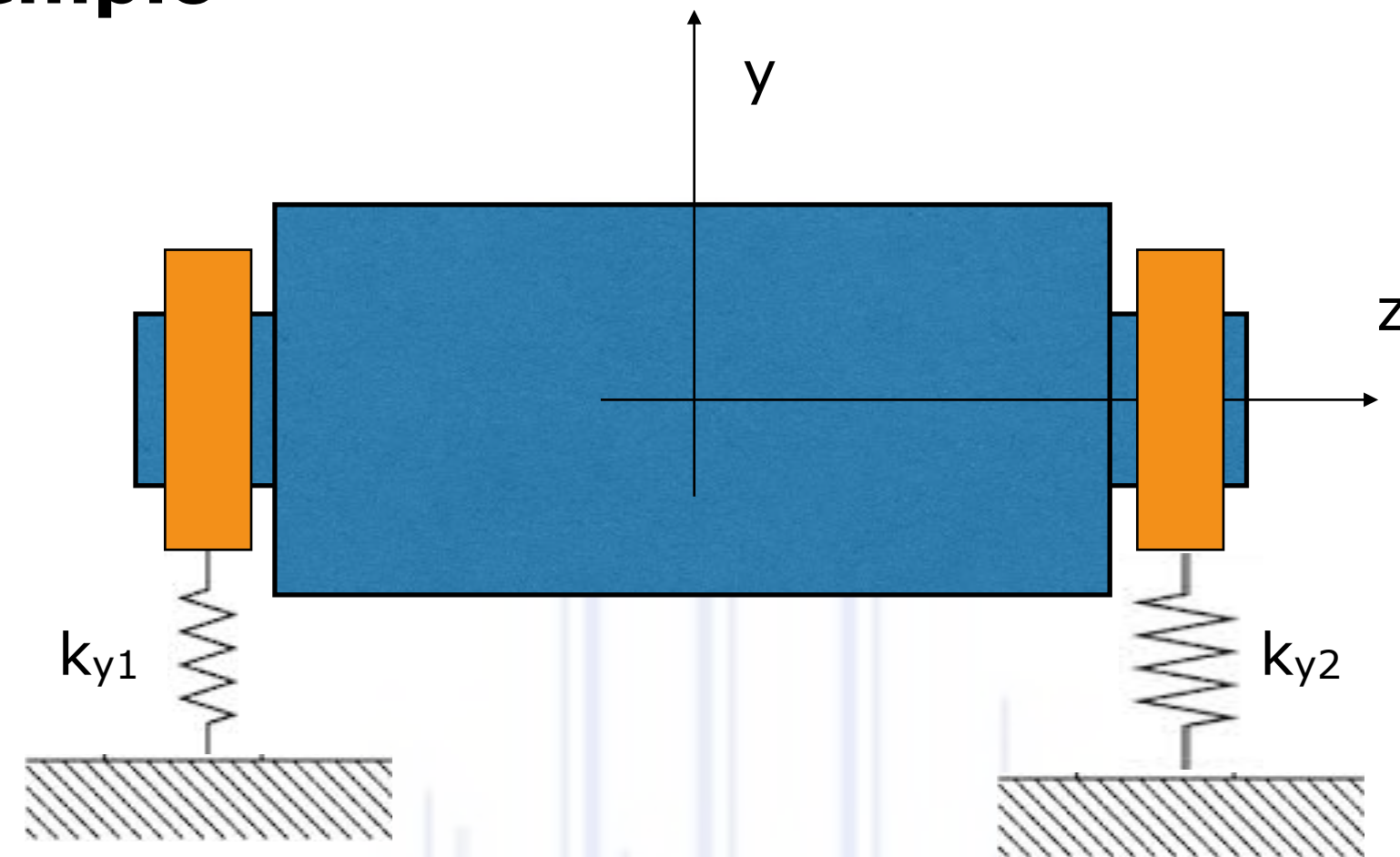
$$\omega_5 = \omega_6 = -j\sqrt{\left(\frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m}\right) + \gamma}$$

Analogamente al caso precedente, ci saranno modi di Bounce a Tilt, in questo caso traslazioni e rotazioni avverranno simultaneamente :

$$\left(\frac{X_0}{\Phi_0}\right)_{i=1,2} = -\frac{k_C}{(m\omega_i^2 + k_T)} = -\frac{(I_d\omega_i^2 + k_R)}{k_C}$$

$$\left(\frac{Y_0}{\Theta_0}\right)_{i=5,6} = \frac{k_C}{(m\omega_i^2 + k_T)} = \frac{(I_d\omega_i^2 + k_R)}{k_C}$$

## Esempio



### Rotore

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$

$k_{x2}=k_{y2}=1.1\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$



Calcolo proprietà elastiche:

Le proprietà inerziali restano uguali

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68\text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134\text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625\text{kgm}^2$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000\text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75\text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75\text{kNm}$$

Bisogna usare questa formula nelle sue declinazioni

$$s^2 = - \left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right)^2 + \frac{k_C^2}{mI_d}}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = 135.08 \text{ rad/s} \quad f_1 = f_2 = 21.50 \text{ Hz}$$

$$\omega_1 = \omega_2 = j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) - \gamma}$$

$$\omega_5 = \omega_6 = 225.21 \text{ rad/s} \quad f_5 = f_6 = 35.84 \text{ Hz}$$

$$\omega_5 = \omega_6 = -j \sqrt{\left( \frac{k_R}{2I_d} + \frac{k_T}{2m} \right) + \gamma}$$

che sono più alte del caso precedente, per la maggiore rigidezza!

Con questi valori si ricavano i rapporti di spostamento dei diversi GDL.  
Nel piano XZ

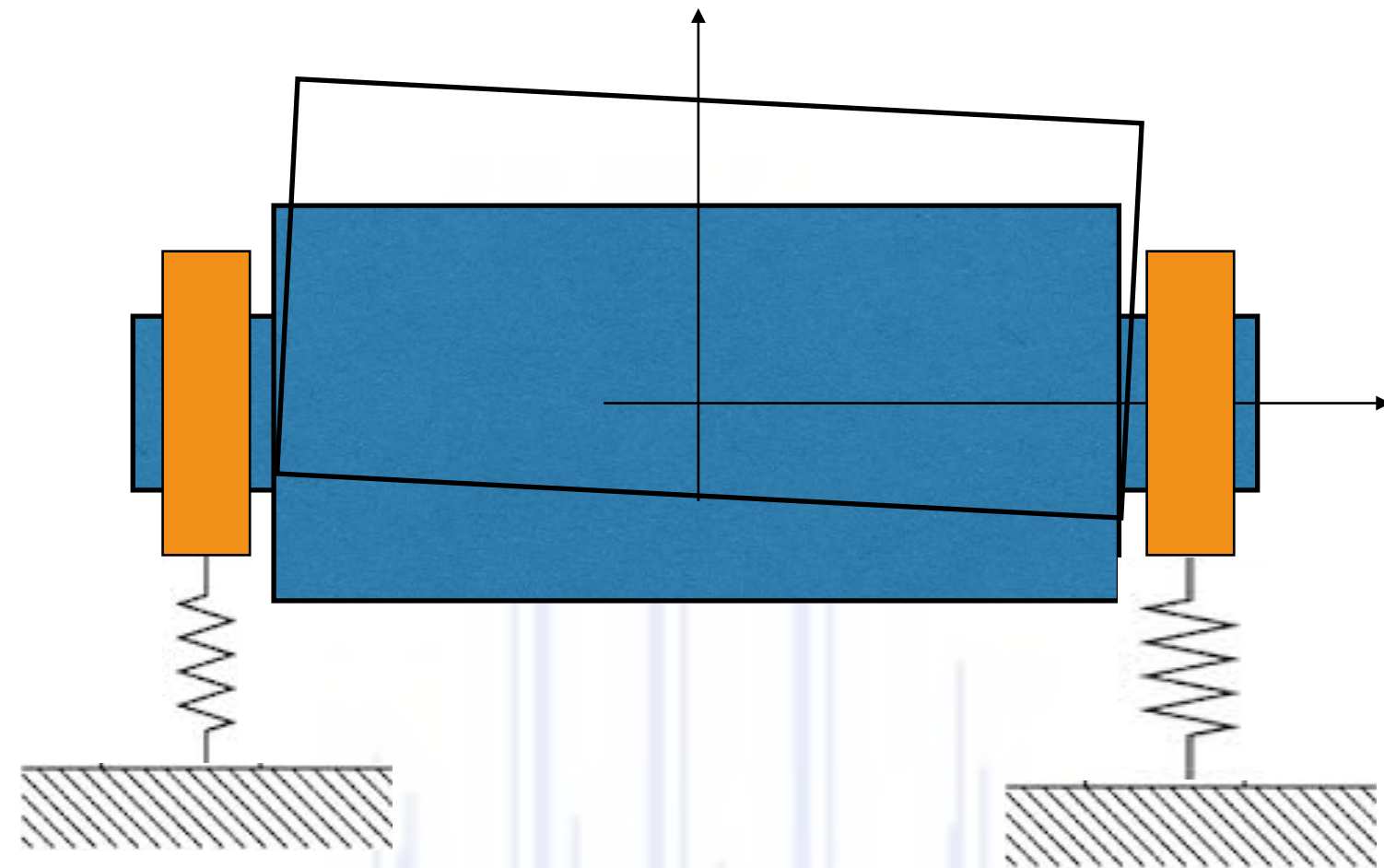
$$\text{modo1} \quad \left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=1} = -1.220$$

Con uno spostamento lineare  $X_0$  di 1 mm  
ruoterà di un angolo  $\Phi_0$  pari a  $-1.220 \times 10^{-3}$  rad

$$\text{modo2} \quad \left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=5} = 0.0191$$

Con uno spostamento lineare  $X_0$  di 1 mm  
ruoterà di un angolo  $\Phi_0$  pari a  $0.199 \times 10^{-3}$  rad

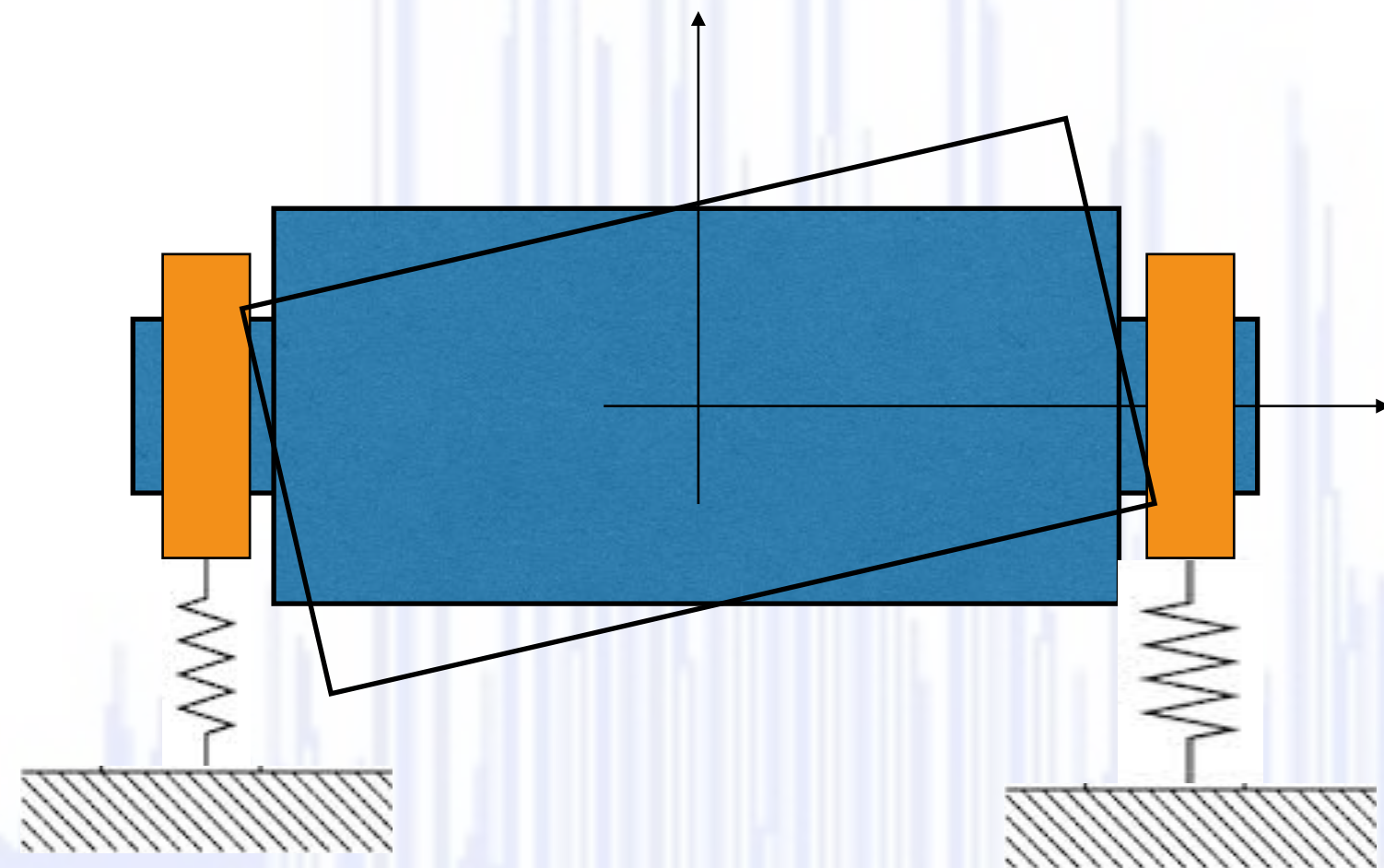
..analogamente nel piano YZ



$$f_1 = f_2 = 21.50Hz$$

$$\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=1} = -1.220$$

il rotore.. trasla e ruota simultaneamente!



$$f_5 = f_6 = 35.84Hz$$

$$\left( \frac{X_0}{\Phi_0} \right)_{i=5} = 0.0191$$

NB attenzione ai segni!  
NB si sta valutando la posizione del baricentro!

Caso 1.3 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, senza accoppiamento elastico..  $k_C = 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} + k_R\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + k_R\phi = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p\Omega \\ 0 & 0 & -I_p\Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{yT} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{yR} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le due prime equazioni sono disaccoppiate,  
i modi di Bounce saranno puramente traslatori nei piani XZ e YZ  
come nel caso 1.1

$$s_1 = s_2 = j\sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad s_3 = s_4 = -j\sqrt{\frac{k_T}{m}} \quad \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}}$$

Le seconde due equazioni sono accoppiate,  
con una soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases} \quad \text{si ottiene:} \quad \begin{cases} (I_d s^2 + k_r) \Theta_0 + I_p \Omega s \Phi_0 = 0 \\ -I_p \Omega s \Theta_0 + (I_d s^2 + k_r) \Phi_0 = 0 \end{cases}$$

Eliminando  $\Theta_0$  e  $\Phi_0$  si arriva a:

$$(I_d s^2 + k_R)^2 + (I_p \Omega s)^2 = 0$$

$$I_d s^2 + k_R = \pm j I_p \Omega s$$

portando a dx il termine con  $\Omega$ , e prendendo la radice quadrata

$$I_d s^2 \pm j I_p \Omega s + k_R = 0$$

2 equazioni caratteristiche in  $s^2$

$$s_{5,6} = j \left\{ \pm \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left( \frac{I_p \Omega}{2I_d} \right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} \right\} \quad s_{7,8} = -s_{5,6}$$

$$\omega_5 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} \quad \omega_6 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}}$$

Queste frequenze naturali dipendono da  $\Omega$  !!, se questa velocità tende a 0, si ritorna ai valori trovati al caso 1.1

Nel diagramma di Campbell le  $\omega_i$  non saranno più rette parallele all'asse delle frequenze!

Analogamente a quanto già visto si potranno calcolare i rapporti tra gli spostamenti angolari:

$$\left(\frac{\Theta_0}{\Phi_0}\right)_i = -\frac{I_p \Omega \omega_i}{(I_d \omega_i^2 + k_R)} = \frac{(I_d \omega_i^2 + k_R)}{I_p \Omega \omega_i}$$

la struttura di questa equazione è del tipo  $-\frac{A}{B} = \frac{B}{A}$

che prevede come soluzione solamente  $\frac{A}{B} = \pm j$

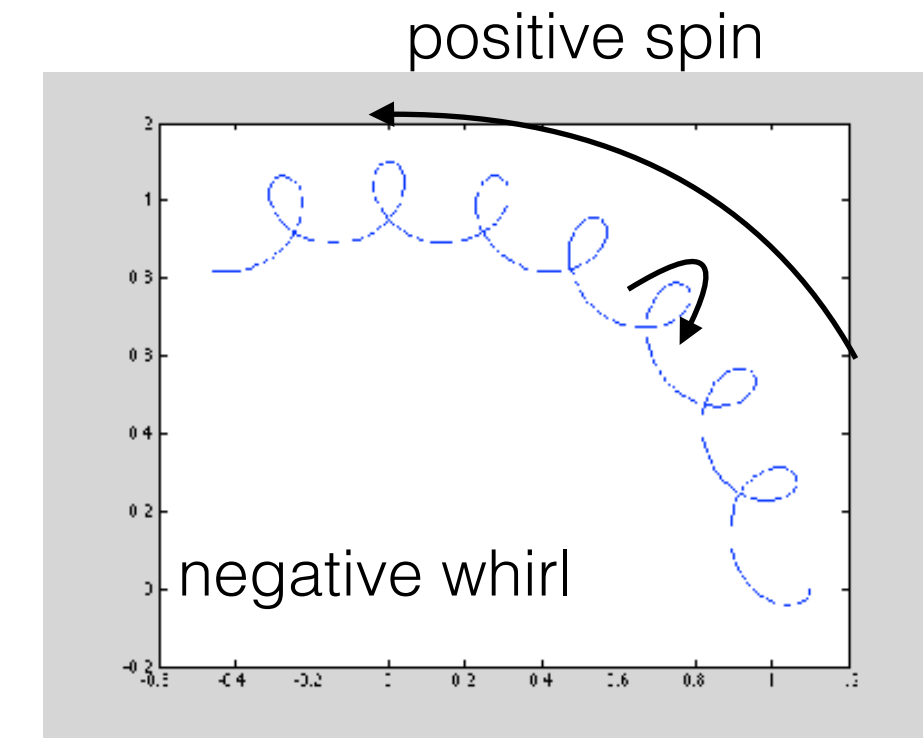
I due angoli saranno sfasati di 90 gradi.  
In funzione del segno uno sarà in anticipo o in ritardo rispetto all'altro.

Ricordando  $s_i^2 = -\omega_i^2$  si portano scrivere le seguenti relazioni:

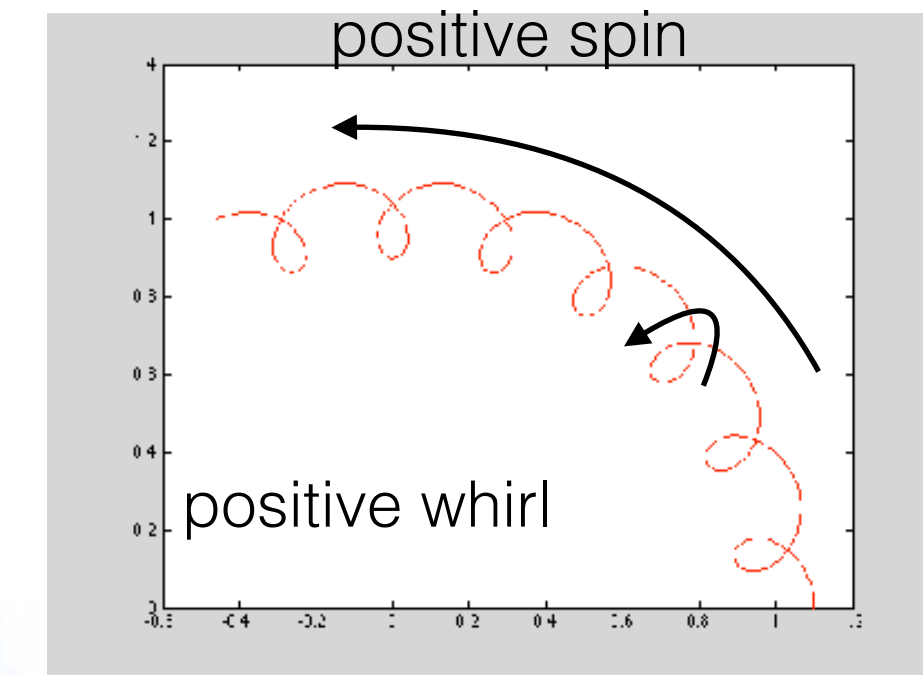
$$k_R > I_d \omega_i^2 \quad \left( \frac{\Theta_0}{\Phi_0} \right)_i = \begin{cases} -j \\ j \end{cases} \quad \begin{aligned} s_i &= j\omega_i \\ s_i &= -j\omega_i \end{aligned}$$

$$k_R < I_d \omega_i^2 \quad \left( \frac{\Theta_0}{\Phi_0} \right)_i = \begin{cases} j \\ -j \end{cases} \quad \begin{aligned} s_i &= -j\omega_i \\ s_i &= j\omega_i \end{aligned}$$

Backward  
Mode



Forward  
Mode



Prendendo  $\Phi_0=j$  nel tempo si possono scrivere le seguenti relazioni:

$$k_R > I_d \omega_i^2 \quad \begin{Bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} e^{j\omega_i t} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} e^{-j\omega_i t} = 2 \begin{Bmatrix} \cos\omega_i t \\ -\sin\omega_i t \end{Bmatrix}$$

moto circolare, orario..  
spin anti orario > Backward Mode

$$k_R < I_d \omega_i^2 \quad \begin{Bmatrix} \Theta \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -j \end{Bmatrix} e^{j\omega_i t} + \begin{Bmatrix} 1 \\ j \end{Bmatrix} e^{-j\omega_i t} = 2 \begin{Bmatrix} \cos\omega_i t \\ \sin\omega_i t \end{Bmatrix}$$

moto circolare, anti orario..  
spin anti orario > Forward Mode

Caso 1.4 rotore rigido, in moto con velocità  $\Omega$ , vincoli isotropi, con accoppiamento elastico..  $k_C \neq 0$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k_T x + k_C \phi = 0 \\ m\ddot{y} + k_T y + k_C \theta = 0 \\ I_d \ddot{\theta} + I_p \Omega \dot{\phi} - k_C y + k_R \theta = 0 \\ I_d \ddot{\phi} - I_p \Omega \dot{\theta} + k_C x + k_R \phi = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{xT} & 0 & 0 & k_{xC} \\ 0 & k_{yT} & -k_{yC} & 0 \\ 0 & -k_{yC} & k_{yR} & 0 \\ k_{xC} & 0 & 0 & k_{xR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Con una generica  
soluzione di primo tentativo

$$\begin{cases} x = X_0 e^{st} \\ y = Y_0 e^{st} \\ \theta = \Theta_0 e^{st} \\ \phi = \Phi_0 e^{st} \end{cases}$$

si scrivono le  
usuali equazioni  
del moto in s:

$$\begin{cases} (ms^2 + k_T)X_0 + k_C \Phi_0 = 0 \\ (ms^2 + k_T)Y_0 - k_C \Theta_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Theta_0 + I_p \Omega s \Phi_0 - k_C Y_0 = 0 \\ (I_d s^2 + k_R)\Phi_0 - I_p \Omega s \Theta_0 + k_C X_0 = 0 \end{cases}$$

..sistema di equazioni fortemente accoppiate!

