

Forme quadratiche: il test degli autovalori

Un altro test importante è basato sul segno degli autovalori di A .

$\lambda \in \mathbb{C}$ numero = autovalore

$x \in \mathbb{C}^n$ vettore non nullo = autovettore (corrispondente a λ)

di una matrice quadrata A di ordine n se soddisfano la relazione:

$$Ax = \lambda x$$

oppure:

$$(A - \lambda \cdot I_n)x = 0$$

Questa ha soluzioni non nulle $\Leftrightarrow$ la matrice dei coefficienti è singolare

$\Leftrightarrow \lambda$ è soluzione dell'*equazione caratteristica* $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

(polinomio di grado n in $\lambda \Rightarrow$ esistono n autovalori di A , ciascuno con la propria molteplicità).

Teorema (test degli autovettori)

Sia $q(\mathbf{h})$ una f.q. in $\mathbb{R}^n$ che scriviamo in notazione matriciale $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}$, con $\mathbf{A}$ matrice simmetrica, $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

- ① q è definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono positivi (negativi);
- ② q è semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono non negativi (non positivi) e almeno uno di essi è zero;
- ③ q è indefinita $\Leftrightarrow$ esistono 2 autovalori di segno opposto.

Esempio:

$$q(h_1, h_2, h_3) = -3h_1^2 + 2h_1h_3 - 3h_2^2 + 2h_2h_3 - h_3^2$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(\lambda + 3) \cdot (\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3, \lambda = -2 \pm \sqrt{3}$$

q è definita negativa

Esercizio:

Classificare le seguenti f.q. in $\mathbb{R}^2$ utilizzando il test degli autovalori:

- ❶ $q_1(x, y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$
- ❷ $q_2(x, y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$
- ❸ $q_3(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$
- ❹ $q_4(x, y) = 3xy$
- ❺ $q_5(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

Esercizio:

Classificare, utilizzando o il metodo dei minori principali o quello degli autovalori, le f.q. su $\mathbb{R}^3$:

- ❶ $q_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$
- ❷ $q_2(x, y, z) = 2xz + 2y - y^2 - 2yz$

Esercizio:

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la seguente f.q. in $\mathbb{R}^4$ (utilizzare il metodo dei minori principali):

$$q(x, y, z, t) = -x^2 + xy - y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + kt^2$$

Nel seguito ci tornerà utile la seguente:

Proposizione

Se $q(\mathbf{h}) = \mathbf{h}^T \mathbf{A} \mathbf{h}$ è definita positiva, allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\mathbf{h}) \geq \lambda_{\min} |\mathbf{h}|^2$$

dove $\lambda_{\min}$ è il minimo autovalore di $\mathbf{A}$.

Se $q(\mathbf{h})$ è definita negativa, allora, $\forall \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\mathbf{h}) \leq \lambda_{\max} |\mathbf{h}|^2$$

dove $\lambda_{\max}$ è il massimo autovalore di $\mathbf{A}$.

Osservazione

Se $q(\mathbf{h})$ è una f.q. in $\mathbb{R}^n$, allora $q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

La natura del punto critico $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ dipende dal segno di q .

- ❶ q è definita positiva (negativa) $\Rightarrow \mathbf{h} = \mathbf{0}$ è punto di minimo (massimo) globale forte.
- ❷ q è indefinita $\Rightarrow \mathbf{0}$ è di colle.
- ❸ q (non nulla) è semidefinita positiva (negativa) $\Rightarrow \mathbf{0}$ è di minimo (massimo) globale debole.

Studio della natura dei punti critici

Come determinare la natura di un punto stazionario di una funzione di classe almeno C^2 ?

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(|\mathbf{h}|^2)$$

Il segno dipende da quello della forma quadratica $d^2 f(\mathbf{x}_0)$, nel caso in cui $\mathbf{x}_0$ sia un punto critico per f .

La matrice corrispondente al *differenziale secondo* $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ di f in $\mathbf{x}_0$ è l'**Hessiana** di f in $\mathbf{x}_0$, cioè:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) = (f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0))_{i,j=1,\dots,n}$$

che risulta simmetrica se $f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) = f_{x_j x_i}(\mathbf{x}_0)$, $\forall i, j = 1, \dots, n$; questo accade, ad esempio, se f è di classe C^2 .

