Ottimizzazione delle funzioni in più variabili

Rosario Maggistro

Matematica per l'economia e la statistica - corso progredito

Università degli Studi di Trieste

Il termine *ottimizzazione* si riferisce ad un'ampia categoria di problemi.

Esempi:

1. In economia è legato ai meccanismi decisionali finalizzati ad ottenere il massimo di utilità o di profitto da una data quantità di beni o risorse;
2. In meccanica: minimizzare energia potenziale di un sistema conservativo conduce a trovare le posizioni di equilibrio stabile.

In generale massimizzeremo o minimizzeremo un obiettivo la cui modellizzazione matematica dipende dalla natura del problema.

Cerchiamo i punti di massimo e/o di minimo di:

$$f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}, \quad n \geq 2$$

(Il caso $n = 1$, è già stato esaminato in Analisi 1).

Affronteremo due tipi di problema di ottimizzazione:

1. in punti interni al dominio (estremi liberi o estremi non vincolati);
2. per $f|_{\partial X}$ o ad un sottoinsieme (non aperto) U di X (estremi vincolati).

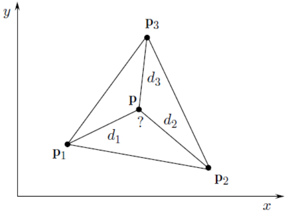
Esempio:

1. Trovare gli estremi di $f(x) = x^2$ per $x \in \mathbb{R}$.
2. Trovare gli estremi di $f(x) = x^2$ per $x \in [-1, 1]$.

Svolgimento:

1. Si calcola $f'(x) = 2x$, si guarda quando $f'(x) = 0$ e si deduce che $x = 0$ è un punto estremo. Di seguito si studia la natura del punto estremo.
2. Si calcolano i punti estremi interni all'intervallo, poi si valuta la funzione f nei punti estremi e nei punti del bordo e si deducono i valori massimi e minimi assoluti. Quindi $f(\pm 1) = 1$ e $f(0) = 0$ e possiamo dedurre che ± 1 sono massimi assoluti e 0 minimo assoluto.

Esempio di ricerca di estremi liberi:
Tre punti p_1, p_2, p_3 disposti ai vertici di un triangolo acutangolo devono essere collegati con un quarto punto, mediante un cavo, in modo da utilizzare meno materiale possibile. Dove collochiamo il punto p?



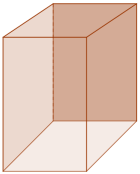
Poniamo:

$$d_j(x,y) = |p - p_j| = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, \quad j = 1, 2, 3$$

Dobbiamo minimizzare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da:

$$f(x,y) = \sum_{j=1}^{3} d_j(x,y), \quad (x,y) \text{ varia nell'aperto } \mathbb{R}^2$$

Esempio di un problema di massimizzazione con vincoli di uguaglianza:
Fra tutti i parallelepipedi aventi superficie totale assegnata, $2A$, determinare quello di volume massimo.



Indichiamo con x, y, z le lunghezze degli spigoli del parallelepipedo.
Dobbiamo massimizzare:

$$V(x, y, z) = xyz \quad \text{su} \quad \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, z > 0\right\}$$

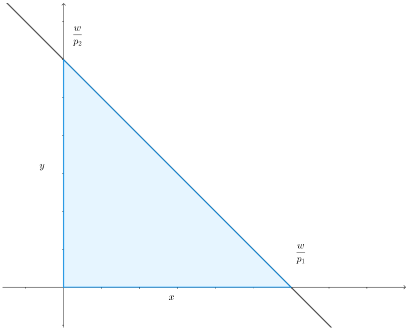
con la condizione che $2(xy + yz + zx) = 2A$

Esempio di ottimizzazione in presenza di vincoli di disuguaglianza:
Le variabili x ed y esprimono quantità di beni, fattori o altro. Quindi deve essere $x \geq 0$, $y \geq 0$.
La spesa complessiva per l'acquisto di due beni in quantità x ed y dati i prezzi p_1 e p_2 dei beni sarà $g(x, y) = p_1 x + p_2 y$
Se la ricchezza disponibile è $w > 0$, la spesa deve soddisfare $g(x, y) \leq w$. Il problema sarà:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ p_1 x + p_2 y \leq w \end{cases}$$

Questo sistema definisce il "vincolo di bilancio" ed è legato a problemi di massimo profitto o utilità massima.