Da 1 e 2 si estraggono  $\Phi_0$  e  $\theta_0$  e si sostituiscono in 3 e 4

$$\begin{cases} \Phi_0 = -\frac{(ms^2 + k_T)}{k_C} X_0 \\ \Theta_0 = \frac{(ms^2 + k_T)}{k_C} Y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} (I_d s^2 + k_R)(ms^2 + k_T) Y_0 - I_p \Omega s (ms^2 + k_T) X_0 - k_C^2 Y_0 = 0 \\ -(I_d s^2 + k_R)(ms^2 + k_T) X_0 + I_p \Omega s (ms^2 + k_T) Y_0 + k_C^2 X_0 = 0 \end{cases} \quad \blacklozenge$$

Da 3 e 4 si elimina  $X_0$  e  $Y_0$  per ottenere l'equazione caratteristica in  $s^4$ :

$$\left\{ (ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 \right\}^2 + \left\{ I_p \Omega s (I_d s^2 + k_R) \right\}^2 = 0 \quad \text{portando a dx il termine con } \Omega, \text{ e prendendo la radice quadrata}$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 + k_R) - k_C^2 = \mp j I_p \Omega s (I_d s^2 + k_R)$$

$$(ms^2 + k_T)(I_d s^2 \mp j I_p \Omega s + k_R) - k_C^2 = 0$$

sviluppando i prodotti e riarrangiando i termini si ottiene l'equazione caratteristica in  $s^4$

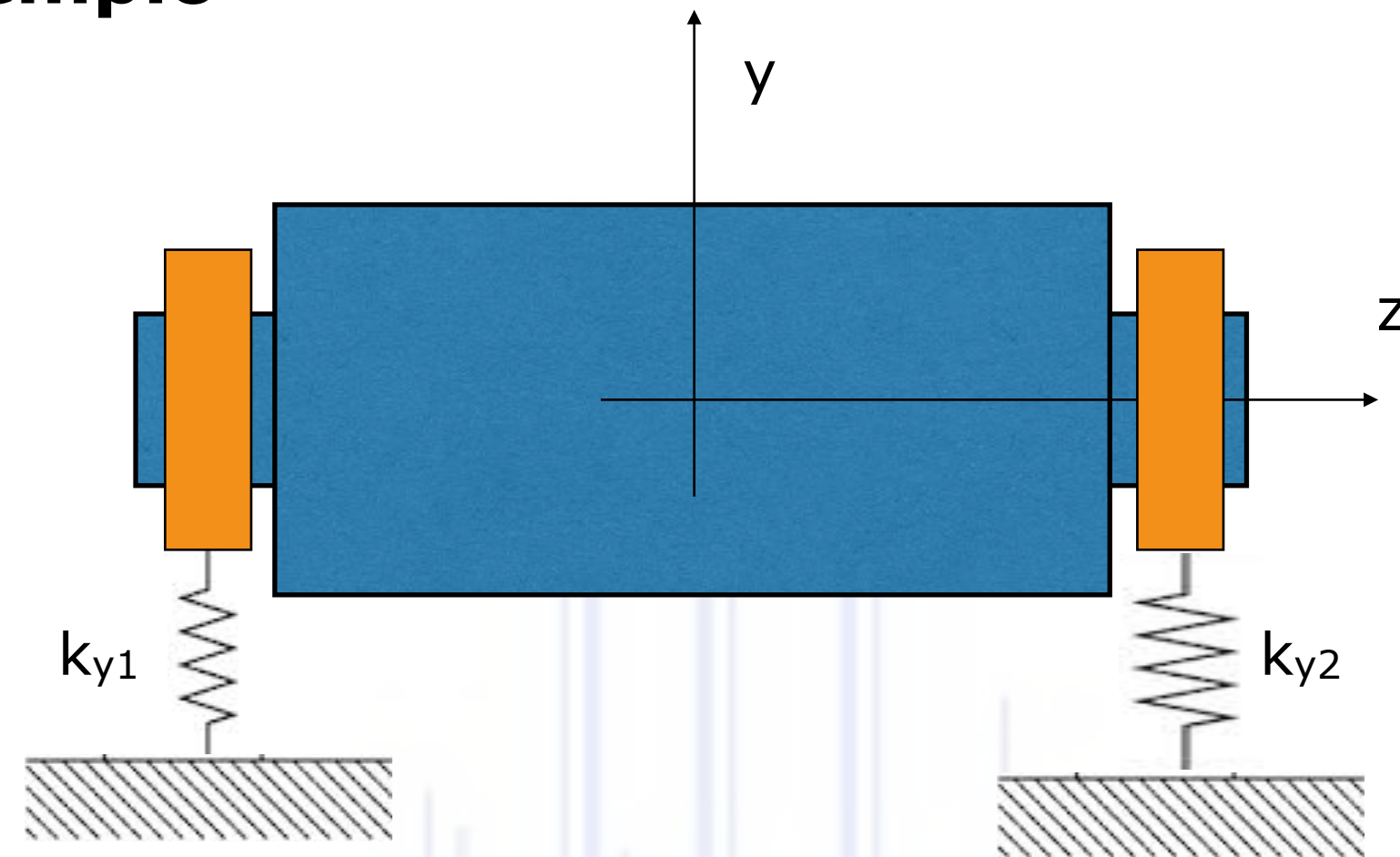
$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_o}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_c^2}{m I_d} = 0$$

dipendenza da velocità di spin

solitamente  $> 0$

=> radici immaginarie, a due a due complesse coniugate!...

## Esempio



### Rotore senza accoppiamento elastico

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_x=k_y=1\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$

### Rotore con accoppiamento elastico

lunghezza  $L=0.5\text{m}$

raggio  $r=0.2\text{m}$

$\rho=7810\text{kg/m}^3$

$k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$

$k_{x2}=k_{y2}=1.3\text{MN/m}$

$a=b=0.25\text{m}$

In moto a 4000 rpm  $\Omega = rpm \frac{2\pi}{60} = 418.88 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Le proprietà inerziali restano uguali

$$m = \frac{\rho \pi D^2 l}{4} = 122.68 \text{kg}$$

$$I_p = \frac{m D^2}{8} = 0.6134 \text{kgm}^2$$

$$I_d = \frac{I_p}{2} + \frac{m L^2}{12} = 2.8625 \text{kgm}^2$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 0 \text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 125 \text{kNm}$$

$$k_T = k_{x1} + k_{x2} = 2000 \text{kN/m}$$

$$k_C = -a k_{x1} + b k_{x2} = 75 \text{kN}$$

$$k_R = a^2 k_{x1} + b^2 k_{x2} = 143.75 \text{kNm}$$

Direttamente dalle formule viste

Senza accoppiamento

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{k_T}{m}} = 127.68 \text{ rad/s}$$

$$\omega_5 = -\frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 168.85 \text{ rad/s}$$

$$\omega_6 = \frac{I_p \Omega}{2I_d} + \sqrt{\left(\frac{I_p \Omega}{2I_d}\right)^2 + \frac{k_R}{I_d}} = 258.61 \text{ rad/s}$$

$$\begin{cases} f_1 = f_2 = 20.32 \text{ Hz} \\ f_5 = 26.87 \text{ Hz} \\ f_6 = 41.16 \text{ Hz} \end{cases}$$

Con accoppiamento

$$s^4 \mp j \left( \frac{I_p}{I_d} \right) \Omega s^3 + \left( \frac{k_R}{I_d} + \frac{k_T}{m} \right) s^2 \mp j \left( \frac{k_T I_o}{m I_d} \right) \Omega s + \frac{k_R k_T - k_c^2}{m I_d} = 0$$

$$s^4 \mp j 89.76 s^3 + 68966 s^2 \mp 1682800 s + 925.48 \times 10^6 = 0$$

$$\begin{cases} f_1 = 21.33 \text{ Hz} \\ f_2 = 21.58 \text{ Hz} \\ f_5 = 29.58 \text{ Hz} \\ f_6 = 43.62 \text{ Hz} \end{cases}$$

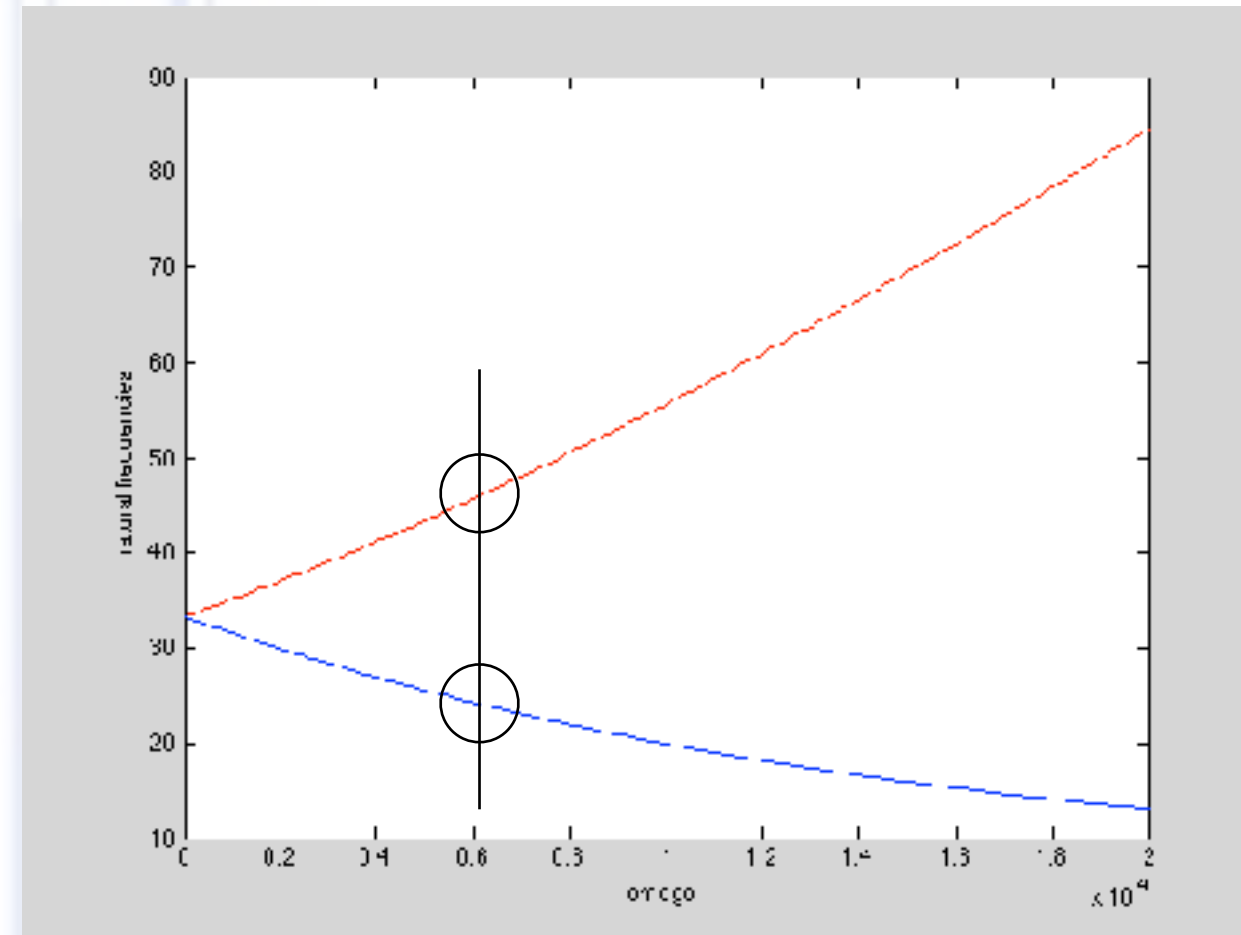
backward mode  
forward mode

sostituendo i valori delle frequenza naturali in



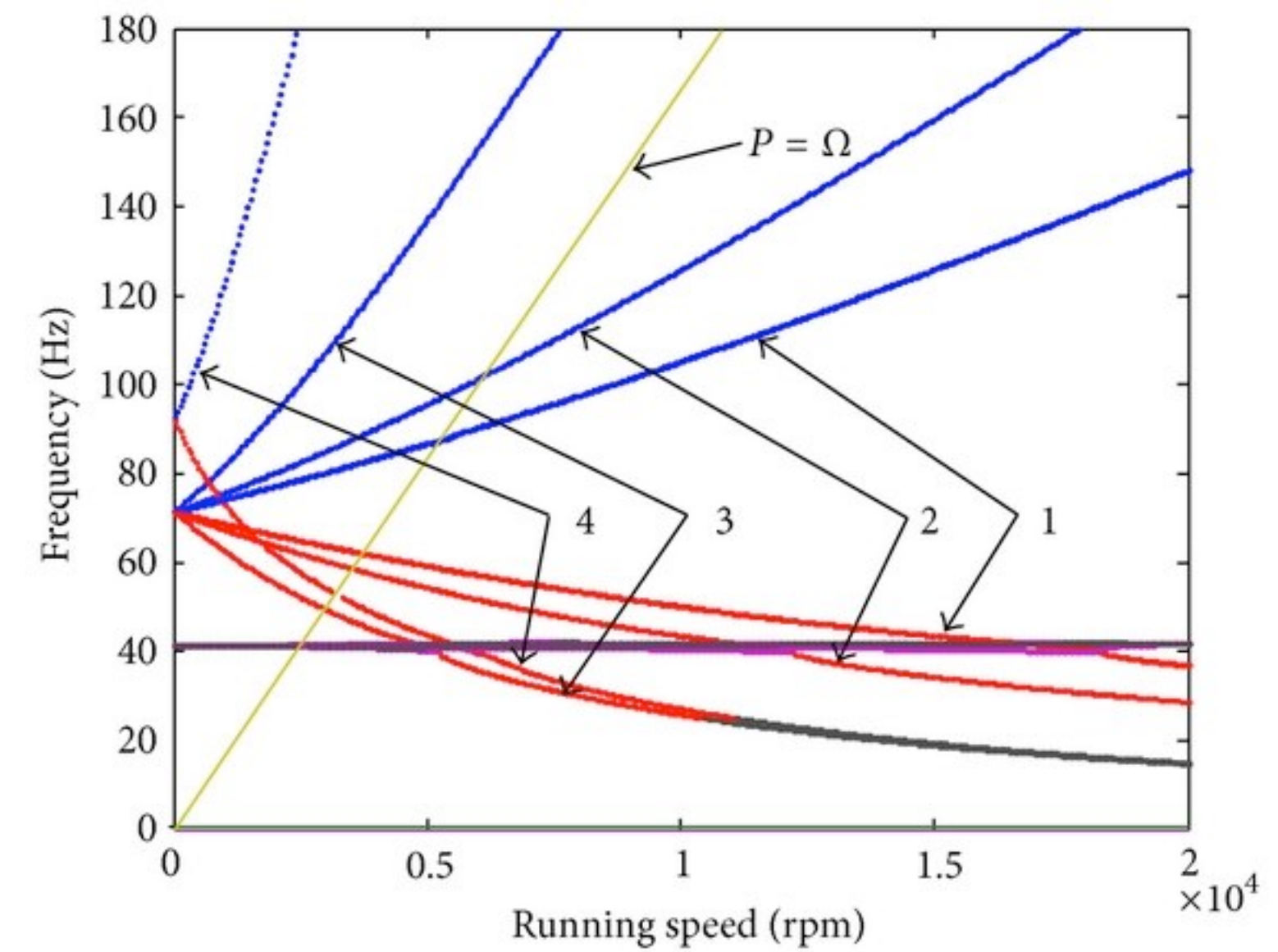
Dal momento che le frequenze naturali dipendono da  $\Omega$   
è possibile lottare la frazione in funzione della frequenza di spin

Variazione di  $\omega_3$   $\omega_4$   
tra 0 e 2000 rad/s



Forward Whirl

Backward Whirl



..al variare del rapporto  $I_p/I_d$

1 > 0.3

2 > 0.5

3 > 1.17

4 > 2

## Caso 2 Rotore rigido su supporti anisotropi

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_p \Omega \\ 0 & 0 & -I_p \Omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{x1} + k_{x2} & 0 & 0 & -ak_{x1} + bk_{x2} \\ 0 & k_{y1} + k_{y2} & ak_{y1} - bk_{y2} & 0 \\ 0 & ak_{y1} - bk_{y2} & a^2k_{y1} + b^2k_{y2} & 0 \\ -ak_{x1} + bk_{x2} & 0 & 0 & a^2k_{x1} + b^2k_{x2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vista alla presenza della matrice dei momenti giroscopici, si può pensare di riscrivere le equazioni in forma canonica :

$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + \Omega [\mathbf{G}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$\begin{bmatrix} \Omega \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}$$

la solita forma di un problema agli autovalori/autovettori

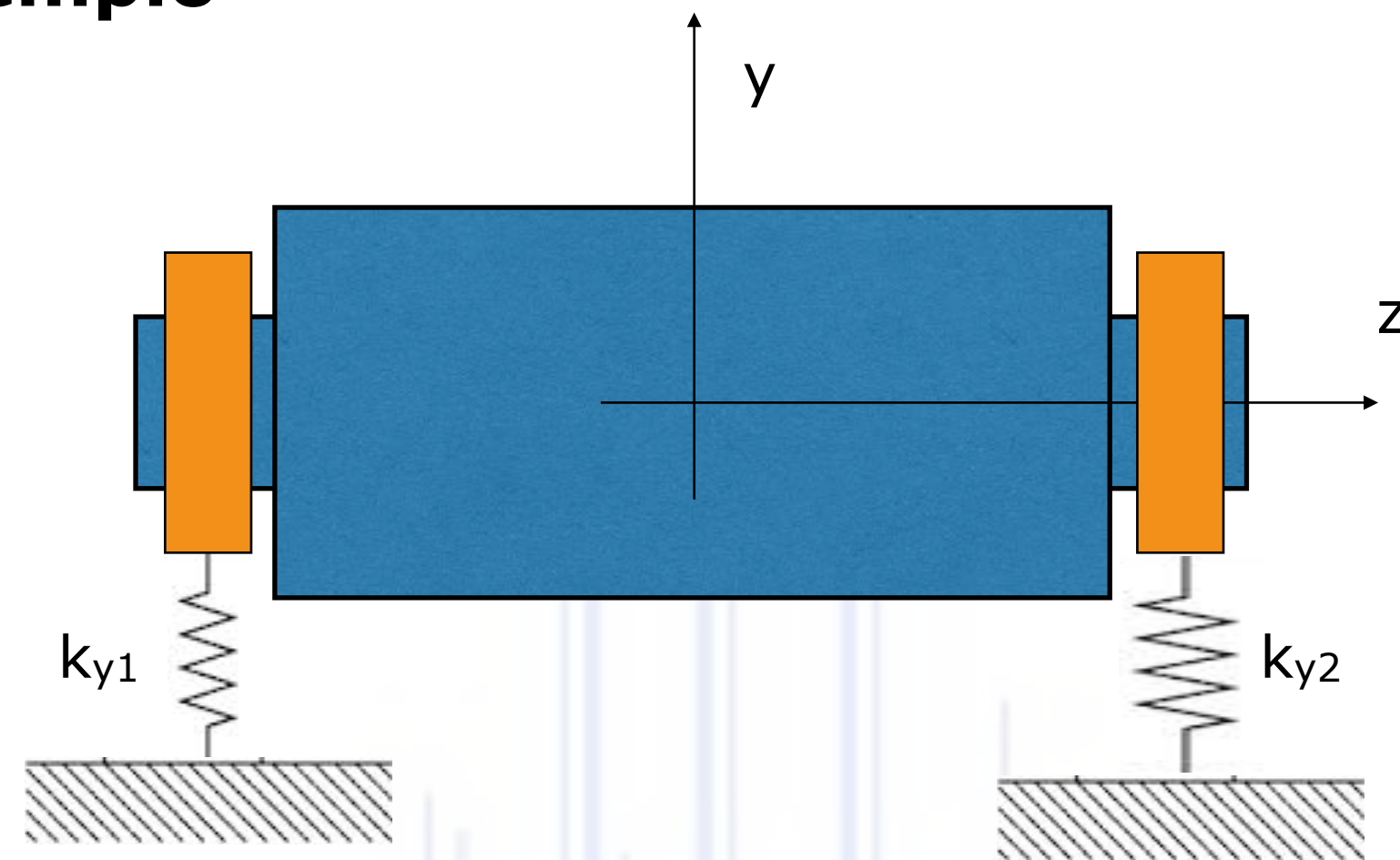
$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}_0 e^{st} \quad s\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}_0 = -\mathbf{B}\mathbf{X}_0$$

trovando 8 radici, a due a due complesse coniugate

$$\begin{cases} s_{i=1,4} = +j\omega_{i=1,4} \\ s_{i=5,8} = -j\omega_{i=1,4} \end{cases}$$

