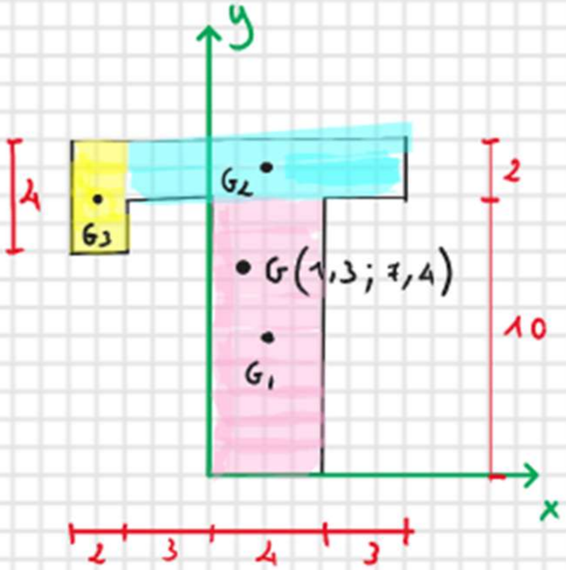
Esercizio: sezione composta

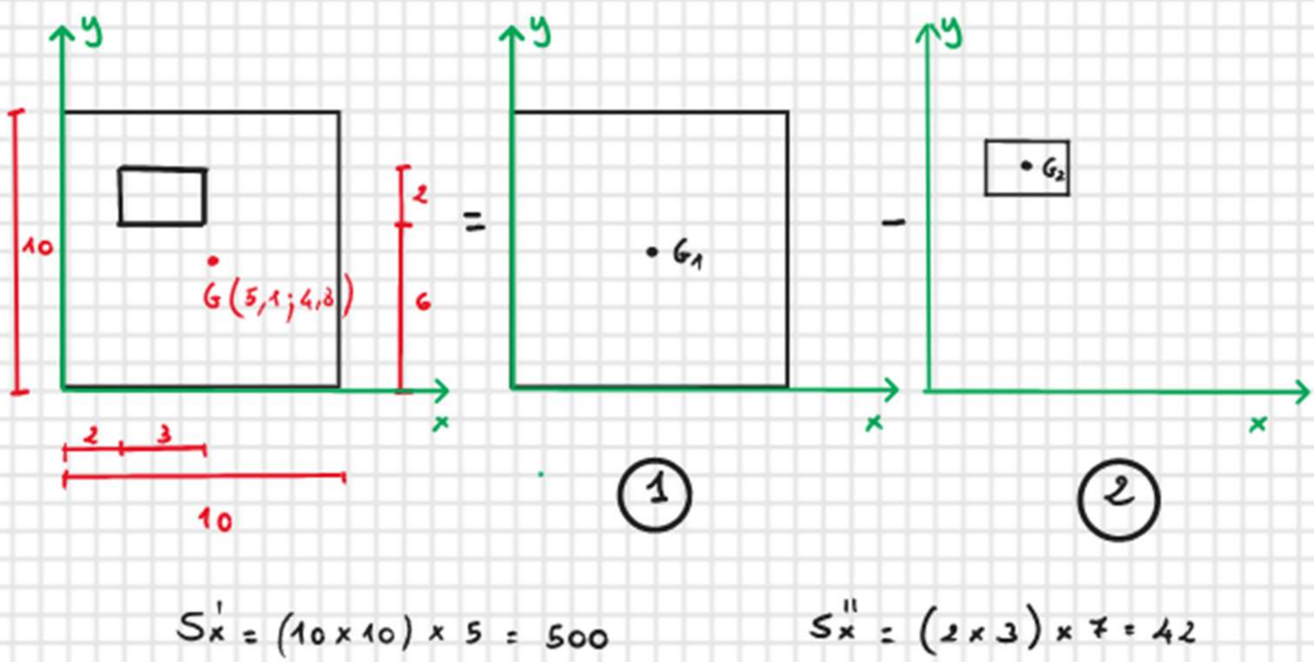


	A_i	x_i	S_{y_i}	y_i	S_{x_i}
1)	40	2	80	5	200
2)	20	2	40	11	220
3)	8	-4	-32	10	80
	68		88		500
	A_{tot}		$S_{y\,tot}$		$S_{x\,tot}$

Baricentro della sezione

$$x_G = \frac{S_{y\,tot}}{A_{tot}} = 1,3 \qquad y_G = \frac{S_{x\,tot}}{A_{tot}} = 7,4$$