Il vincolo può essere rappresentato dal triangolo:



La retta $p_1 x + p_2 y = w$ è la *retta di bilancio*.
I punti sui cateti del triangolo presuppongono l'acquisto di uno solo dei due beni. Nell'origine non si acquista nulla.
I punti dell'ipotenusa equivalgono a spendere tutta la ricchezza disponibile senza risparmiare nulla.

La funzione obiettivo da massimizzare è quella del consumatore che vuole massimizzare la propria soddisfazione (utilità):

$$\max_{x,y} u(x,y)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ p_1 x + p_2 y \leq w \end{cases}$$

dove $u(x,y)$ rappresenta l'utilità ottenuta consumando i due beni.
Esempi molto usati sono:
1. Utilità Cobb-Douglas

$$u(x,y) = x^\alpha y^\beta, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Se ad esempio, $u(x,y) = x^{0.5} y^{0.5}$, il consumatore preferisce avere entrambi i beni.
2. Utilità lineare (beni sostituti)

$$u(x,y) = ax + by, \quad a, b > 0.$$

Se ad esempio $u(x,y) = 2x + y$ allora una unità aggiuntiva del bene 1 dà il doppio dell'utilità marginale rispetto a una unità aggiuntiva del bene 2.

Generalità sull'ottimizzazione

Sia $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, X aperto.

Definizione

Un punto $\boldsymbol{x}^0 \in X$ si dice di *massimo (minimo) locale* per f se esiste un intorno $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ tale che

$$f(\boldsymbol{x}) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \text{(oppure } f(\boldsymbol{x}) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\text{)}$$

per ogni $\boldsymbol{x} \in X \cap B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right)$.
Si dice di *massimo (minimo) globale* per f se la disuguaglianza vale per ogni $\boldsymbol{x} \in X$.

Se la disuguaglianza vale in senso stretto per $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0$ è un punto di *massimo (minimo) locale o globale forte.*
Il valore $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ si dirà *massimo (o minimo) locale o globale forte.*

Se X è un aperto, gli eventuali estremi f si dicono *liberi*. Più in generale si parla di *calcolo degli estremi liberi* se si vogliono individuare punti di estremi *interni* al dominio.

Supponiamo di essere interessati ai valori che f assume non in tutto X, ma in un sottoinsieme $U \subset X$ (quindi $f|_U$). Se X è chiuso, potrebbe essere $U = \partial X$). In tal caso:

Definizione

$\boldsymbol{x}^0$ si dice *punto di massimo (minimo) locale* per $f|_U$ se esiste $B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ tale che

$$f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \left(\text{oppure } f\left(\boldsymbol{x}\right) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right) \quad \forall \boldsymbol{x} \in B_r\left(\boldsymbol{x}^0\right) \cap U$$

$\boldsymbol{x}^0$ si dice di *massimo (minimo) globale* se

$$f\left(\boldsymbol{x}\right) \leq f\left(\boldsymbol{x}^0\right) \quad \left(\text{oppure } f\left(\boldsymbol{x}\right) \geq f\left(\boldsymbol{x}^0\right)\right) \quad \forall \boldsymbol{x} \in U$$

Attenzione: un estremo di qualunque natura per f è automaticamente un estremo della stessa natura per $f|_U$, ma non è vero il viceversa.

Esempio:
$f(x) = x^2$.
Calcoliamo $f'(x) = 2x$ e la poniamo uguale a 0. Otteniamo $x = 0$, che è punto di minimo globale per f su $\mathbb{R}$. Infatti $f(0) = 0$ e $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Esempio:
$f(x) = x^2, \quad x \in [-1; 2]$
$x = 0$ è punto di minimo globale
$x = -1$ è punto di massimo locale
$x = 2$ è punto di massimo globale
Anche nel caso di funzioni di una variabile reale a valori reali i punti di massimo o minimo, locale o globale, si possono trovare anche nei punti del bordo (dove si ha solo la nozione di derivata destra o sinistra) e in generale vanno analizzati a parte.

Esempio:
$f(x) = |x|$
$x = 0$ è punto di minimo ma in $x = 0$ la f non è derivabile.
$\Rightarrow$ in una variabile i punti di massimo/minimo globale o locale possono trovarsi tra i punti di non derivabilità di f.