## Esempio



**Rotore in moto (@4000 rpm)  
con supporti isotropi  
e accoppiamento elastico**  
lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_{x1}=k_{y1}=1\text{MN/m}$   
 $k_{x2}=k_{y2}=1\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

**Rotore stazionario e in  
moto (@4000 @800rpm)  
con supporti anisotropi  
e accoppiamento elastico**  
lunghezza  $L=0.5\text{m}$   
raggio  $r=0.2\text{m}$   
 $\rho=7810\text{kg/m}^3$   
 $k_{x1}=1\text{MN/m}$      $k_{y1}=1.1\text{MN/m}$   
 $k_{x2}=1.3\text{MN/m}$      $k_{y2}=1.4\text{MN/m}$   
 $a=b=0.25\text{m}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 122.68 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122.68 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.8626 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2.8625 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6134 \\ 0 & 0 & -0.6134 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = 10^3 \begin{bmatrix} 2.300 & 0 & 0 & 75 \\ 0 & 2.300 & -75 & 0 \\ 0 & -75 & 143.75 & 0 \\ 75 & 0 & 0 & 173.75 \end{bmatrix}$$

Con un solutore numerico, è possibile risolvere le equazioni partendo dalla forma canonica  $s\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}}_0 = -\mathbf{B}\mathbf{X}_0$

ottenendo nel caso dei supporti isotropi

$$\begin{cases} s_1 = j134.0rad/s \\ s_2 = j135.6rad/s \\ s_5 = j185.9rad/s \\ s_6 = j274.9rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.33Hz \\ f_2 = 21.58Hz \\ f_5 = 29.58Hz \\ f_6 = 43.62Hz \end{cases}$$

ed i loro valori coniugati..

$$\begin{cases} s_3 = -j134.0rad/s \\ s_4 = -j135.6rad/s \\ s_7 = -j185.9rad/s \\ s_8 = -j274.9rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_3 = -21.33Hz \\ f_4 = -21.58Hz \\ f_7 = -29.58Hz \\ f_8 = -43.62Hz \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @0rpm

$$\begin{cases} s_1 = j135.08rad/s \\ s_2 = j141.13rad/s \\ s_5 = j225.21rad/s \\ s_6 = j234.62rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.50Hz \\ f_2 = 22.46Hz \\ f_5 = 35.84Hz \\ f_6 = 37.34Hz \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_3 = -j\dots rad/s \\ s_4 = -j\dots rad/s \\ s_7 = -j\dots rad/s \\ s_8 = -j\dots rad/s \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @4000rpm

$$\begin{cases} s_1 = j134.74rad/s \\ s_2 = j140.94rad/s \\ s_5 = j190.15rad/s \\ s_6 = j278.94rad/s \end{cases} \quad \begin{cases} f_1 = 21.44Hz \\ f_2 = 22.43Hz \\ f_5 = 30.26Hz \\ f_6 = 44.40Hz \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_3 = -j\dots rad/s \\ s_4 = -j\dots rad/s \\ s_7 = -j\dots rad/s \\ s_8 = -j\dots rad/s \end{cases}$$

nel caso dei supporti anisotropi @8000rpm

$$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = j132.78rad/s \\ s_2 = j140.16rad/s \\ s_5 = j161.05rad/s \\ s_6 = j336.07rad/s \end{array} \right.$$
$$\left\{ \begin{array}{l} f_1 = 21.13Hz \\ f_2 = 22.30Hz \\ f_5 = 25.63Hz \\ f_6 = 53.49Hz \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s_3 = -j \dots rad/s \\ s_4 = -j \dots rad/s \\ s_7 = -j \dots rad/s \\ s_8 = -j \dots rad/s \end{array} \right.$$

Si osservi come al variare della frequenza di spin, cambino i valori delle frequenza naturali abbassandosi nel caso di modi backward, alzandosi nel caso di modi forward!

| rpm  | f1    | f2    | f5    | f6    |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 0    | 21.50 | 22.46 | 35.48 | 37.34 |
| 4000 | 21.44 | 22.43 | 30.26 | 44.40 |
| 8000 | 21.13 | 22.30 | 25.63 | 53.49 |

Utilizzando i valori della frequenze naturali è possibile calcolare le forme modali nelle diverse situazioni.

Finora sono stati analizzati supporti esclusivamente elastici,  
ma cosa accade se si aggiunge lo smorzamento?

Le forze agenti sul rotore saranno:

$$\begin{cases} f_{x1} = c_{x1}(\dot{x} - a\dot{\phi}) + k_{x1}(x - a\phi) \\ f_{x2} = c_{x2}(\dot{x} + b\dot{\phi}) + k_{x2}(x + b\phi) \\ f_{y1} = c_{y1}(\dot{y} + a\dot{\theta}) + k_{y1}(y + a\theta) \\ f_{y2} = c_{y2}(\dot{y} - b\dot{\theta}) + k_{y1}(y - b\theta) \end{cases}$$

Con analoghe semplificazioni per gli smorzamenti

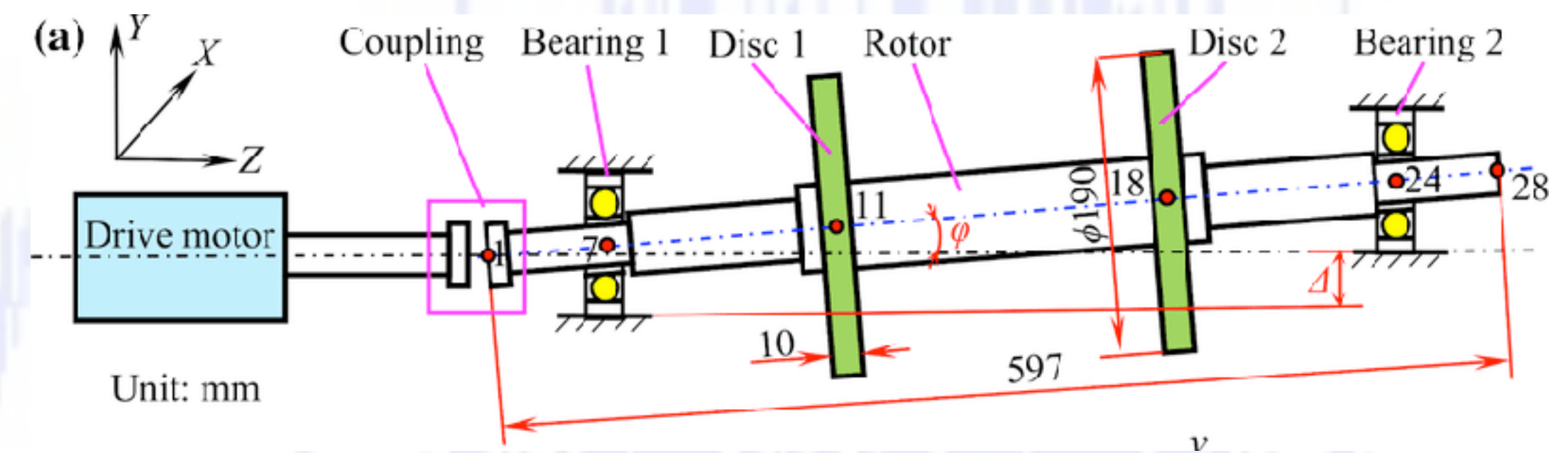
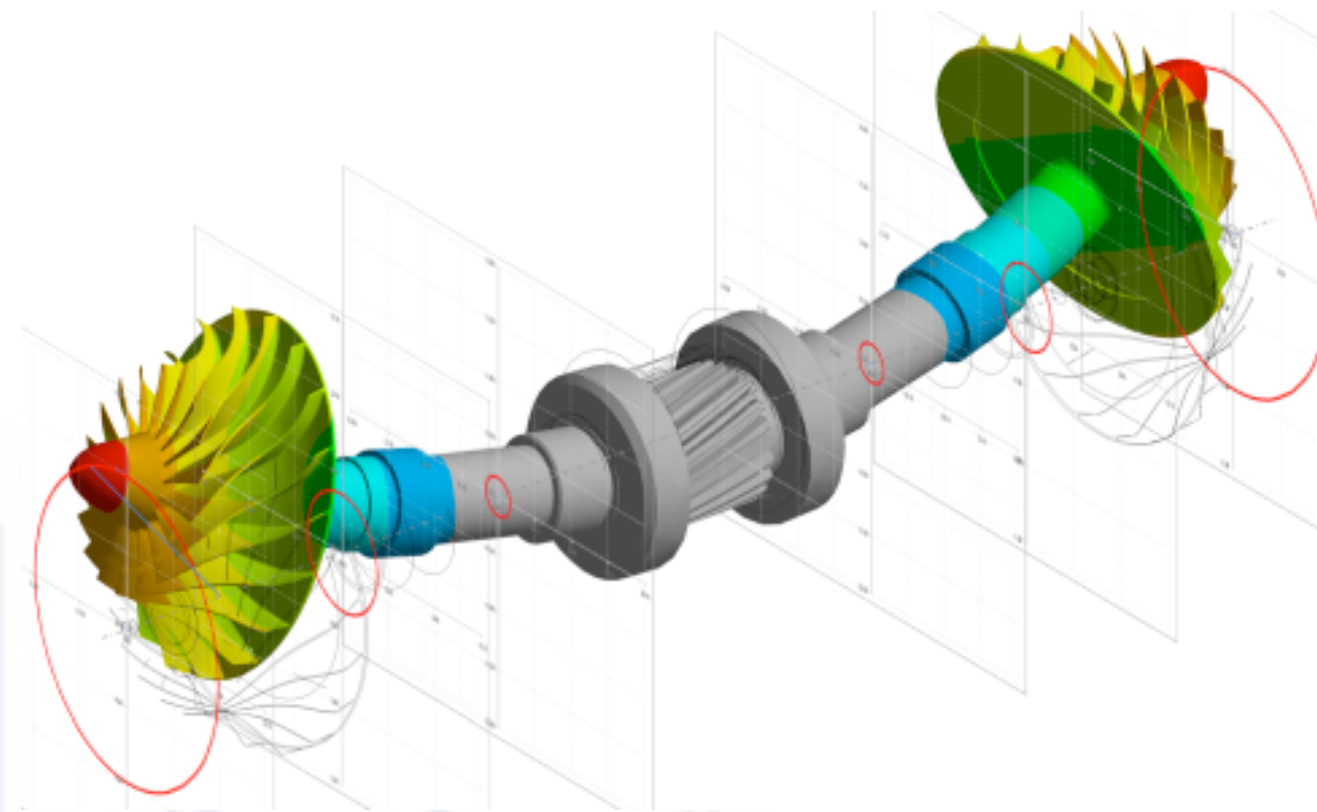
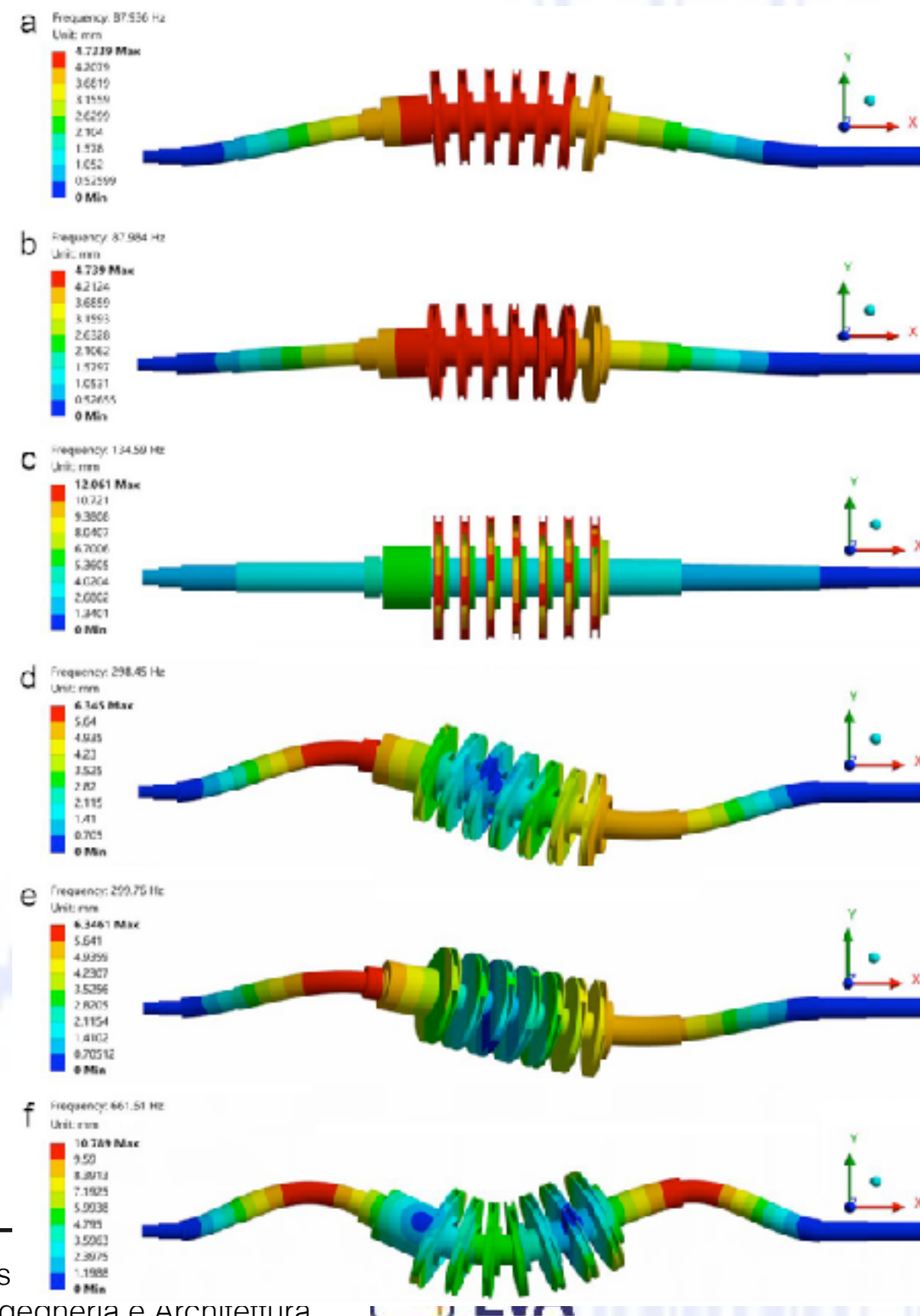
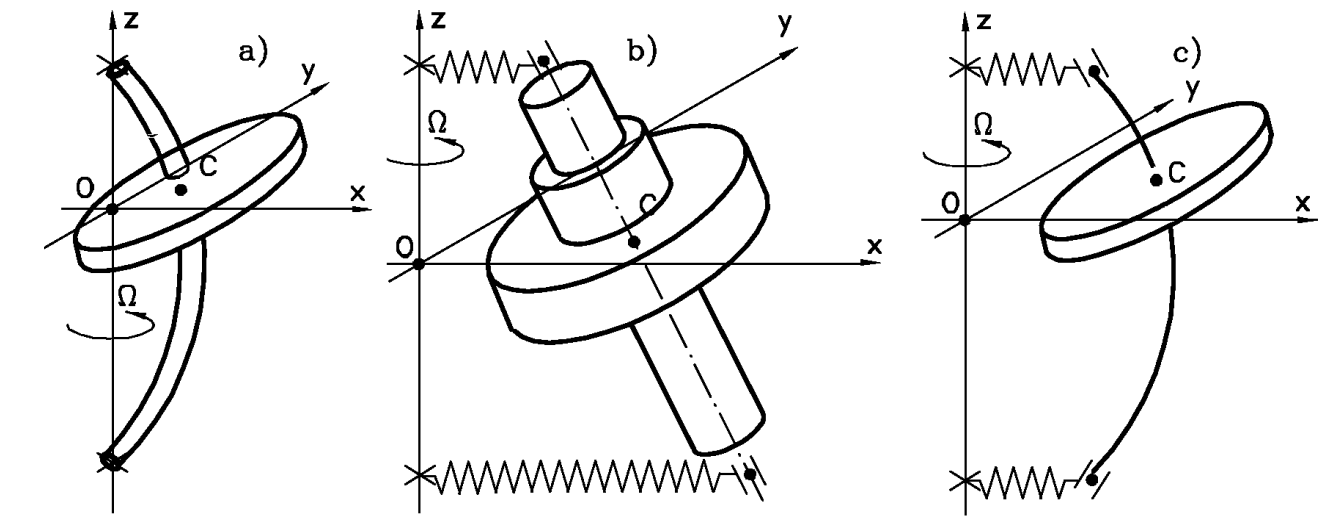
$$\begin{cases} c_{xT} = c_{x1} + c_{x2} & c_{yT} = c_{y1} + c_{y2} \\ c_{xC} = -ac_{x1} + bc_{x2} & c_{yC} = -ac_{y1} + bc_{y2} \\ c_{xR} = a^2c_{x1} + b^2c_{x2} & c_{yR} = a^2c_{y1} + b^2c_{y2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_{xT}\dot{x} + c_{xC}\dot{\phi} + k_{xT}x + k_{xC}\phi = 0 \\ m\ddot{y} + c_{yT}\dot{y} - c_{yC}\dot{\theta} + k_{yT}y - k_{yC}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\theta} + I_p\Omega\dot{\phi} - c_{yC}\dot{y} + c_{yR}\dot{\theta} - k_{yC}y + k_{yR}\theta = 0 \\ I_d\ddot{\phi} - I_p\Omega\dot{\theta} + c_{xC}\dot{x} + c_{xR}\dot{\phi} + k_{xC}x + k_{xR}\phi = 0 \end{cases}$$

..da qui in poi sapete fare..

