

**Enrico Nobile**

*Dipartimento di Ingegneria e Architettura  
Università degli Studi di Trieste*

*Corso di Termofluidodinamica Computazionale*

**Homework No. 2  
AA 2017/2018**



Aprile 2018



---

# La Norma UNI EN ISO 10211

## Obiettivi della norma

La norma Europea *EN ISO 10211 - Thermal bridges in building construction - Heat flows and surface temperatures - Detailed calculations* del 2007, recepita in Italia dall'UNI (Ente Nazionale Italiano di Unificazione) come *UNI EN ISO 10211* e con il titolo *Ponti termici in edilizia - Flussi termici e temperature superficiali - Calcoli dettagliati*, definisce le specifiche dei modelli geometrici 3D e 2D di un ponte termico, ai fini del calcolo numerico di:

- Flussi termici, ai fini di determinare le dispersioni termiche totali di un edificio o di una sua parte;
- Temperature minime superficiali, ai fini di valutare il rischio di condensazione superficiale.

La norma include i limiti del modello geometrico e le sue suddivisioni, le condizioni limite ed i valori termici associati da utilizzare.

## Introduzione

La valutazione dei flussi termici (dispersioni) negli edifici, di grande rilevanza per la determinazione dei consumi e della *qualità energetica* di questi, può venir effettuata, con accuratezza sufficiente ai fini pratici, ricorrendo all'ipotesi di flusso monodimensionale (1D), per il quale, com'è noto, le soluzioni analitiche sono particolarmente semplici.

Tuttavia, negli edifici esistono *singolarità*, quali angoli, giunzioni, elementi finestrati, variazioni di composizione e/o spessore etc., tali da dar luogo a campi termici, e quindi flussi, 2D o 3D. Tali singolarità sono chiamate *ponti termici* (Ingl. *thermal bridges*), e, in confronto alle pareti piane, danno luogo a:

1. Variazioni del flusso termico;
2. Variazioni delle temperature superficiali interne

ambidue importanti.

La norma segnala che, sebbene per ambedue le variazioni le metodologie di calcolo siano simili, esse non sono necessariamente identiche per la valutazione dei flussi o delle temperature superficiali.

Come già accennato, i ponti termici danno luogo a campi termici, e flussi, bi- o tri-dimensionali, che possono venir calcolati accuratamente (accuratezza tipica  $\pm 5\%$ ) solo facendo ricorso a metodologie di tipo numerico, oggetto appunto della norma in esame. Vi è da aggiungere, inoltre, che in numerose situazioni modelli numerici 2D forniscono risultati adeguati, soprattutto quando gli elementi costruttivi (es. angoli) sono uniformi in una direzione.

Infine, è doveroso segnalare che, qualora l'accuratezza necessaria sia inferiore, è possibile evitare l'uso di modelli numerici, ed utilizzare viceversa metodologie semplificate, quali *cataloghi* di ponti termici (accuratezza dell'ordine del  $\pm 20\%$ ), calcoli manuali (accuratezza

$\pm 20\%$ ) e utilizzo di valori standard (accuratezza  $\pm 50\%$ ). La descrizione e l'utilizzo di tali modelli semplificati è discusso nella norma *UNI EN ISO 14683 - Ponti termici in edilizia - Coefficienti di trasmissione termica lineica - Metodi semplificati e valori di riferimento*

## Validazione dei metodi di calcolo

Al fine di poter classificare un metodo di calcolo numerico come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 3D*, la norma, nell'*Annex A - Validation of calculation methods*, descrive quattro casi (test reference cases 1, 2, 3 e 4) da utilizzare per la validazione.