Esempio:
$f(x) = x^3$.
Abbiamo che $f'(x) = 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Questo non è punto di minimo o massimo né locale, né globale.
Anche nel caso di funzioni reali di una variabile reale non tutti i punti che annullano la derivata prima sono effettivamente punti di massimo o minimo.

Se U sottoinsieme di X è descritto da equazioni del tipo:

$$g_j(x_1, \ldots, x_n) = 0 \quad j = 1, \ldots, m \quad \text{con } m < n$$

parliamo di *ottimizzazione vincolata con vincoli di uguaglianza*.

Se l'insieme è definito da un sistema di disequazioni del tipo:

$$h_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \quad j = 1, \ldots m$$

parliamo di *ottimizzazione vincolata con vincoli di disuguaglianza*.

Questioni di cui tenere conto in un problema di ottimizzazione:

- **Esistenza**: questo problema si presenta prevalentemente nella ricerca degli estremi globali.
  Per garantirne l'esistenza potrebbe essere utile il teorema di Weierstrass (*se X è compatto ed f è continua in X, allora f ammette massimo e minimo (globali) in X*).

- **Unicità**: questo problema si presenta prevalentemente nella ricerca degli estremi globali. Supponiamo di sapere che $f(\boldsymbol{x}^0)$ sia il minimo globale di f in X. Questo minimo è unico? Esistono altri punti $\boldsymbol{x}$ tali che $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0)$?
  In questo caso è utile sapere se il dominio è convesso e/o la funzione è convessa

Questioni di cui tenere conto in un problema di ottimizzazione:

- **Caratterizzazione dei punti di estremo**: si tratta di capire se esistono punti stazionari (teorema di Fermat) e di riconoscerne la natura come nel caso unidimensionale. I metodi utilizzati saranno:
    - dei moltiplicatori di Lagrange (nel caso di vincoli di uguaglianza)
    - di Kuhn-Tucker (nel caso di vincoli di disuguaglianza)
- **Algoritmi di calcolo**: quando le variabili in gioco sono molte, bisogna costruire algoritmi (differenti) efficienti che permettano di determinare i punti che interessano. Qui, però, entriamo nel campo dell'Analisi Numerica.

Estremi liberi. Condizioni necessarie

Siano $f : X \to \mathbb{R}$, con X aperto di $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}^0$ un estremo locale per f. Sia $\boldsymbol{v}$ versore di $\mathbb{R}^n$. Definiamo $g(t) = f\left(\boldsymbol{x}^0 + t\boldsymbol{v}\right)$.

La funzione g è reale di variabile reale t, è definita in un intorno di $t = 0$ e ha in $t = 0$ un estremo. Se $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0)$ derivata nella direzione $\boldsymbol{v}$ di f esiste, per il teorema di Fermat $D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}^0) = g'(0) = 0$.

Teorema (di Fermat)

Se $\boldsymbol{x}^0$ è punto di estremo locale per f e la derivata direzionale $D_{\boldsymbol{v}} f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ esiste, allora $D_{\boldsymbol{v}} f\left(\boldsymbol{x}^0\right) = 0$.

Corollario

Se f è differenziabile in $\boldsymbol{x}^0$, $\boldsymbol{x}^0$ è punto di estremo locale per f, allora ogni derivata direzionale in $\boldsymbol{x}^0$ è nulla. In particolare $\nabla f\left(\boldsymbol{x}^0\right) = 0$.

Il corollario ci dice che se f è differenziabile, un punto in cui il gradiente o il differenziale si annulla si dice **stazionario** o **critico**.

Attenzione: le condizioni espresse nel Teorema e nel Corollario non sono sufficienti per decidere se un punto $\boldsymbol{x}^0$ sia di estremo, né di quale tipo di estremo si tratti.

L'idea potrebbe essere che se $\boldsymbol{x}^0$ è critico per f ed è un punto di massimo (minimo) lungo ogni direzione uscente da $\boldsymbol{x}^0$, cioè per ogni versore $\boldsymbol{v}$, allora è punto di massimo (minimo) locale per f.

Mostriamo che se $\boldsymbol{x}^0$ è un punto critico per f ed è di massimo (minimo) lungo ogni direzione uscente da $\boldsymbol{x}^0$, allora è punto di massimo (minimo) locale per f è falso.

