

# Introduzione al corso di statica

- grandezze scalari  $\longrightarrow$  numeri reali
- vettoriali  $\longrightarrow$ 
  - numero reale (positivo)
  - direzione
  - verso

Vettori  $\longrightarrow$  Forze, spostamenti

Rappresentazione di un vettore attraverso un segmento orientato

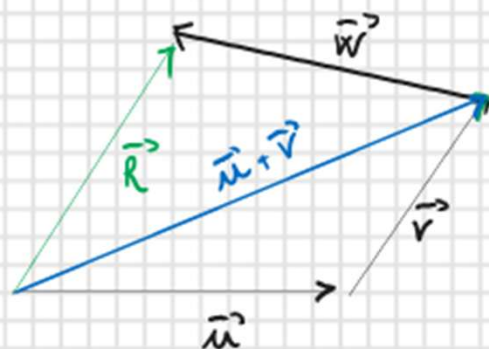
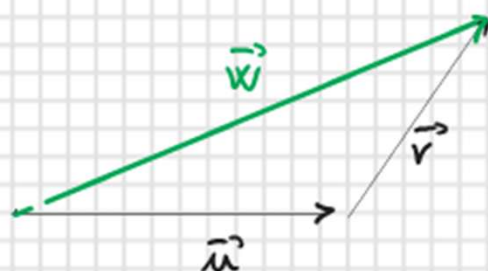


Intensità (modulo)  $|\vec{V}|$

$\vec{n}$  versore  $\longrightarrow$  vettore di lunghezza unitaria  
 $|\vec{n}| = 1$

Operazioni con i vettori

- Somma  $\vec{W} = \vec{u} + \vec{v}$



$$\vec{R} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$\vec{R}$  vettore risultante

Poligono delle forze

Dispongo i vettori in successione

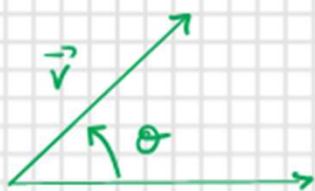
- Moltiplicazione  $\vec{v}$  per uno scalare  $k$

$$\vec{w} = k \vec{v}$$

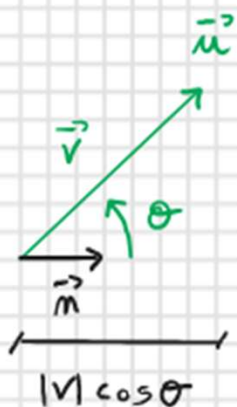
$$|\vec{w}| = k |\vec{v}|$$

- Prodotto scalare tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta \quad \text{Positivo, negativo, nullo}$$



Se i vettori sono perpendicolari:  
prodotto scalare è nullo ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ )



$$\vec{v} \cdot \vec{m} = \vec{v} \cos \theta \longrightarrow |\vec{m}| = 1$$

Prodotto scalare restituisce uno scalare

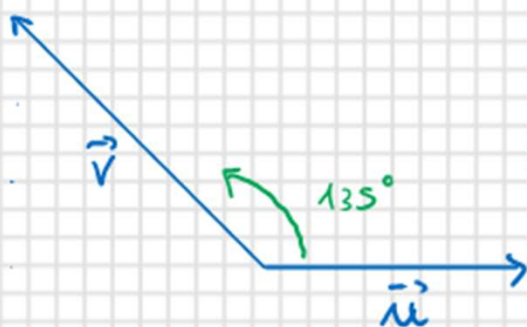
Esempio



$$|\vec{u}| = 2$$

$$|\vec{v}| = 2\sqrt{2}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cos 45^\circ = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

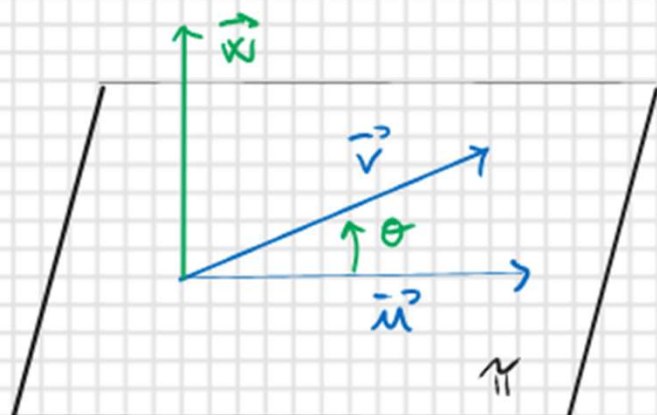


$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 2\sqrt{2} \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -4$$