Ricordiamo che, se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è differenziabile in X , allora per ogni $\mathbf{x} \in X$ esistono le derivate parziali $f_{x_j}(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, n$. Se queste derivate sono a loro volta differenziabili in $\mathbf{x}$ diremo che f è due volte differenziabile in $\mathbf{x}$ e si chiama *differenziale secondo* di f in $\mathbf{x}$ nell'incremento $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$:

$$d^2 f(\mathbf{x}) : \mathbf{h} \rightarrow \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) h_j h_i$$

$$d^2 f(\mathbf{x}) := \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}) dx_i dx_j$$

La matrice quadrata di ordine n i cui elementi sono $f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$ si chiama *matrice Hessiana* di f nel punto $\mathbf{x}$ e viene indicata col simbolo $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Usando la teoria delle f.q. ricaviamo il seguente:

Teorema (studio della natura dei punti critici - caso generale)

Sia $f \in C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^n$. Siano $\mathbf{x}_0$ un punto critico per f e:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = q(\mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

la f.q. corrispondente. Allora:

- 1 Se $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è definita positiva (negativa), $\mathbf{x}_0$ è un punto di minimo (massimo) locale forte;
- 2 Se $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita, $\mathbf{x}_0$ è un punto di colle.

Dimostrazione:

- ① Per ipotesi $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è def. positiva $\Rightarrow$ per la prop. precedente abbiamo che $d^2 f(\mathbf{x}_0) \geq \lambda_m |\mathbf{h}|^2$, dove λ_m è il minimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$.

Ma:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0) + o(|\mathbf{h}|^2) \geq \frac{1}{2} \lambda_m |\mathbf{h}|^2 + o(|\mathbf{h}|^2) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_m |\mathbf{h}|^2 \{1 + o(1)\} > 0 \quad (\text{per } \mathbf{h} \rightarrow 0) \end{aligned}$$

perciò $\mathbf{x}_0$ è punto di minimo locale forte.

Nel caso $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ definita negativa la dimostrazione è analoga:

$$f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) \leq \frac{1}{2} \lambda_M |\mathbf{h}|^2 \{1 + o(1)\}$$

dove λ_M (che è negativo) è il massimo autovalore di $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}^0)$.

Quindi $f(\mathbf{x}^0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}^0) < 0$ definitivamente per $\mathbf{h} \rightarrow 0$ quindi $\mathbf{x}^0$ è punto di massimo locale forte.

- ② Se $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è indefinita esistono due vettori incremento $\mathbf{h}$ e $\mathbf{k}$ in corrispondenza ai quali $d^2 f(\mathbf{x}_0)$ è rispettivamente positiva e negativa:

$$\sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j > 0 \quad \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) k_i k_j < 0$$

Valutiamo l'incremento di f lungo la retta $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Abbiamo che:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \frac{1}{2}t^2 \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(t^2) = \\ &= \frac{1}{2}t^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^n f_{x_i x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j + o(1) \right\} \quad (\text{per } t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

che è definitamente positivo. Con lo stesso ragionamento troviamo che per $|t|$ piccolo $f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{k}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$. Quindi in ogni intorno si trovano punti in cui f è maggiore di $f(\mathbf{x}_0)$ e punti in cui è minore. Quindi $\mathbf{x}_0$ è punto di colle. $\square$

Osservazione

Se $d^2f(\mathbf{x})$ è definita positiva o negativa per ogni $\mathbf{x} \in X$ (non solo in $\mathbf{x}_0$), f risulta strettamente convessa o concava, rispettivamente, e perciò $\mathbf{x}_0$ risulta l'unico punto di estremo globale forte, minimo o massimo rispettivamente.

Se $d^2f(\mathbf{x}_0)$ è semidefinita, non si può più stabilire la natura del punto critico considerando soltanto il differenziale secondo.

Proposizione

Sia $f \in C^2(X)$. Se $d^2f(\mathbf{x}_0)$ non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa), allora $\mathbf{x}_0$ non può essere punto di massimo (minimo).