Esempio:
Sia $f(x,y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4 = \left(y - x^2\right)\left(y - 2x^2\right)$

Calcoliamo:

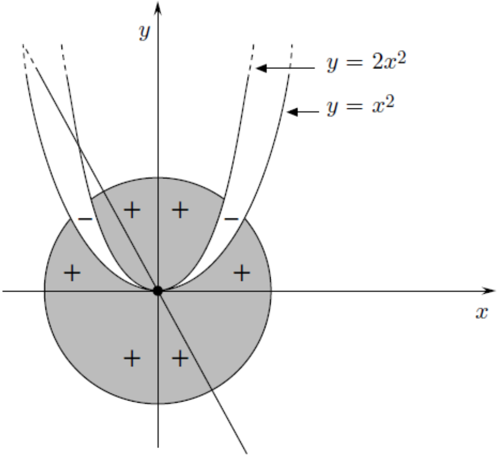
$$f_x = -6xy + 8x^3, \quad f_x(0,0) = 0$$

$$f_y = 2y - 3x^2, \quad f_y(0,0) = 0$$

Studiamo il comportamento di $(0,0)$ lungo tutte le direzioni uscenti. Lungo l'asse y si ha $f(0,y) = y^2$, che raggiunge il minimo in $y = 0$. (Lungo l'asse x si ha $f(x,0) = 2x^4$, che raggiunge il minimo in $x = 0$.) Studiamo il comportamento del punto lungo gli assi e lungo tutte le rette $y = mx$:

$$f(x,mx) = m^2x^2 - 3mx^3 + 2x^4$$

ha minimo in $x = 0$, $\forall m$.



Ma: $(0,0)$ non è punto di minimo locale per f, perché la funzione cambia segno in ogni intorno circolare di $(0,0)$. Esistono punti in cui f è positiva, altri in cui è negativa.

Definizione

Se in ogni intorno di $\boldsymbol{x}^0$ esistono punti in cui f è maggiore di $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ e punti in cui è minore di $f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$, $\boldsymbol{x}^0$ si dice *di sella* o *di colle*.

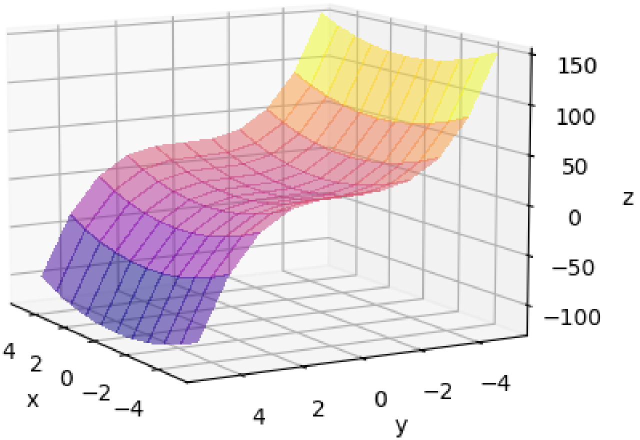
Esempio:
$f(x, y) = x^2 - y^3$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, quindi si può applicare il teorema di Fermat:
$\nabla f(x, y) = (0, 0) \Leftrightarrow (2x, -3y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$
L'origine è l'unico punto stazionario o critico per f.

Per capire se è di massimo o di minimo si può studiare *l'incremento* di f:

$$\Delta f(0, 0) = f(x, y) - f(0, 0)$$

Se ci restringiamo all'asse y:
$f(0, y) = -y^3 \Rightarrow \Delta f(0, 0) > 0$ se $y < 0$ e $\Delta f(0, 0) < 0$ se $y > 0$
In ogni intorno dell'origine l'incremento ha segno opposto.
Quindi l'origine è punto di sella o di colle.


150
100
50
0
−50
−100
z
4
2
0
−2
−4
x
4
2
0
−2
−4
y

Esempio:
$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x^2y$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. f è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dal teorema di Fermat:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x - 2xy, 4y - x^2) = (0,0)$$

$$\begin{cases} 2x(1-y) = 0 \\ 4y = x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \vee y = 1 \\ y = 0 \vee x = \pm 2 \end{cases}$$

I punti critici sono $(0,0), (2,1), (-2,1)$.

In questo caso è difficile studiare la natura dei punti critici utilizzando l'incremento. Abbiamo bisogno di criteri che ci aiutino a portare avanti quest'analisi in modo agevole.