• Prodotto vettoriale tra  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

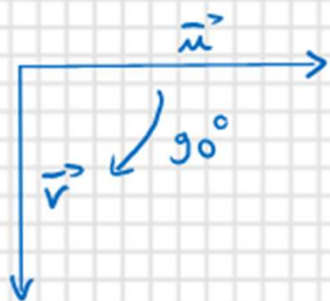
$$|\vec{w}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta$$



$\vec{w}$  è perpendicolare  
al piano  $\pi$  che contiene  
 $\vec{u}$  e  $\vec{v}$

Prodotto vettoriale nullo se i due vettori  
sono paralleli

Convenzione  $\vec{u}$  ruota su  $\vec{v}$  in senso antiorario  
 $\vec{w}$  uscente dal piano  $\pi$ .



$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$$

$$|\vec{w}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$$

$\vec{w}$  entrante nel foglio

Prodotto vettoriale restituisce un vettore

## Rappresentazione cartesiana dei vettori

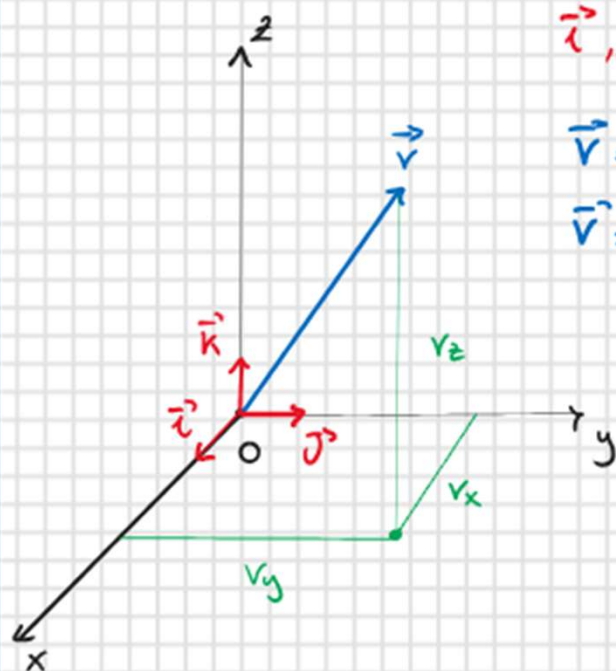
$\{0, x, y, z\}$  Terza cartesiana

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  versori

$$\vec{V} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{V} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$v_x, v_y, v_z$  componenti del vettore lungo gli assi



$$v_x = \vec{V} \cdot \vec{i}$$

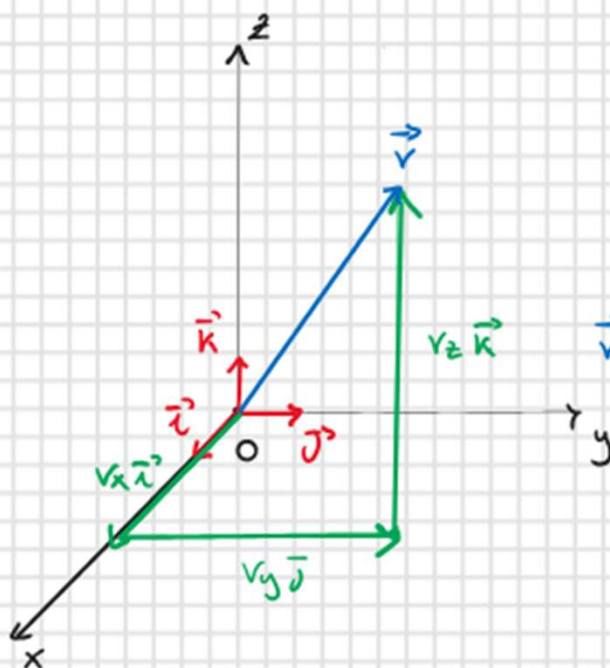
$$v_y = \vec{V} \cdot \vec{j}$$

$$v_z = \vec{V} \cdot \vec{k}$$

\*

$$v_x = \vec{V} \cdot \vec{i} = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \cdot \vec{i}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{i} &= 1 \\ \vec{i} \cdot \vec{j} &= 0 \\ \vec{i} \cdot \vec{k} &= 0 \end{aligned}$$



