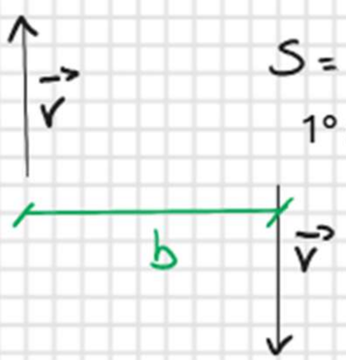
Equivalenza tra sistemi di vettori

Condizione necessaria e sufficiente affinché 2 sistemi di vettori S e S' siano equivalenti è che

$$\boxed{\vec{R} = \vec{R}'} \quad e \quad \boxed{\vec{M}_P = \vec{M}'_P \quad \forall P}$$

I due sistemi hanno:
stesso vettore risultante
stesso momento risultante rispetto ad un polo P qualsiasi

Esempi semplici di sistemi equivalenti



$S = \{\vec{v}, \vec{v}\}$
1° sistema

$S' = \{\vec{M}\}$
2° sistema
$|\vec{M}| = b|\vec{v}|$

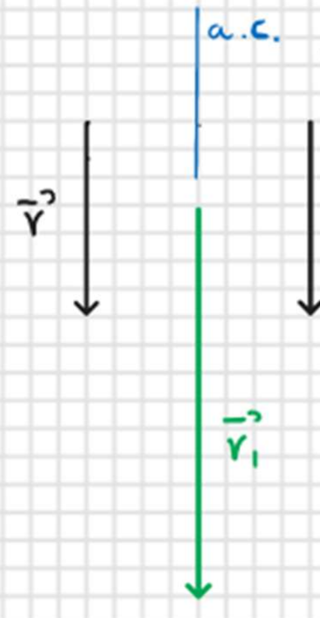
$S \equiv S'$ Equivalenti

I due sistemi hanno:
stesso vettore risultante

$\vec{R} = 0 \quad \vec{R}' = 0$

stesso momento risultante

$\vec{M} = b\vec{v} \quad \vec{M}' = b\vec{v}$



$S = \{\vec{v}, \vec{v}\}$
1° sistema
$|\vec{v}| = 1$

$S' = \{\vec{v}_1\}$
$|\vec{v}_1| = 2$

$S \equiv S'$ Equivalenti

$\vec{R} = \vec{R}'$

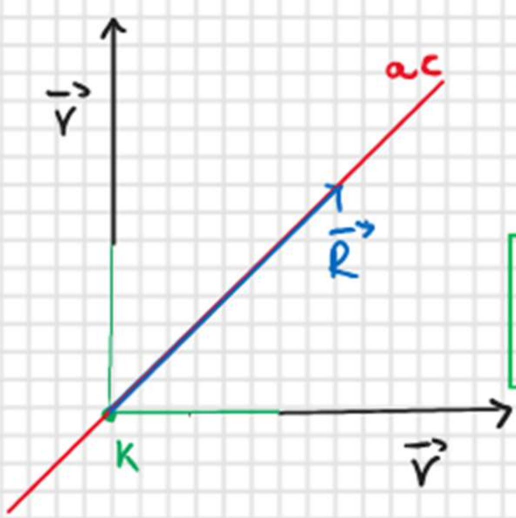
$\vec{M}_P = \vec{M}'_P \quad \forall P$

"Ogni sistema di vettori con $\vec{R} \neq 0$ ammette un sistema equivalente formato dal solo vettore risultante $\vec{R}$, applicato nell'asse centrale"

Per un sistema piano, se esiste l'asse centrale, il momento risultante $\vec{M}_P$ rispetto ad un punto sull'asse centrale è nullo ($\vec{M}_P = \vec{0}$)

Calcolare l'asse centrale

Vettori complanari che convergono in un punto

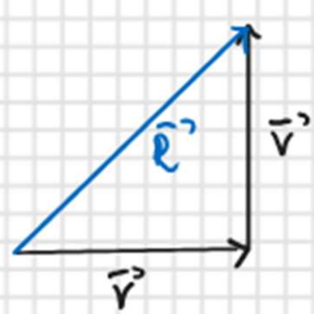


• K appartiene all'asse centrale

$$\vec{M}_K = 0$$

• Asse centrale è parallelo al vettore risultante $\vec{R}$

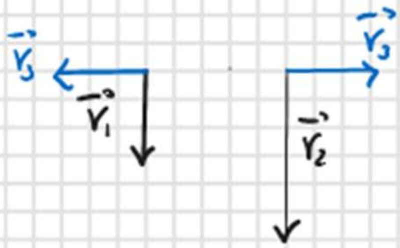
$$S\{\vec{v}, \vec{v}\} \doteq S'\{\vec{R}\}$$