## Rotori flessibili

Oltre all'analisi della dinamica dei rotor rigidi su supporti flessibili, diventa necessario saper determinare il comportamento dei rotor flessibili (su vincoli rigidi o flessibili) per esempio quando le dimensioni (sviluppo assiale) diventano importanti o quando il numero di volani cresce



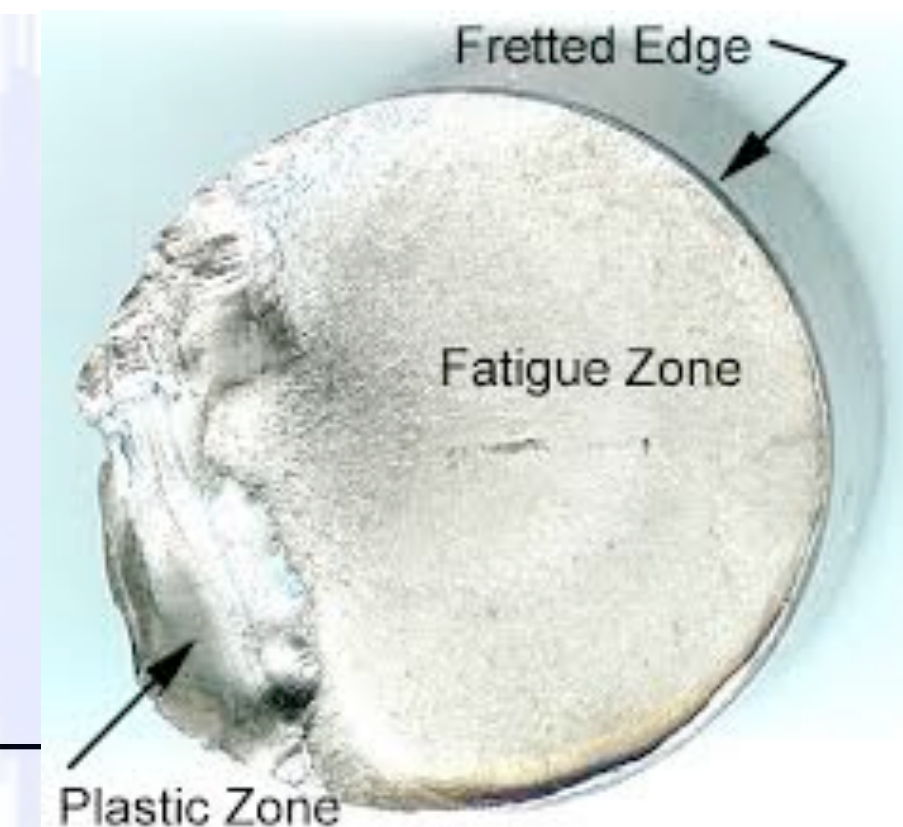
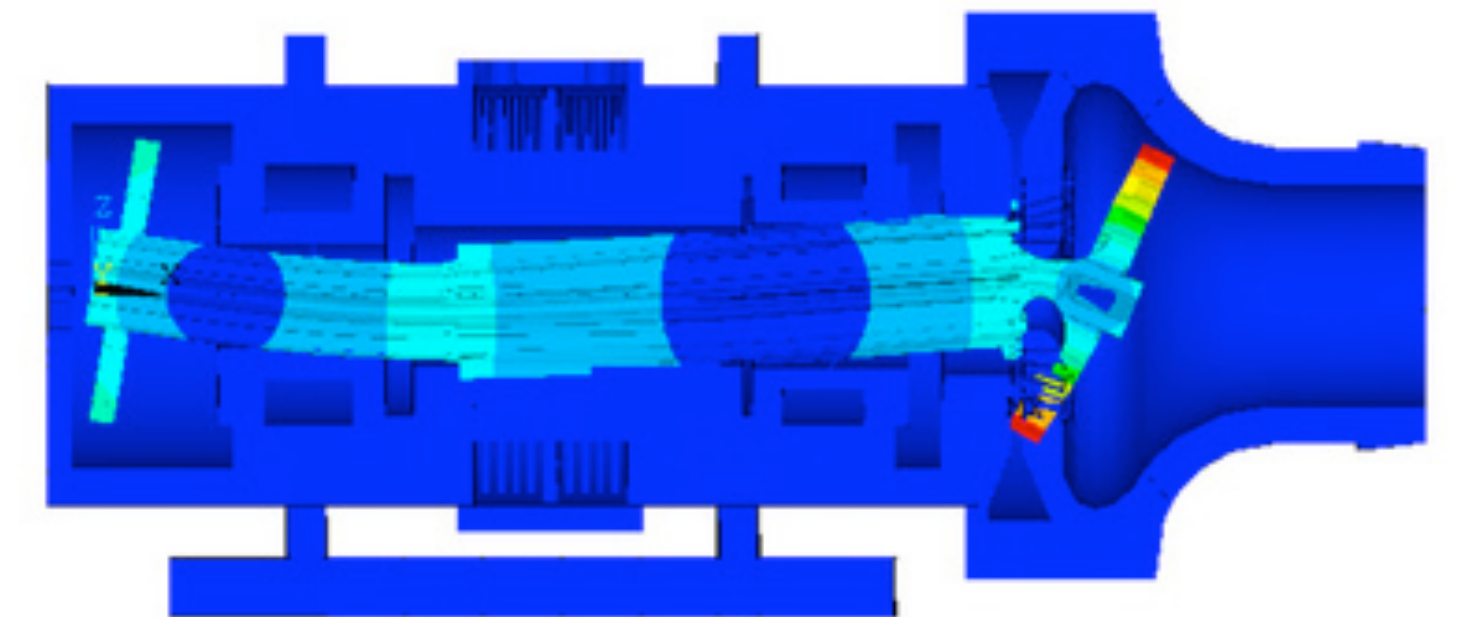
In questi casi risulta difficile analizzare il sistema con equazioni differenziali come visto nel caso dei rotori rigidi!  
Si necessita di soluzioni numeriche applicate a sistemi che sono stati "discretizzati".

La discretizzazione deve tener conto

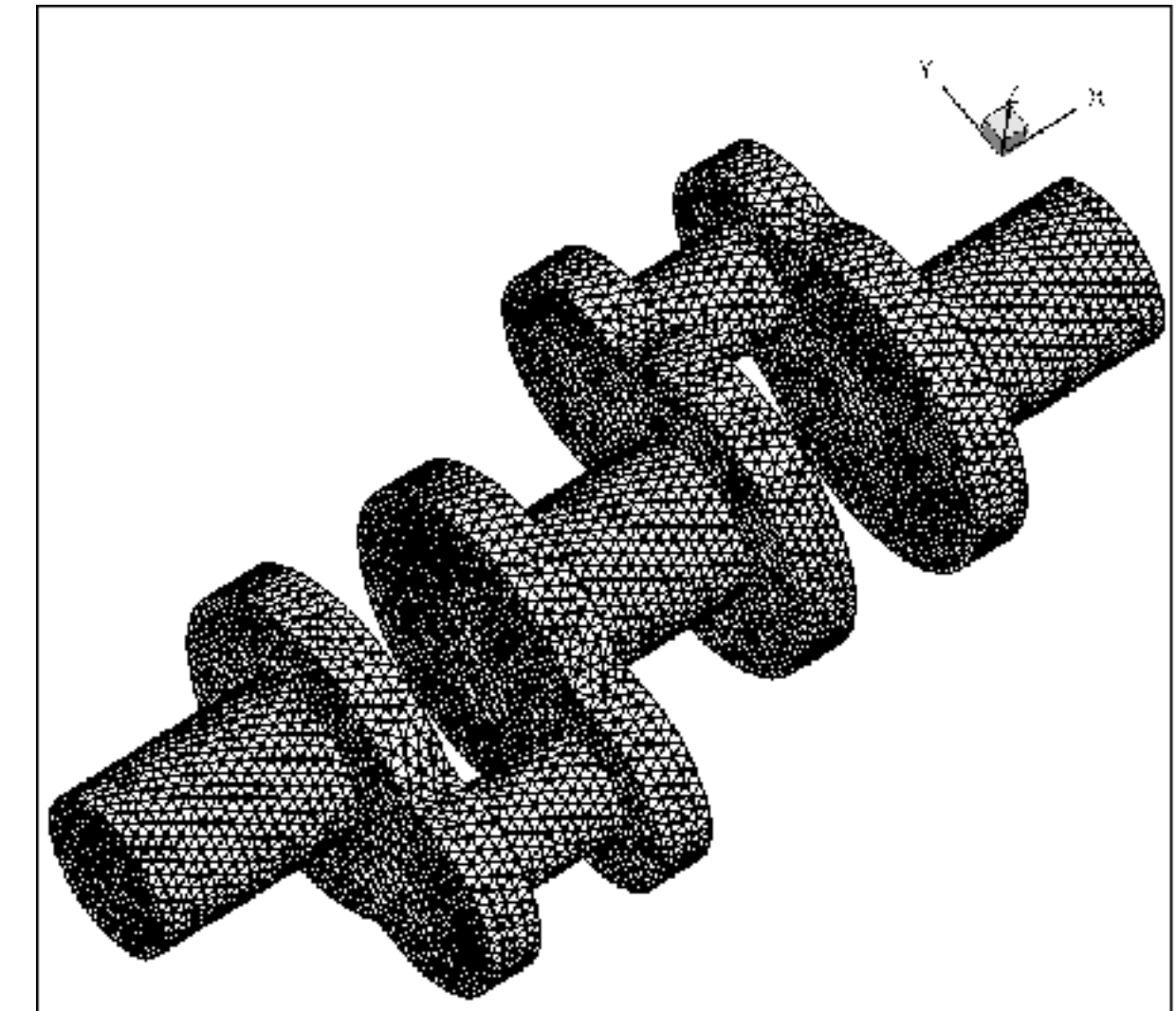
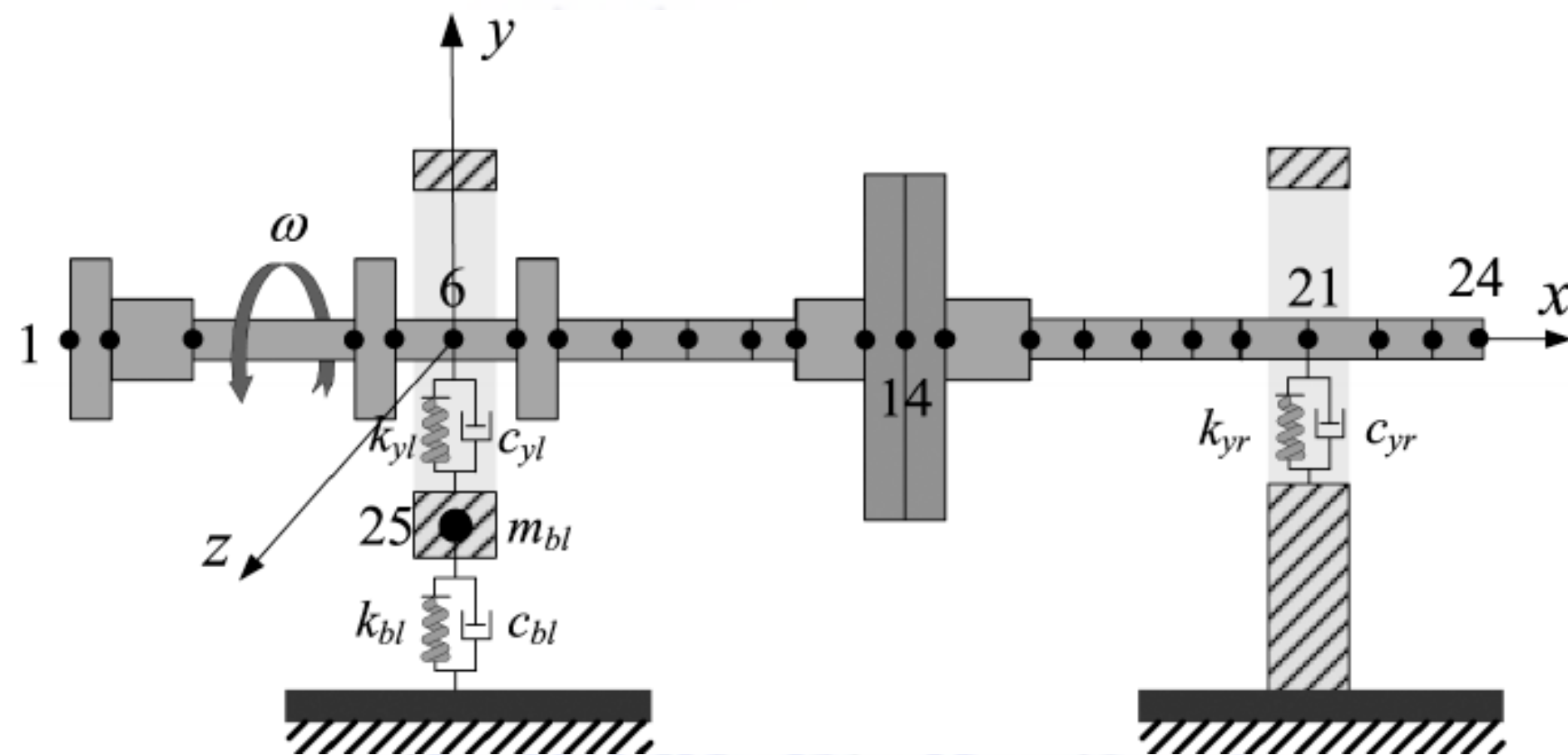
- delle caratteristiche del rotore (distribuzione di massa, di rigidità..)
- delle caratteristiche dei vincoli (caratteristiche di rigidità, smorzamento, iso- aniso-tropia..)
- della velocità del rotore
- dei carichi esterni
- ..

Il design risultante deve far sì che il rotore

- funzioni lontano dalle eccitazioni presenti nel sistema
- non si deformi in maniera tale da generare contatti tra rotore e statore
- abbia sollecitazioni tali da resistere per la vita utile richiesta
- ..



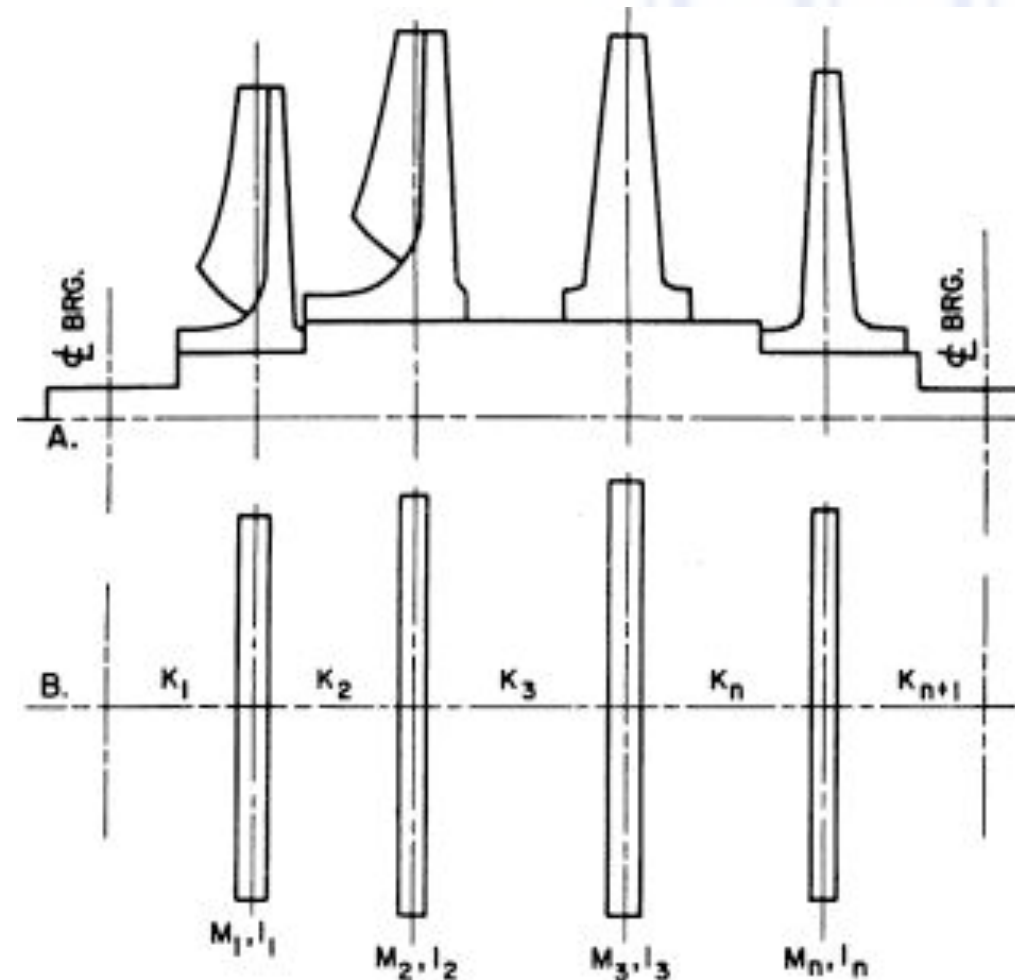
La discretizzazione potrà esser fatta considerando un numero limitato di elementi concentrati (MDOF) o tramite un'analisi FEM in funzione del tipo e precisione dei risultati richiesti



Nel caso MDOF si può ipotizzare che ogni nodo abbia 4 GDL (2 traslazioni, due rotazioni, nei due piani coordinati) se si considera solo la deformata flessione 6 GDL se interessano anche le deformate torsionali e assiali

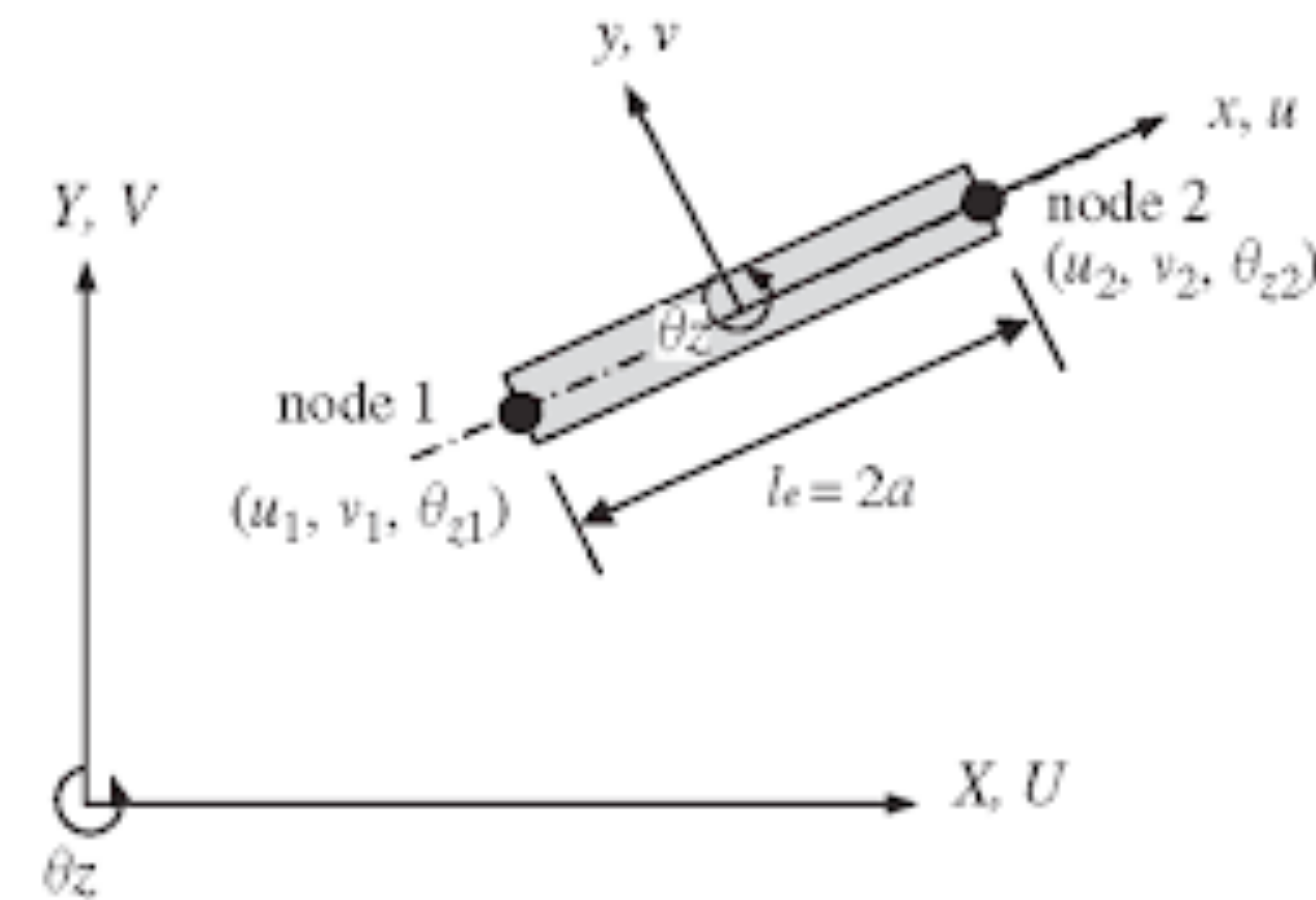
Gli elementi costitutivi del sistema da considerare saranno:

I **volani**, caratterizzati da massa, momenti d'inerzia ( $I_p$  e  $I_d$ ), matrici dei momenti giroscopici



Per geometrie complesse il tensore d'inerzia si calcola tramite codici CAD

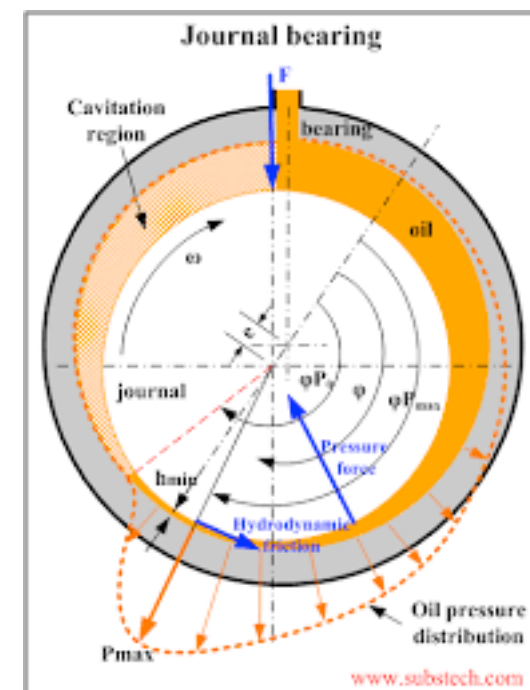
le **sezioni di albero**, tra i diversi volani caratterizzati da massa, e rigidezze (flessionali e torsionali)



In funzione dell'analisi richiesta si potranno utilizzare diversi modelli di deformazione (Eulero, Bernoulli, Timoshenko..) che includono o meno effetti relativi al taglio alle coppie esterne, alle variazioni di sezione..