$\vec{V}$  come somma dei 3 vettori verdi

- Modulo del vettore  $\vec{v}$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \longrightarrow |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

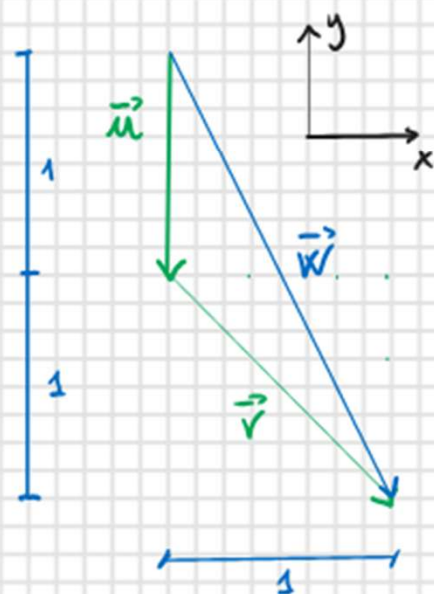
Operazioni con i vettori

- Somma di 2 vettori  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{w} = (u_x + v_x) \vec{i} + (u_y + v_y) \vec{j} + (u_z + v_z) \vec{k}$$



$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

$$|\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{u} = 0 \vec{i} - 1 \vec{j}$$

$$\vec{v} = 1 \vec{i} - 1 \vec{j}$$

$$\vec{w} = 1 \vec{i} - 2 \vec{j}$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5}$$

- Moltiplicazione di un vettore  $\vec{v}$  per uno scalare  $h$

$$\vec{w} = h \vec{v} = h v_x \vec{i} + h v_y \vec{j} + h v_z \vec{k}$$

Si moltiplicano le componenti per  $h$

• Prodotto scalare  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}) \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) = \\ &= u_x \vec{i} \cdot (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) + \dots = \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z \end{aligned}$$

$$u_x \vec{i} \cdot v_x \vec{i} = u_x v_x$$

$$u_x \vec{i} \cdot v_y \vec{j} = 0$$

$$u_x \vec{i} \cdot v_z \vec{k} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z$$

• Prodotto vettoriale  $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{w} = w_x \vec{i} + w_y \vec{j} + w_z \vec{k}$$

Ricavare le 3 componenti del vettore

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$w_x = (u_y v_z - v_y u_z)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$w_y = -(u_x v_z - v_x u_z)$$

Attenzione al segno -

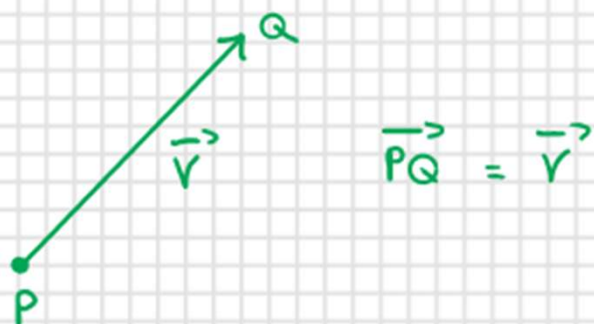
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$w_z = (u_x v_y - v_x u_y)$$