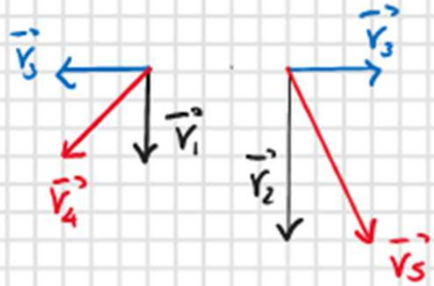


Poligono delle forze

Vettori complanari paralleli e concordi

Aggiungo una coppia di braccio nulla
che non modifica il sistema iniziale

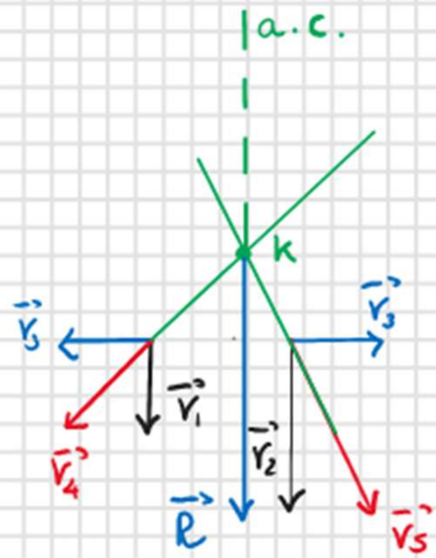




$$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

$$S'\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3\} = S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

$$S'\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_3\} = S''\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$$



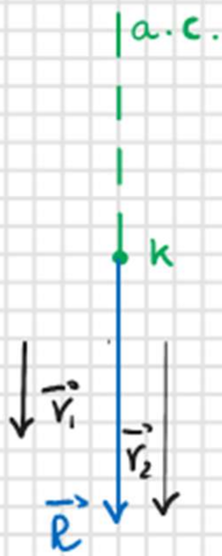
K appartiene all'asse centrale

$$\vec{M}_K = 0$$

$$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_4 + \vec{v}_5$$

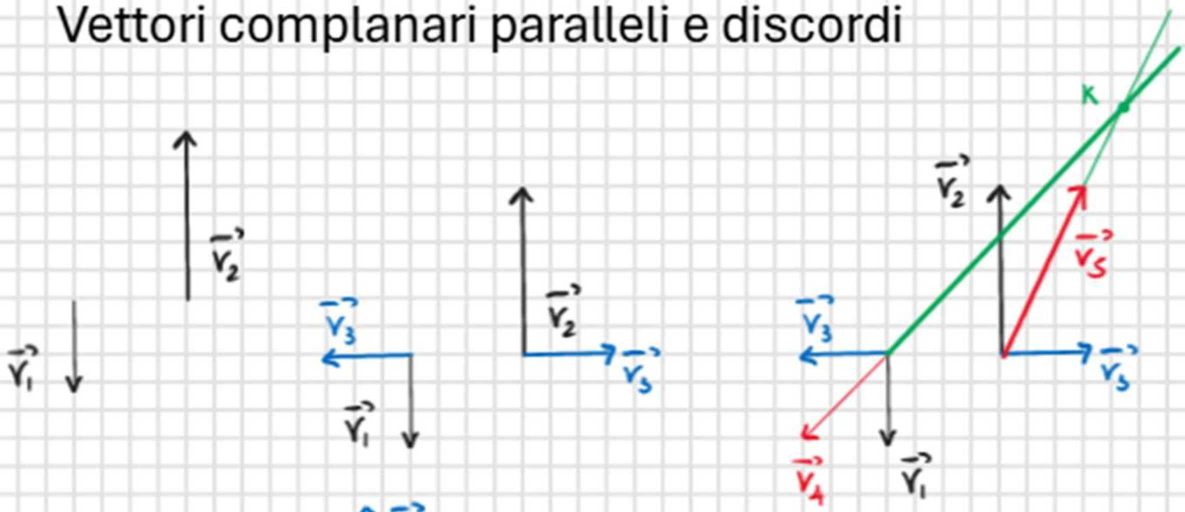
$$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = S'''\{\vec{R}\}$$

Asse centrale risulta tra i 2 vettori, spostato verso il vettore di intensità maggiore

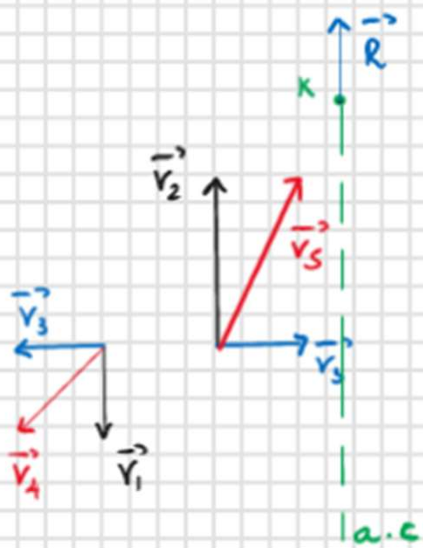


$$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = S'''\{\vec{R}\}$$

Vettori complanari paralleli e discordi



$\vec{v}_4 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ $\qquad$ $\vec{v}_5 = \vec{v}_3 + \vec{v}_2$



