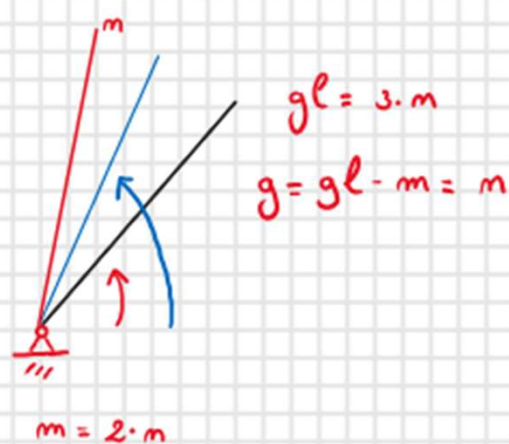
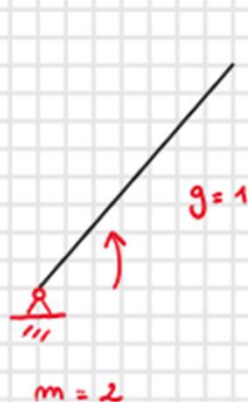
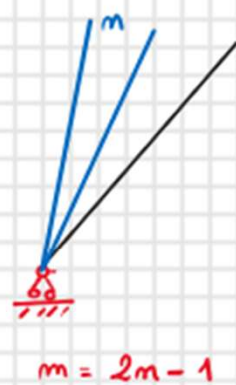
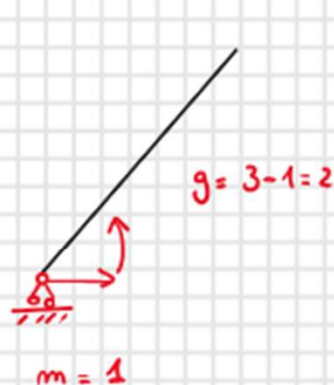


Strutture formate da n travi

Vincoli esterni



$m = \text{numero di travi}$

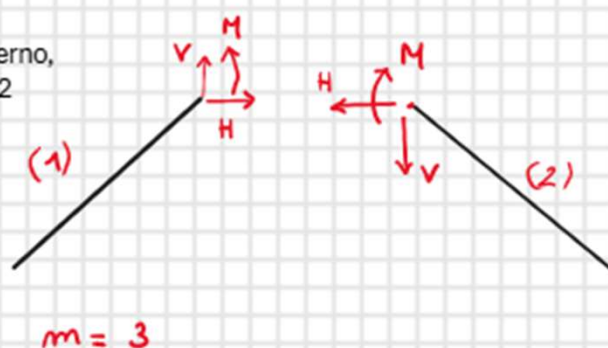
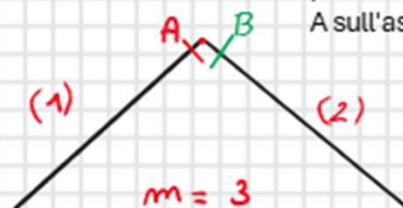


Come per la cerniera ma con la possibilità di traslare

Vincoli interni

Incastro

A e B sono 2 sezioni in prossimità del vincolo interno, A sull'asta 1 e B sull'asta 2



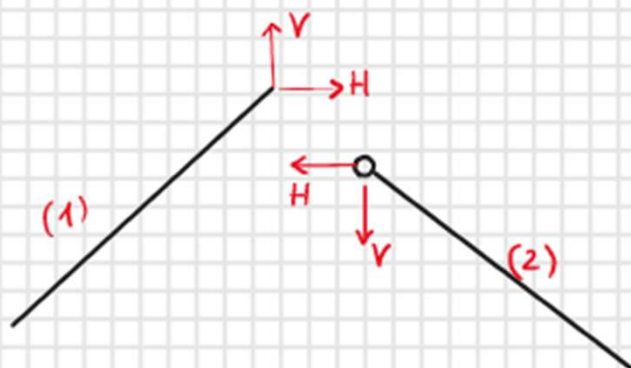
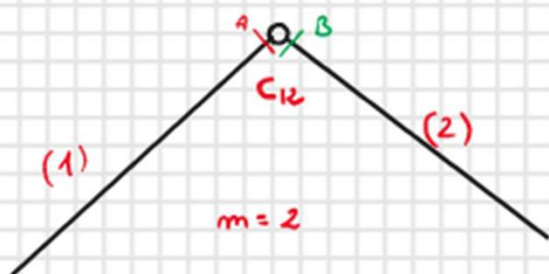
$\vec{s}_A = \vec{s}_B$ Spostamenti

$u_A = u_B$
 $v_A = v_B$ 2 componenti degli spostamenti

$\theta_A = \theta_B$ rotazioni

2 componenti di spostamento + 1 rotazione impediti
3 forze che i 2 corpi si scambiano

Cerniera

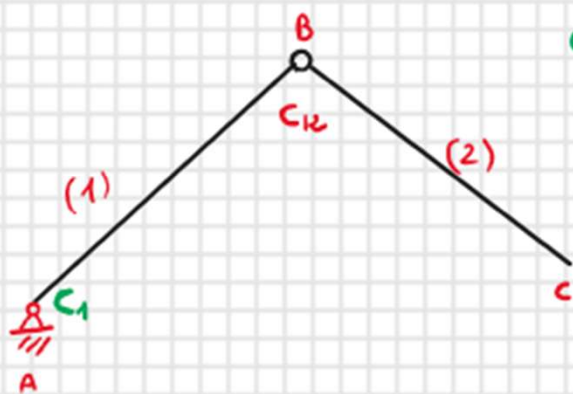


$$\vec{s}_A = \vec{s}_B \quad \text{Spostamenti}$$

$$\begin{aligned} u_A &= u_B \\ v_A &= v_B \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{2 componenti} \\ \text{degli spostamenti} \end{array}$$

C_{12} : centro di rotazione relativo tra il corpo 1 e 2

Differenza tra centri di rotazione

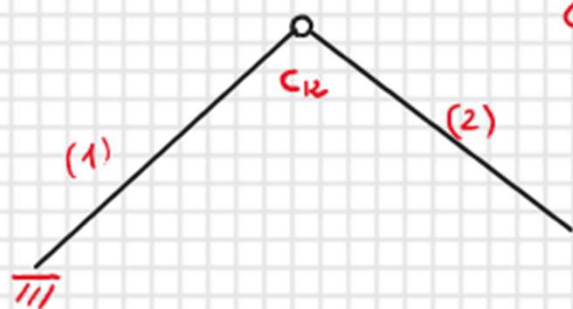


C_1 : centro di rotazione assoluto del corpo 1

C_{12} : centro di rotazione relativo

C_2 : centro di rotazione assoluto del corpo 2 ?

Ogni asta ha il suo centro di rotazione assoluto (se è permesso il movimento)

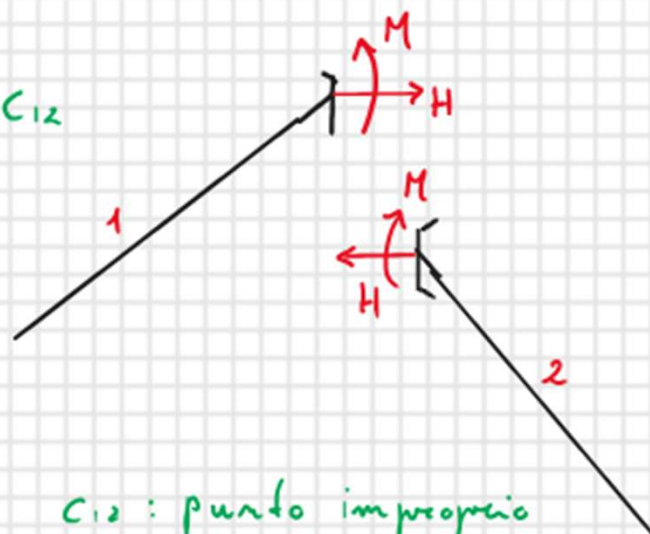
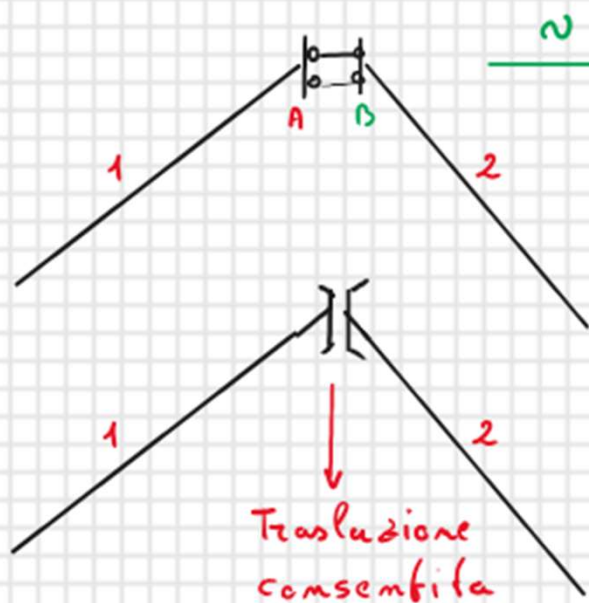