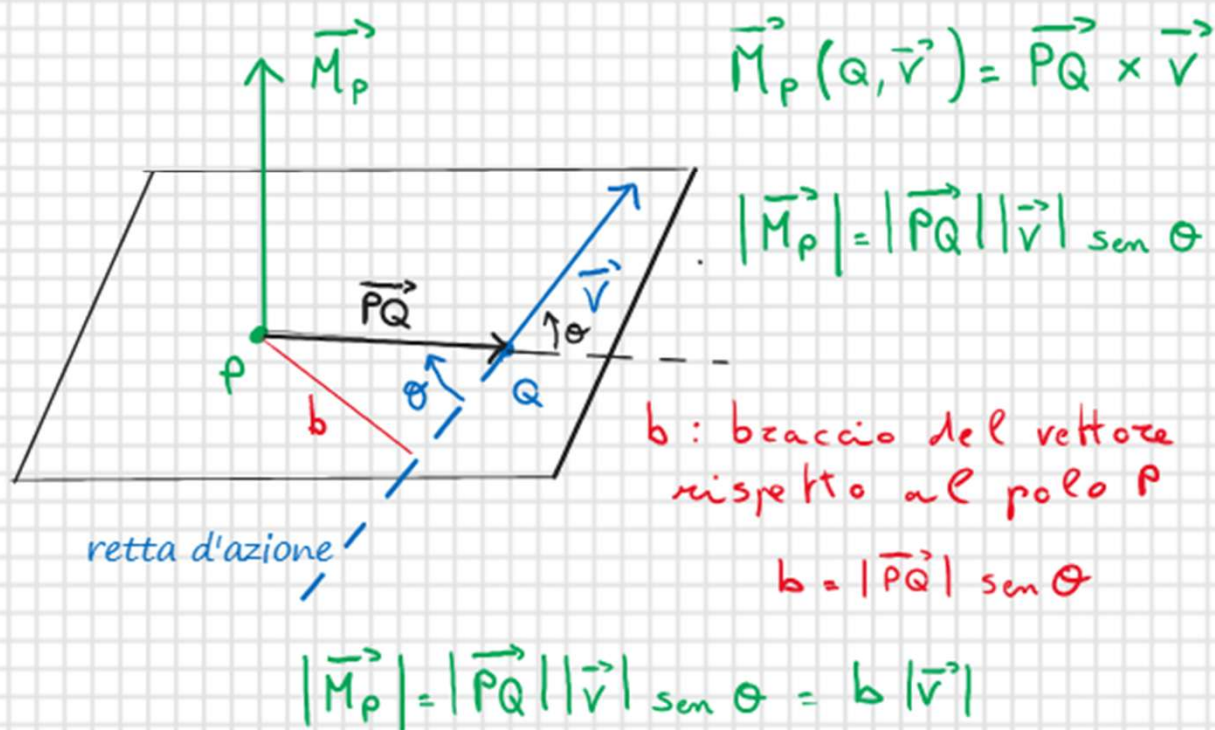
$$\vec{w} = \underbrace{(u_y v_z - v_y u_z)}_{w_x} \vec{i} - \underbrace{(u_x v_z - v_x u_z)}_{w_y} \vec{j} + \underbrace{(u_x v_y - v_x u_y)}_{w_z} \vec{k}$$

## Vettori applicati $(P, \vec{v})$

$P \rightarrow$  punto di applicazione



Momento di un vettore  $\vec{v}$  applicato in  $Q$  rispetto ad un polo  $P$ .

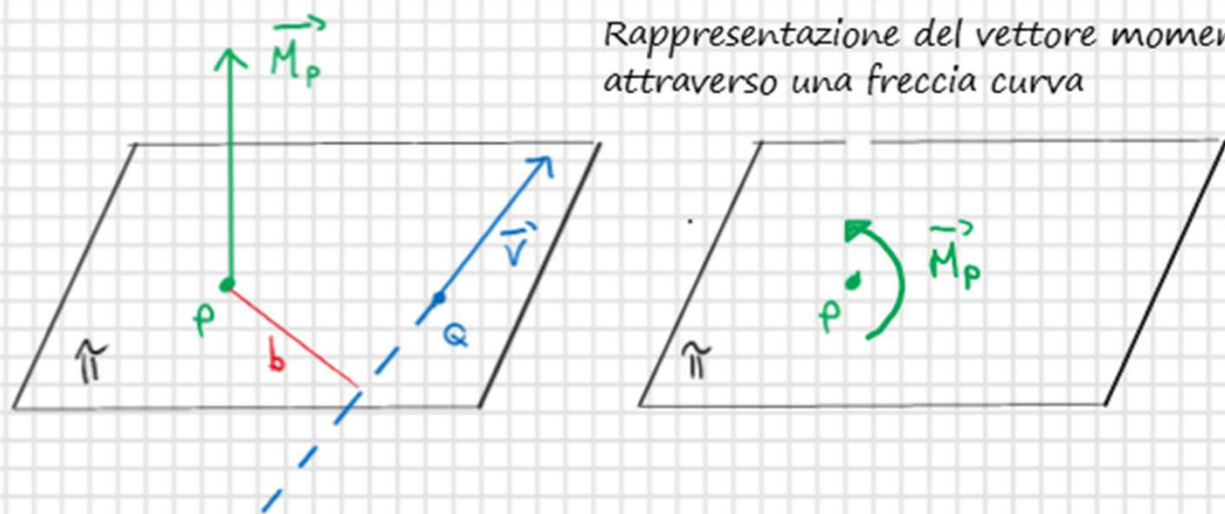


Traslare il vettore lungo la sua retta d'azione non altera il modulo del vettore momento (non modifica il braccio  $b$ )