$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_4 + \vec{v}_5$

$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

$\vec{R} = \vec{v}_4 + \vec{v}_5$

$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \equiv S''\{\vec{R}\}$

Asse centrale è esterno ai due vettori, spostato sul lato del vettore con intensità maggiore

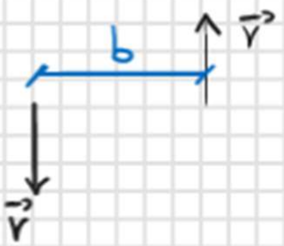
Caso particolare $\vec{R} = 0$

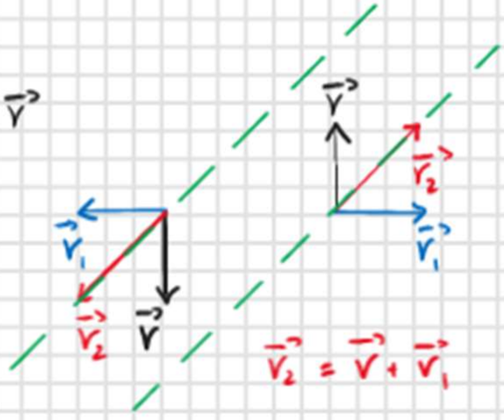
Rette sono parallele

asse centrale non esiste

$\vec{R} = 0 \quad \vec{M}_P \neq 0$

$|\vec{M}_P| = |\vec{v}|\, b \quad \forall P$



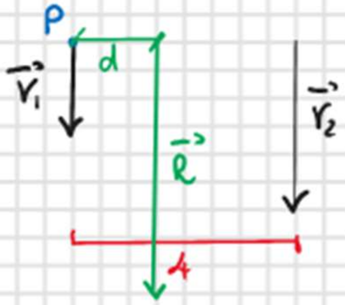


$\vec{v}_2 = \vec{v} + \vec{v}_1$

$S\{\vec{v}, \vec{v}\} \equiv$ Coppia

Calcolo asse centrale

$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$



Cercare sistema equivalente formato dal solo vettore risultante $\vec{R}$ $(S'\{\vec{R}\})$

$|\vec{v}_1| = 1 \quad |\vec{v}_2| = 2$

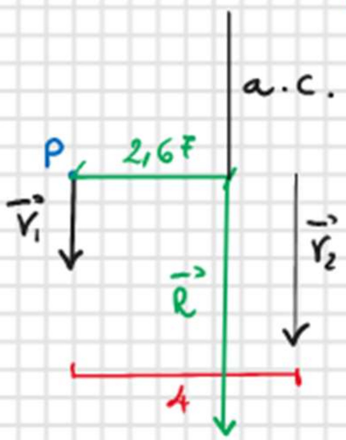
$\vec{R} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad |\vec{R}| = 3$

Fissiamo un punto P nel piano, a piacere

Devo trovare il valore di d per il quale il momento di $\vec{R}$ rispetto al polo P è lo stesso di quello dei vettori $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, rispetto allo stesso polo P

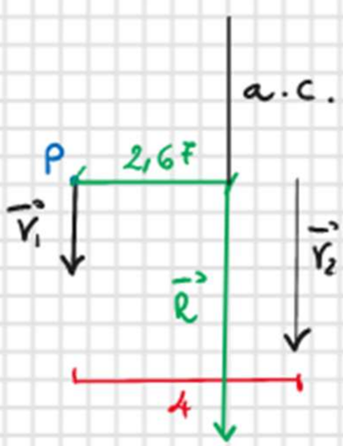
$\vec{M}_P \equiv \vec{M}_P' \longrightarrow 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 = R \cdot d$ d è l'incognita