C_1 : non esiste

Il corpo 2 ruota in $C_{12} \equiv C_2$

$C_{12} \equiv C_2$ Il centro di rotazione relativo coincide con quello assoluto

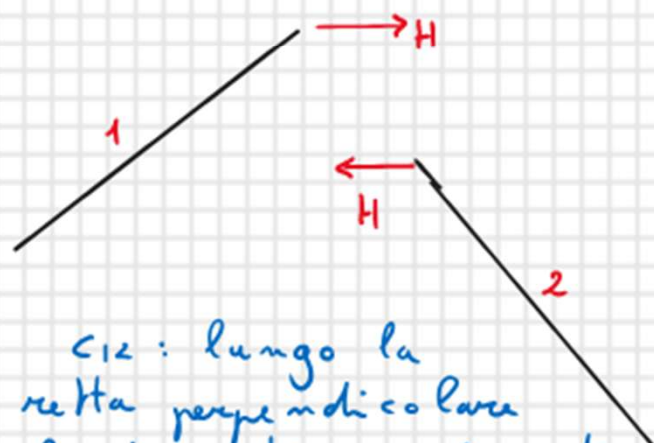
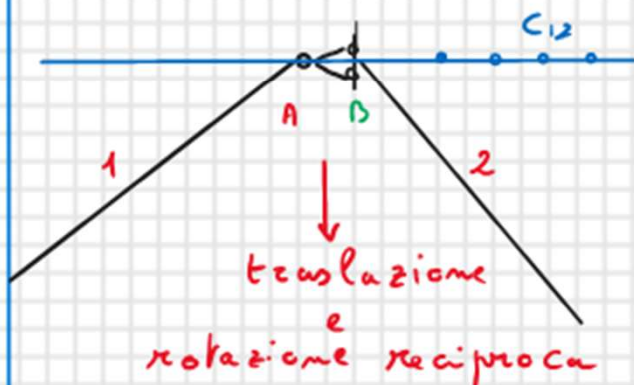
Doppio pendolo o pattino



C_{12} : punto improprio
in direzione perpendicolare
al piano di scorrimento

$$u_A = u_B \quad \theta_A = \theta_B \quad m = 2$$

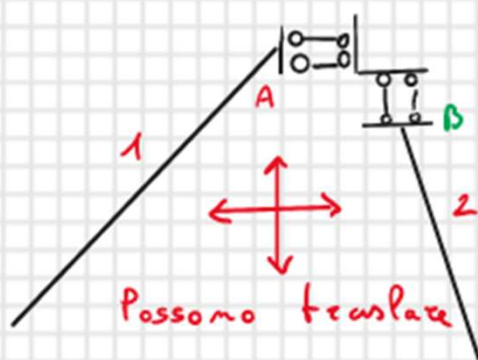
Carrello



C_{12} : lungo la
retta perpendicolare
al piano di scorrimento

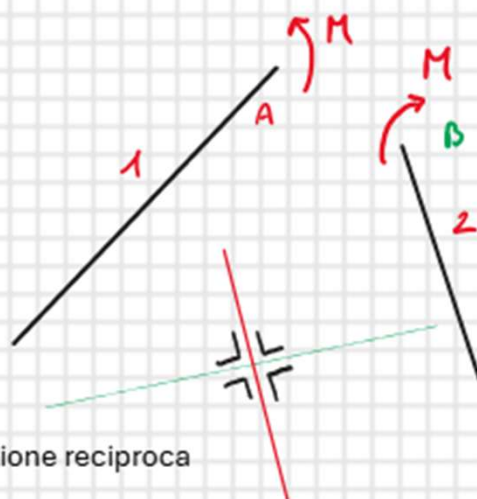
$$u_A = u_B \quad m = 1$$

Pattino manicotto



$$\theta_A = \theta_B$$

$$m = 1$$

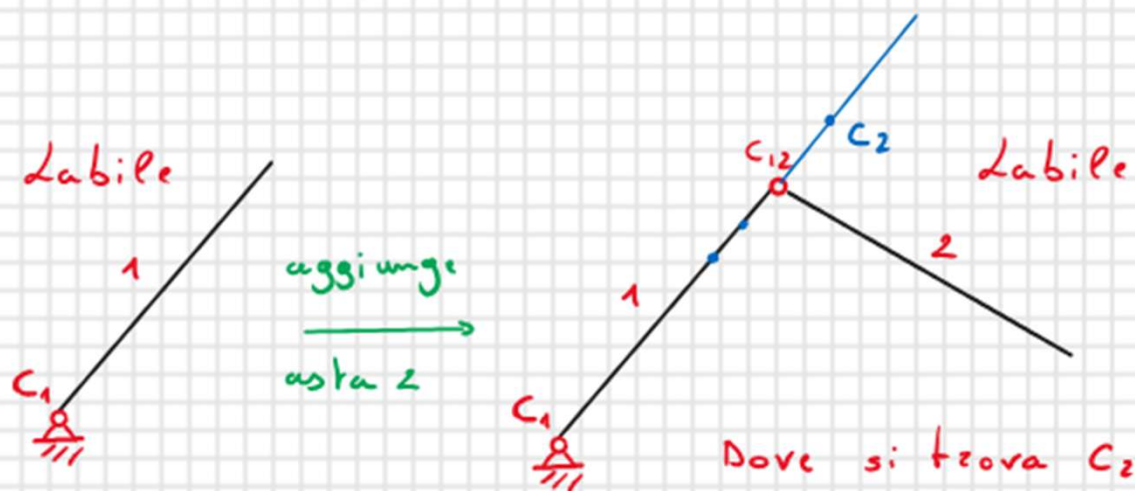


Non consente la rotazione reciproca

Determinare i centri di rotazione C_1 e C_2

C_1 e C_2 : centri di rotazione assoluti

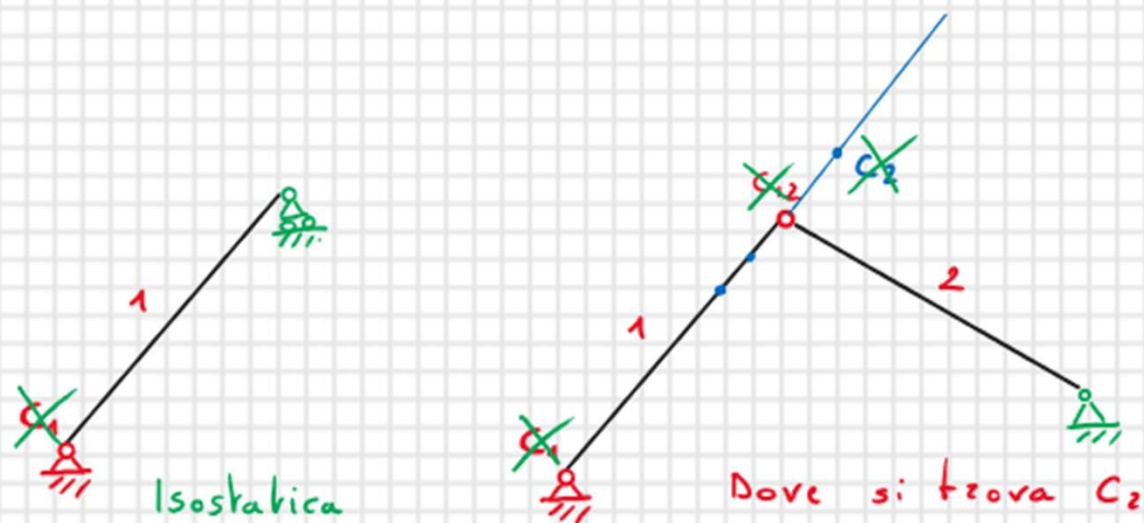
C_{12} : centro di rotazione relativo



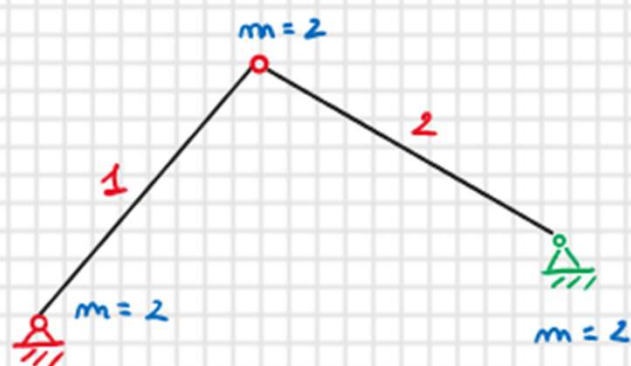
C_2 si trova lungo la congiungente C_1 e C_{12}

Il centro di rotazione assoluto dell'asta 2 si trova lungo la congiungente il centro di rotazione assoluto dell'asta 1 e il centro di rotazione relativo

Rendiamo la struttura isostatica aggiungendo un vincolo opportuno

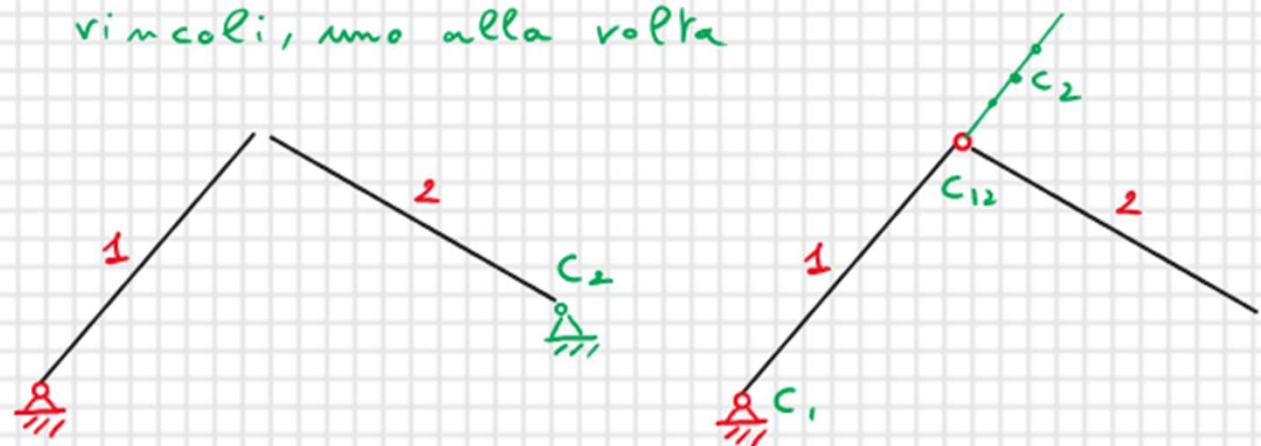


Cerchiamo di capire perché la struttura è isostatica



$$m_{tot} = 6 \quad gl = 6$$

Partiamo dall'asta 2 ed eliminiamo i vincoli, uno alla volta



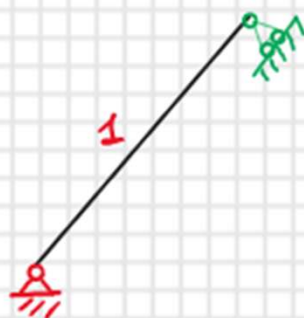
Non esiste un C_2 comune ai due casi



Nella struttura reale, con i vincoli presenti contemporaneamente, non è presente un centro di rotazione assoluto