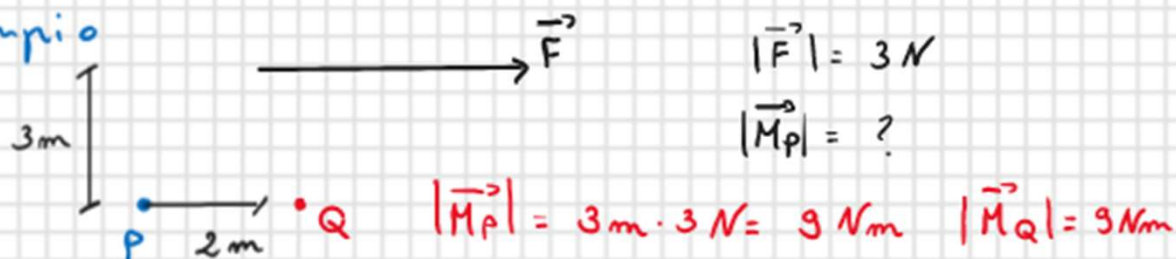
$b$  è perpendicolare alla retta d'azione del vettore  $\vec{v}$

Rotazione antioraria del vettore  $\vec{v}$  intorno al polo  $P$ , vettore  $\vec{M}_P$  uscente dal foglio.

Rappresentazione del vettore momento attraverso una freccia curva



Esempio



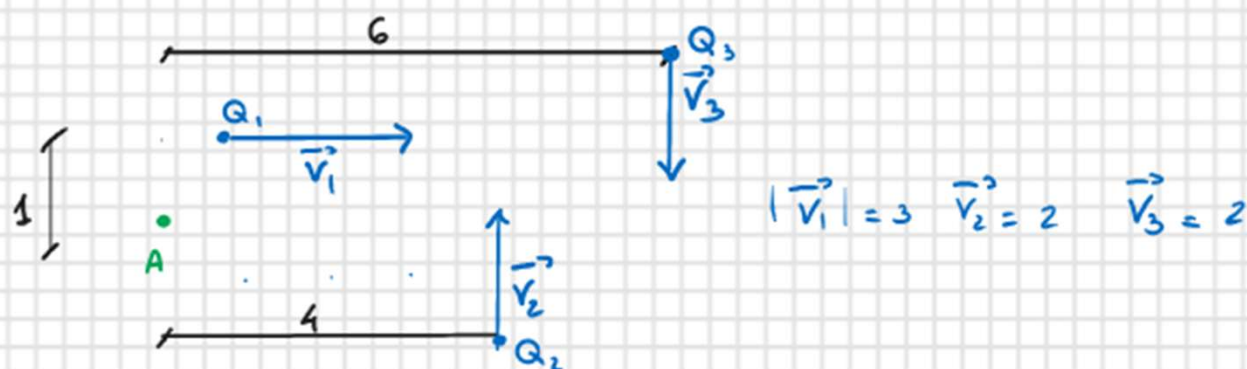
Rotazione oraria della forza attorno al polo P, vettore  $\vec{M}_P$  entrante nel foglio

Momento di un sistema di vettori S rispetto ad un polo P

$S = \{(Q_1, \vec{v}_1), (Q_2, \vec{v}_2), \dots, (Q_n, \vec{v}_n)\}$  Sistema di vettori

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \vec{PQ}_i \times \vec{v}_i \quad m = \text{no di vettori}$$

## Esempio



$$|\vec{v}_1| = 3 \quad |\vec{v}_2| = 2 \quad |\vec{v}_3| = 2$$

+ )  $|\vec{M}_A| = -1 \cdot 3 + 4 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = -7$  Fisso a piacere una convenzione per il segno

Il segno negativo indica che il momento ha verso opposto rispetto a quello assunto per convenzione

Il momento rispetto ad A sarà rappresentato da una freccia curva che ruota in senso orario