Esercizio: sezione cava



$$S_x' = (10 \times 10) \times 5 = 500 \qquad S_x'' = (2 \times 3) \times 7 = 42$$

$$S_y' = (10 \times 10) \times 5 = 500 \qquad S_y'' = (2 \times 3) \times 3,5 = 21$$

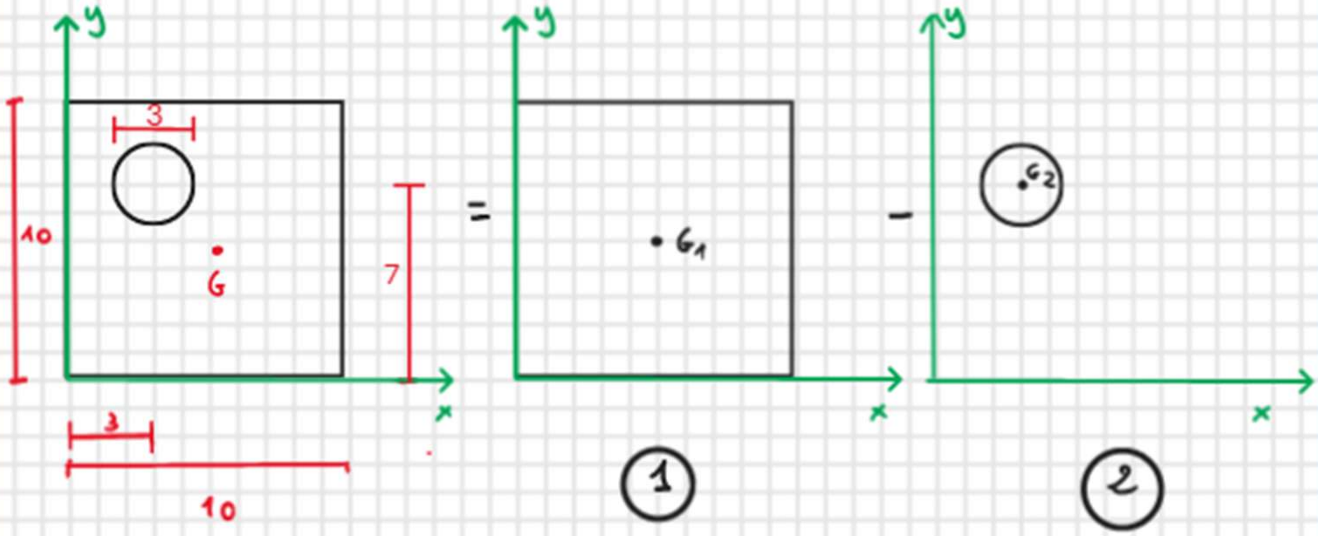
$$S_{x\,tot} = S_x' - S_x'' = 500 - 42 = 458$$

$$S_{y\,tot} = S_y' - S_y'' = 500 - 21 = 479 \rightarrow$$

$$A_{tot} = 100 - 6 = 94$$

$$x_G = \frac{S_{y\,tot}}{A_{tot}} = 479/94 \simeq 5,1$$

$$y_G = \frac{S_{x\,tot}}{A_{tot}} = 458/94 \simeq 4,8$$



$$S'_x = (10 \times 10) \times 5 = 500 \qquad S''_x = (7{,}07) \times 7 = 49{,}5$$

$$S'_y = (10 \times 10) \times 5 = 500 \qquad S''_y = (7{,}07) \times 3 = 21$$

$$S_{x\,tot} = S'_x - S''_x = 500 - 49{,}5 = 450{,}5$$

$$S_{y\,tot} = S'_y - S''_y = 500 - 21 = 479$$

$$A_{tot} = 100 - 7 = 93$$

$$\longrightarrow \quad x_G = \frac{S_{y\,tot}}{A_{tot}} = 4{,}84 \qquad y_G = \frac{S_{x\,tot}}{A_{tot}} = 5{,}15$$

Momenti del 2° ordine

Momento d'inerzia (rispetto ad una retta)

$$I_{xx} = \int_A y^2 \, dA \qquad I_{yy} = \int_A x^2 \, dA \qquad [m^4]$$

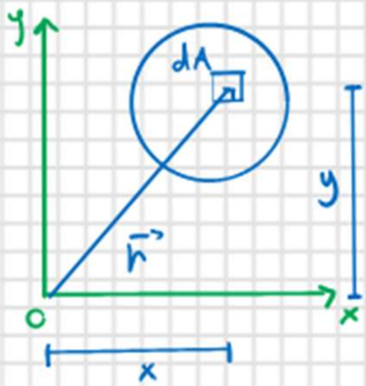
Sempre positivo

Momento centrifugo (rispetto ad due rette)

$$I_{xy} = \int_A x y \, dA \qquad [m^4]$$

Positivo, negativo o nullo

Momento polare (rispetto ad un punto)