Analogamente, la norma specifica il subset di casi precedenti (casi 1 e 2) per la validazione necessaria a classificare un metodo come *Metodo di elevata precisione per calcoli stazionari 2D*

Com'è ovvio, i casi 1 e 2 sono bi-dimensionali, mentre i casi 3 e 4 sono tri-dimensionali

### Case 1

Il Case 1, certamente il più semplice, è particolarmente interessante, poiché ammette una soluzione analitica. Esso è relativo allo scambio termico attraverso mezza (per ragioni di simmetria) colonna quadrata, per la quale siano note le temperature ai bordi. La norma, in particolare, si limita ad indicare, come illustrato in figura 1, il valore della soluzione analitica su una griglia equidistante di 28 punti, riportata in tabella 1, ed impone che la differenza fra i valori calcolati e forniti delle temperature non ecceda  $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

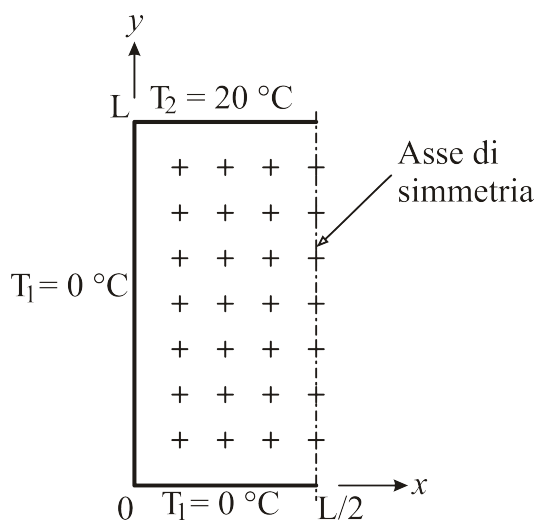


Figura 1: UNI EN ISO 10211: Reference Case 1

Per tale problema - scambio termico conduttivo stazionario in assenza di generazione interna - l'equazione generale di trasporto si semplifica nella:

$$\nabla \cdot (\lambda \nabla t) = 0$$

| Temperature (°C) |      |      |      |
|------------------|------|------|------|
| 9.7              | 13.4 | 14.7 | 15.1 |
| 5.3              | 8.6  | 10.3 | 10.8 |
| 3.2              | 5.6  | 7.0  | 7.5  |
| 2.0              | 3.6  | 4.7  | 5.0  |
| 1.3              | 2.3  | 3.0  | 3.2  |
| 0.7              | 1.4  | 1.8  | 1.9  |
| 0.3              | 0.6  | 0.8  | 0.9  |

Tabella 1: Valori di temperatura nei punti equidistanti della griglia di figura 1 ottenuti dalla soluzione analitica.

e tenendo conto che operiamo in 2D con proprietà termofisiche costanti, la precedente può esplicitarsi nella:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = 0$$

La soluzione analitica, non riportata dalla Norma, è tuttavia facilmente reperibile in letteratura [1], ed è data, in forma adimensionale per l'intera colonna quadrata di lato  $L$ , dalla:

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\sinh(n\pi y/L)}{\sinh(n\pi)}$$

dove  $\theta$  è la temperatura adimensionale:

$$\theta \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$$

L'andamento del campo termico, ottenuto numericamente, è riportato, a scopo illustrativo, in figura 2.

## Quesiti

1. Sviluppare, in MATLAB (oppure in SCILAB, Python, Julia o qualunque altro linguaggio interpretato) una procedura numerica per la soluzione del problema, basata sul metodo dei volumi finiti (FV), utilizzando una griglia Cartesiana ortogonale 2D a passo costante in  $x$  ed  $y$ , tenendo conto che, in generale,  $\Delta x \neq \Delta y$ .
2. Valutare il numero minimo di celle (volumi finiti), per ciascuna delle due direzioni  $x$  ed  $y$ , sufficienti a garantire l'accuratezza minima richiesta dalla norma.
3. Per almeno quattro griglie - costruite raddoppiando, partendo dalla griglia più rada, il numero di celle in ciascuna direzione  $x$  ed  $y$  - valutare e riportare in forma tabellare e grafica, il tempo di calcolo necessario, utilizzando le seguenti metodologie di soluzione del sistema di equazioni:

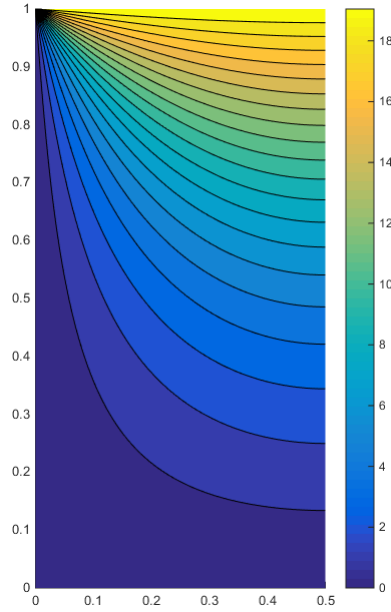


Figura 2: Campo termico per il Reference Case 1 della UNI EN ISO 10211.