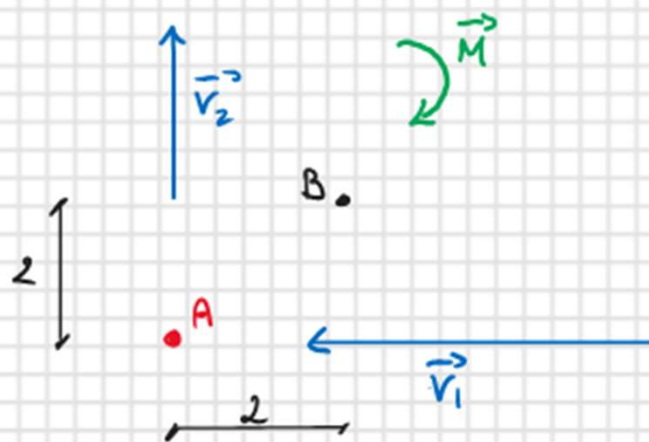


Vettore risultante  $\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$



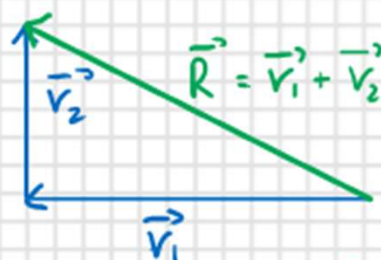
$$\vec{R} = \vec{v}_1 \quad |\vec{R}| = 3$$

Sistema con momento concentrato  $\vec{M}$



$$|\vec{v}_1| = 4 \quad |\vec{v}_2| = 2 \quad |\vec{M}| = 3$$

Risultante  $\vec{R}$



$$|\vec{R}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$$

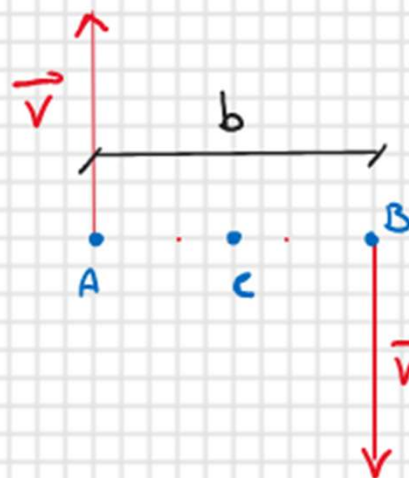
+ )  $|\vec{M}_B| = -2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 3 = -15$

$$+ \uparrow) |\vec{M}_A| = 0.2 + 0.4 - 3 = -3$$

$$\vec{M}_B \neq \vec{M}_A \neq \vec{M}_P \quad \forall P$$

In generale il momento risultante dipende dal polo scelto

Coppia - Sistema particolare



Sistema con risultante nulla  $\vec{R} = 0$

$$|\vec{V}| = 2$$

$$+ \uparrow) |\vec{M}_A| = -2b$$

$$|\vec{M}_B| = -2b$$

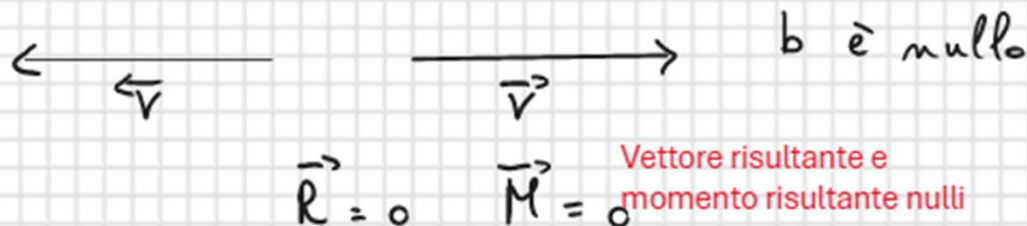
$$|\vec{M}_C| = -2 \frac{b}{2} - 2 \cdot \frac{b}{2} = -2b$$

$$\vec{M}_A = \vec{M}_B = \vec{M}_P \quad \forall P$$

$$|\vec{M}| = b \cdot |\vec{V}|$$

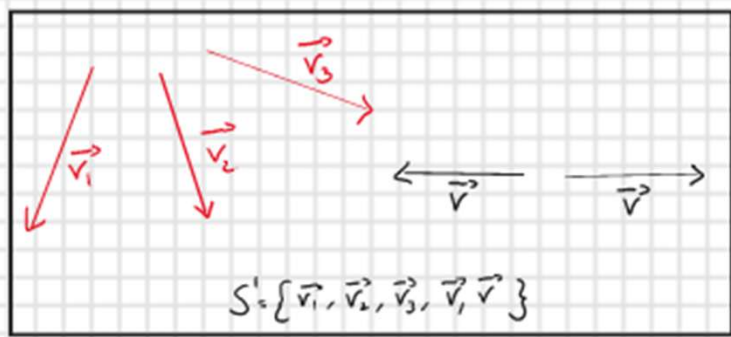
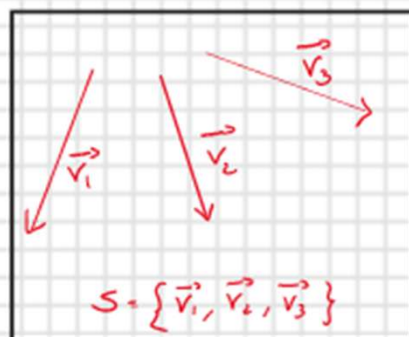
In una coppia il momento risultante è dipendente dal polo scelto, dipende solo dalla distanza  $b$  tra i due vettori