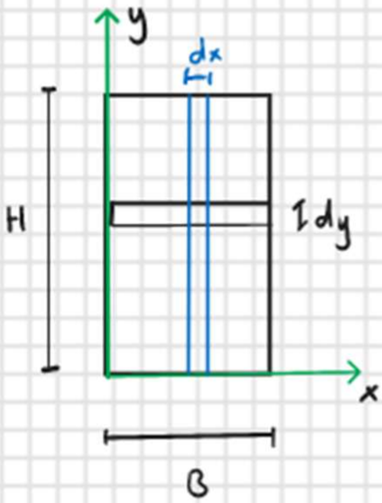


$$I_p = \int_A r^2 \, dA \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int_A (x^2 + y^2) \, dA = \int_A x^2 \, dA + \int y^2 \, dA$$

$$I_p = I_{xx} + I_{yy}$$

Sezione rettangolare



$$I_{xx} = \int_A y^2\, dA \xrightarrow{dA = B\,dy} I_{xx} = \int_0^H B y^2\, dy$$

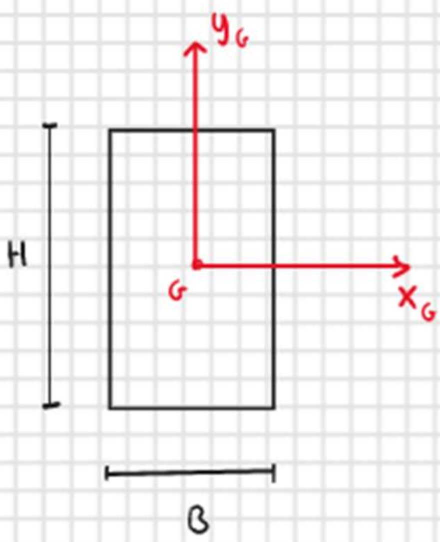
$$I_{xx} = \frac{B y^3}{3}\Big|_0^H = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{yy} = \int_A x^2\, dA = \int_0^B H x^2\, dx = \frac{HB^3}{3}$$

$$I_{xy} = \int_A xy\, dA = \int_0^B x \left(\int_0^H y\, dy\right) dx = \int_0^B x \left(\frac{H^2}{2}\right) dx = \frac{H^2}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^B =$$

$$I_{xy} = \frac{B^2H^2}{4}$$

Spostiamo il sistema di riferimento



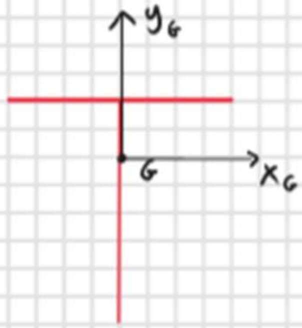
sistema di riferimento baricentrico

$$I^G_{xx} = \int_A y^2\, dA = \int_{-H/2}^{H/2} B y^2\, dy = \frac{B y^3}{3}\Big|_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} = \frac{BH^3}{12}$$

$$I^G_{yy} = \int_A x^2\, dA = \frac{HB^3}{12}$$

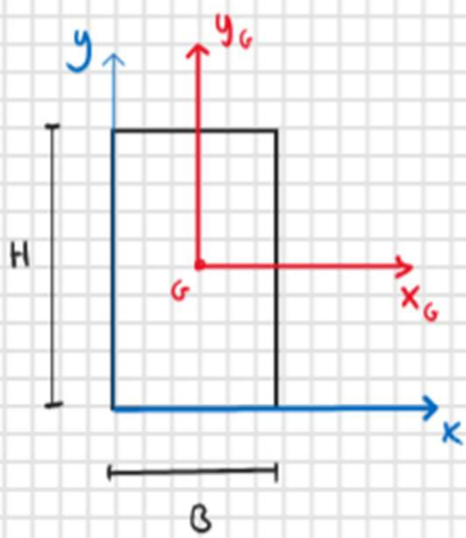
$$I^G_{xy} = \int_A xy\, dA = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} x \left(\int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} y\, dy\right) dx = \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} x\, (0)\, dx = 0$$