Se C_2 non esiste, l'asta 2 non si muove

La cerniera comune alle 2 aste non si muove
quindi possiamo considerare la cerniera comune come un vincolo fisso (esterno)



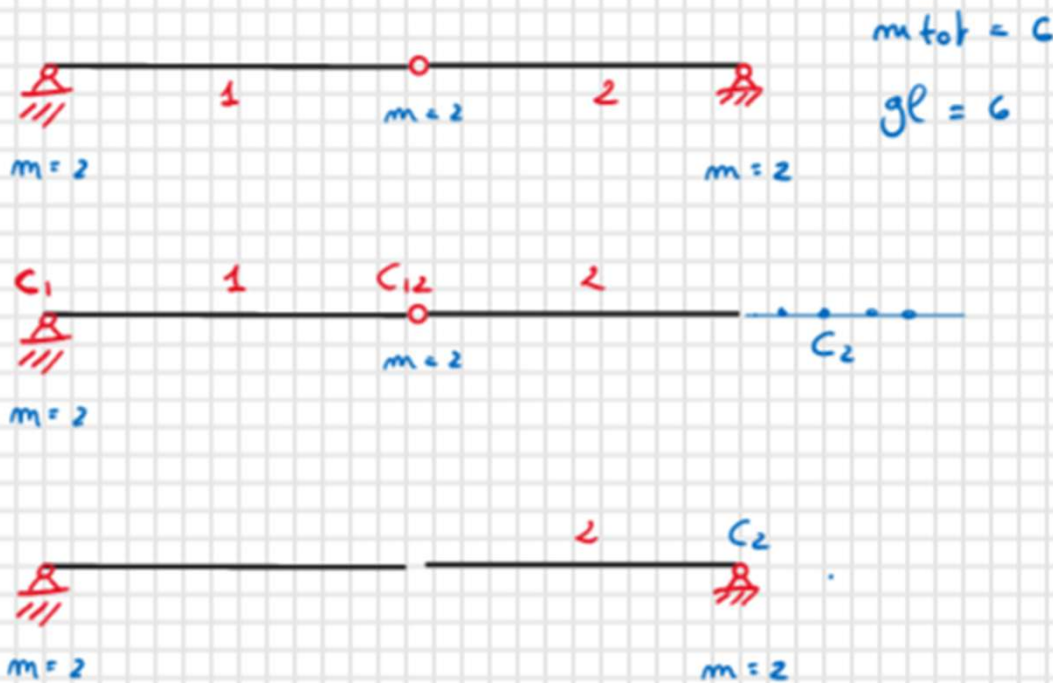
L'asta n° 1 è isostatica
quindi non ha C_1

Non esiste C_1 , non esiste C_2



La struttura reale (1+2) è isostatica

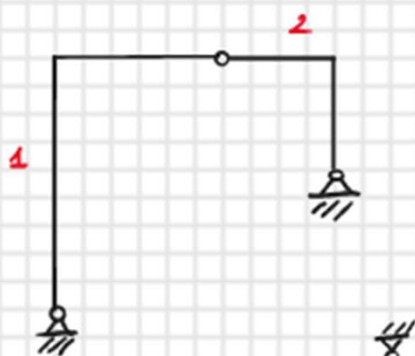
Labilità per vincoli mal posti



La cerniera a destra è un punto comune ai 2 casi
quindi il C_2 si trova in quel punto



Se le cerniere sono allineate la struttura
risulta labile

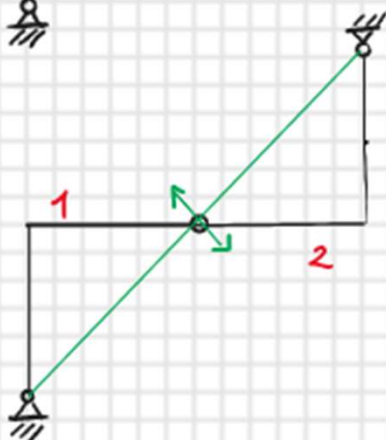


$$gl = 6$$

$$m = 2 + 2 + 2 = 6$$

$$S = 6$$

Le cerniere
non sono allineate
struttura isostatica



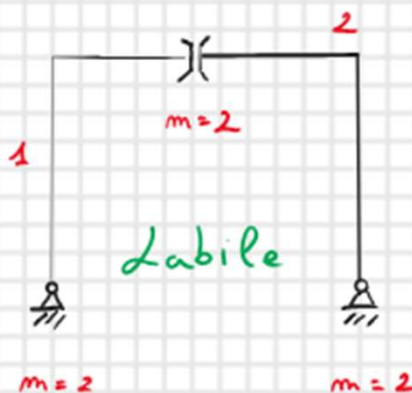
$$gl = 6$$

$$m = 6$$

$$S = 5$$

Cerniere allineate
struttura labile

Il caso del pattino relativo

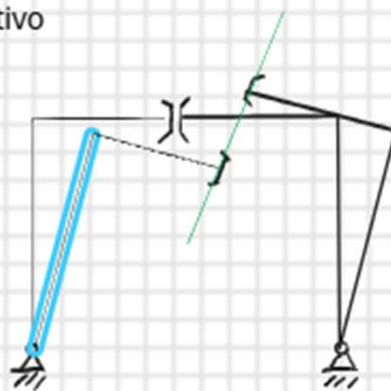


$$gl = 6$$

$$m = 6$$

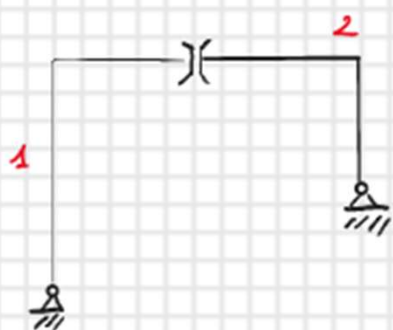
$$S = 5$$

Labile

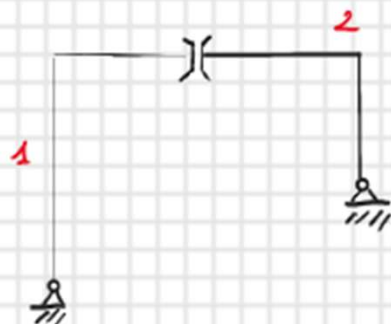


Consideriamo il pattino relativo come una cerniera relativa posta nel suo punto improprio

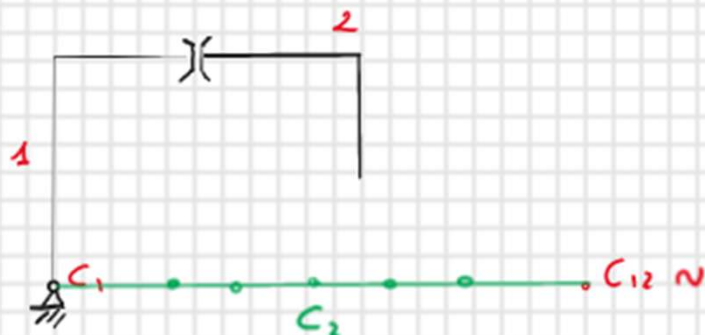
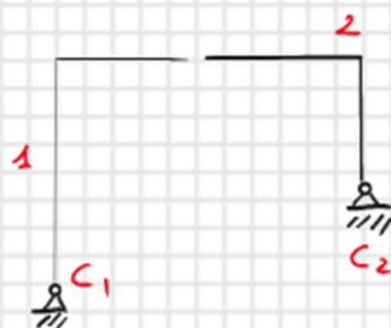
Le 2 cerniere reali esterne + la "cerniera fittizia" relativa
(pattino) sono allineate



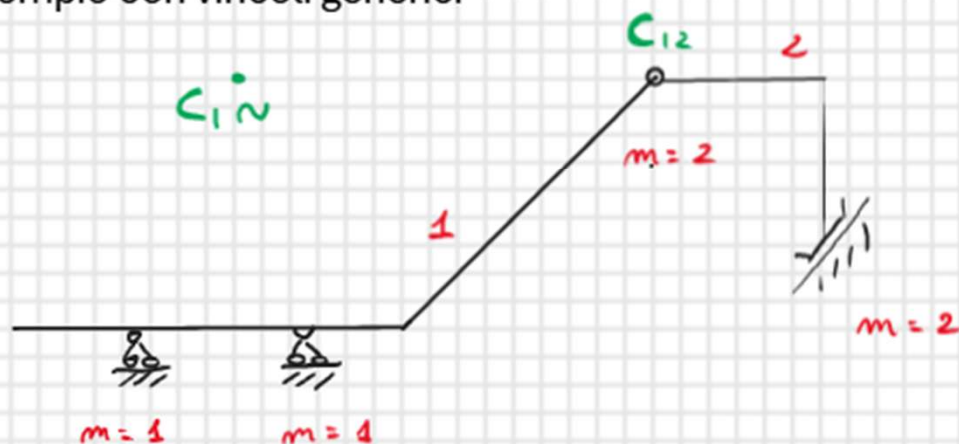
Struttura isostatica



L'asta 2 non ha un centro di rotazione assoluto, di conseguenza considero il pattino ad essa collegato come fisso (esterno), quindi anche l'asta 1 non ha centro di rotazione assoluto