Come si trovano gli estremi liberi?
Risolvendo:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

Una volta determinati gli eventuali punti critici occorrono altre indagini per deciderne la natura.

Per funzioni convesse o concave possono essere tratte conclusioni immediate.

Proposizione

Se $\boldsymbol{x}^0$ è un punto critico per una funzione f, convessa (concava) e differenziabile, allora $\boldsymbol{x}^0$ è un punto di minimo (massimo) globale. Inoltre, se f è strettamente convessa (concava) il punto di minimo (massimo) è unico e forte.

Dimostrazione: Se f è convessa e differenziabile in $\boldsymbol{x}^0$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$, si ha $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^0) + df(\boldsymbol{x}^0)$.
Dato che $\boldsymbol{x}^0$ è critico, $df(\boldsymbol{x}^0) = 0$. Quindi $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^0)$, $\forall \boldsymbol{x} \in X$.
Dunque x_0 è un punto di minimo globale.
Se f è strettamente convessa la disuguaglianza iniziale vale in senso stretto $\forall \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}^0$. Quindi $\boldsymbol{x}^0$ è un minimo globale e forte ed è unico. $\square$

Attenzione:

La scrittura $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}^0) + df(\boldsymbol{x}^0)$ in due variabili diventa:

$$f(x_1 x_2) \geq f(x_1^0, x_2^0) + f_{x_1}(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + f_{x_2}(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0);$$

cioè in corrispondenza di (x_1, x_2) la quota sul grafico di f è maggiore o uguale a quella sul piano tangente nel punto $(x_1^0, x_2^0, f(x_1^0, x_2^0))$.

Esempio:

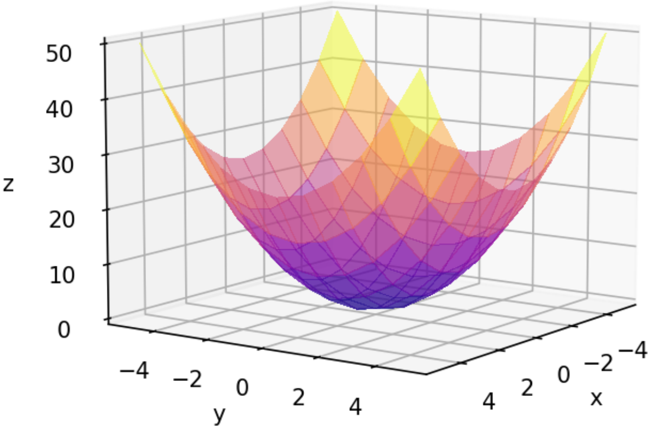
Calcolare i punti critici di $f(x,y) = x^2 + y^2$.

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. f è derivabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$. Dal teorema di Fermat:

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y) = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

L'origine quindi è l'unico punto critico di f.
Da $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) = x^2 + y^2 \geq 0$, deduciamo che $P = (0,0)$ è un minimo assoluto.

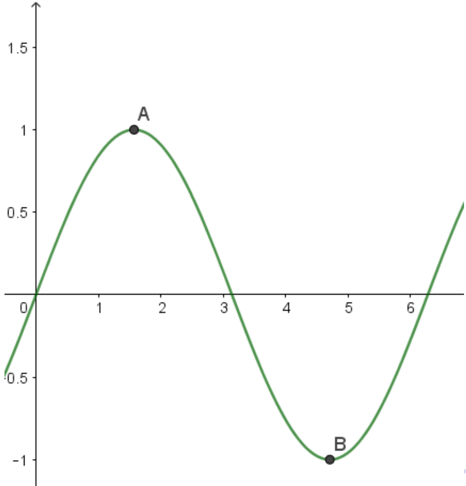
$f(x,y) = x^2 + y^2$, infatti, è convessa. Quindi $(0,0)$ è l'unico punto critico per f ed è di minimo assoluto.