- (a) Metodo diretto (divisione a sinistra *backslash* in MATLAB);
- (b) Metodo iterativo basato sul gradiente coniugato, eventualmente preconditionato (in MATLAB, sono disponibili numerose alternative);
- (c) Metodo SOR, verificando l'influenza del parametro  $\omega$  di sovrarilassamento.

## Interpolazione Bilineare

Per la determinazione delle temperatura nei punti indicati dalla norma, che in generale *non* coincidono con i centroidi delle celle nei quali sono disposte le variabili, è possibile far ricorso, trattandosi di un mezzo omogeneo ed isotropo, alla cosiddetta *Interpolazione Bilineare*, descritta nel seguito.

In matematica, l'*Interpolazione Bilineare* rappresenta la naturale estensione dell'*Interpolazione Lineare* per interpolare funzioni di due variabili su una griglia regolare. Essa trova ampio impiego, ad esempio, nell'elaborazione digitale dell'immagine, e costituisce la metodologia fondamentale per il ridimensionamento di immagini. Essa, in tale ambito, è anche chiamata *Bilinear Filtering* o *Bilinear Texture Mapping*.

Con riferimento alla figura 3, si supponga di voler determinare il valore della temperatura  $T$  nel punto  $P(x, y)$ , assumendo noti i valori di temperatura nei quattro punti  $Q_{11} = (x_1, y_1)$ ,  $Q_{12} = (x_1, y_2)$ ,  $Q_{21} = (x_2, y_1)$  e  $Q_{22} = (x_2, y_2)$ .

Si può pensare di effettuare dapprima un'interpolazione lineare lungo  $x$ , ottenendo:

$$T(R_1) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{11}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{21})$$

dove  $R_1 = (x, y_1)$ ,

$$T(R_2) \approx \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} T(Q_{12}) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} T(Q_{22})$$

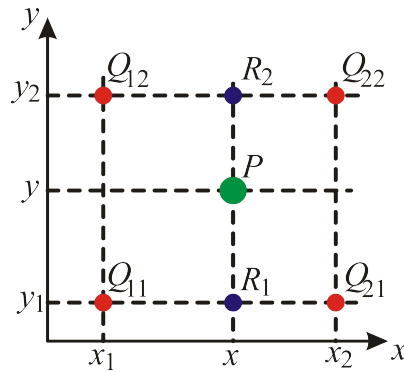


Figura 3: Interpolazione Bilineare:

dove  $R_2 = (x, y_2)$ .

Si procede poi interpolando linearmente in direzione  $y$ :

$$T(P) \approx \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} T(R_1) + \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} T(R_2)$$

Sostituendo nell'ultima espressione le relazioni precedenti, otteniamo la stima di  $T(x, y)$ :

$$\begin{aligned} T(x, y) \approx & \frac{T(Q_{11})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y_2 - y) \\ & + \frac{T(Q_{21})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y_2 - y) \\ & + \frac{T(Q_{12})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x_2 - x)(y - y_1) \\ & + \frac{T(Q_{22})}{(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} (x - x_1)(y - y_1) \end{aligned}$$

È forse utile far notare che:

1. A dispetto del nome, l'interpolante *non* è lineare: in particolare l'interpolante è lineare per linee parallele all'asse  $x$  o all'asse  $y$ , mentre per altre direzioni è *quadratico*.
2. Il risultato dell'interpolazione bilineare è indipendente dall'ordine delle interpolazioni.
3. L'ovvia estensione dell'interpolazione bilineare al caso 3D è chiamata *Interpolazione Trilineare*.

## Riferimenti bibliografici

- [1] F. P. Incropera, D. P. Dewitt, T. L. Bergman, A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 6th Ed., Wiley, (2007).