Per sezioni con un'asse di simmetria I_{xy}^{G} è nullo



$\longrightarrow I_{xy}^{G} = 0$

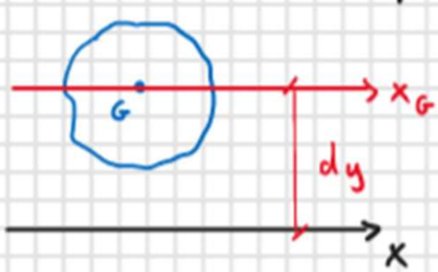
Basta che una delle due rette sia su un asse di simmetria



$I_{xx} = \frac{BH^3}{3}$ $\quad I_{yy} = \frac{HB^3}{3}$ $\quad I_{xy} = \frac{B^2H^2}{4}$

$I_{xx}^{G} = \frac{BH^3}{12}$ $\quad I_{yy}^{G} = \frac{HB^3}{12}$ $\quad I_{xy}^{G} = 0$

Teorema di trasposizione (Huygens - steiner)

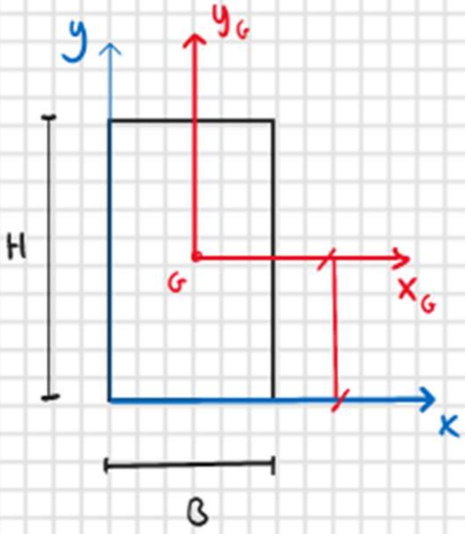


$I_{xx}^{G} \Rightarrow$ Noto

$$I_{xx} = I_{xx}^{G} + A \cdot d_y^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx}^{G} + A\, d_y^2 \\ I_{yy} &= I_{yy}^{G} + A\, d_x^2 \\ I_{xy} &= I_{xy}^{G} + A\, d_x d_y \end{aligned}}$$

Verifica del teorema di trasposizione



$$I_{xx}^G = \frac{BH^3}{12} \qquad I_{yy}^G = \frac{HB^3}{12} \qquad I_{xy}^G = 0$$

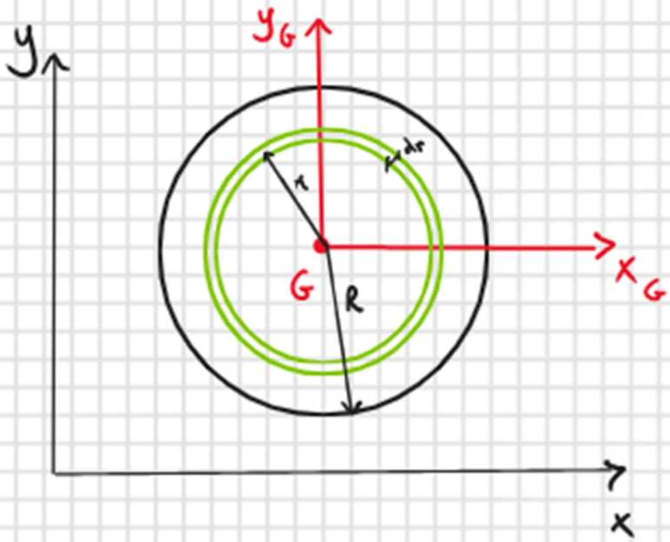
$$I_{xx} = \frac{BH^3}{12} + (BH)\left(\frac{H}{2}\right)^2 = \frac{BH^3}{3}$$

$$I_{xx}^G + A \cdot d_y^2$$

$$I_{xy} = 0 + (BH)\left(\frac{B}{2}\right)\left(\frac{H}{2}\right) = \frac{B^2H^2}{4}$$