$d = 8/3 \simeq 2,67$



$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} \equiv S'\{\vec{R}\}$

Sistema risultante $\longrightarrow$ Sistema equilibrante

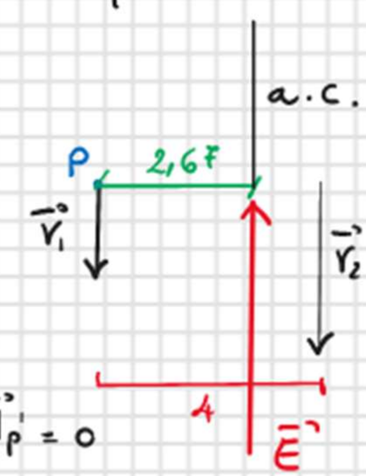


Vettore equilibrante

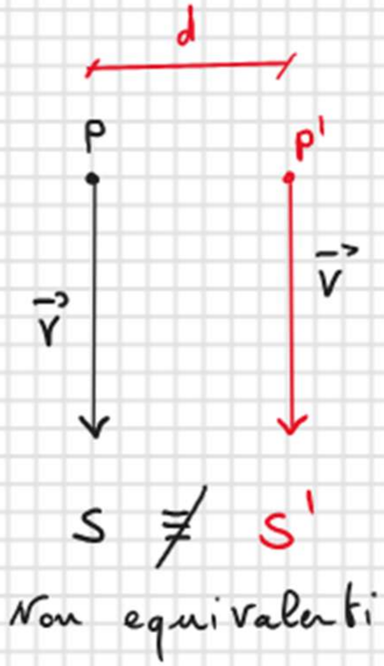
$\vec{E} = -\vec{R}$

$S\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

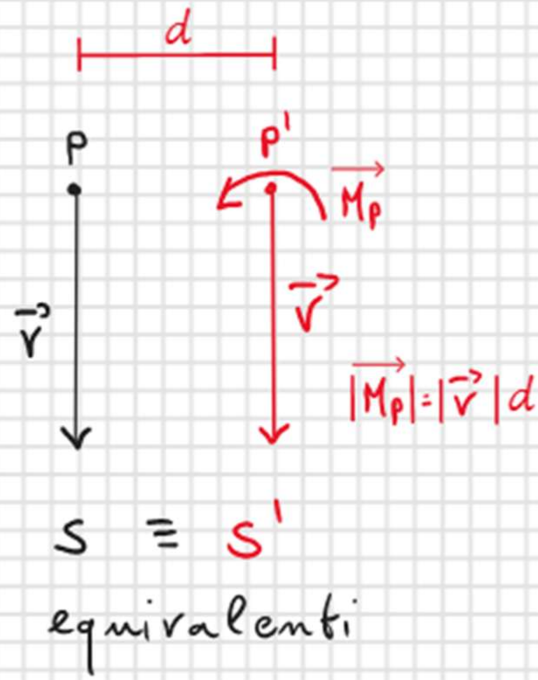
$S'\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{E}\} \quad \vec{R}' = 0 \quad \vec{M}_P' = 0$



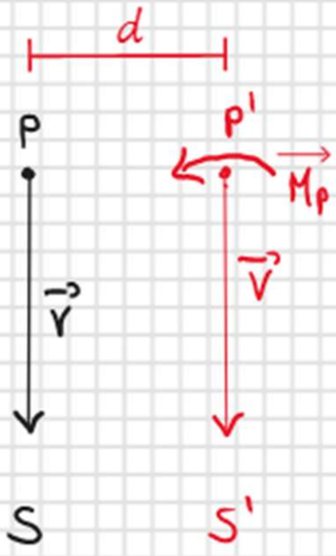
Traslazione di un vettore da P a P'



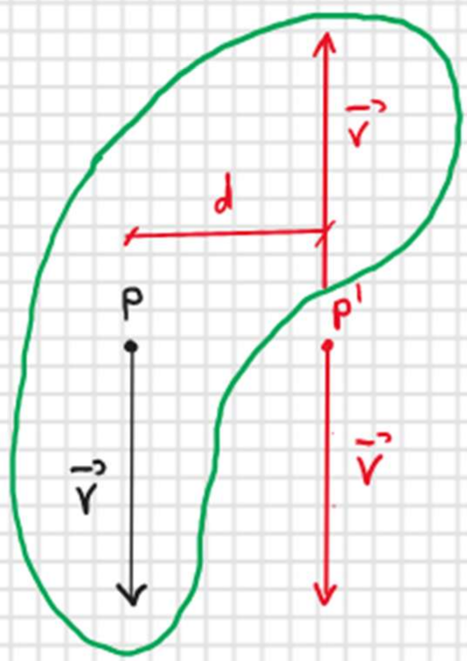
Per renderli equivalenti devo aggiungere un momento concentrato



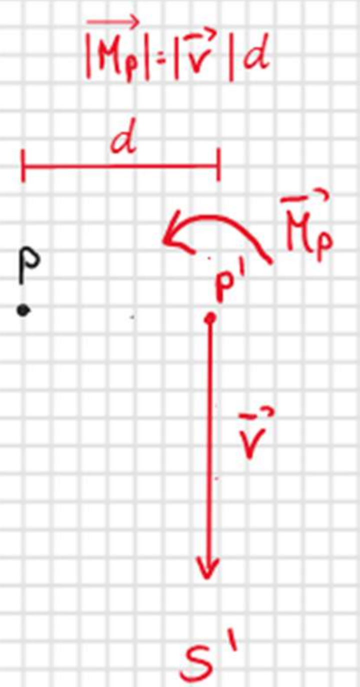
Equivalenti



Devo dimostrare che i due sistemi sono equivalenti

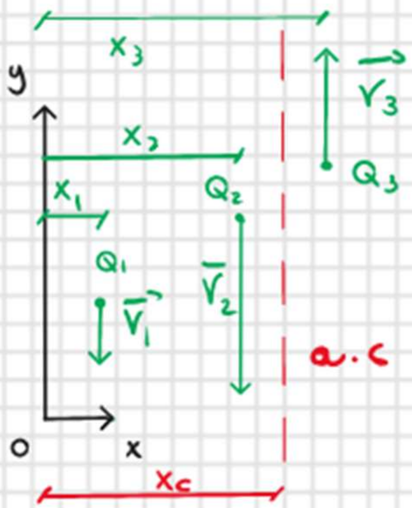


Introduco in P' una coppia di braccio nullo che non altera il sistema iniziale (vettore nero in P)