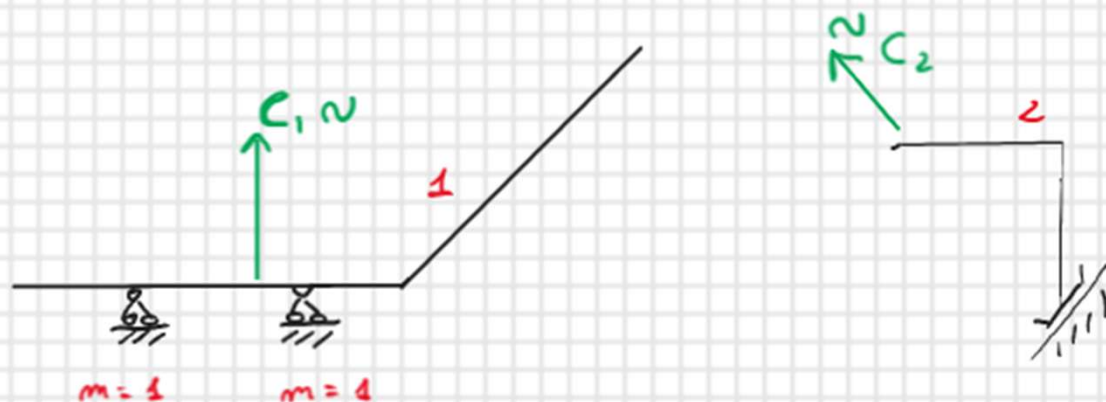


Esempio con vincoli generici



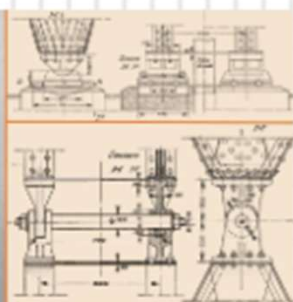
$$gl = 6$$

$$m + t = 6$$



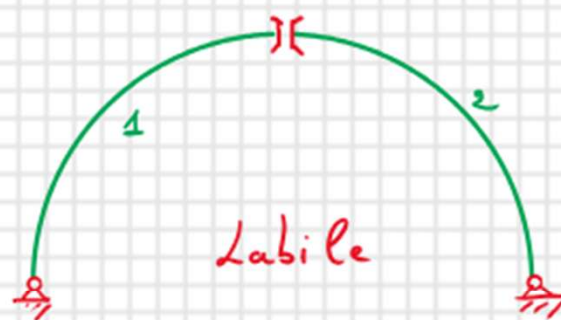
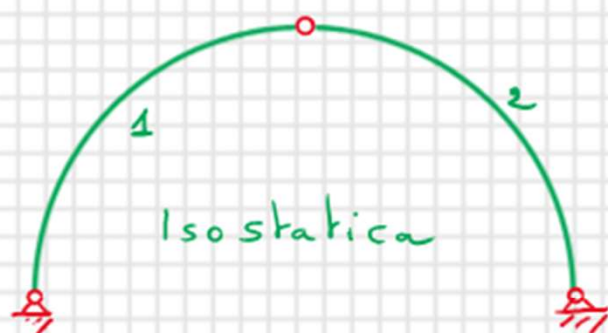
C_1, C_2 e C_{12} non sono allineati
Struttura è isostatica

Arco a 3 cerniere



STAZIONE CENTRALE DI MILANO

Particolari della cerniera di base degli archi e della cerniera in chiave

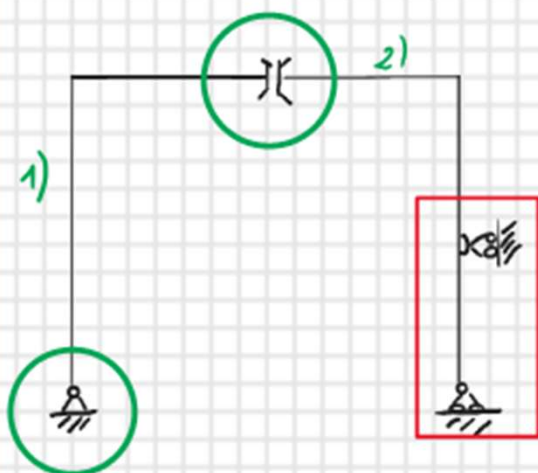


2 aste

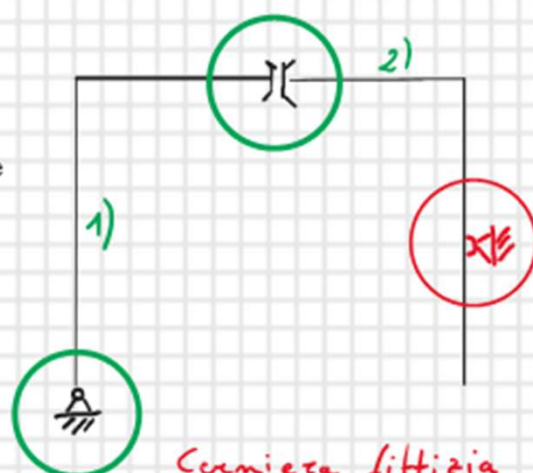
2 vincoli doppi (cerniere esterne)

1 vincolo doppio relativo (cerniera interna)

Arco a 3 cerniere generalizzato

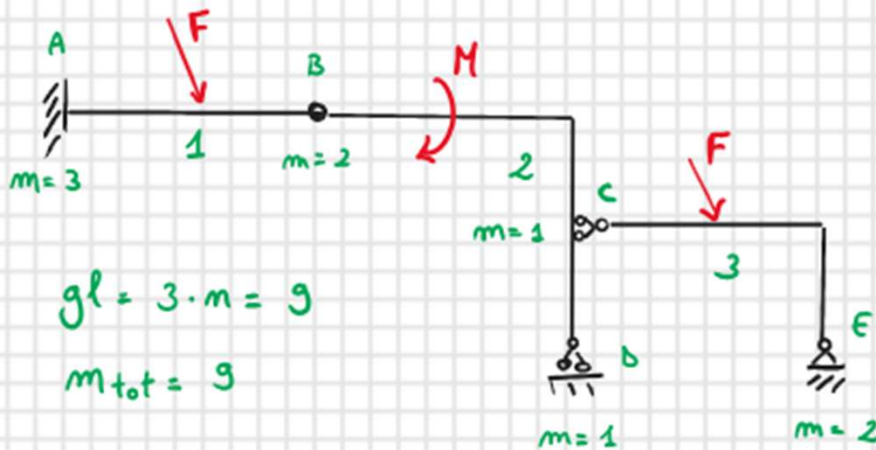


Cinematicamente equivalenti



Cerniera fittizia
è la somma dei due
vincoli semplici

Calcolo delle reazioni vincolari in strutture formate da n aste



Asta 1, vincolata con incastro non si può muovere

↓
Cerniera B fissa

Asta 2, vincolata con cerniera e carrello, ben posti,
non si può muovere

↓
Carrello in C fisso

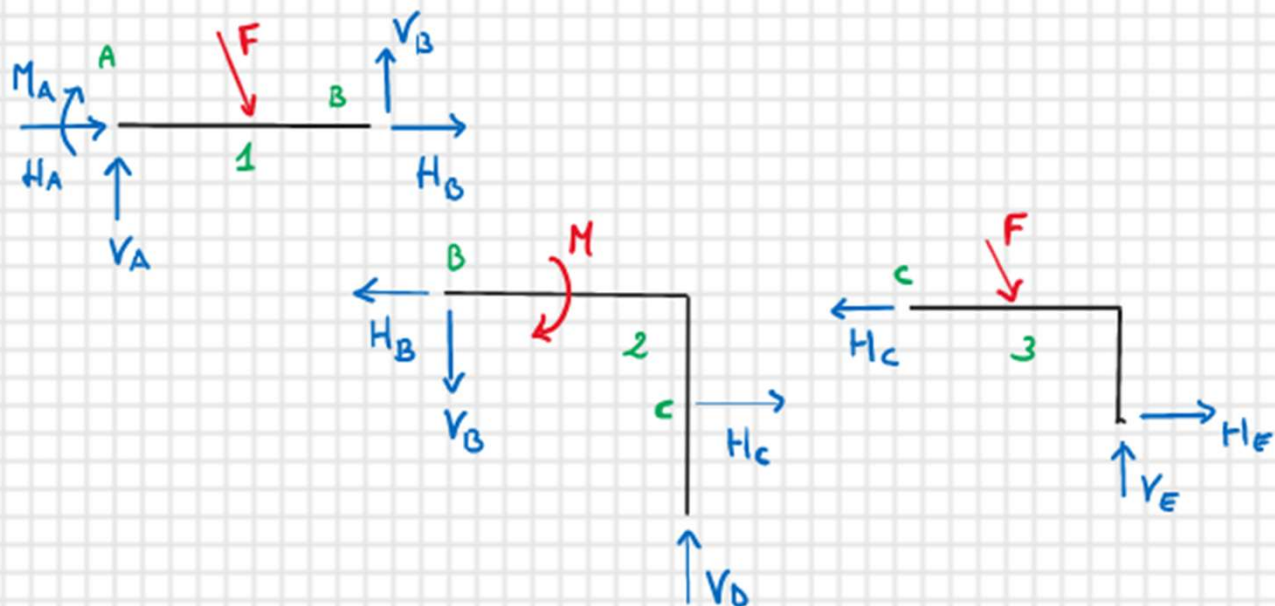
Asta 3, vincolato con carrello e cerniera, ben posti,
non si può muovere

Nessuna delle sottostrutture ha dei centri
di rotazione quindi:

Struttura (1+2+3) isostatica

Asta 1: sottostruttura portante

Asta 2 e 3: sottostrutture portate

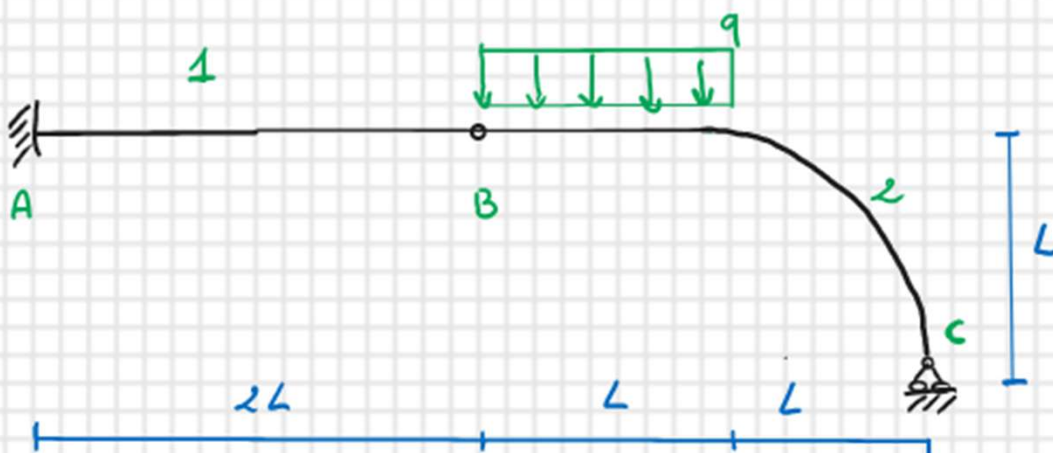


N° incognite: $M_A, H_A, V_A, H_B, V_B, H_C, V_D, V_E, H_E$ 9

3 Eq. Cardinali statica $\times$ 3 aste = 9 equazioni

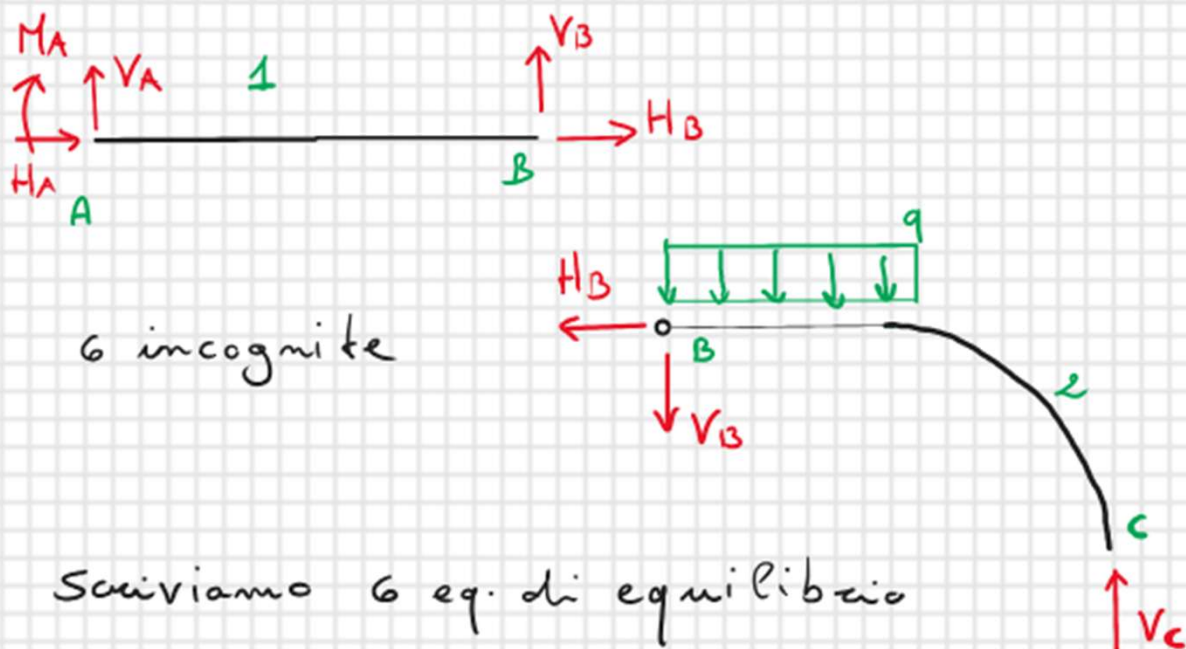
Per n aste si ha un sistema $3n$ equazioni
in $3n$ incognite

Struttura con $n=2$ aste



Struttura isostatica

Asta 1 è fissa, perchè incastrata, la cerniera B la possiamo considerare come fissa e quindi l'asta 2 è ben vincolata



Scriviamo 6 eq. di equilibrio

$$H_A + H_B = 0$$

$$V_A + V_B = 0$$

$$M_A - V_B 2L = 0$$

Asta 1

$$H_B = 0$$

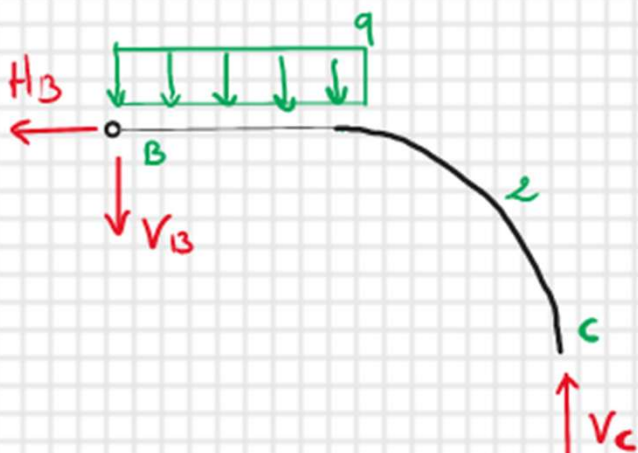
$$-V_B + V_C - qL = 0$$

$$V_C 2L - q \frac{L^2}{2} = 0$$

Asta 2

Alternativamente, possiamo risolvere la struttura gerarchicamente

Risoliamo prima la sottostruttura 2 (3 equazioni in 3 incognite)