$$I_{xy}^G + A \quad d_x \, d_y$$

Momento d'inerzia sezione circolare



$$dA = 2\pi r \, dr$$

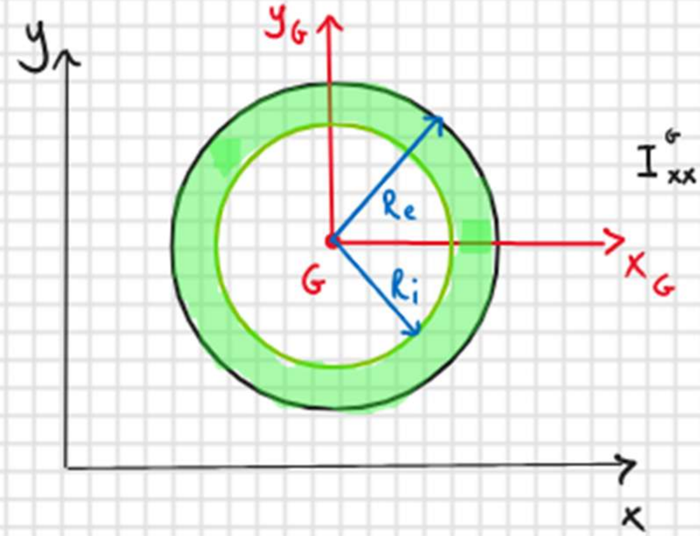
$$I_p = \int_A r^2 \, dA = \int_0^R r^2 \, 2\pi r \, dr$$

$$I_p = 2\pi \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

$$I_p = I_{xx} + I_{yy} \xrightarrow{I_{xx} = I_{yy}} I_p = 2 I_{xx}$$

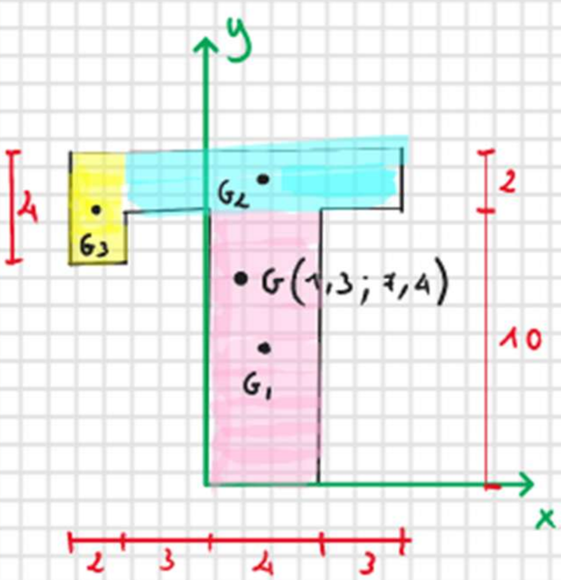
$$I_{xx}^G = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi R^4}{4} \qquad I_{yy}^G = I_{xx}^G$$

Momento d'inerzia di una corona circolare



$$I_{xx}^{G} = \frac{\pi R_e^4}{4} - \frac{\pi R_i^4}{4} = \frac{\pi}{4}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$$

Esercizio



	A_i	x_i	S_{yi}	y_i	S_{xi}
1)	40	2	80	5	200
2)	20	2	40	11	220
3)	8	-4	-32	10	80
	68		88		500
	A_{tot}		$S_{y\,tot}$		$S_{x\,tot}$

Baricentro della sezione

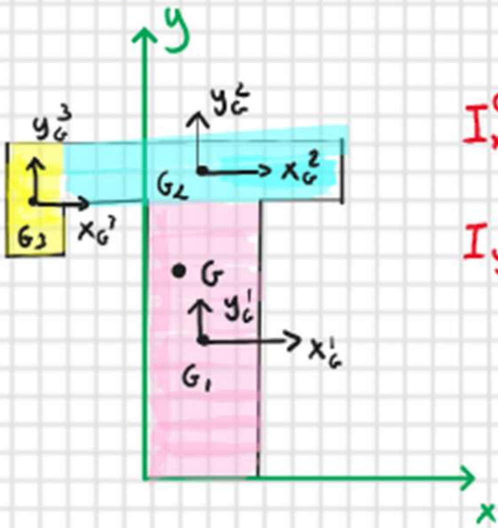
$$x_G = \frac{S_{y\,tot}}{A_{tot}} = 1,3 \qquad y_G = \frac{S_{x\,tot}}{A_{tot}} = 7,4$$

Calcolo dei momenti d'inerzia della sezione

↓

calcolare i momenti d'inerzia dei singoli rettangoli (1, 2, 3) rispetto al loro baricentro