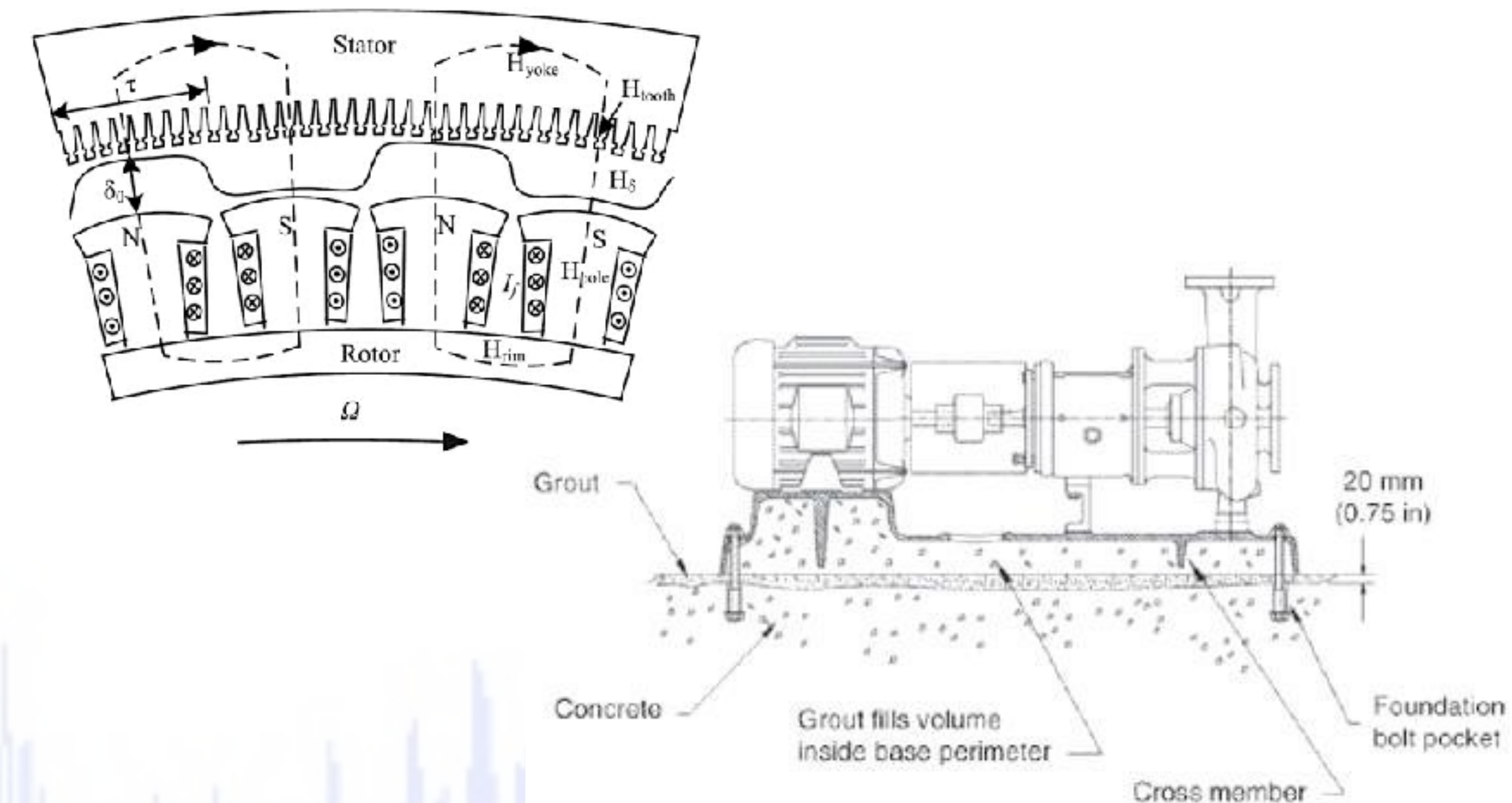
i **cuscinetti**, le **tenute**,  
o in generale gli elementi che  
generano interazioni tra rotore e statore

le **forze interne** ed **esterne**,  
generate durante i funzionamento  
che interagiscono con il rotore  
lo statore e le fondazioni



Solitamente sono elementi non lineari,  
dissipativi che hanno formulazioni specifiche  
per la generazione delle forze

es. le forze generate da cuscinetti idrodinamici  
dipendono da tipo, portata, temperatura del fluido;  
dalla forma delle sedi, dalla velocità del rotore..

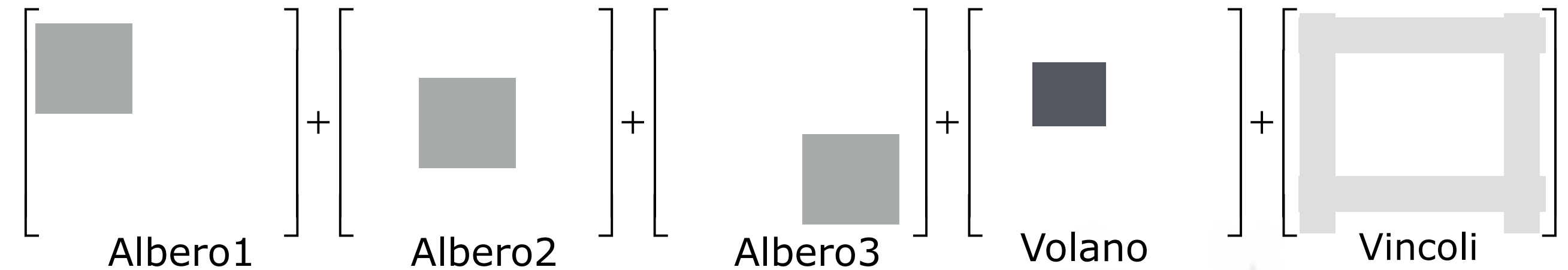


es. tiro magnetico, instabilità di flusso,  
reazioni dei vincoli...

Ciascuno di questi elementi sarà caratterizzato da opportune matrici da inserire ed assemblare nell'equazione del moto del sistema completo:

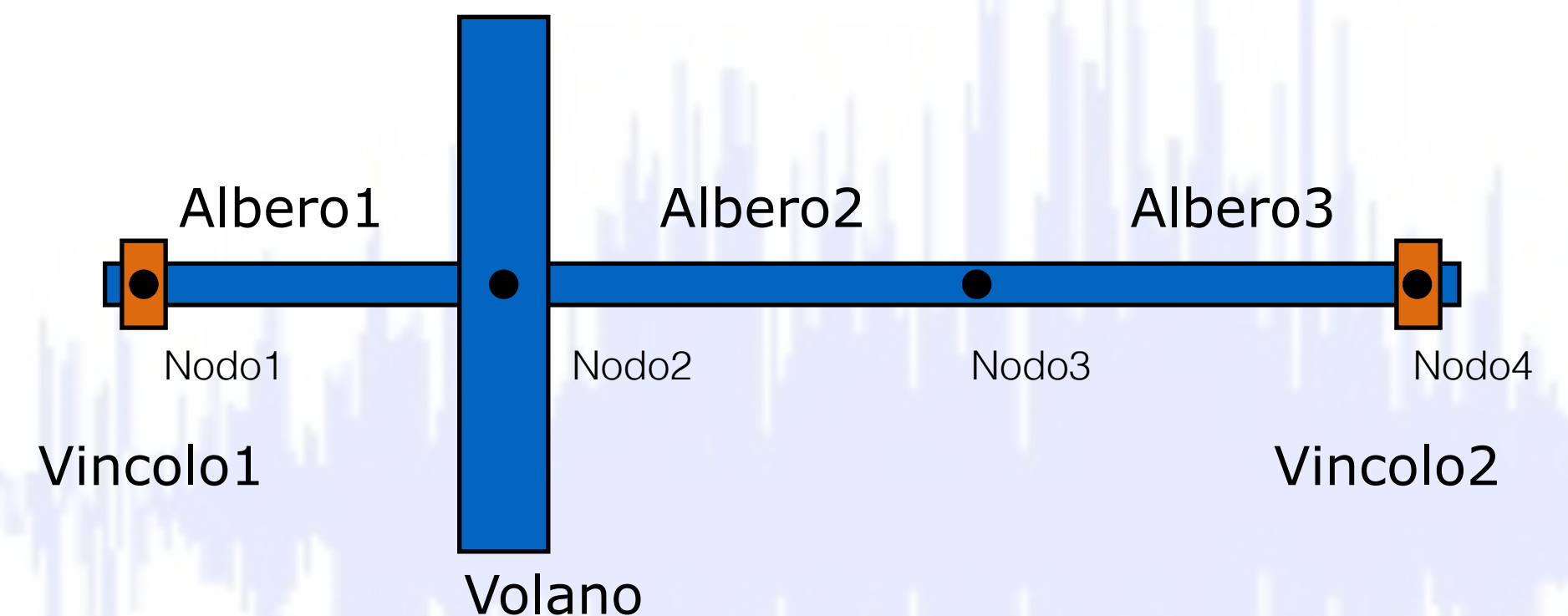
$$[\mathbf{M}] \{\ddot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + \Omega [\mathbf{G}] \{\dot{\mathbf{q}}\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{F}\}$$

(ricordarsi dell'eventuale dipendenza da  $\Omega$  !)



Con tutte le matrici assemblate..  
la soluzione al problema degli autovalori/autovettori assume la solita forma..

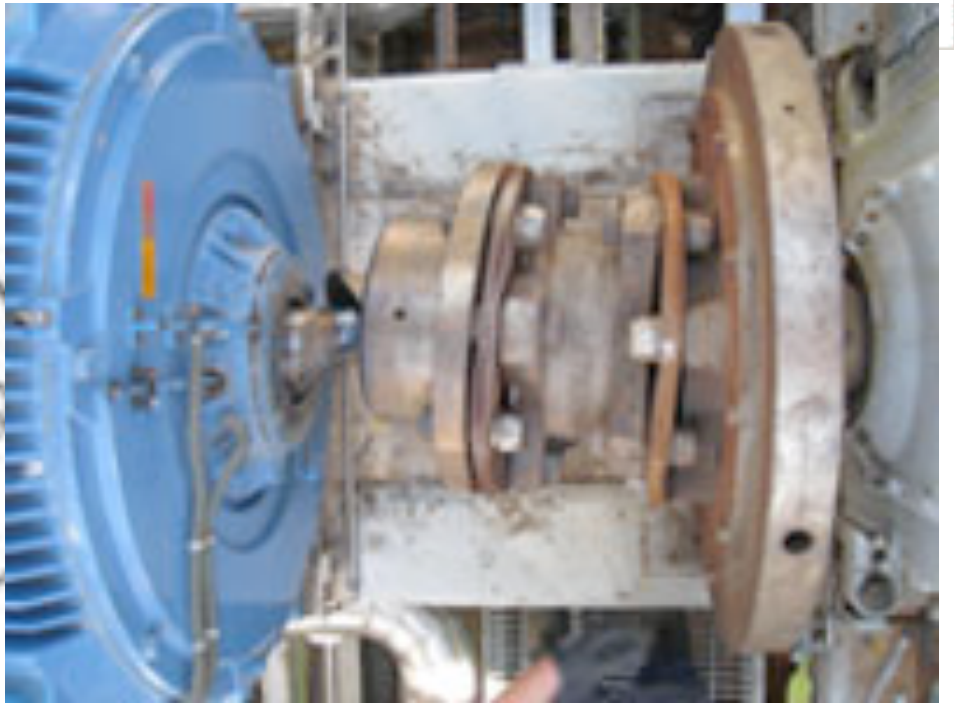
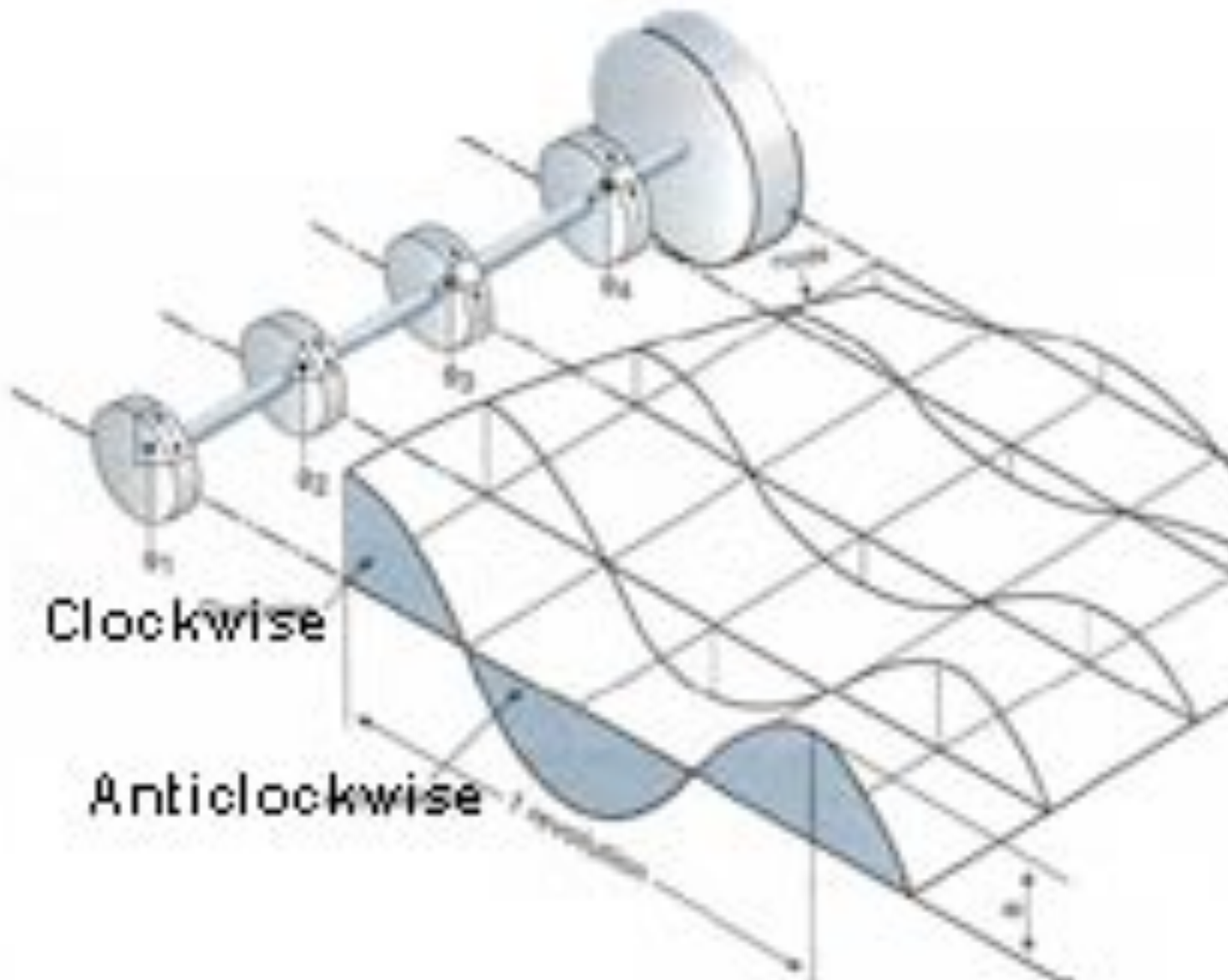
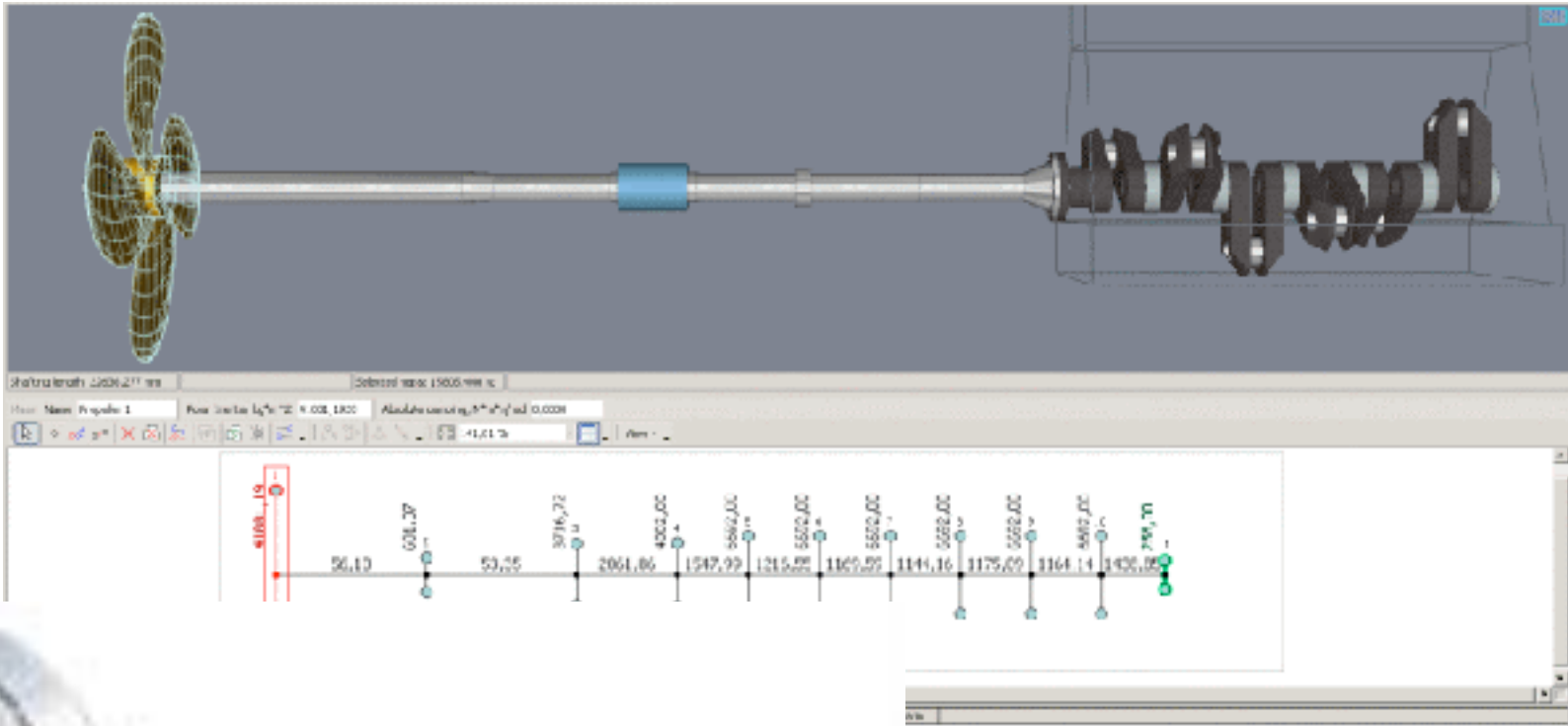
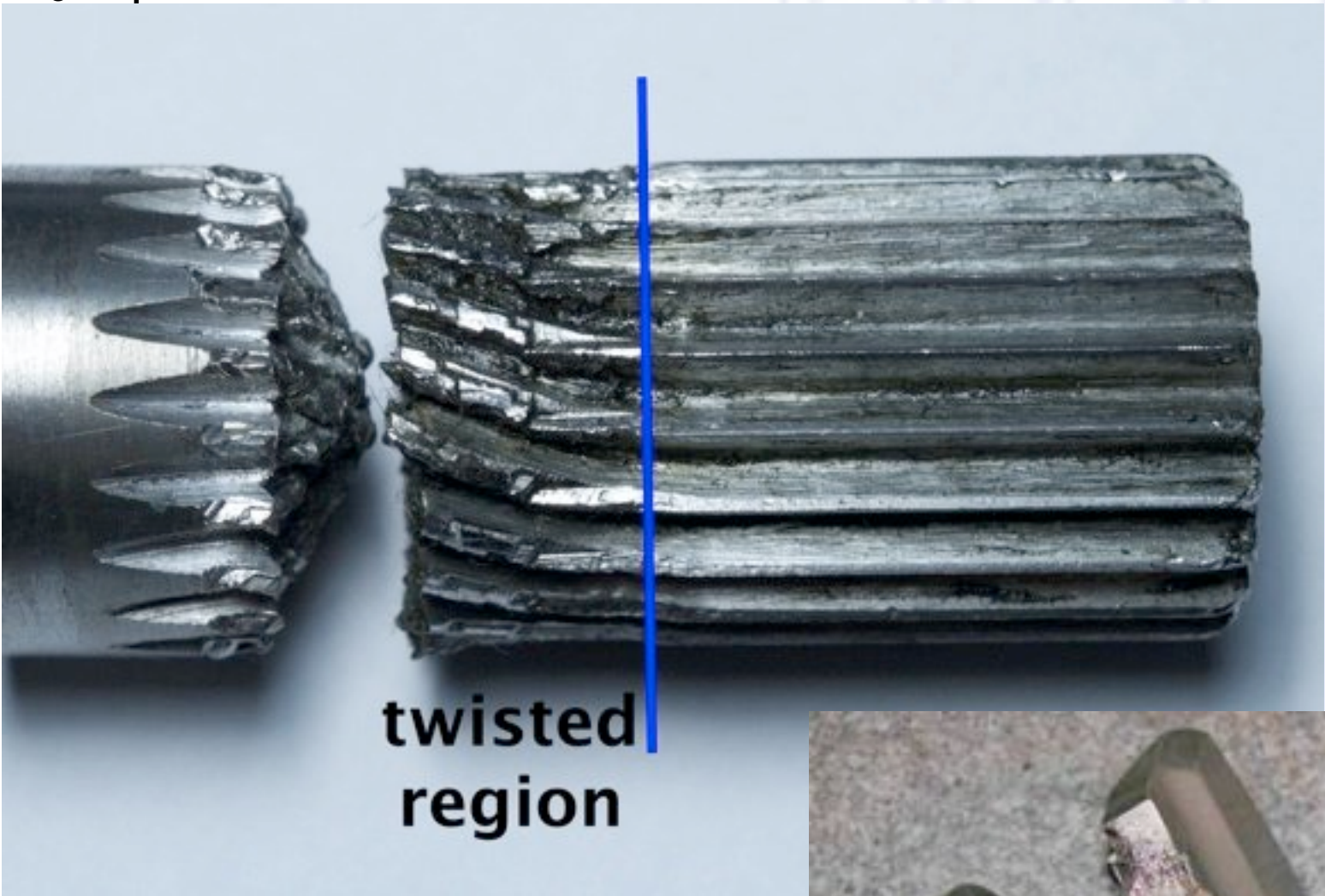
$$\begin{bmatrix} \Omega \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



# Vibrazione torsionali

Nei rotori flessibili, oltre alle vibrazioni flessionali (l'asse dell'albero di deforma nei piani XZ e YZ) esiste la possibilità che l'asse del rotore resti rettilineo mentre i "volani" ruotano reciprocamente tra loro.. In questo caso si parla di vibrazioni torsionali ..l'albero si torce!