Trasformo la coppia di braccio d evidenziata in verde nel momento concentrato $\vec{M}_p$

Centro di un sistema di vettori paralleli



Convenzione formula *

$\vec{v_i} > 0$ verso il basso

$x_i \gtrless 0$

Calcoliamo la posizione dell'asse centrale x_C

$$V_1 \cdot X_1 + V_2 X_2 - V_3 X_3 = R \cdot X_c$$

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i x_i}{\sum v_i} \quad *$$

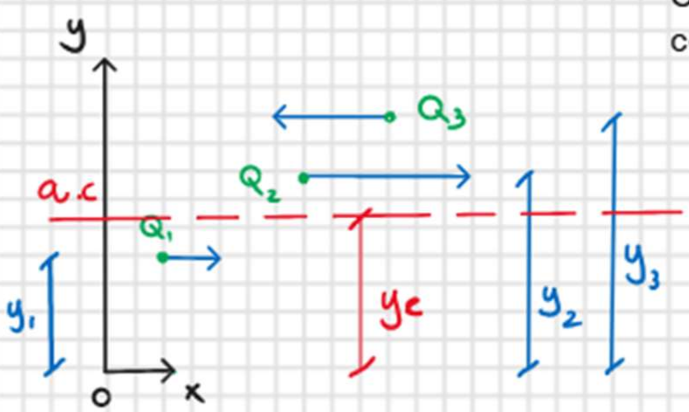
n = numero di vettori

Centro del sistema

Punto intorno al quale ruota l'asse centrale al ruotare dei vettori intorno al proprio punto di applicazione

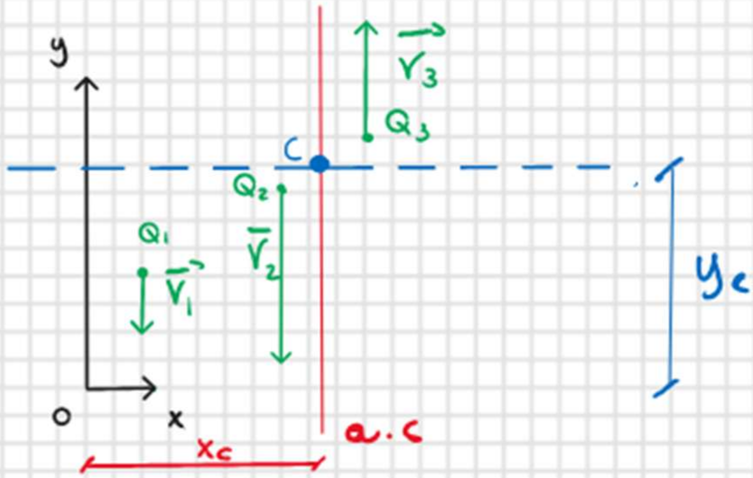
Ruotiamo i vettori di 90° in senso antiorario intorno ai loro punti d'applicazione

Calcoliamo la nuova posizione dell'asse centrale y_C



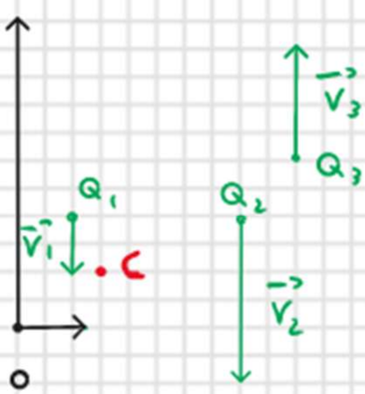
$$y_c = \frac{\sum v_i y_i}{\sum v_i}$$

$v_i > 0$ verso destra



C è il centro del sistema di coordinate x_C e y_C

Esempio



$|\vec{v}_1| = 1 \quad |\vec{v}_2| = 3 \quad |\vec{v}_3|\ 2$

$Q_1(1,2) \quad Q_2(4,2) \quad Q_3(5,3)$

$|\vec{R}| = 2$

$$x_c = \frac{1\cdot 1 + 3\cdot 4 - 2\cdot 5}{1+3-2} = \frac{3}{2} \qquad y_c = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 2 - 2\cdot 3}{1+3-2} = 1$$

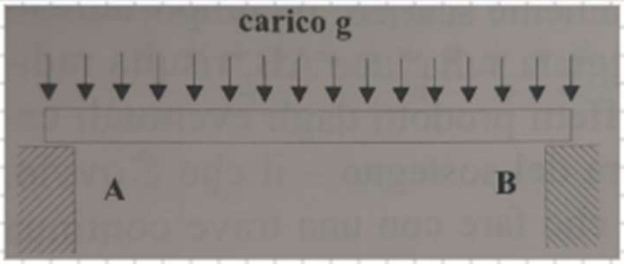
$$C\left(x_c = \frac{3}{2},\ y_c = 1\right)$$

