

Sulla soluzione dell'equazione di Burgers

Si consideri l'equazione di Burgers monodimensionale (1D), espressa dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial u}{\partial x}} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

in forma non-conservativa, e dalla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u^2)} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2)$$

in forma conservativa.

É facile notare che l'equazione (1), ed analogamente la (2), è non lineare, a seguito della presenza del termine convettivo, evidenziato in ambedue le formulazioni.

Come procedere quindi?

Proviamo un attimo a considerare l'analogia equazione di trasporto di tipo lineare, nella quale, a differenza dell'equazione di Burgers, il campo di velocità u sia *diverso* dalla grandezza trasportata ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boxed{u \frac{\partial \phi}{\partial x}} = \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \quad (3)$$

La soluzione di questa equazione non presenta alcun problema, visto che il termine advettivo è *lineare*.

Come affrontare quindi l'equazione (1) o, analogamente, la (2)?

É sufficiente riscrivere l'eq. (1) nel modo seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \boxed{u^* \frac{\partial u}{\partial x}} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

dove u^* è l'*ultimo valore disponibile*, che quindi sarà, nel calcolo del valore u^{n+1} :

1. $u^* = u^n$, cioè valore all'istante precedente, in assenza di *subiterazioni*.
2. $u^* = u_{k-1}^{n+1}$, cioè valore all'iterazione precedente, mentre sto calcolando u_k^{n+1} , in presenza di *subiterazioni*, con l'ovvia avvertenza che per $k = 1$ $u_0^{n+1} \equiv u^n$.