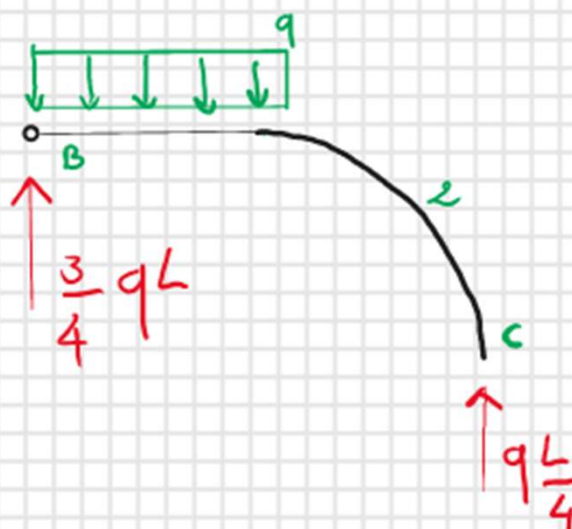


$$H_B = 0$$

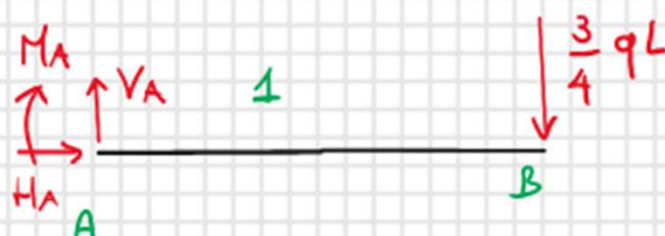
$$-V_B + V_C - qL = 0$$

$$V_C 2L - q \frac{L^2}{2} = 0$$

$$H_B = 0 \quad V_C = \frac{qL}{4} \quad V_B = -\frac{3}{4}qL$$

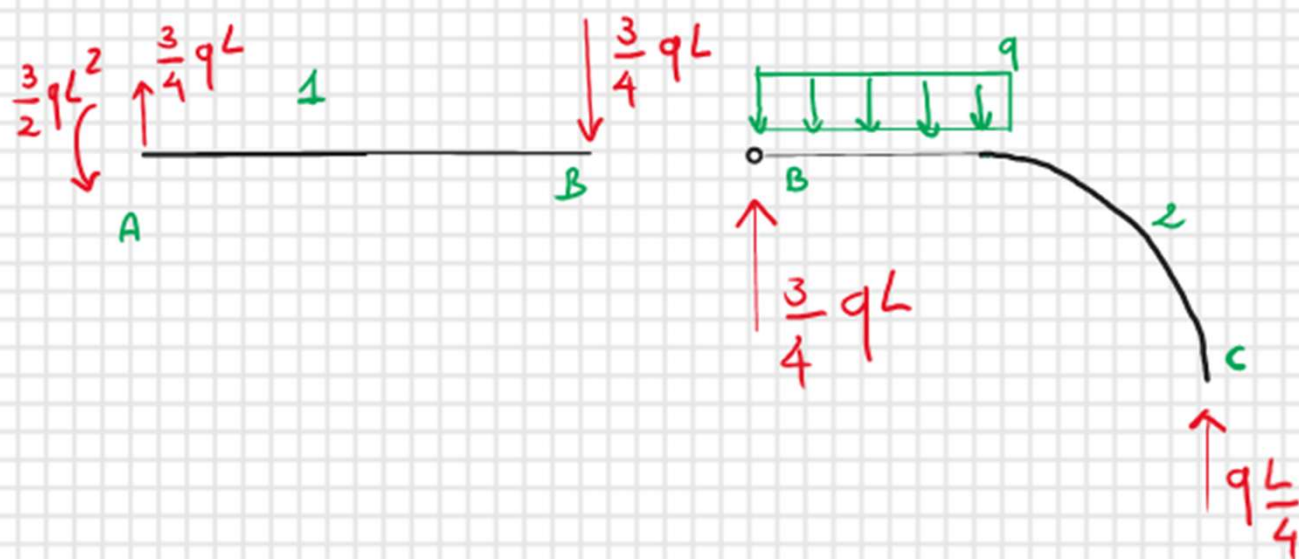


Con i risultati della sottostruttura 2 risolviamo prima la sottostruttura 1

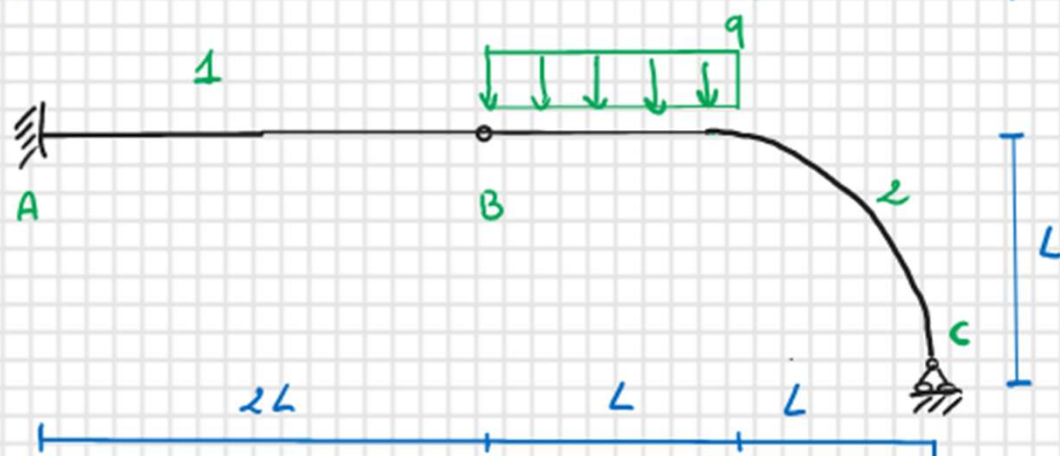


- $H_A = 0$
- $V_A = \frac{3}{4} qL$
- $M_A + \frac{3}{4} qL \cdot (2L) = 0$

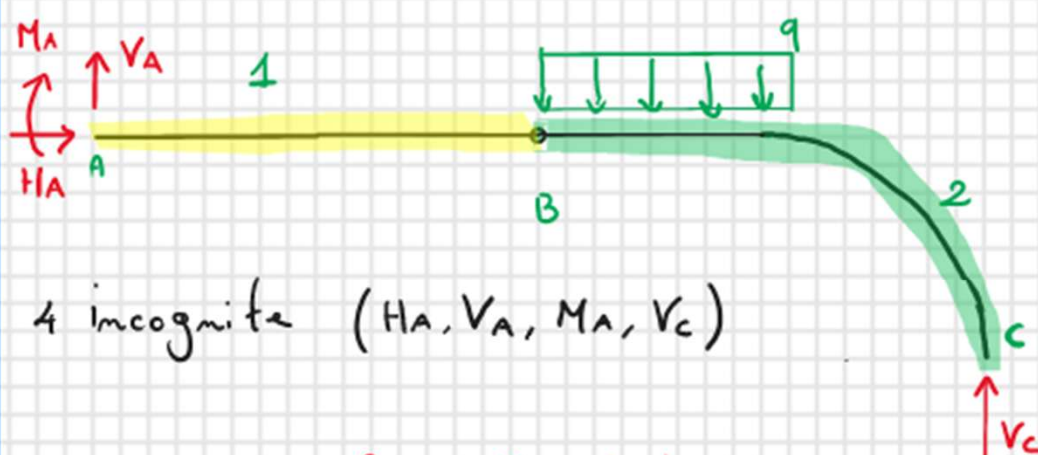
$$M_A = -\frac{3}{2} qL^2$$



Equazioni ausiliarie o di equilibrio parziale



Struttura isostatica



4 incognite (H_A, V_A, M_A, V_C)

Eq. cardinali della statica

1) $H_A = 0$

2) $V_A + V_C = qL$

3) $\sum M_A: M_A - 4V_C L + \frac{5}{2} q L^2 = 0$

3 equazioni

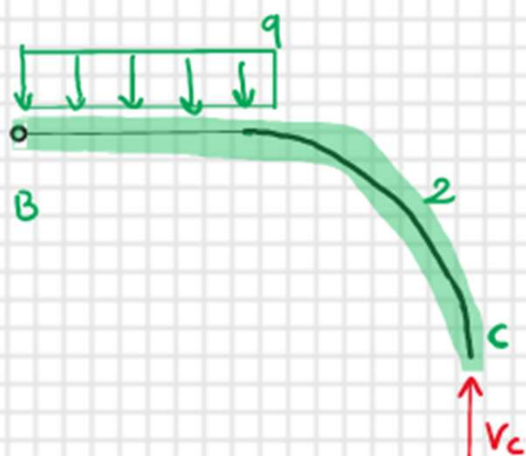
non sono sufficienti

Aggiungo un'equazione (ausiliaria)

Devo garantire che l'asta 1 e 2 non ruotino in B

Impongo l'equilibrio dei momenti di tutti i carichi che gravano su una delle 2 sottostrutture, rispetto al polo B

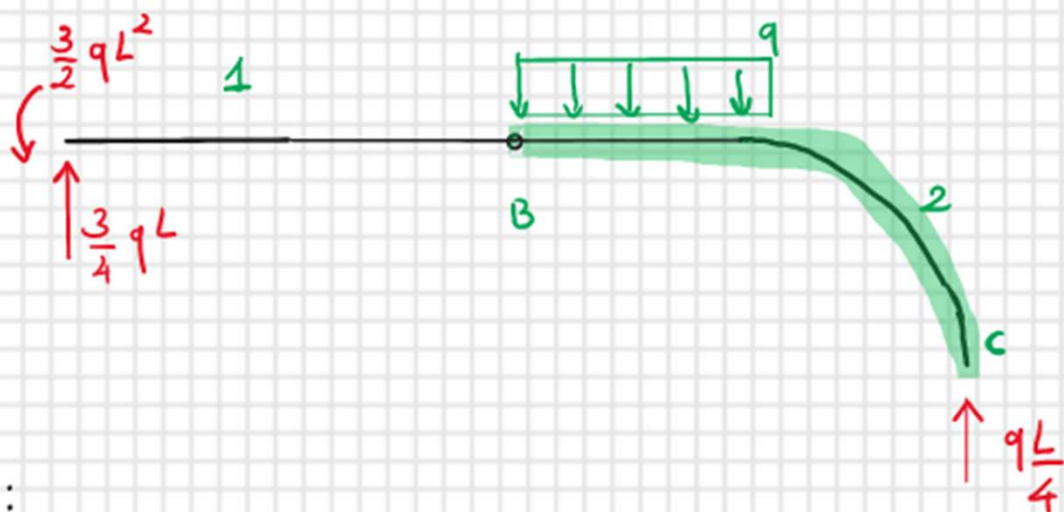
Scelgo la sottostruttura 2, considero per l'equilibrio dei momenti tutti i carichi presenti.



$$4) \quad V_c 2L - q \frac{L^2}{2} = 0 \quad \text{in B}$$

$$V_c = q \frac{L}{4}$$

Sono in grado di scrivere l'equilibrio parziale dell'asta 2 perchè in B il momento è sicuramente nullo essendoci una cerniera

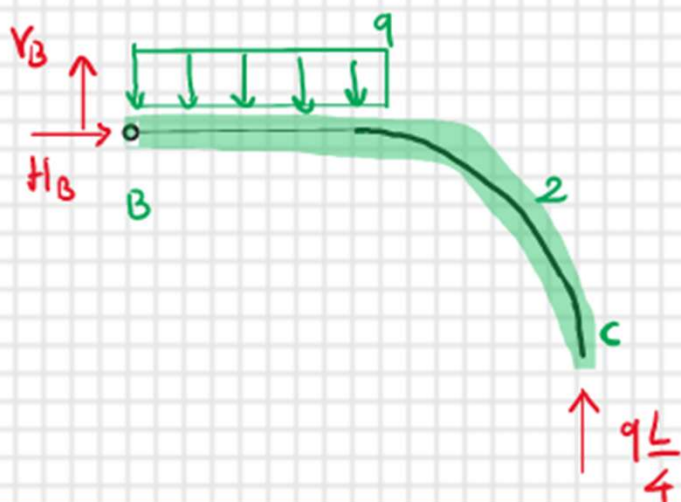


Nota :

Avrei potuto scegliere la sottostruttura 1, ma non sarei stato in grado di ricavare subito un'incognita (meno conveniente)