Carichi distribuiti

$q(x)$ funzione che rappresenta l'andamento del carico lungo x

$q(x)$ $[N/m]$

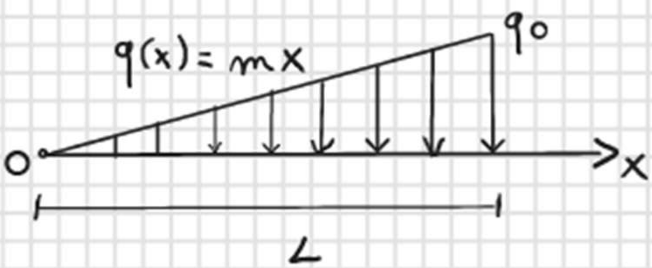
Carico uniformemente distribuito



Peso proprio

Carichi permanenti

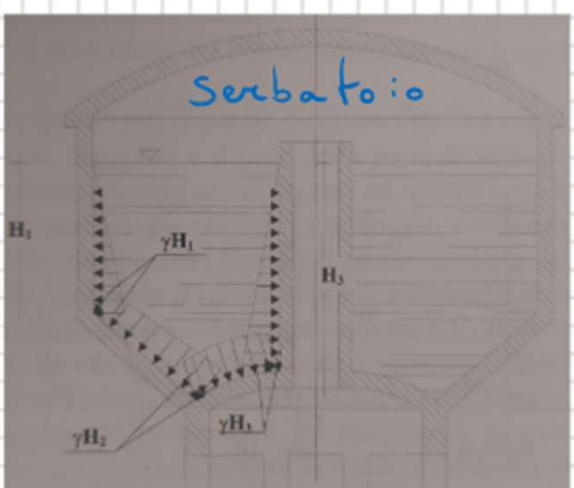
Carico triangolare



Calcolare il valore di m

$q(L) = q_0 = mL \qquad m = q_0/L$

$$q(x) = \frac{q_0}{L}\,x$$



acqua

x

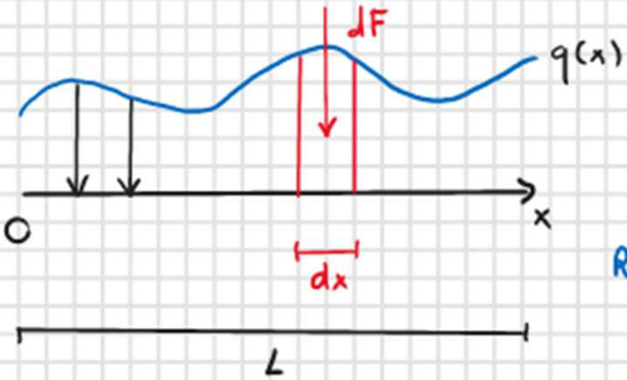
Pressione p

$p(x) = \gamma x$

γ = Peso specifico dell'acqua

$\gamma \simeq 10000\ N/m^3$

Calcolare il carico risultante $\bar{R}$



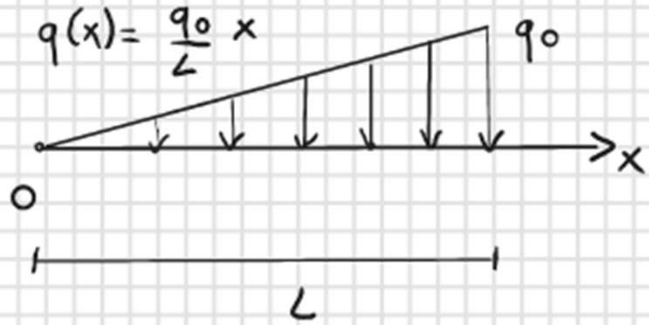
$$dF = q(x)\,dx$$

$$R = \int_0^L dF = \int_0^L q(x)\,dx$$

Carico uniformemente distribuito

$$R = \int_0^L q(x)\,dx = \int_0^L q_0\,dx = q_0\,x\Big|_0^L = q_0 L$$

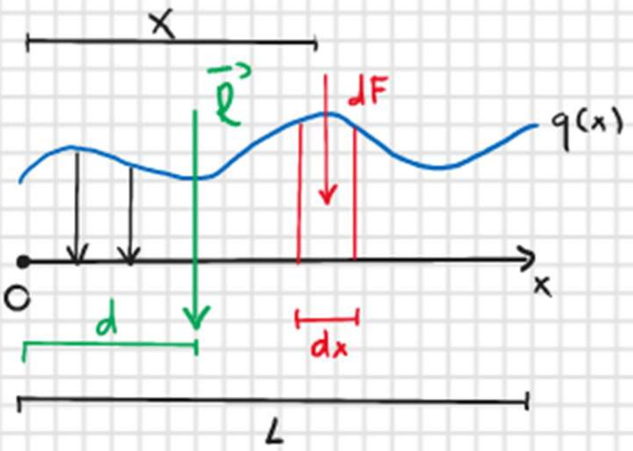
Carico triangolare



Area

$$R = \int_0^L q(x)\,dx = \int_0^L \frac{q_0}{L}\,x\,dx = \frac{q_0}{L}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^L = \frac{q_0 L}{2}$$