Rettangolo 1 (G_1)



$$I_{xx}^{G_1} = \frac{BH^3}{12} = \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 333$$

$$I_{yy}^{G_1} = \frac{HB^3}{12} = \frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53{,}3$$

$$I_{xy}^{G_1} = 0$$

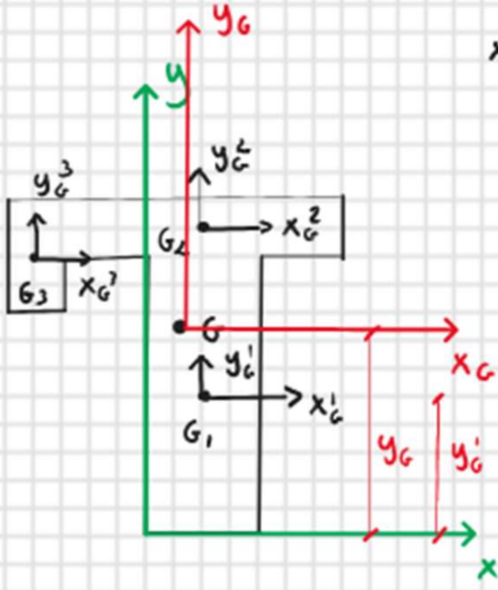
Rettangolo 2 (G_2)

$$I_{xx}^{G_2} = \frac{BH^3}{12} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6{,}6 \qquad I_{yy}^{G_2} = \frac{HB^3}{12} = \frac{2 \cdot 10^3}{12} = 166{,}6 \qquad I_{xy}^{G_2} = 0$$

Rettangolo 3 (G_3)

$$I_{xx}^{G_3} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10{,}6 \qquad I_{yy}^{G_3} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2{,}66 \qquad I_{xy}^{G_3} = 0$$

Calcolo dei momenti d'inerzia della sezione completa rispetto al suo baricentro G



$x_G = 1{,}3 \qquad y_G = 7{,}4$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= I_{xx}^{G} + A\,d_y^2 \\ I_{yy} &= I_{yy}^{G} + A\,d_x^2 \\ I_{xy} &= I_{xy}^{G} + A\,d_x d_y \end{aligned}}$$

$$I_{xx}^{G\,tot} = I_{xx}^{G_1} + A_1\,(y_{G1} - y_G)^2 + I_{xx}^{G_2} + A_2\,(y_{G2} - y_G)^2 + I_{xx}^{G_3} + A_3\,(y_{G3} - y_G)^2$$

$$I_{xx}^{G\,tot} = 333 + 40\,(5 - 7,4)^2 + 6,6 + 20\,(11 - 7,4)^2 + 10,6 + 8\,(10 - 7,4)^2 = 894,15$$

$$I_{yy}^{G\,tot} = I_{yy}^{G_1} + A_1\,(x_{G1} - x_G)^2 + I_{yy}^{G_2} + A_2\,(x_{G2} - x_G)^2 + I_{yy}^{G_3} + A_3\,(x_{G3} - x_G)^2$$

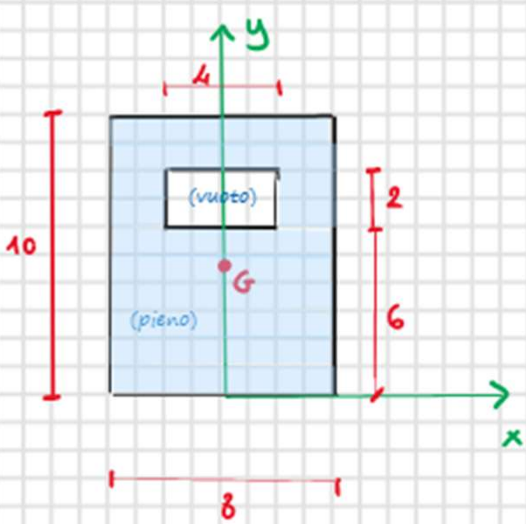
$$I_{yy}^{G\,tot} = 53,3 + 40\,(2 - 1,3)^2 + 166,6 + 20\,(2 - 1,3)^2 + 2,66 + 8\,(-4 - 1,3)^2 = 476,62$$

$$I_{xy}^{G\,tot} = \cancel{I_{xy}^{G_1}} + A_1\,(y_{G1} - y_G)(x_{G1} - x_G) + \cancel{I_{xy}^{G_2}} + A_2\,(y_{G2} - y_G)(x_{G2} - x_G) + \cancel{I_{xy}^{G_3}} + A_3\,(y_{G3} - y_G)(x_{G3} - x_G)$$

$$I_{xy}^{G\,tot} = 0 + 40\,(5 - 7,4)(2 - 1,3) + 0 + 20\,(11 - 7,4)(2 - 1,3) + 0 + 8\,(10 - 7,4)(-4 - 1,3) = -127,6$$

$$\boxed{I_{xx}^{G\,tot} = 894,15 \qquad I_{yy}^{G\,tot} = 476,62 \qquad I_{xy}^{G\,tot} = -127,6}$$

