

Enrico Nobile

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Università degli Studi di Trieste

Corso di Termofluidodinamica Computazionale

Homework No. 1
AA 2017/2018



Aprile 2018

Problema 1

Le superfici alettate

L'uso di superfici alettate per incrementare lo scambio termico fra superfici solide e fluidi trova molteplici applicazioni quali, a titolo di esempio, il raffreddamento ad aria di motori a combustione interna, gli scambiatori di calore liquido-gas ed il raffreddamento di componenti elettronici. La figura 1 riporta due esempi di superfici alettate.

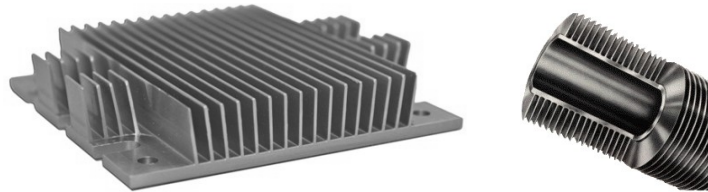


Figura 1: Esempi di superfici alettate: a sinistra dissipatore per componenti elettronici, a destra tubo alettato.

Le alette possono assumere configurazioni diverse, a seconda delle applicazioni, ed il caso più semplice è costituito da un'aletta piana a sezione rettangolare costante, come illustrato in figura 2.

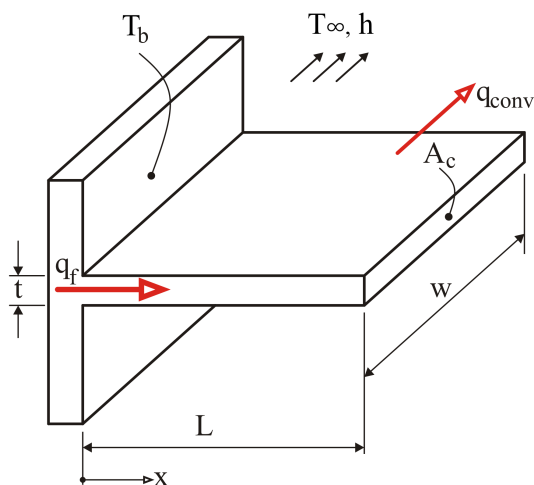


Figura 2: Aletta piana a sezione uniforme.

Per valutare le prestazioni termiche di un'aletta, e quindi dell'intera superficie alettata, è necessario determinare la distribuzione di temperatura nell'aletta stessa. Per far ciò è comune adottare alcune ipotesi semplificative:

1. Andamento *monodimensionale* del campo termico all'interno dell'aletta: $T \approx T(x)$.
2. Regime stazionario.
3. Conducibilità termica k costante.

4. Scambio termico per irraggiamento trascurabile.
5. Assenza di generazione termica.
6. Coefficiente di scambio termico convettivo h costante lungo tutta l'aletta.

In particolare l'ipotesi 1. è usualmente giustificata dal piccolo spessore dell'aletta rispetto alla sua lunghezza, che pertanto dà luogo a variazioni di temperatura, nella sezione trasversale dell'aletta, trascurabili rispetto alle differenze di temperatura fra questa e l'ambiente.

Con tali ipotesi, ed assumendo che la sezione A_c sia costante o vari secondo una legge lineare o parabolica, è possibile procedere per via analitica, ricorrendo ad un bilancio di energia per un concio elementare dell'aletta di lunghezza dx . Operando in tal modo si perviene ad un'equazione differenziale del secondo ordine, la cui soluzione generale contiene due costanti che possono venir determinate in base alle condizioni al contorno [1, 2].

Soluzione numerica con il metodo dei Volumi Finiti

Con il metodo dei Volumi Finiti è tuttavia possibile evitare sin dal principio questo passaggio - dal *finito* al *differenziale* e poi nuovamente al *finito* - suddividendo l'aletta in un certo numero N di Volumi di Controllo, ed imponendo il bilancio di energia su ciascuno di essi, come schematizzato in figura 3 nella quale, per chiarezza di rappresentazione, si è considerata la sola proiezione sul piano.

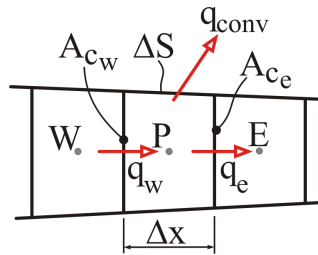


Figura 3: Bilancio su un volume di controllo dell'aletta.

Tale bilancio conduce alla

$$-q_w + q_e + q_{conv} = 0$$

ed esplicitando i flussi termici conduttivi attraverso la legge di Fourier ed il flusso termico convettivo con la legge di Newton si ha

$$k A_{c_w} \left. \frac{dT}{dx} \right|_w - k A_{c_e} \left. \frac{dT}{dx} \right|_e + \Delta S h (T_P - T_\infty) = 0$$

dove, nel caso di aletta a sezione costante, $\Delta S = P \Delta x$, con P perimetro dell'aletta e A_c la sua sezione trasversale.