Regola nel caso bidimensionale

Teorema (studio della natura dei punti critici - caso $n = 2$)

Sia $f \in C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $(x_0, y_0) \in X$ un punto critico per f e sia:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana di f nel punto critico. Allora:

- ❶ $\det H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva e (x_0, y_0) è punto di minimo locale forte.
- ❷ $\det H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa e (x_0, y_0) è punto di massimo locale forte.
- ❸ $\det H_f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è semidefinita (positiva o negativa) e occorre un'analisi ulteriore.
- ❹ $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è indefinita e (x_0, y_0) è punto di colle.

Se:

- ① $\det \mathbf{H}_f(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in X$, l'estremo è globale;
- ② $\det \mathbf{H}_f(x, y) = 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$ (oppure $f_{yy}(x, y) > 0$) in tutto X allora (x_0, y_0) è punto di minimo globale;
- ③ $\det \mathbf{H}_f(x, y) = 0$ e $f_{xx}(x, y) < 0$ (oppure $f_{yy}(x, y) < 0$) in tutto X allora (x_0, y_0) è punto di massimo globale.

Esempio:

Vogliamo determinare gli estremi della funzione:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ quindi i suoi eventuali estremi si trovano tra i punti critici, che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(1, 0, 1)$.

Inoltre $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2$, mentre le altre derivate seconde sono nulle.

Quindi:

$$d^2 f(x, y, z) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$

che è una forma quadratica definita positiva per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Quindi $(1, 0, 1)$ è un punto di minimo globale.

Sintesi per ottimizzazione non vincolata

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi e di colle di una funzione $z = f(x, y)$:

- ① Risolviamo $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ ottenendo i punti stazionari
- ② Calcoliamo $H_f(x, y)$
- ③ Sostituiamo in $H_f(x, y)$ le coordinate di ogni punto stazionario.
 - $H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f''_{xx} > 0 \Rightarrow$ il punto è di minimo relativo
 - $H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f''_{xx} < 0 \Rightarrow$ il punto è di massimo relativo
 - $H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow$ il punto è di colle
 - $H_f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow$ non si può dire nulla sulla natura del punto stazionario

Esempio:

$$f(x, y) = 3x^3 + 9xy^2 - 5x + 4y$$

I punti critici sono $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Calcoliamo $f''_{xx} = 18x$, $f''_{xy} = 18y$, $f''_{yy} = 18x$

$$\det H_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} 18x & 18y \\ 18y & 18x \end{pmatrix} = 324(x^2 - y^2)$$

Abbiamo che: $\det H_f(A) = -108 < 0$ e quindi A è punto di colle,

$\det H_f(B) = -108 < 0$ e quindi B è punto di colle,

$\det H_f(C) = 108 > 0 \wedge f''_{xx}(C) = -12 < 0$ e quindi C è punto di

massimo relativo, $\det H_f(D) = 108 \wedge f''_{yy}(D) = 12 > 0$ e quindi D è punto di minimo relativo.

Se vogliamo valutare la quota z , calcoliamo:

$$f(A) = \frac{26}{9}, f(B) = -\frac{26}{9}, f(C) = \frac{28}{9}, f(D) = -\frac{28}{9}$$

Hessiano nullo

Metodo del discriminante: in ogni caso troviamo una soluzione.

- ❶ $f(x_0, y_0) = 0$ e $\det H_f(x_0, y_0) = 0$
- ❷ Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che
 $f(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di massimo relativo.
- ❸ Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che
 $f(x, y) > 0, \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di minimo relativo.
- ❹ Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) > 0$ e
 $f(x, y) < 0, \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di colle.

Dobbiamo studiare il segno di f nell'intorno del punto con Hessiano nullo. Quindi poniamo $f(x_0, y_0) = c$ e studiamo il segno di $f(x, y) - c$.

Esercizi

- 1 Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2$.
- 2 Determinare i punti stazionari di $f(x, y) = 3y^2x + x^3 - 3y^2 - 3x^2$ e stabilirne la natura.
- 3 Determinare i punti stazionari di $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - \log(1 + 3x^2 + 4y^2)$. Dire se l'origine è estremante per f .
- 4 Determinare gli estremi liberi di $f(x, y) = x^2y - y^2 - 1$
- 5 Si determinino gli eventuali punti di estremo libero di $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$