Sono importanti, perchè a queste vibrazioni vengono spesso imputate le rotture per fatica degli alberi.

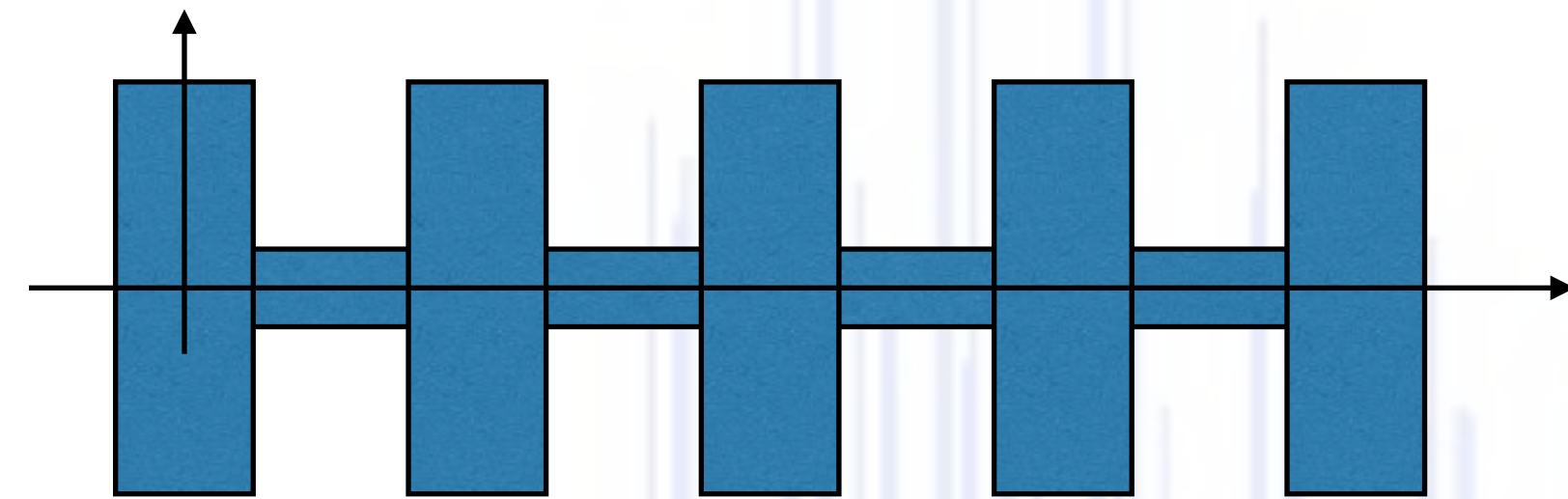


Per le vibrazioni torsionali, si scriveranno le equazioni del moto analogamente a quanto fatto per le vibrazioni lineari utilizzando l'equazione giusta!

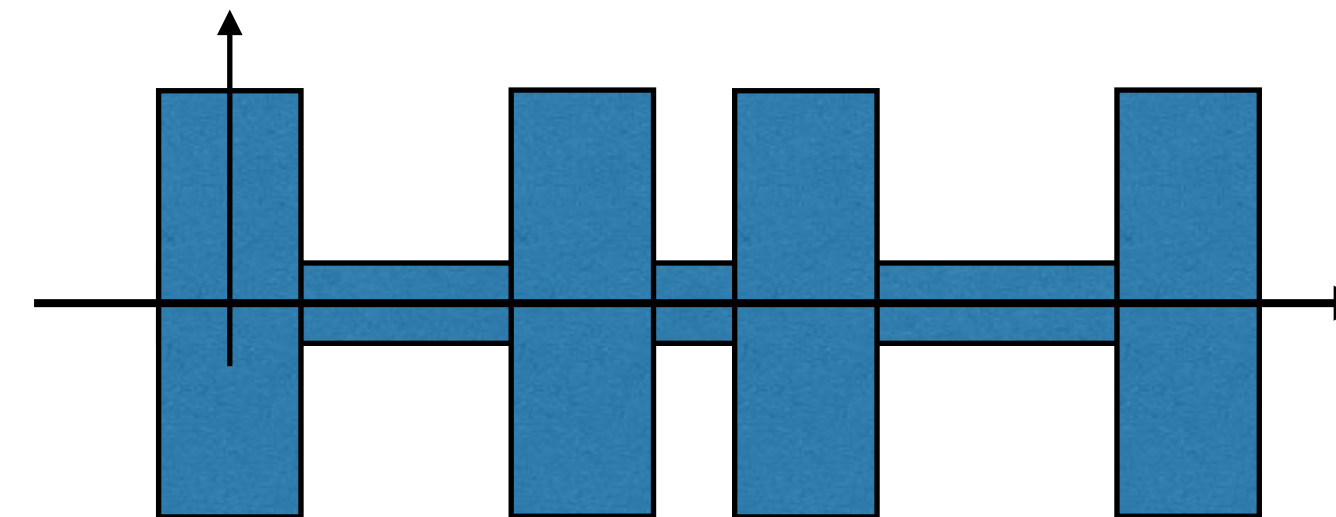
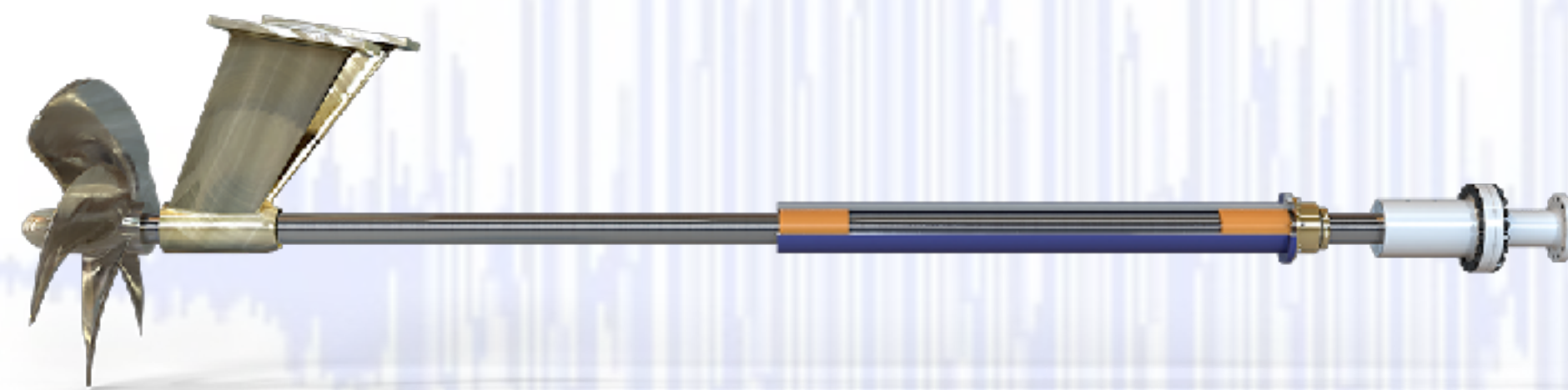
..ponendo l'attenzione nel distinguere tra sistema in linea o ramificati  
Nel secondo caso bisognerà prendere delle precauzioni per tener conto del legame cinematico tra le parti.

$$\sum \vec{F} - m\vec{\ddot{x}} = 0$$

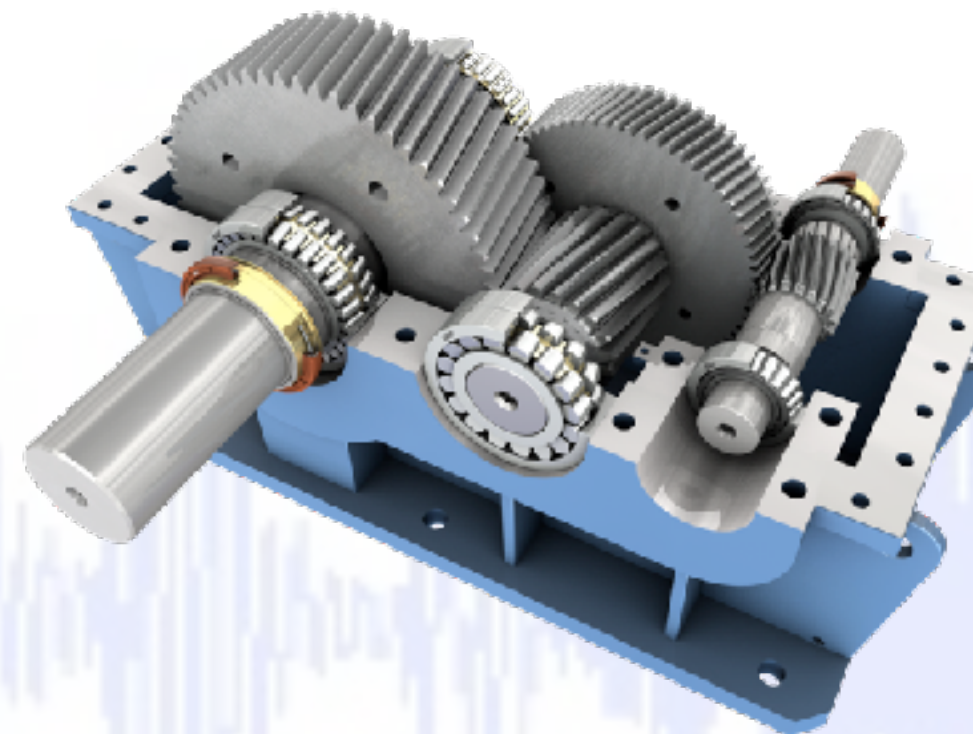
$$\sum \vec{M} - J\vec{\ddot{\theta}} = 0$$

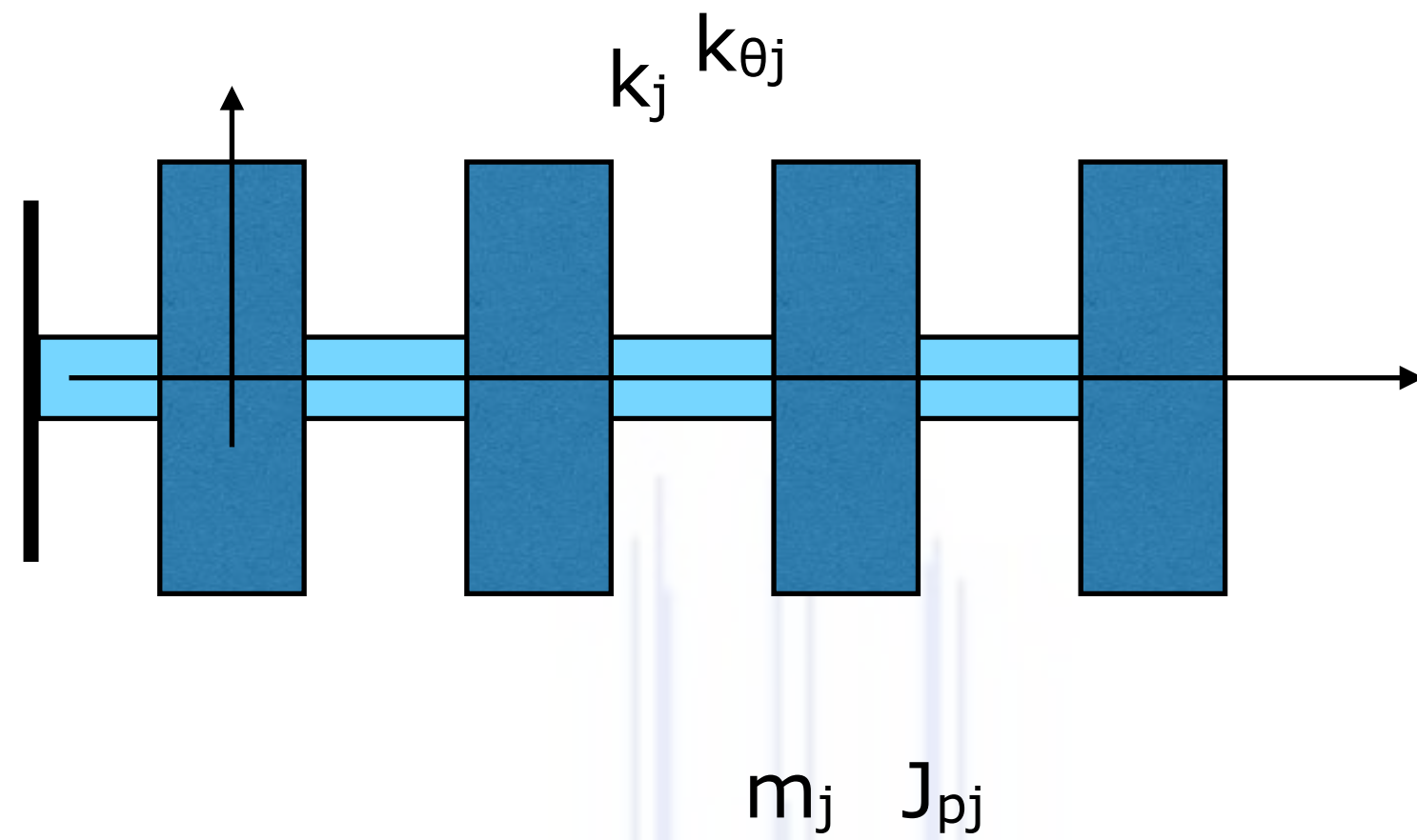


in linea



ramificati





Si consideri un rotore caratterizzato da un certo numero di volani ( $m_j$   $J_{pj}$ ) e da sezioni di albero ( $k_j$ ,  $k_{\theta j}$ )

nel caso lineare

Le equazioni del moto saranno

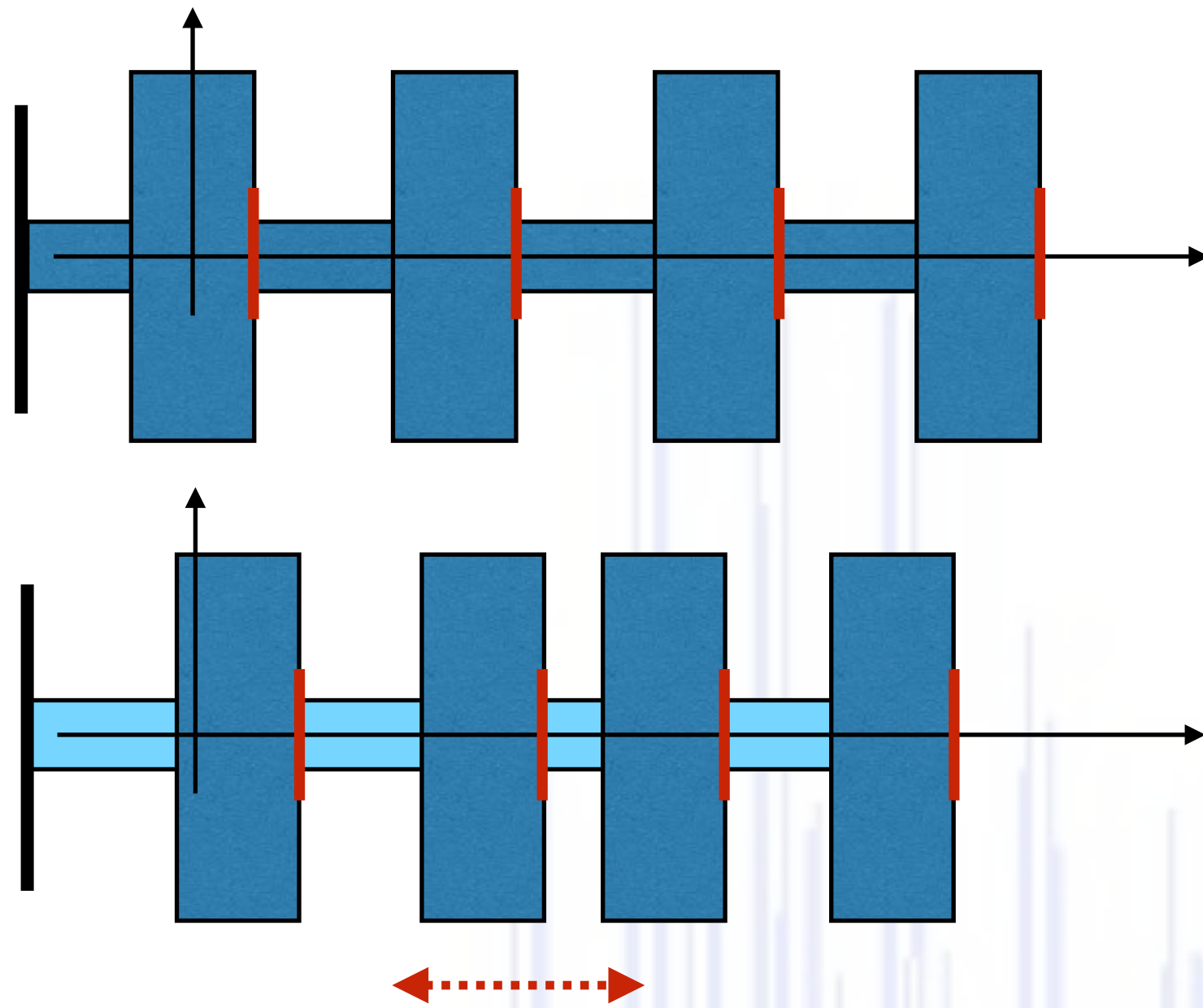
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_0 + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

nel caso torsionale

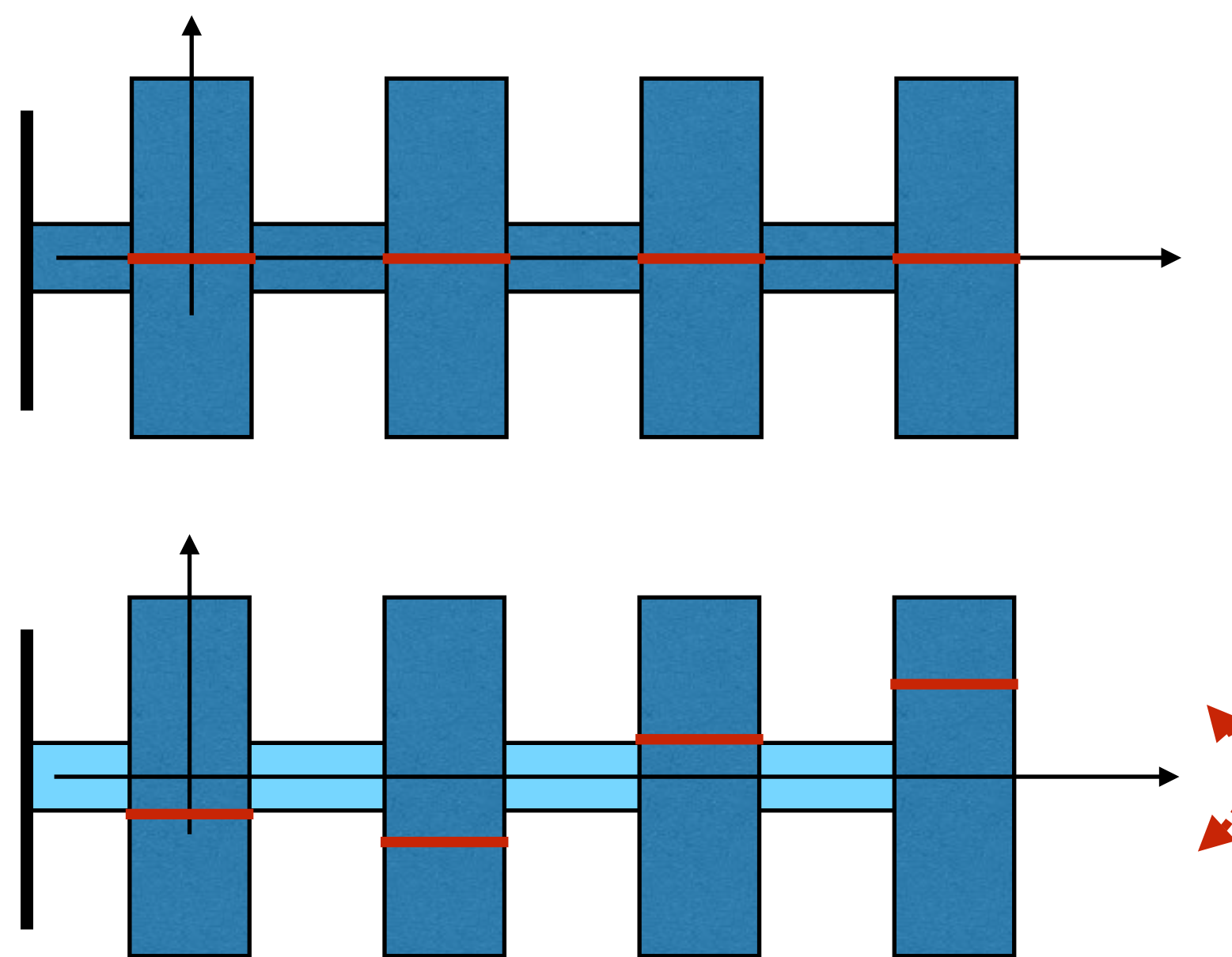
$$\begin{bmatrix} J_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{p4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{\theta 0} + k_{\theta 1} & -k_{\theta 1} & 0 & 0 \\ -k_{\theta 1} & k_{\theta 1} + k_{\theta 2} & k_{\theta 2} & 0 \\ 0 & -k_{\theta 2} & k_{\theta 2} + k_{\theta 3} & -k_{\theta 3} \\ 0 & 0 & -k_{\theta 3} & k_{\theta 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

..hanno esattamente la stessa struttura!

nel caso lineare



nel caso torsionale



Quali saranno i primi modi dei due sistemi?