Coppia a braccio nullo



Vettore risultante e momento risultante nulli

Un sistema non viene alterato dall'aggiunta di una coppia a braccio nullo

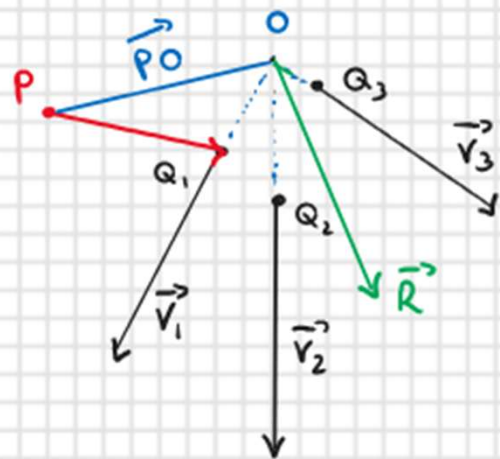


*Se  $S'$  sono equivalenti*

## Teorema di Varignon

Teorema fondamentale della statica che afferma che Il momento risultante di un sistema di vettori applicati rispetto a un polo qualsiasi P è uguale al momento del vettore risultante del sistema, a condizione che quest'ultimo sia pensato applicato in un punto della sua retta d'azione (asse centrale) tale da rendere i due sistemi equivalenti.

*Nel caso di vettori concorrenti in un punto O, caso in basso, abbiamo che il momento risultante di un sistema di vettori le cui rette d'azione concorrono in un punto O, calcolato rispetto a un polo qualsiasi P, è uguale al momento del loro risultante applicato nel punto di concorso O.*



Per un sistema  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

$$\begin{aligned}\vec{M}_P &= \sum \vec{PQ}_i \times \vec{v}_i = \sum \vec{PO} \times \vec{v}_i = \\ &= \vec{PO} \times \sum \vec{v}_i = \vec{PO} \times \vec{R}\end{aligned}$$

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{v}_i \quad \text{Risultante}$$