Sezione cava



$x_G = 0$ per simmetria

$$S_x^{tot} = \underset{(pieno)}{(8 \times 10)} \cdot 5 - \underset{(vuoto)}{(2 \times 4)} \cdot 7 = 344$$

$$A^{tot} = 80 - 8 = 72$$

$$y_G = \frac{S_x^{tot}}{A_{tot}} = 4,77$$

$$G\,(0\,;\,4,77)$$

$$I_{xx\,(pieno)}^{G} = \frac{8 \cdot 10^3}{12} = 666,6 \qquad I_{xx\,(vuoto)}^{G} = \frac{4 \cdot 2^3}{12} = 2,66$$

$$I_{yy\,(pieno)}^{G} = \frac{10 \cdot 8^3}{12} = 426,6 \qquad I_{yy\,(vuoto)}^{G} = \frac{2 \cdot 4^3}{12} = 10,6$$

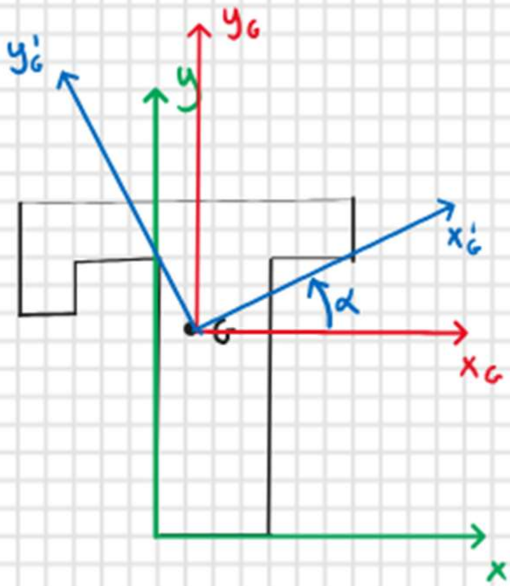
$$I_{xx}^{G\,tot} = I_{xx\,(pieno)}^{G_1} + A_{(pieno)}\left(y_{G\,(pieno)} - y_G\right)^2 - I_{xx\,(vuoto)}^{G} - A_{(vuoto)}\left(y_{G\,(vuoto)} - y_G\right)^2 = 627,8$$

$$I_{yy}^{tot} = I_{yy\,(pieno)}^{G} - I_{yy\,(vuoto)}^{G} = 416$$

I baricentri dei due rettangoli (pieno, vuoto) e il baricentro della sezione totale sono sullo stesso asse y, quindi non compare il termine di trasporto

$I_{xy}^{G\,tot} = 0 \longrightarrow$ y è asse di simmetria

Assi principali d'inerzia



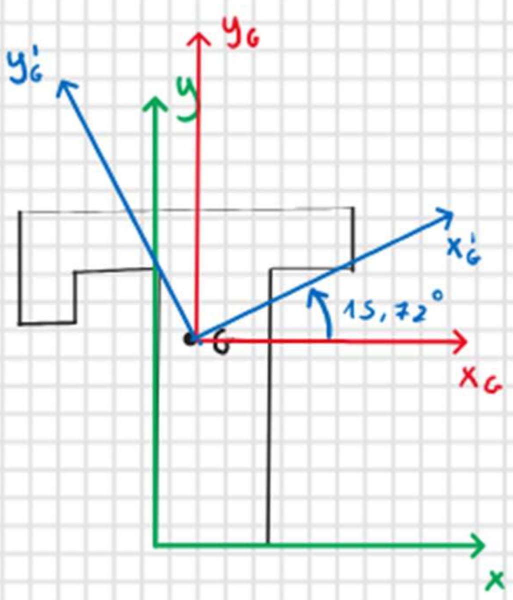
$G(1,3\,;\,7,1)$

Assi principali

$\alpha = 0°$	$\alpha = 10°$	$\bar{\alpha} = 15,72°$
$I_{xx}^{G} = 894,15$	925	$I_{xx}^{G'} = I_{max} = 930$
$I_{yy}^{G} = 476,62$	445	$I_{yy}^{G'} = I_{min} = 440$
$I_{xy}^{G} = -127,6$	$-48,5$	$I_{xy}^{G'} = \varnothing$

Apice per indicare il sistema di riferimento baricentrico ruotato

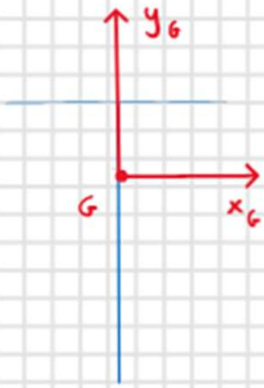
In corrispondenza dell'angolo $\bar{\alpha}$ ($\bar{\alpha} = 15,72$) per il quale si annulla il momento centrifugo ($I_{xy}^{G'} = 0$) i momenti d'inerzia $I_{xx}^{G'}$ e $I_{yy}^{G'}$ ruotati assumo il valore massimo I_{max} e minimo I_{min}