Quanti modi ci sono?

Quali modi sono rappresentati?

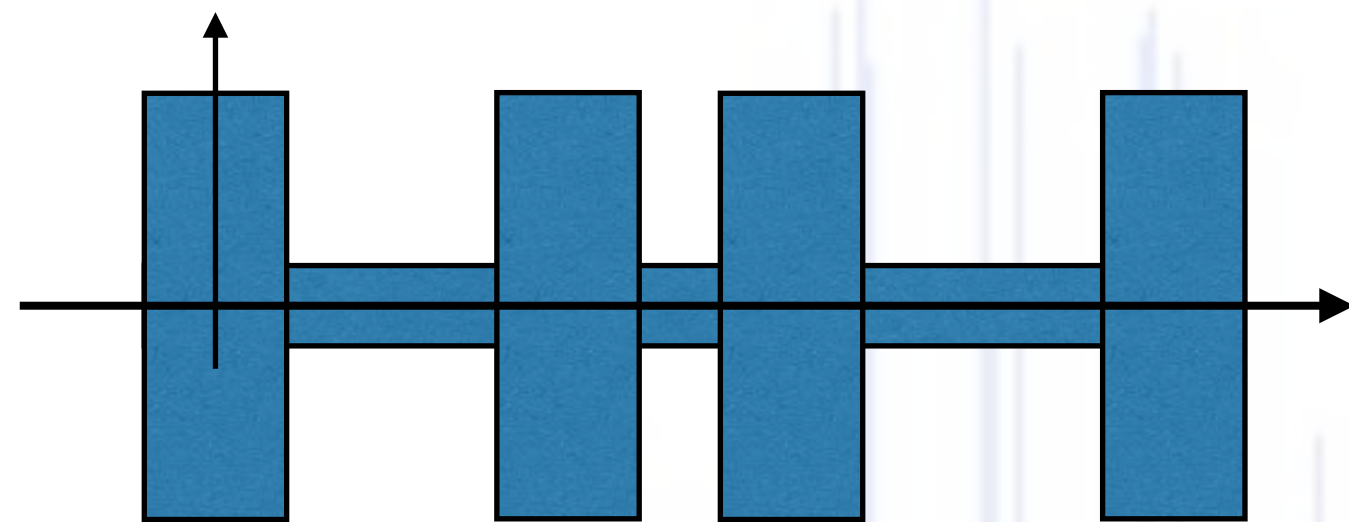
..N volani..2N autovalori..N autovettori  
distinti

..se il rotore non è vincolato al mondo esterno..  
modo di corpo rigido!

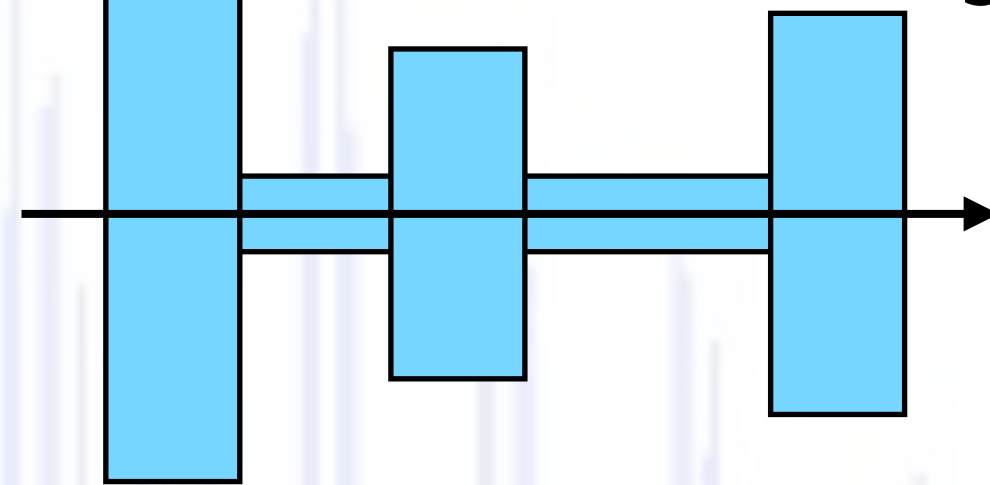
..se N è il modo che si considera,  
ci sono (N-1) nodi nella deformata!

Lo studio dei sistemi ramificati (riduttori, convertitori di coppia, derivazioni per utenze) è un po' più complesso.

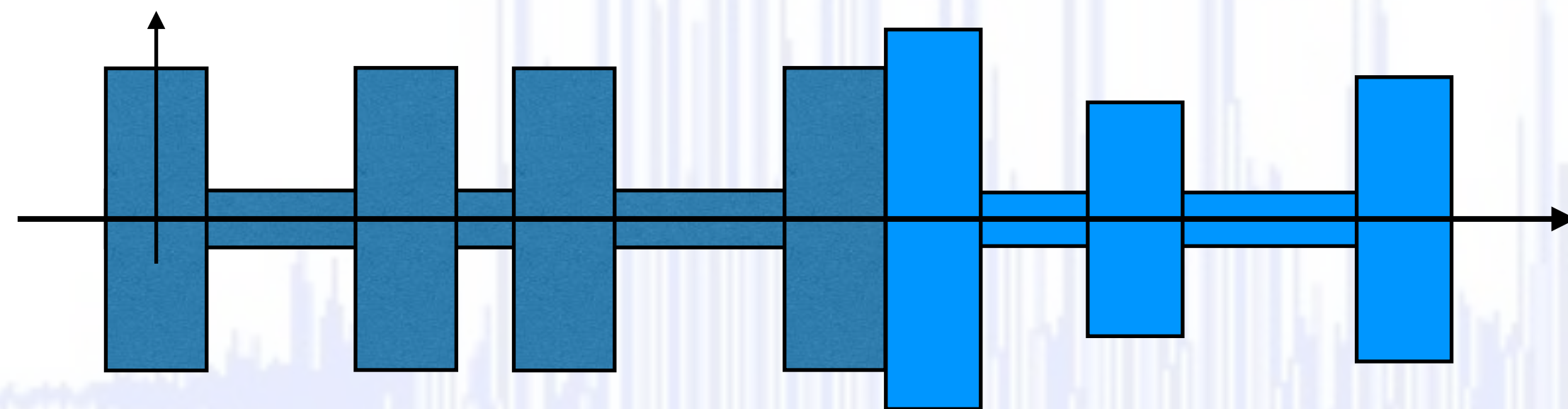
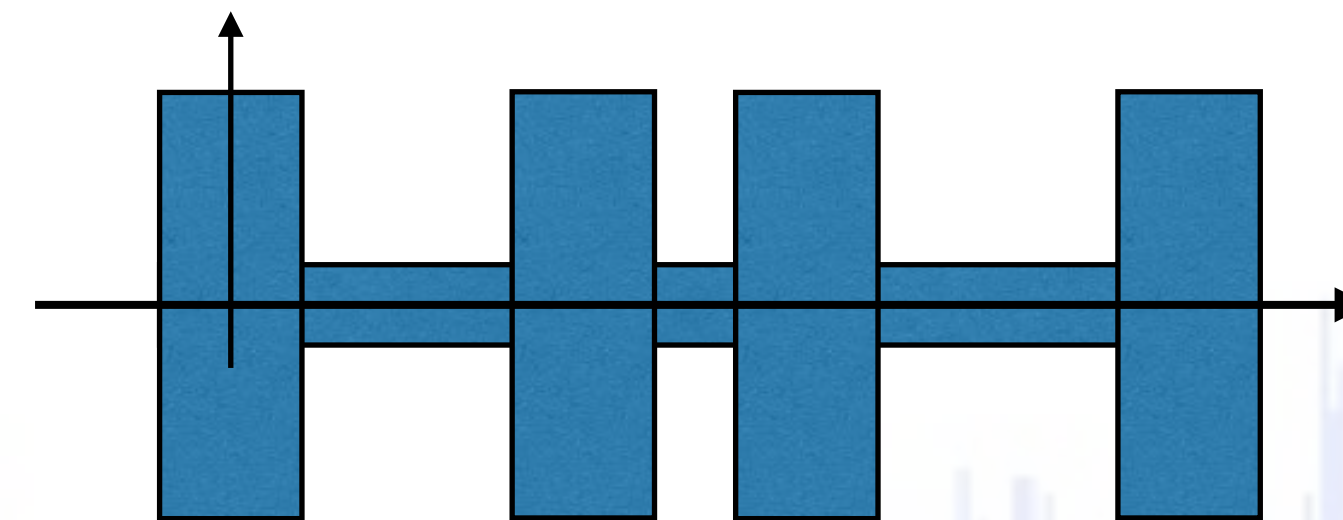
E' possibile ipotizzare due scenari diversi:



accoppiamento di tipo rigido, di forma, tra gli alberi per il quale bisognerà tener conto del rapporto di trasmissione si costruisce un sistema in linea equivalente

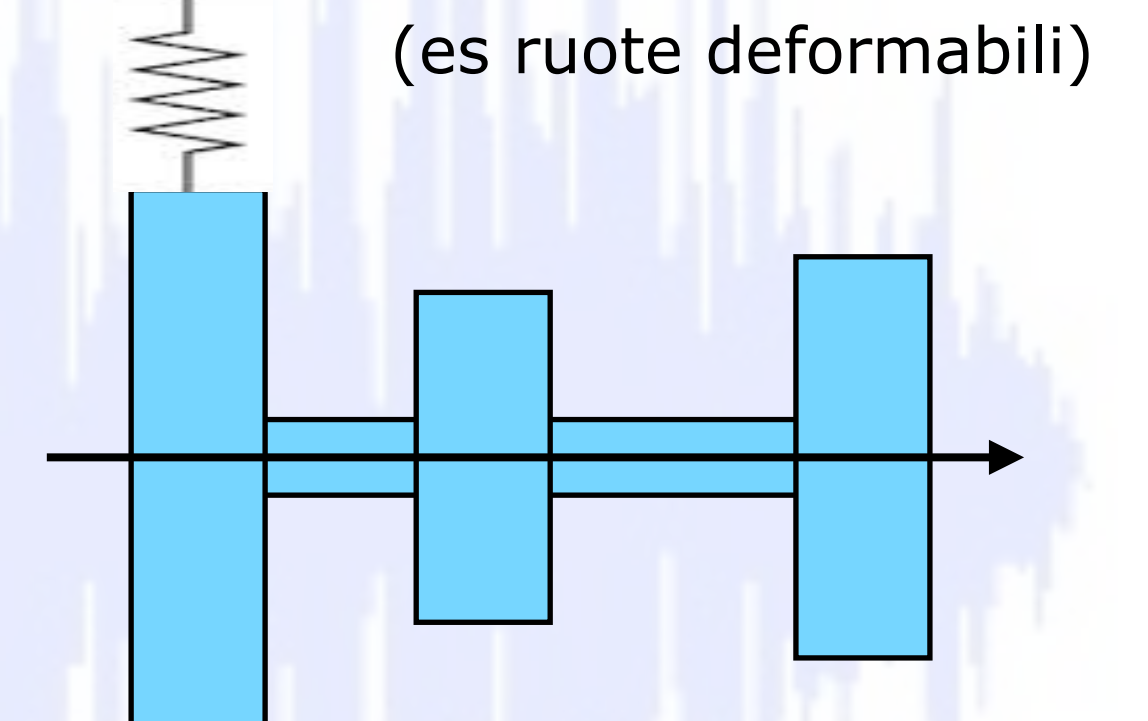


accoppiamento di tipo flessibile in cui si procede similmente a quanto già visto



(es ruote dentate infinitamente rigide)

$$\gamma = \frac{N_{input}}{N_{output}}$$

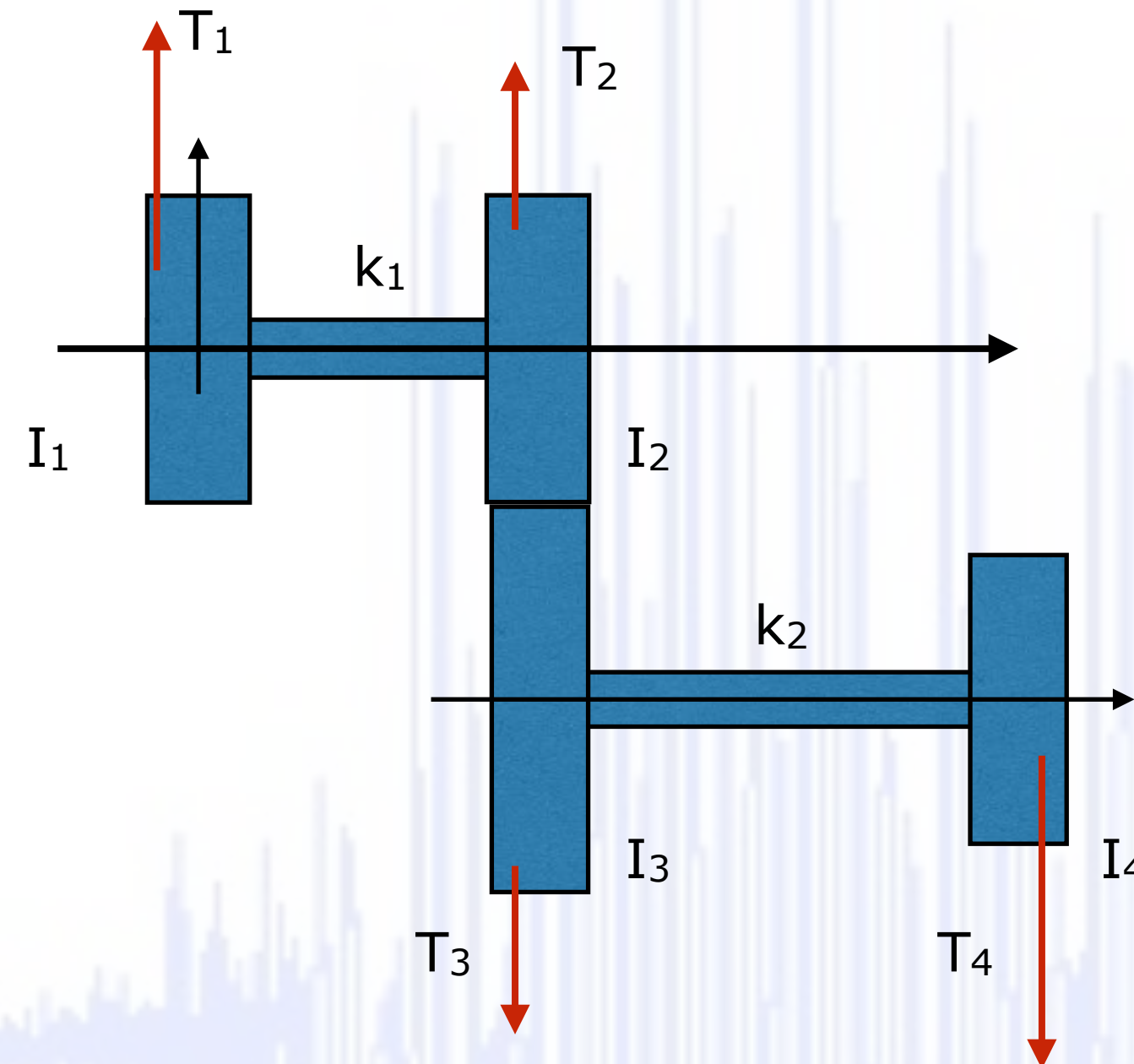


(es ruote deformabili)

Nel caso della costruzione di un sistema in linea equivalente,  
bisogna scegliere rispetto a quale albero riferirsi  
e ricordare che la velocità periferica delle due ruote ingranate sarà uguale

=> sistema dinamicamente equivalente!

Si analizzi un sistema costituito da due alberi,  
ciascuno con due volani ( $I_1, I_2$ , e  $I_3$  e  $I_4$ )  
Siano  $N_i$  e  $R_i$  il numero dei denti ed raggio delle ruote dentate



Il rapporto di trasmissione sia  $\gamma = \frac{N_2}{N_3} = \frac{R_2}{R_3} = \frac{\omega_3}{\omega_2}$

Gli alberi non sono indipendenti, le loro rotazioni sono legate dalla relazione:

$$\theta_3 = -\gamma\theta_2 \quad \dot{\theta}_3 = -\gamma\dot{\theta}_2$$

Si possono scrivere le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{2,3} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{2,3} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{cases}$$

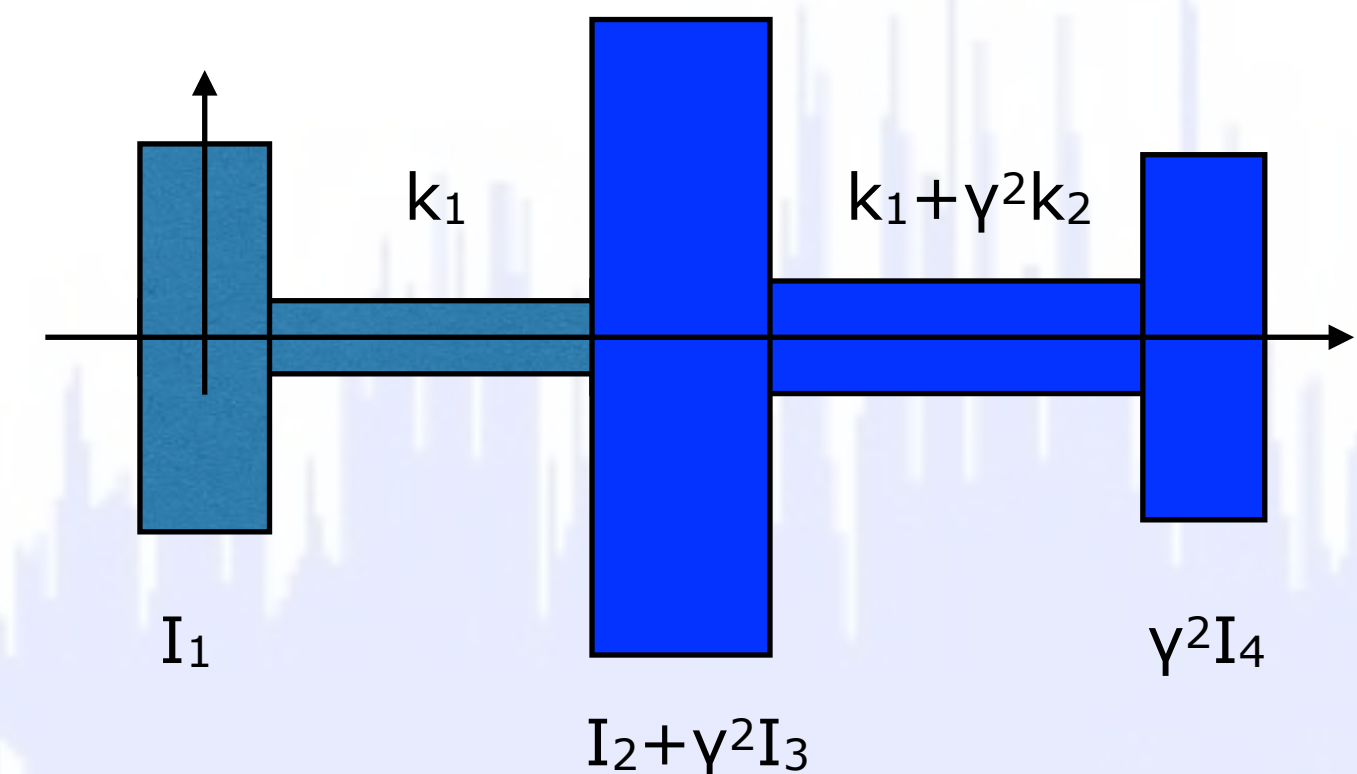
ricordando che  $\theta_3 = -\gamma\theta_2$

e che l'energia cinetica e potenziale elastica del sistema equivalente deve essere uguale alla somma delle energie potenziale ed elastiche dei due sistemi di partenza