50
40
30
20
10
0
z
−4
−2
0
2
4
y
−4
−2
0
2
4
x

Forme quadratiche

Ricordiamo che in una variabile se:

- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) < 0$ abbiamo un punto di massimo;
- $f'(x_0) = 0$ e $f^{(2)}(x_0) > 0$ abbiamo un punto di minimo;



Un modo per determinare la natura di un punto critico x_0 è quello di usare la formula di Taylor per analizzare il segno di $f(x_0 + h) - f(x_0)$:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + o\left(h^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0) h^2 + o\left(h^2\right) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0) + o\left(h^2\right) \qquad \text{per } h \to 0$$

- Se $f''(x_0) \neq 0$, il segno di $f(x_0 + h) - f(x_0)$ è quello di $f''(x_0)$
- Se $f''(x_0) = 0$, occorre fare un'analisi più approfondita

Nel caso multidimensionale troveremmo:

$$f\left(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}\left(\boldsymbol{x}^0\right) h_i h_j + o\left(|\boldsymbol{h}|^2\right)$$

e il segno di $f\left(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}\right) - f\left(\boldsymbol{x}^0\right)$ dipende dall'analisi del differenziale secondo di f in $\boldsymbol{x}_0$, ovvero dall'analisi della forma quadratica.

Definizione

Una **forma quadratica** (f.q.) in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio omogeneo di secondo grado del tipo:

$$q(\boldsymbol{h}) = q(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

dove gli a_{ij} sono numeri reali, coefficienti della f.q.. Se tutti gli a_{ij} sono uguali a zero, parliamo di f.q. nulla.

Possiamo sempre supporre che $a_{ij} = a_{ji}$. Se così non fosse basterebbe sostituire i due coefficienti con $\frac{a_{ij}+a_{ji}}{2}$.
A ogni $q(\boldsymbol{h})$ risulta associata una matrice simmetrica $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$ con una corrispondenza biunivoca.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Esempio:
$q(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esempio:
$q(h_1, h_2, h_3) = h_1^2 + 2h_2^2 - 6h_1h_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio:
$q(h_1, h_2, h_3, h_4) = -h_1^2 - 3h_2^2 + h_4^2 - 2h_1h_3 + 10h_2h_4$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siamo interessati al segno di una f.q. al variare di $\boldsymbol{h}$.
Siccome la f.q. è omogenea di secondo grado, $q(\boldsymbol{h})$ assume segno costante su ogni retta passante per l'origine, origine esclusa: $q(t\boldsymbol{h}) = t^2 q(\boldsymbol{h})$.

Esempi di tutte le possibilità di comportamento di una f.q. in $\mathbb{R}^2$:

- $q(h,k) = h^2 + k^2 > 0,\ \forall (h,k) \neq (0,0)$ è definita positiva
- $q(h,k) = -h^2 - k^2 < 0,\ \forall (h,k) \neq (0,0)$ è definita negativa
- $q(h,k) = h^2 > 0$ è sempre positiva tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$. Diremo che è semidefinita positiva
- $q(h,k) = -h^2 < 0$ è sempre negativa tranne che nei vettori del tipo $(0,k)$. Diremo che è semidefinita negativa
- $q(h,k) = -h^2 + k^2 > 0$ è positiva per $(0,k) \wedge k \neq 0$ ed è negativa per $(h,0) \wedge h \neq 0$. Diremo che è indefinita

Gli esempi suggeriscono quindi la seguente classificazione che si applica sia alle f.q. che alle matrici simmetriche ad esse associate.

Definizione

Una f.q. (o la matrice simmetrica corrispondente), $q(\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, si dice:

- *definita positiva (negativa)* se $\forall \boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$, $q(\boldsymbol{h}) > 0$ ($q(\boldsymbol{h}) < 0$);
- *semidefinita positiva (negativa)* se $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$, $q(\boldsymbol{h}) \geq 0$ ($q(\boldsymbol{h}) \leq 0$) ed esiste $\boldsymbol{h} \neq \mathbf{0}$ tale che $q(\boldsymbol{h}) = 0$;
- *indefinita (o non definita)* se esistono $\boldsymbol{h}^1$ e $\boldsymbol{h}^2$ tali che $q(\boldsymbol{h}^1) < 0$ e $q(\boldsymbol{h}^2) > 0$.

È sempre bene specificare lo spazio vettoriale in cui si opera quando si vuole classificare una f.q.
Infatti $q(h,k) = h^2 + k^2$ è definita positiva in $\mathbb{R}^2$ ma è semidefinita in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

Come classificare una f.q. senza ricorrere alla definizione?

Se $n = 2$:

$$q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$$

con a, b, c non tutti nulli.