$$4) \quad M_A + V_A 2L = 0$$

Determinare le forze in B

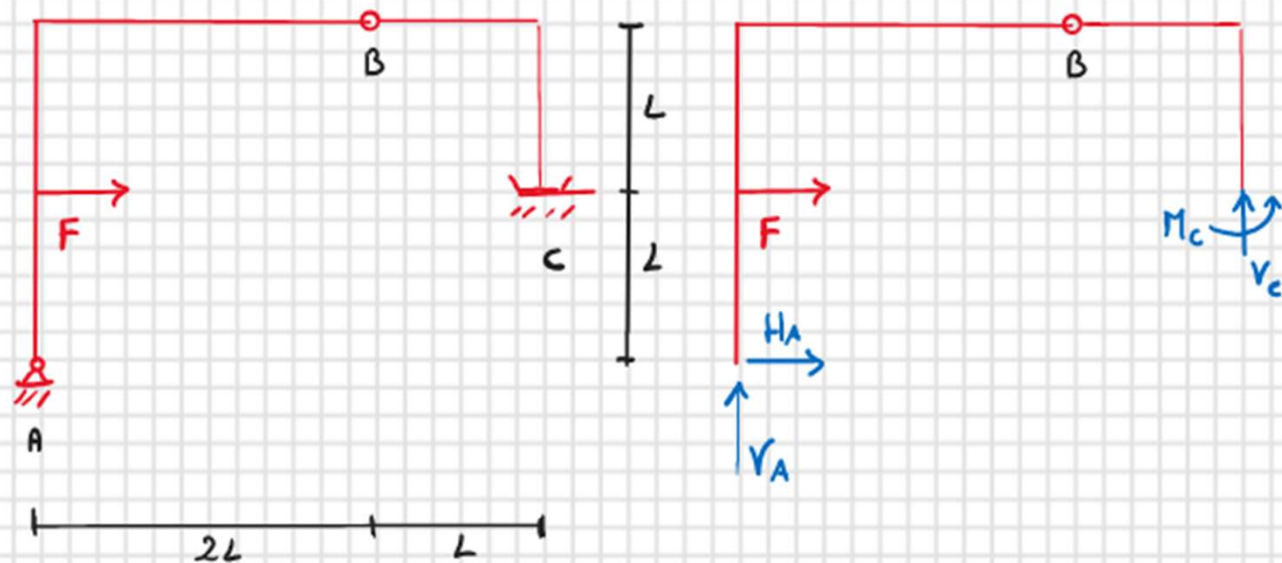


$$H_B = 0$$

$$V_B + q \frac{L}{4} - qL = 0$$

$$V_B = \frac{3}{4} qL$$

Esempio

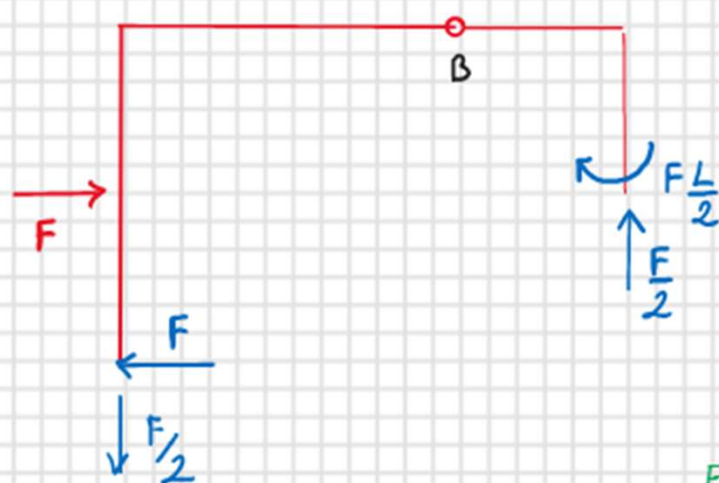


E. equilibrio

- 1) $H_A + F = 0$
 - 2) $V_A + V_c = 0$
 - 3) in A $FL - M_c - 3V_cL = 0$
- } 3 ECS

4) in B per l'asta 2 $M_c + V_cL = 0$ Eq. ausiliaria

4) in B per l'asta 1 $FL - V_A2L + H_A2L = 0$



Verifiche

$$F - F = 0$$

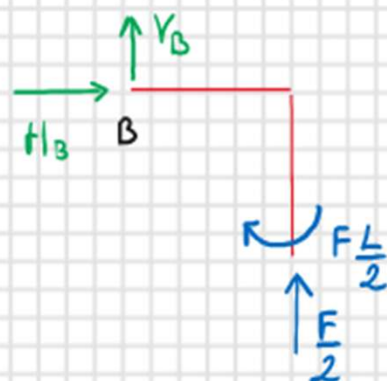
$$F/2 - F/2 = 0$$

$$FL/2 + FL - F/2(3L) = 0 \text{ IN A}$$

$$FL/2 + F/2L = 0 \text{ IN B per asta 2}$$

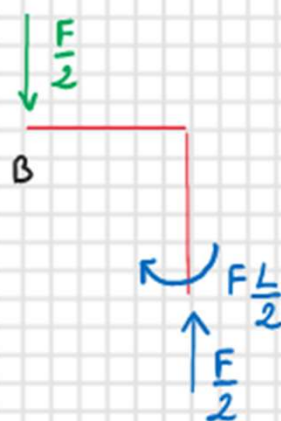
$$F/2(2L) + FL - F/2L = 0 \text{ IN B per asta 1}$$

Determinare le forze in B



$$H_B = 0$$

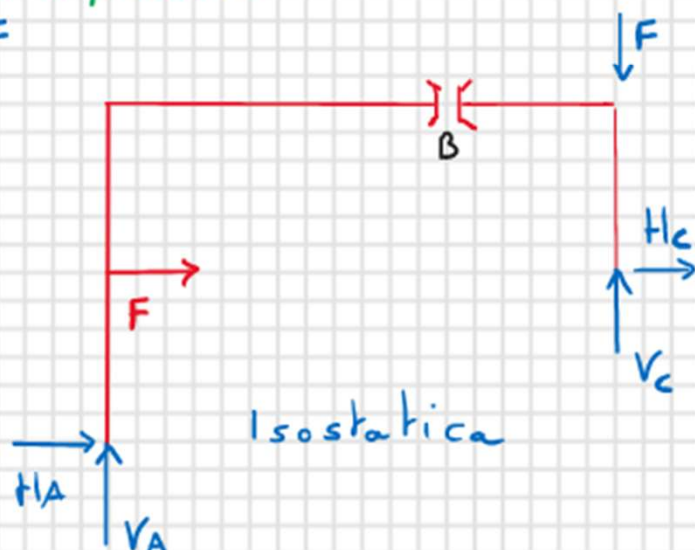
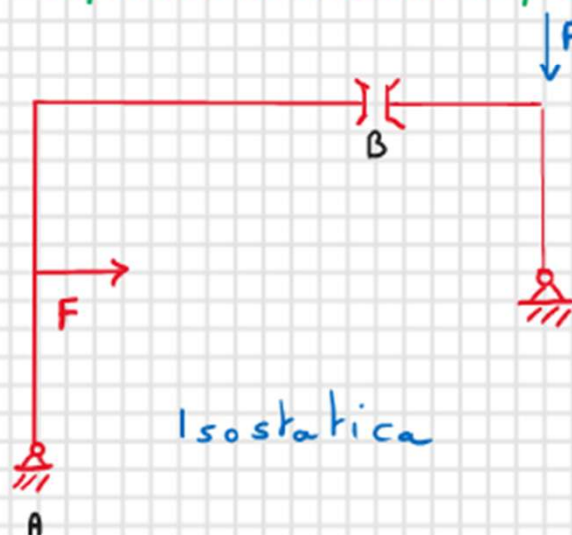
$$V_B = -\frac{F}{2}$$



Verifica

$$\frac{FL}{2} - \frac{F}{2}L = 0 \quad \text{ok!}$$

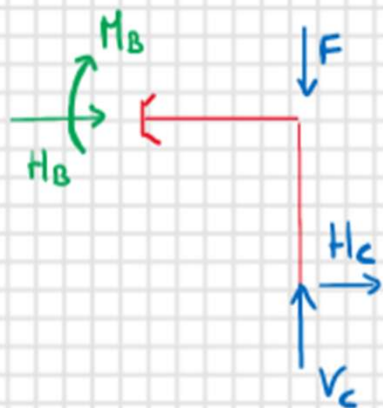
Equazione ausiliaria per il pattino



Eq. equilibrio

- 1) $H_A + H_C + F = 0$
- 2) $V_A + V_C - F = 0$
- 3) in A $FL + F3L - V_C 3L + H_C L = 0$

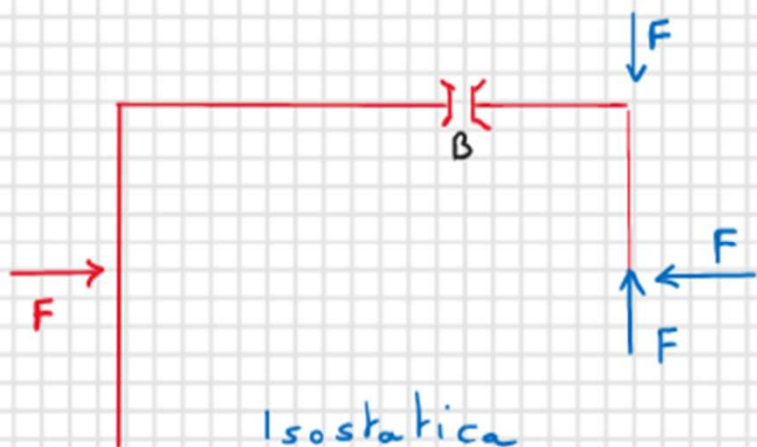
Come sarà l'equazione ausiliaria



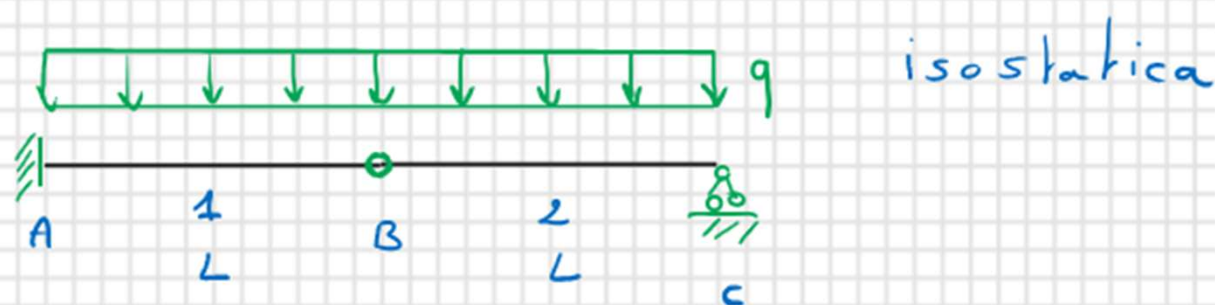
L'equazione ausiliaria deriva dall'equilibrio delle forze nel piano di scorrimento del pattino