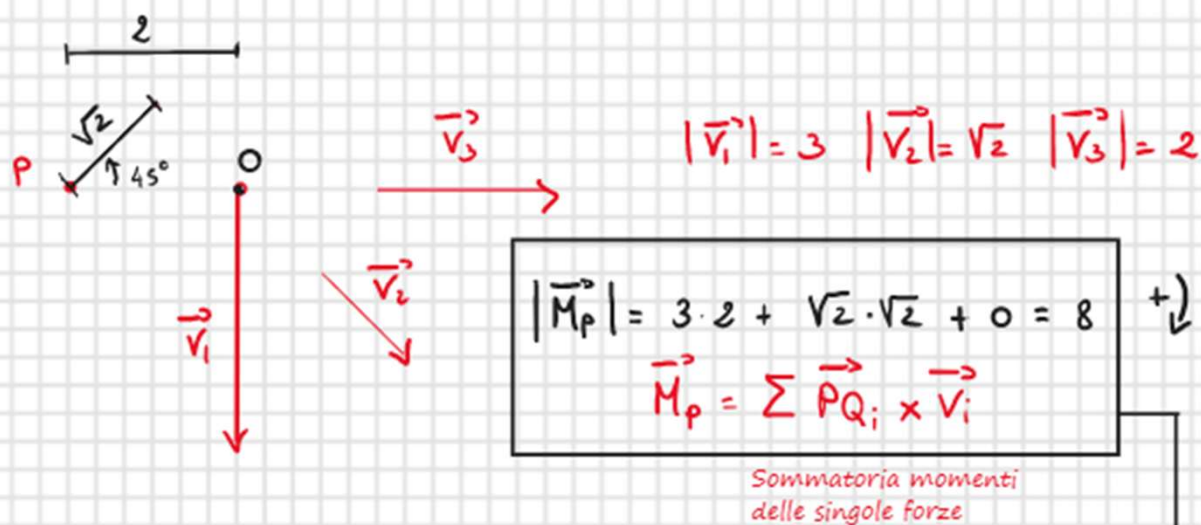
Momento  
risultante

$$\vec{M}_P = \sum \vec{PQ}_i \times \vec{v}_i = \vec{PO} \times \vec{R}$$

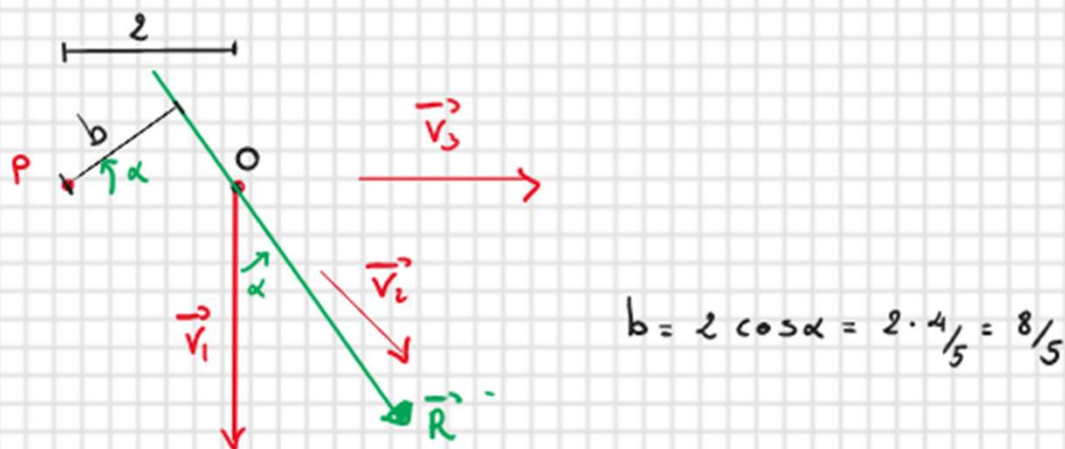
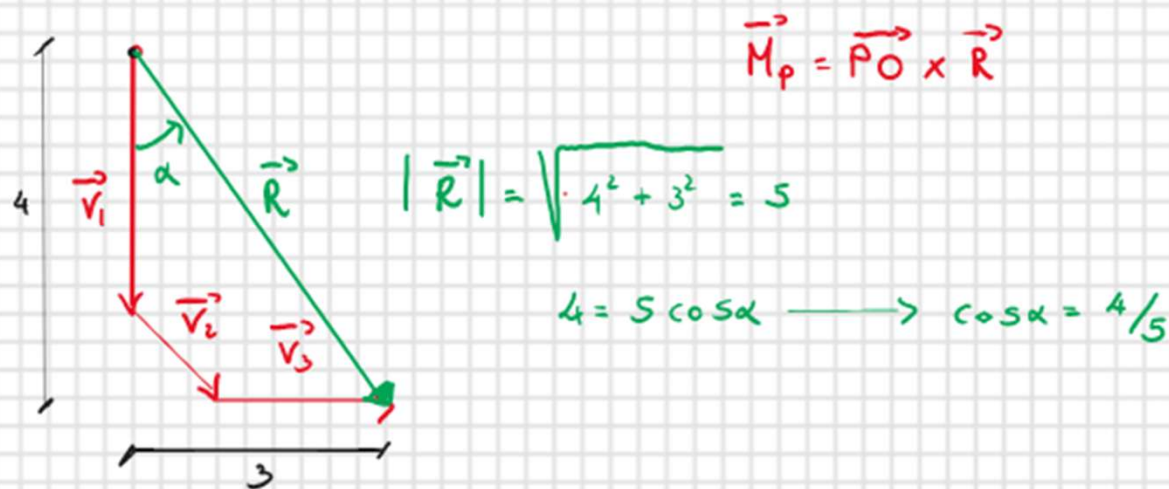
Sommatoria momenti  
delle singole forze

momento del  
vettore risultante

## Applicazione del teorema



Ora calcoliamo il momento risultante  $\vec{M}_P$  come momento del vettore risultante  $\vec{R}$



$|\vec{M}_P| = |\vec{P} \times \vec{R}| = \frac{8}{5} \cdot 5 = 8$

uguali