Se $a = c = 0$ è indefinita.
Se $a \neq 0$ possiamo riscriverla come:

$$q(h_1, h_2) = a\left(h_1 + \frac{b}{a}h_2\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}h_2^2$$

e i coefficienti dei quadrati sono a e $\frac{|A|}{a}$, dove $|A|$ è il determinante di:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Vale il seguente risultato:

Proposizione (segno delle f.q. in 2 variabili)

La forma quadratica $q(h_1, h_2) = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2$ *è:*

- *Definita positiva* $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ *e* $a > 0$
- *Definita negativa* $\Leftrightarrow$ $\det A > 0$ *e* $a < 0$
- *Semidefinita positiva* $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ *e* $a > 0$*, oppure se* $\det A = 0$ *e* $c > 0$
- *Semidefinita negativa* $\Leftrightarrow$ $\det A = 0$ *e* $a < 0$*, oppure se* $\det A = 0$ *e* $c < 0$
- *Indefinita* $\Leftrightarrow$ $\det A < 0$

Nella proposizione il test fa intervenite non solo la matrice A, ma anche una matrice 1×1, ad esempio quella in alto a sinistra, che chiameremo $A_1 = (a_{11})$.

Se generalizziamo questo test, questo farà intervenire tutte le n sottomatrici A_k composte mediante le prime k righe e k colonne di A, chiamate *sottomatrici principlai di nord-ovest*.

$$A_1 = (a_{11}),\ A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ldots, A_n = A$$

i cui determinanti si chiamano *minori principali di nord-ovest*.

Teorema (segno delle f.q. in n variabili)

Sia $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. q è definita positiva $\Leftrightarrow |A_k| > 0, \forall k = 1, \dots, n$
2. q è definita negativa $\Leftrightarrow (-1)^k \cdot |A_k| > 0, \forall k = 1, \dots, n$ (cioè $a_{11} < 0$, $|A_2| > 0$, $|A_3| < 0, \dots$)

Il teorema vale anche con le sottomatrici principali di sud-est, cioè costruite partendo da in basso a destra con l'elemento a_{nn}, aggiungendo ogni volta una riga fino ad arrivare ad A.

Esempio:

$q(h_1, h_2, h_3) = 5h_1^2 - 8h_1h_3 + 3h_2^2 + 4h_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 5 > 0$, $|A_2| = 15 > 0$, $|A_3| = |A| = 5 \cdot 12 + (-4) \cdot 12 = 12 > 0$
La f.q. è definita positiva.

Per le f.q. semidefinite occorre considerare tutte le sottomatrici principali di A.

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 0$, $|A| = 0$ e $b_{11} = 0$, $|B| = 0$ non permettono di distinguere il segno (corrispondono rispettivamente ad una f.q. semidefinita positiva e una negativa).

Teorema

Sia $q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. q è semidefinita positiva $\Leftrightarrow$ ogni sottomatrice principale ha determinante non negativo.
2. q è semidefinita negativa $\Leftrightarrow$ ogni sottomatrice principale di ordine k ha determinante non negativo se k è pari, non positivo se k è dispari.

In ogni altro caso $q(\boldsymbol{h})$ è indefinita.

Esempio:
$q(h_1, h_2, h_3) = -2h_1^2 + 2h_1h_2 - 2h_1h_3 - 5h_2^2 - 8h_2h_3 - 5h_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -2 < 0$, $|A_2| = 9 > 0$, $|A_3| = |A| = 0$, quindi non è definita negativa.

Le sottomatrici principali sono: $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

il cui determinante è $9 > 0$. q è semidefinita negativa.

Esempio:
$q(h,k) = -2h^2 + 2hk - 3k^2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$a_{11} = -2 < 0$, $\det A = 5 > 0$. La f.q. risulta definita negativa.

Esercizio:
Classificare le seguenti f.q. in $\mathbb{R}^2$:

1. $q_1(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$
2. $q_2(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$
3. $q_3(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$
4. $q_4(x,y) = 3xy$
5. $q_5(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

Esercizio:
Classificare, al variare del parametro reale α, la f.q. rappresentata dalla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Esercizio:
Studiare, al variare di k, le forme quadratiche:

1. $q_1(x,y) = k^2x^2 + (k+1)y^2 + 12xy$
2. $q_2(x,y,z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 2kxz + 2yz$

Esercizio:
Si determini, al variare del parametro k, il segno della f.q. $q(x,y,z) = x^2 + 2kxy + y^2 + 2kyz + z^2$.