$$4) \quad V_c - F = 0 \quad V_c = F$$

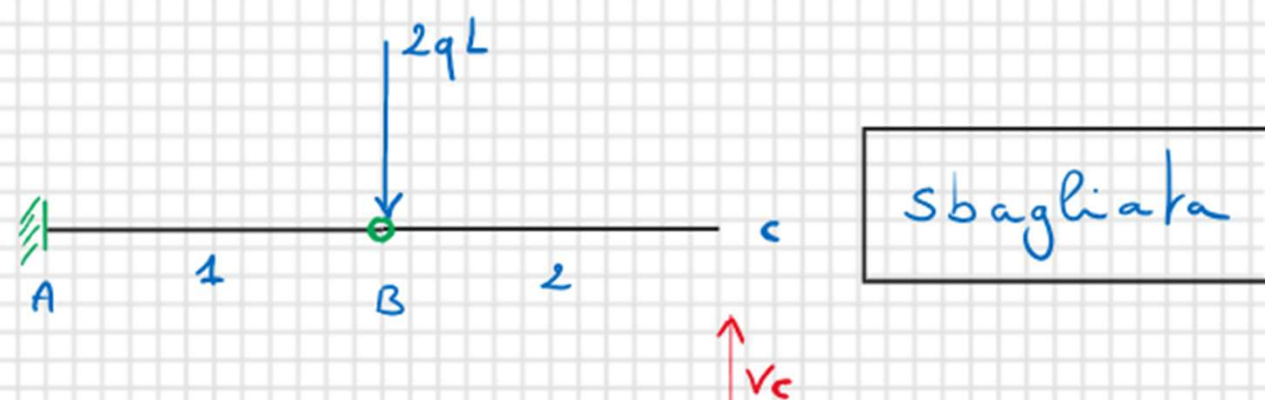
$$V_A = 0 \quad H_c = -F \quad H_A = 0$$



Ripartizione dei carichi su più aste



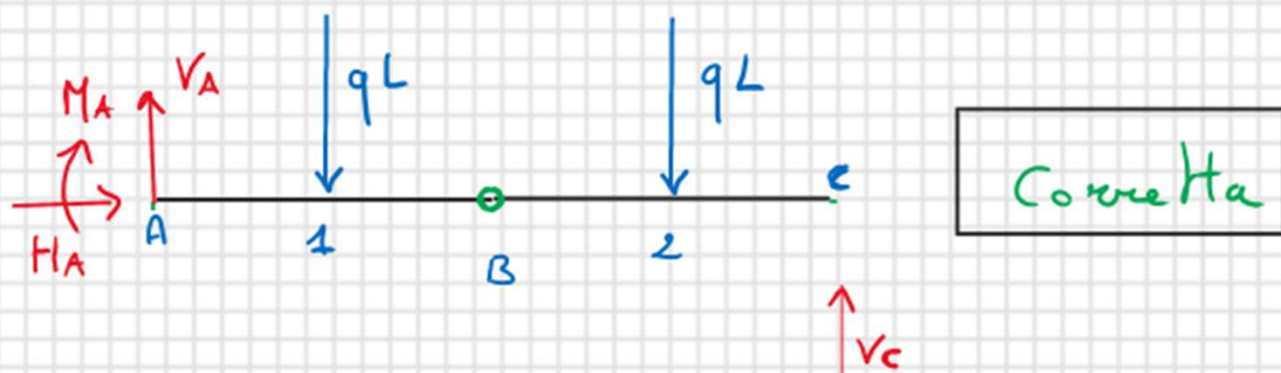
Trasformo il carico nel carico equivalente



Scriviamo l'equazione ausiliaria

$$4) V_c L = 0$$

Il carico distribuito lo possiamo ridurre a quello concentrato equivalente, ma su ogni singola trave



Equazioni di equilibrio

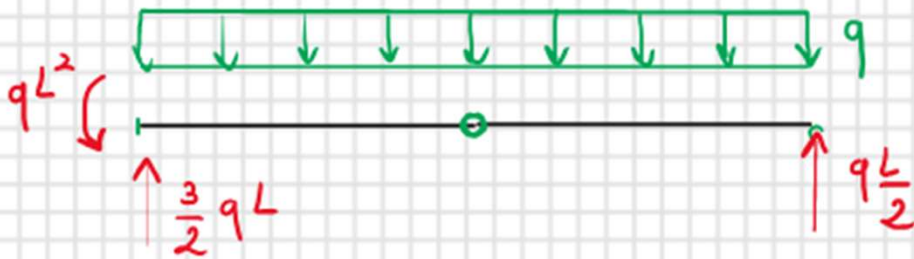
$$1) \sum \mathcal{M}_A = 0$$

$$2) V_A + V_C = 2qL$$

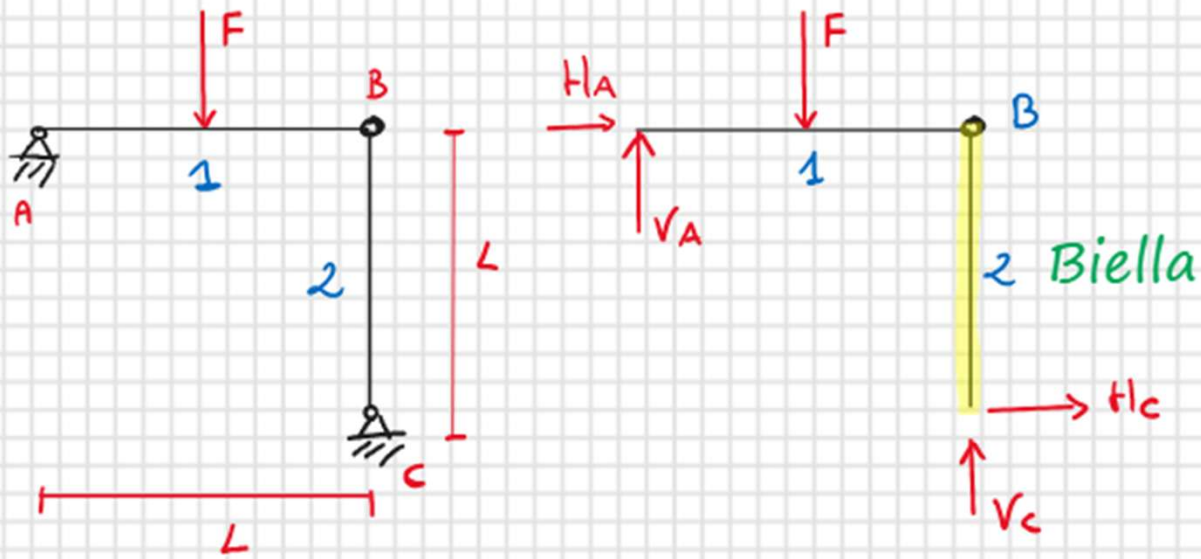
$$3) \text{ in } A \quad M_A - 2V_C L + q \frac{L^2}{2} + \frac{3}{2} q L^2 = 0$$

Equazione ausiliaria corretta

$$4) V_C L - q \frac{L^2}{2} = 0 \quad \longrightarrow \quad V_C = \frac{qL}{2}$$



Biella



Eq. equilibrio

- 1) $H_A + H_C = 0$
- 2) $V_A + V_C = F$
- 3) $F \frac{L}{2} - V_C L - H_C L = 0$

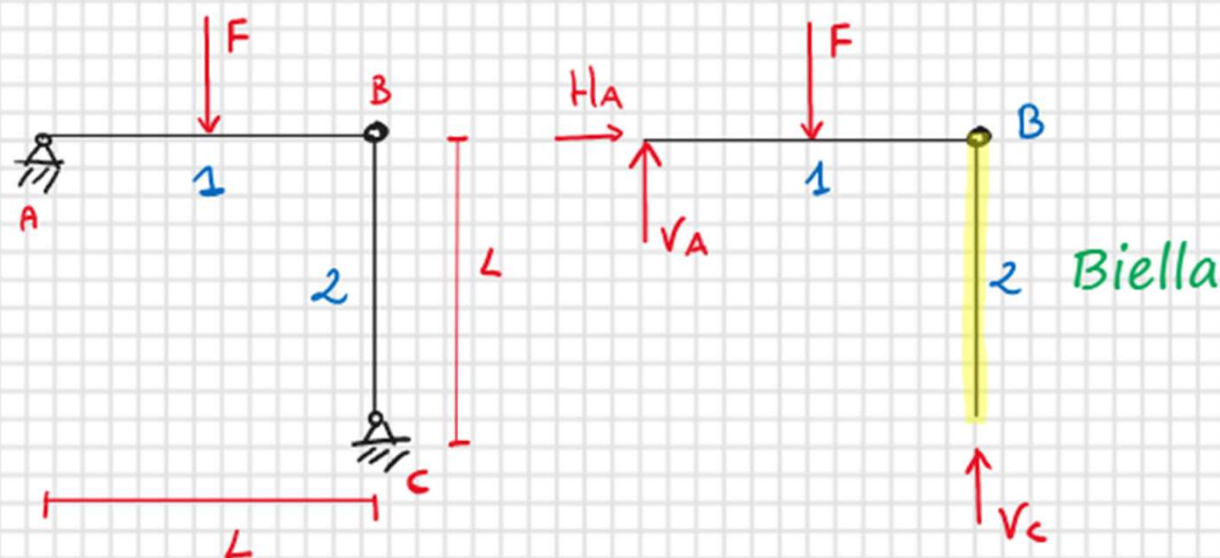
4) Eq. assiale asta 2 $H_C L = 0$

Biella: trave scarica
vincolata con 2 cerniere

L'asta 2 nel nostro caso è una biella

In una biella sono presenti solo azioni assiali
conseguenza

Taglio e momento flettente nulli



Nella biella non ho bisogno di rappresentare la reazione vincolare trasversale, perchè sarà nulla

Equazioni di equilibrio

$$\begin{aligned}
 1) \quad H_A &= 0 & H_A &= 0 \\
 2) \quad V_A + V_C &= F & \longrightarrow & V_A = F/2 \\
 3) \quad F \frac{L}{2} - V_C L &= 0 & & V_C = F/2
 \end{aligned}$$