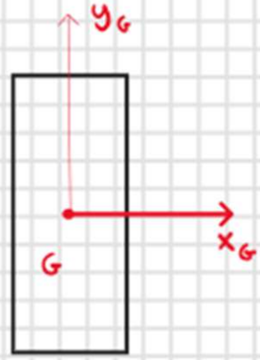


x'_G e y'_G sono gli assi principali d'inerzia

I momenti d'inerzia rispetto ai 2 assi principali d'inerzia sono uno il massimo e l'altro il minimo possibile

Sezioni simmetriche





Momento centrifugo è nullo

$I^G_{xy} = 0$

$\downarrow$

x_G e y_G sono assi principali d'inerzia

$\alpha = 0°$

In questo caso (forma della sezione):

$I^G_{xx} = I_{max} \qquad I^G_{yy} = I_{min}$

Momenti d'inerzia al variare dell'angolo α

$$\boxed{\begin{aligned} I^{G'}_{xx} &= \frac{I^G_{xx} + I^G_{yy}}{2} + \frac{I^G_{xx} - I^G_{yy}}{2}\cos(2\alpha) - I^G_{xy}\,\mathrm{sen}(2\alpha) \\ I^{G'}_{yy} &= \frac{I^G_{xx} + I^G_{yy}}{2} - \frac{I^G_{xx} - I^G_{yy}}{2}\cos(2\alpha) + I^G_{xy}\,\mathrm{sen}(2\alpha) \\ I^{G'}_{xy} &= \frac{I^G_{xx} - I^G_{yy}}{2}\,\mathrm{sin}(2\alpha) + I^G_{xy}\cos(2\alpha) \end{aligned}}$$

Ricerca degli assi principali

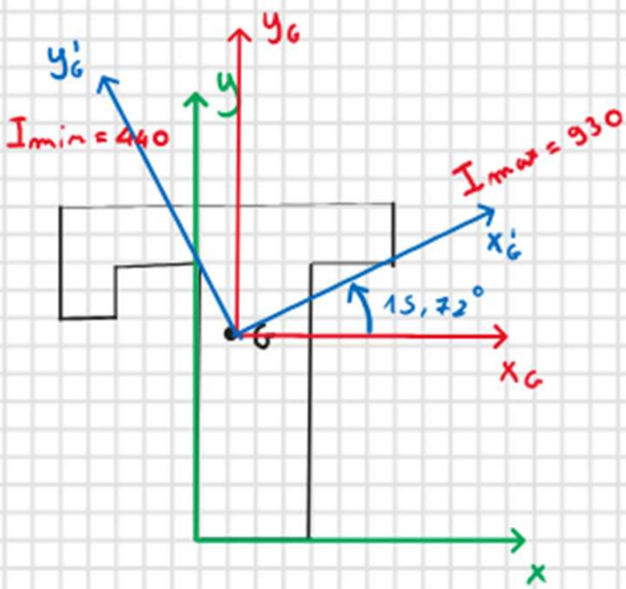
Angolo del quale ruotare il sistema di riferimento per avere $I^{G'}_{xy} = 0$ e trovare gli assi principali d'inerzia

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-2I^G_{xy}}{I^G_{xx} - I^G_{yy}}\right)$$

Momenti d'inerzia massimo e minimo associati agli assi principali d'inerzia

$$I_{max} = \frac{I_{xx}^G + I_{yy}^G}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{xx}^G - I_{yy}^G\right)^2 + 4 {I_{xy}^G}^2}$$

$$I_{min} = \frac{I_{xx}^G + I_{yy}^G}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{xx}^G - I_{yy}^G\right)^2 + 4 {I_{xy}^G}^2}$$



$\bar{\alpha} = 15,72$

Convenzione

$\alpha > 0$ rotazione antioraria

Se $I_{xx}^G > I_{yy}^G$ $\quad I_{xx}^{G'} \xrightarrow{\text{si associa a}} I_{max} \quad I_{yy}^{G'} \xrightarrow{\text{si associa a}} I_{min}$

Se $I_{xx}^G < I_{yy}^G$ $\quad I_{xx}^{G'} \longrightarrow I_{min} \quad I_{yy}^{G'} \longrightarrow I_{max}$