Utilizzando infine lo schema CDS del 2o ordine per la valutazione dei flussi conduttivi e raccogliendo si ottiene, per il generico volume di controllo interno (per i volumi di controllo alle estremità le espressioni possono differire)

$$A_W T_W + A_P T_P + A_E T_E = S_P$$

con

$$\begin{aligned}
 S_P &= -\Delta S h T_\infty \\
 A_W &= \frac{k A_{cw}}{\Delta x} \\
 A_E &= \frac{k A_{ce}}{\Delta x} \\
 A_P &= -(A_W + A_E) - \Delta S h
 \end{aligned}$$

Introducendo le condizioni al contorno nelle espressioni per la cella 1 e la cella N , è facile verificare che si ottiene un sistema tridiagonale, che può essere convenientemente risolto, in MATLAB, sfruttando la funzione `spdiags`.

Il vantaggio del metodo dei Volumi Finiti - e di qualunque analogo metodo numerico - è la notevole flessibilità: è infatti possibile trattare facilmente casi di alette con sezione trasversale variabile in modo arbitrario, tener conto di proprietà termofisiche variabili con la temperatura, di variazioni spaziali del coefficiente convettivo, del possibile contributo dello scambio termico per irraggiamento etc. Infine nel caso non sia verificato l'andamento *monodimensionale* del campo termico all'interno dell'aletta, il problema può ancora venir affrontato ricorrendo ad una discretizzazione bi- o tridimensionale.

Problemi proposti

1. Un'aletta piana di sezione uniforme, come in figura 2, è costruita in silicio, materiale avente un valore della conducibilità termica, alla temperatura ambiente $T_\infty = 25^\circ\text{C}$, pari a $k = 148.7 \text{ W/(m K)}$. Essa è caratterizzata da uno spessore $t = 1 \text{ mm}$, lunghezza $L = 20 \text{ mm}$, ed è molto profonda nella direzione normale alla pagina. Il coefficiente di scambio termico convettivo vale $h = 200 \text{ W/(m}^2 \text{ K)}$ con una temperatura dell'ambiente $T_\infty = 25^\circ\text{C}$.

La base dell'aletta è mantenuta ad una temperatura $T_b = 200^\circ\text{C}$, mentre l'estremità dell'aletta può essere assunta perfettamente isolata.

Assumendo una distribuzione *1D* della temperatura valutare, con il metodo dei Volumi Finiti, il flusso termico unitario (per metro di profondità) scambiato dall'aletta q'_{num} [W/m], al variare del numero N di suddivisioni, con $N = 10, 20, 40, 80$ e 160 . Riportare in un grafico *logaritmico* l'andamento dell'errore percentuale al variare di N , verificandone l'andamento quadratico. L'errore è valutato come differenza fra il valore del flusso q'_{num} ottenuto dalla soluzione numerica e quello q'_f [W/m] dato dalla soluzione analitica [2], pari a

$$q'_f = \sqrt{h P k A_c} \tanh mL (T_b - T_\infty) \quad (1)$$

con

$$m = \sqrt{h P / k A_c} \quad (2)$$

2. Ripetere la medesima analisi considerando stavolta la dipendenza della conducibilità termica del silicio dalla temperatura, che può essere approssimata dalla seguente legge lineare:

$$k = k_{\infty} [1 + \beta(T - T_{\infty})] \quad (3)$$

dove

$$\beta = \frac{k_b/k_{\infty} - 1}{T_b - T_{\infty}} \quad (4)$$

con $k_{\infty} = 148.7 \text{ W/(m K)}$ e $k_b = 85.8 \text{ W/(m K)}$ pari, rispettivamente, alla conducibilità termica del silicio a T_{∞} e T_b . In tal caso il problema è non-lineare, e pertanto è necessario utilizzare una procedura iterativa.

Confrontare i risultati ottenuti, per un numero di suddivisioni pari al caso precedente, con quelli forniti dalle due soluzioni analitiche approssimate - qui non riportate per brevità - indicate in [3] and [4], e che forniscono i seguenti risultati

$$q'_f = 809.4 \text{ [W/m]} \quad [3]$$

$$q'_f = 940.1 \text{ [W/m]} \quad [4]$$

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Comini, G. Cortella, *Fondamenti di trasmissione del calore*, 4a Ed., S.G.E. Editore, (2013).
- [2] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6th Ed., Wiley, (2007).
- [3] A. Aziz and S. M. Enamul Huq, Perturbation Solution for Convecting Fin with Variable Thermal Conductivity, *ASME J. Heat Transfer*, pp. 300-301, (1975).
- [4] A. Rajabi, Homotopy perturbation method for fin efficiency of convective straight fins with temperature-dependent thermal conductivity, *Physics Letters A*, **364**, pp. 33-37, (2007).