Calcolo dell'asse centrale

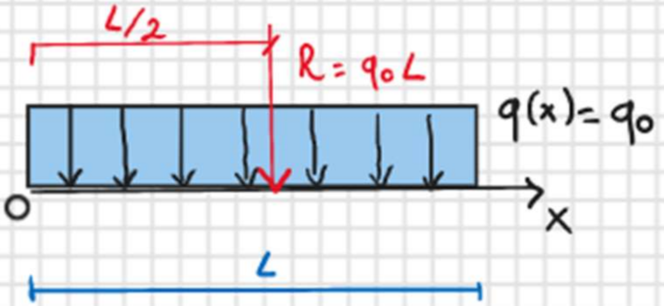


$$\int_0^L x \cdot dF = d \cdot R$$

d è l'incognita

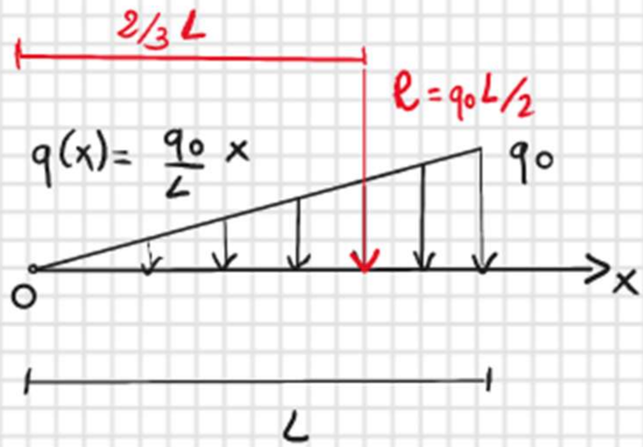
$$\boxed{d = \frac{\int_0^L x \; q(x) \, dx}{R}}$$

Carico uniformemente distribuito



$$d = \frac{\int_0^L x \, q_0 \, dx}{q_0 L} = \frac{q_0 \frac{L^2}{2}}{q_0 L} = \frac{q_0 L}{2}$$

Carico triangolare

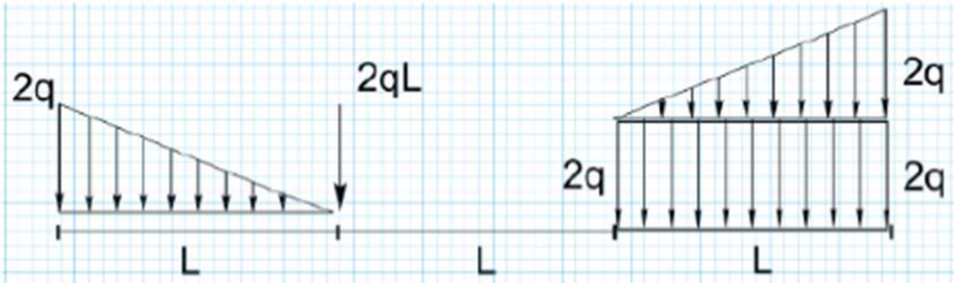


$$d = \frac{\int_0^L x \left(\frac{q_0}{L} x\right) dx}{q_0 L/2} = \frac{\frac{q_0}{L}\frac{L^3}{3}}{q_0 L/2} = \frac{2}{3} q_0 L$$

q(x)

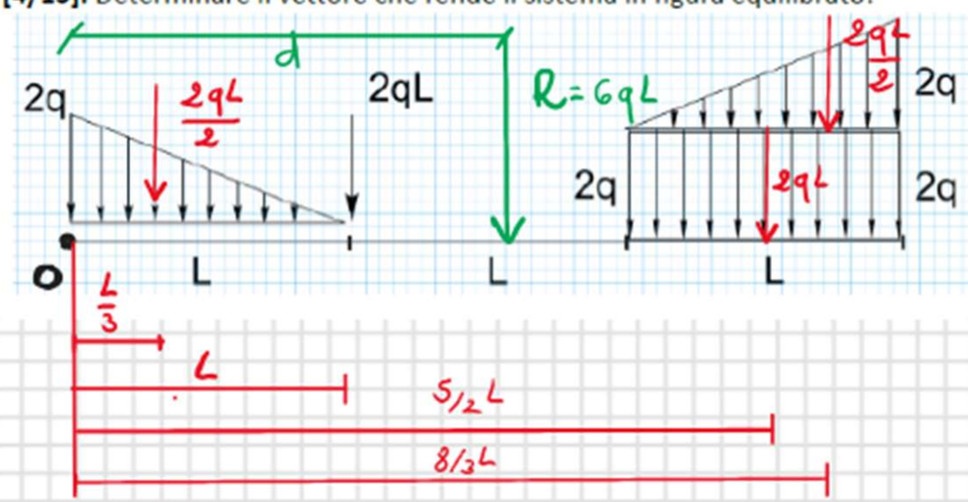
Esempio

Quesito n. 2 [4/15]. Determinare il vettore che rende il sistema in figura equilibrato.



Trasformo i carichi distribuiti in concentrati

Quesito n. 2 [4/15]. Determinare il vettore che rende il sistema in figura equilibrato.