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + \gamma^2 k_2(\theta_2 - \theta'_3) = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}'_3 + \gamma k_2(\theta'_3 - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{cases}$$

con  $\theta_4 = -\gamma\theta'_3$

La risoluzione di questo sistema di equazioni (3GDL),  
fornirà 6 frequenze naturali e altrettanti modi tra loro complessi coniugati



Vediamo i passaggi

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{2,3} \\ I_3 \ddot{\theta}_3 + k_2(\theta_3 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{2,3} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{2,3} \\ -I_3 \gamma \ddot{\theta}_2 + k_2(-\gamma \theta_2 - \theta_4) = T_3 + R_3 F_{2,3} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 - \theta_3) = T_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + I_3 \gamma^2) \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + k_2(\gamma^2 \theta_2 + \gamma \theta_4) = T_2 - \gamma T_3 \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 + \gamma \theta_2) = T_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ (I_2 + I_3 \gamma^2) \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) + k_2(\gamma^2 \theta_2 + \gamma \theta_4) = T_2 - \gamma T_3 \\ \gamma^2 I_4 \ddot{\theta}_3' + \gamma^2 k_2(\theta_3' - \theta_2) = -\gamma T_4 \end{cases}$$

ricordiamo il legame cinematico tra le ruote 2 e 3

$$\theta_3 = -\gamma \theta_2$$

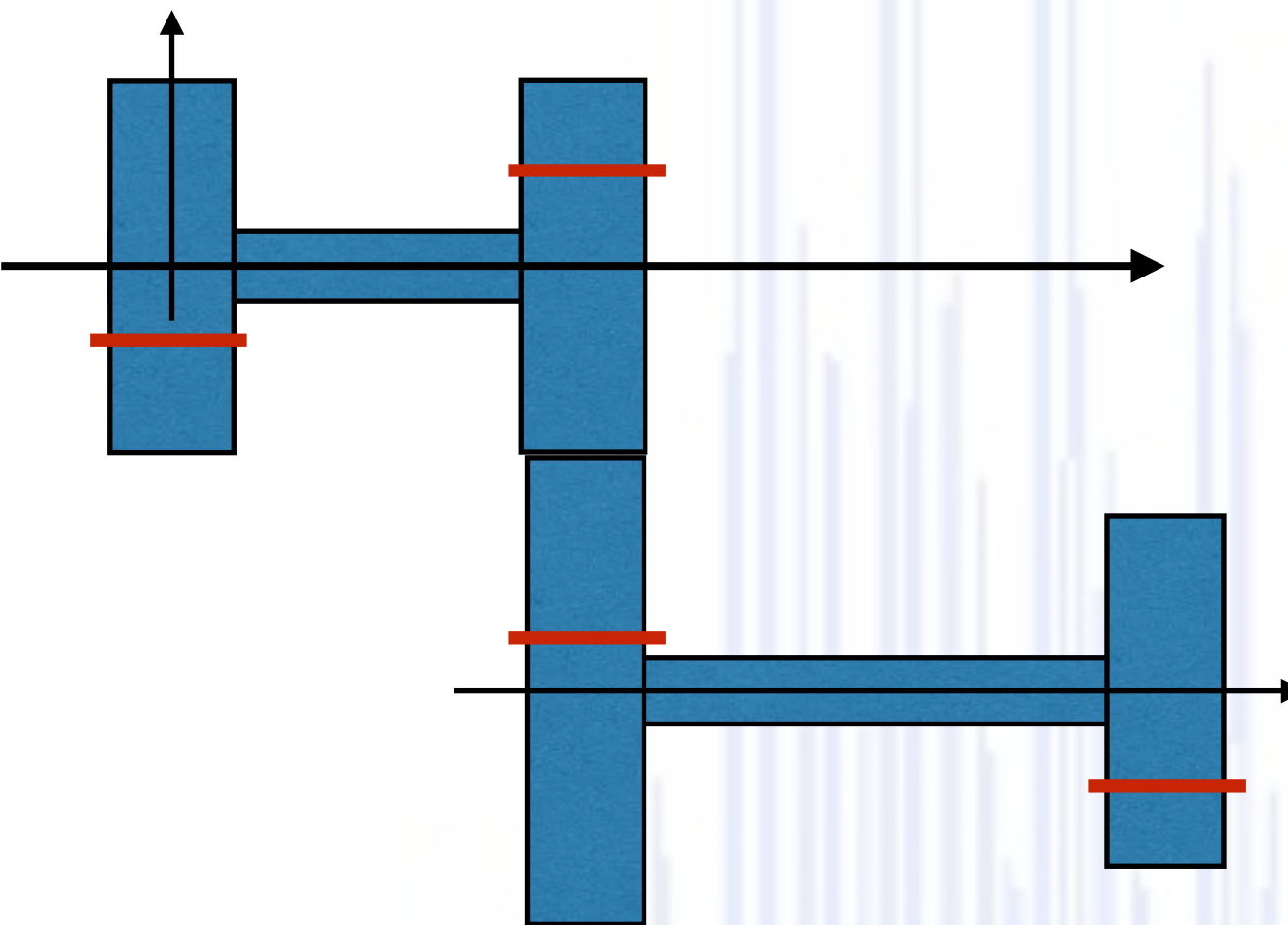
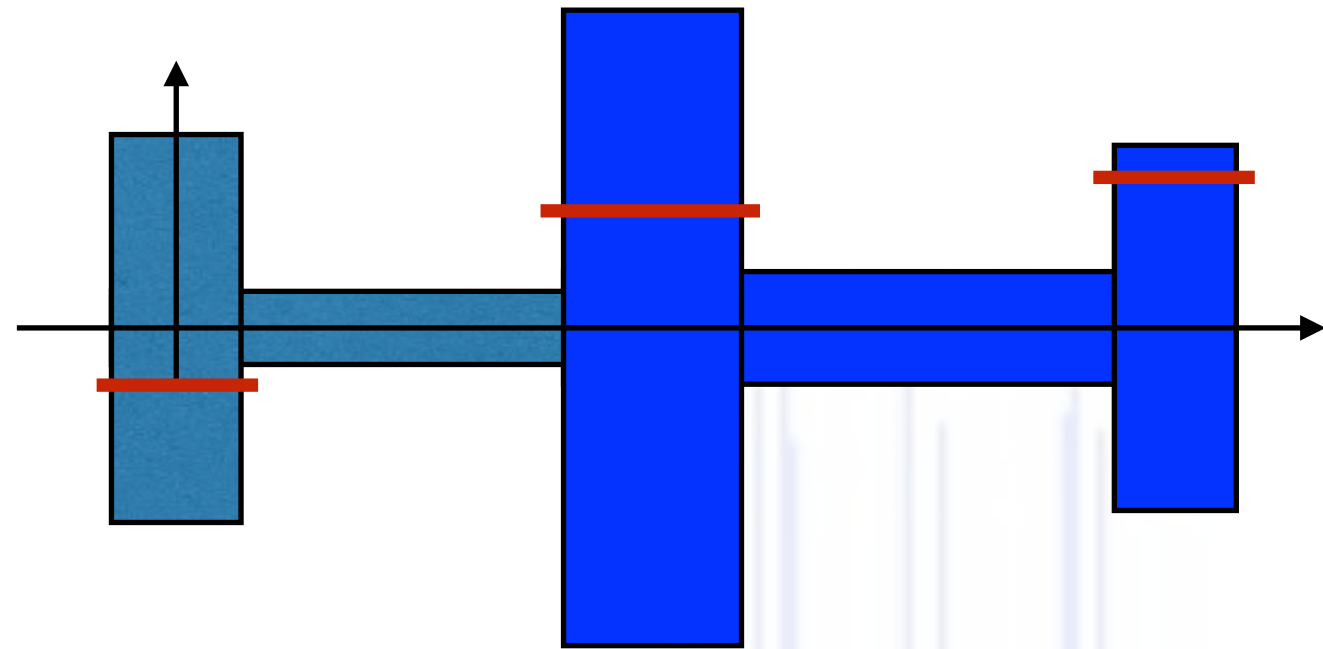
lo sostituiamo nell'equazione 3, moltiplichiamo tutto per -γ e la sommiamo eq.2 ed eq.3

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_1 \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + k_1(\theta_2 - \theta_1) = T_2 + R_2 F_{2,3} \\ I_3 \gamma^2 \ddot{\theta}_2 + k_2(\gamma^2 \theta_2 + \gamma \theta_4) = -\gamma T_3 - \gamma R_3 F_{2,3} \\ I_4 \ddot{\theta}_4 + k_2(\theta_4 + \gamma \theta_2) = T_4 \end{cases}$$

per simmetria dell'equazioni sostituiamo

$$\theta_4 = -\gamma \theta_3'$$

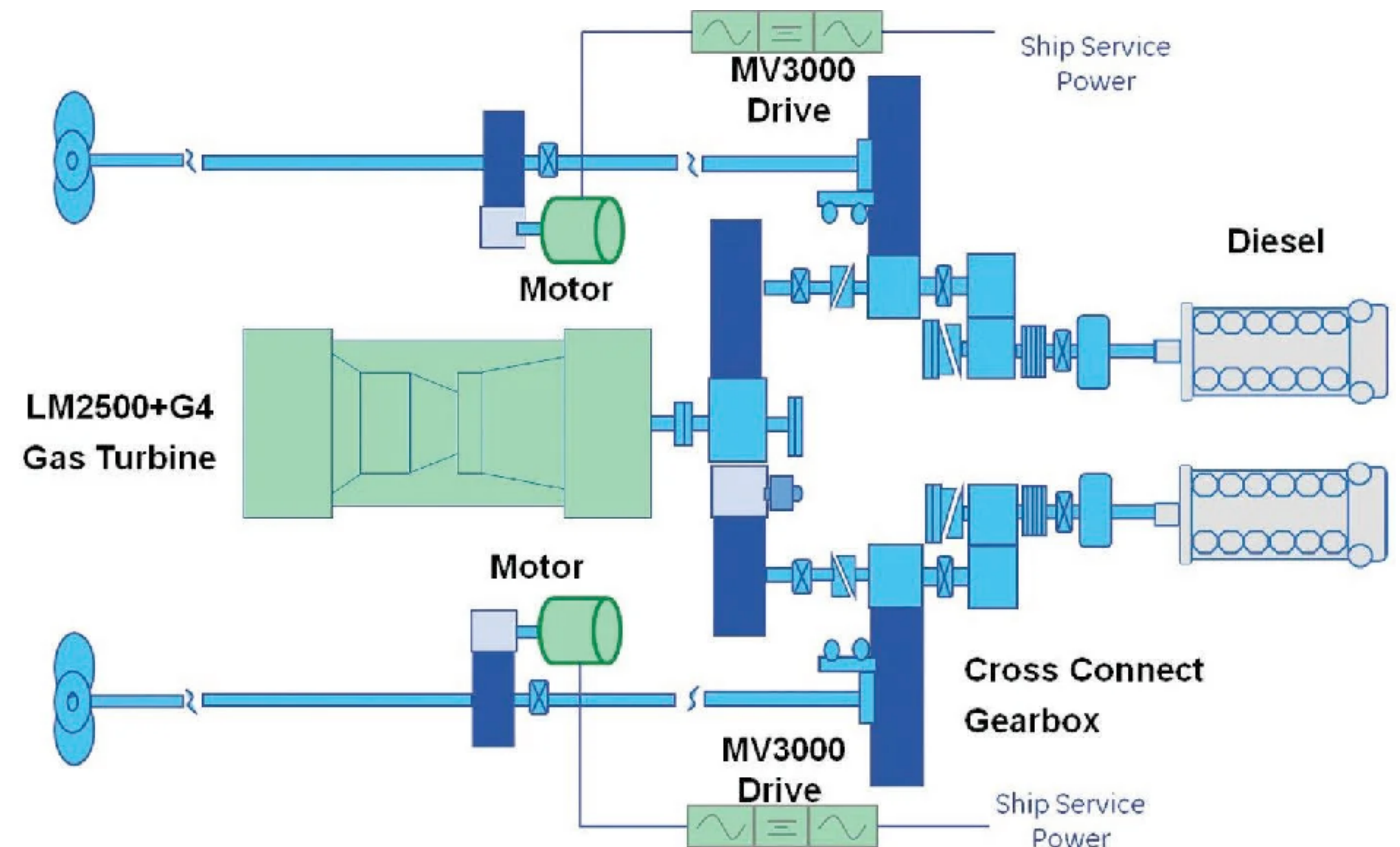
e moltiplichiamo eq.3 per -γ



Quando si voglio rappresentare le deformate modali sul sistema ramificato di partenza, bisogna ricordare la relazione tra gli angoli espressa dal rapporto di riduzione

$$\theta_3 = -\gamma\theta_2$$

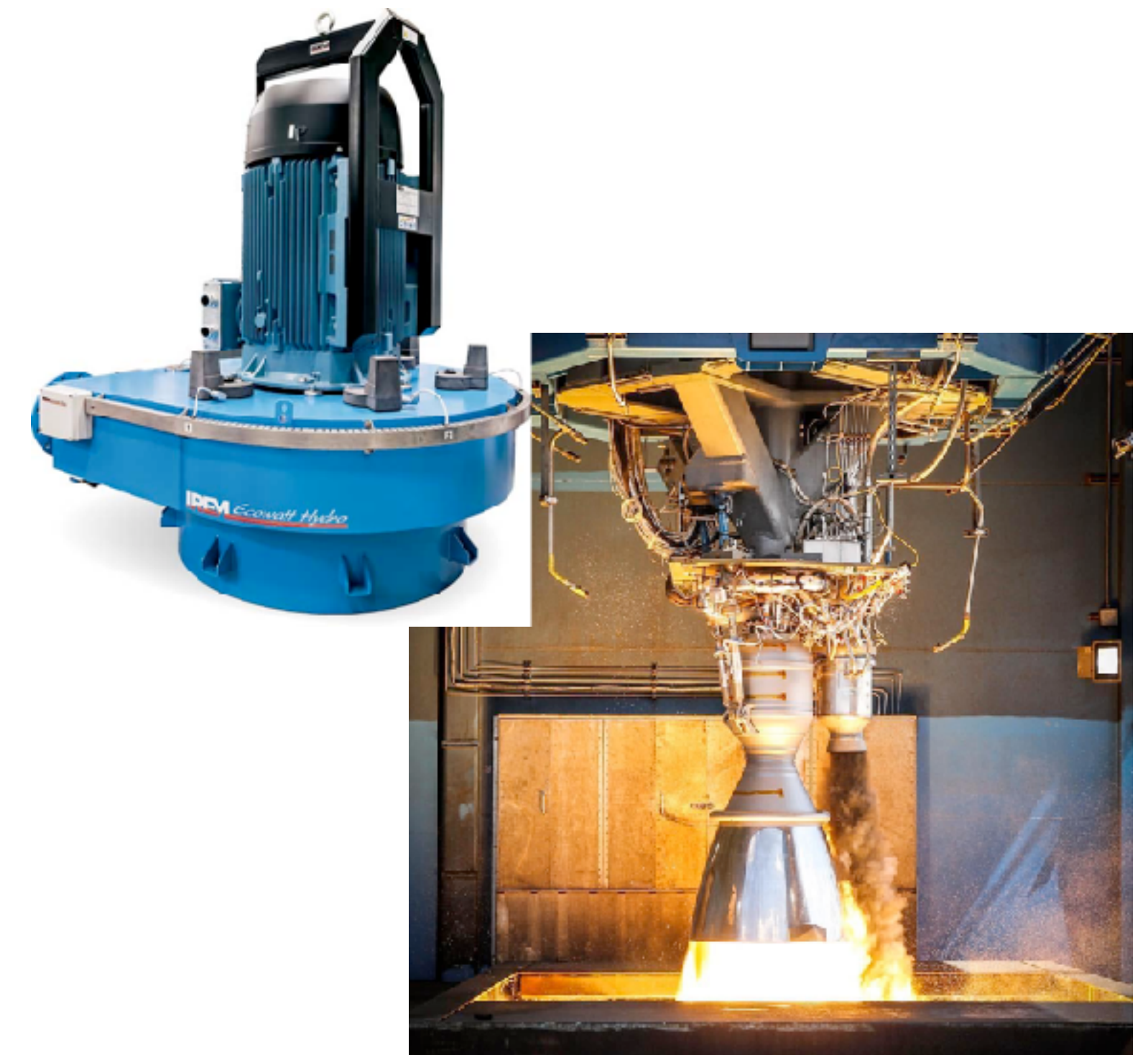
Esistono sistemi ramificati ben più complessi..  
si segue la stessa procedura di semplificazione..



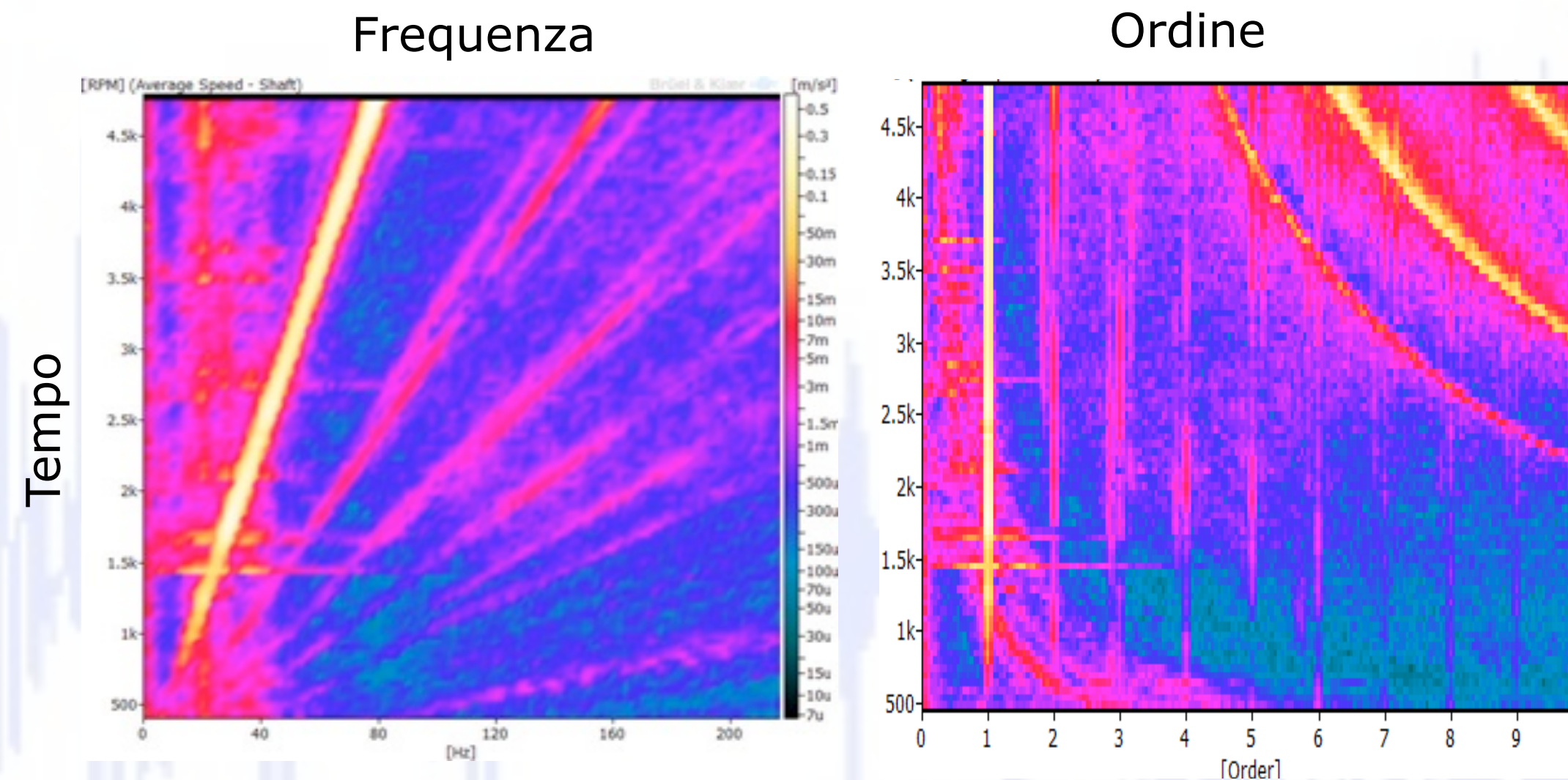
Relativamente al funzionamento del macchinario rotante  
si ricorda che queste possono funzionare  
a regime costante  
a regime variabile

Questo ha forti implicazioni relativamente alla maniera  
in cui si misureranno le vibrazioni..

RMS, ordini, frequenze naturali.. dipendono da RPM



..analisi degli ordini vista nel modulo  
4 strumenti e metodi Sperimentali



# ORDER TRACKING