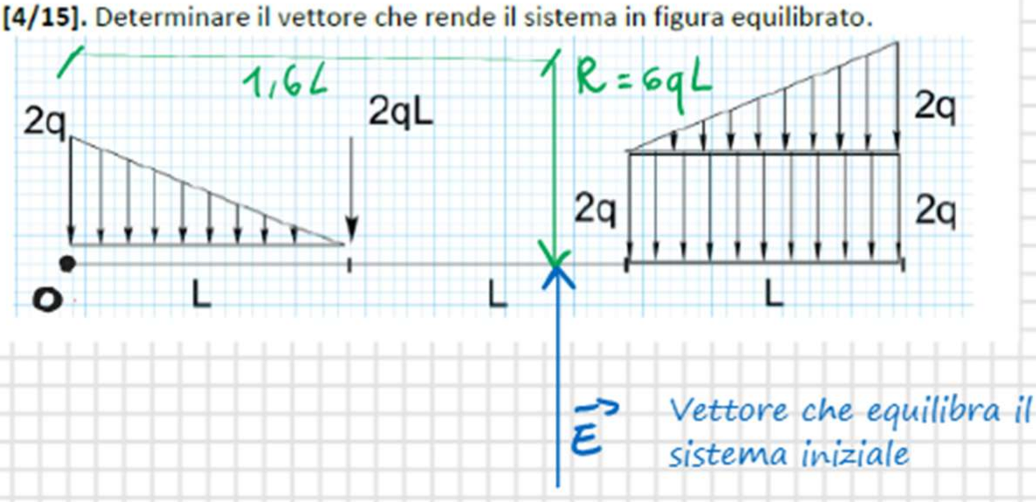
$R = qL + 2qL + 2qL + qL = 6qL$ Risultante

Polo in O

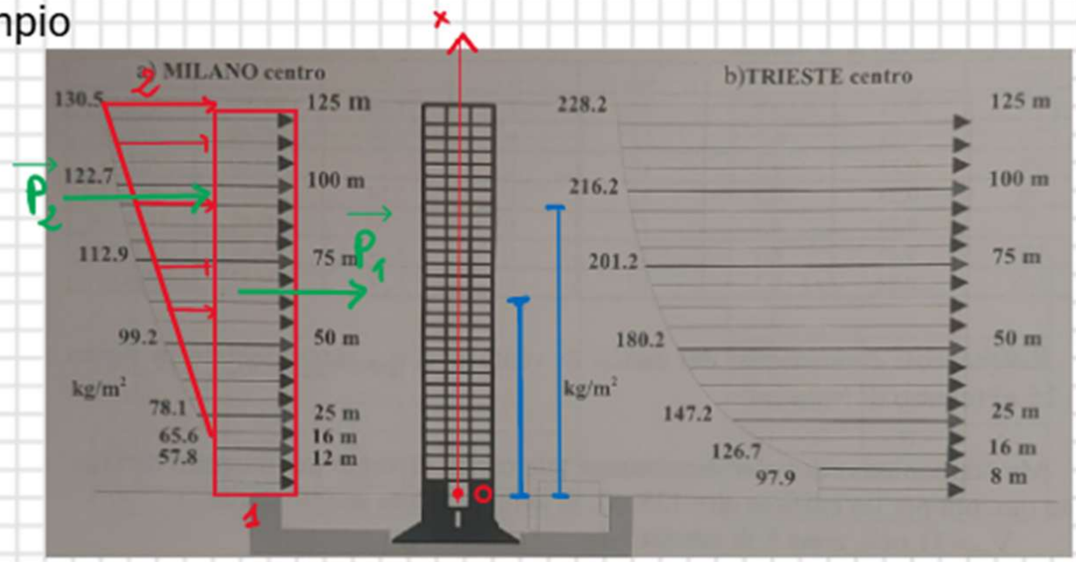
$$\curvearrowleft + \quad qL\cdot\left(\frac{L}{3}\right) + 2qL\cdot L + qL\left(2L+\frac{2}{3}L\right) + 2qL\left(2L+\frac{L}{2}\right) = d\cdot R$$

$d = 5/3\, L \simeq 1{,}6\, L$ Posizione dell'asse centrale

Quesito n. 2 [4/15]. Determinare il vettore che rende il sistema in figura equilibrato.



Esempio



Calcoliamo i carichi concentrati equivalenti

$P_1 = 57{,}8 \cdot 125 = 7225$ kg/m (per metro di facciata)

$P_2 = (130{,}5 - 57{,}8) \cdot (125 - 12)/2 = 4107$ kg/m (per metro di facciata)

$$\boxed{R = P_1 + P_2 = 11332 \text{ kg/m}}$$

Calcolo dell'asse centrale

$$\circlearrowright + \quad 7225 \cdot \left(\frac{125}{2}\right) + 4107\left(12 + \frac{2}{3}(125-12)\right) = d \cdot R = d \cdot 11332$$

$$\boxed{d \simeq 70 \text{ m}}$$