Forme quadratiche: il test degli autovalori

Un altro test importante è basato sul segno degli autovalori di A.
$\lambda \in \mathbb{C}$ numero = autovalore
$x \in \mathbb{C}^n$ vettore non nullo = autovettore (corrispondente a λ)
di una matrice quadrata A di ordine n se soddisfano la relazione:

$$Ax = \lambda x$$

oppure:

$$(A - \lambda \cdot I_n)x = 0$$

Questa ha soluzioni non nulle $\Leftrightarrow$ la matrice dei coefficienti è singolare $\Leftrightarrow$ λ è soluzione dell'*equazione caratteristica* $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$ (polinomio di grado n in $\lambda \Rightarrow$ esistono n autovalori di A, ciascuno con la propria molteplicità).

Teorema (test degli autovettori)

Sia $q(\boldsymbol{h})$ una f.q. in $\mathbb{R}^n$ che scriviamo in notazione matriciale $q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{h}$, con $\boldsymbol{A}$ matrice simmetrica, $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$. Allora:

1. q è definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono positivi (negativi);
2. q è semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow$ tutti gli autovalori sono non negativi (non positivi) e almeno uno di essi è zero;
3. q è indefinita $\Leftrightarrow$ esistono 2 autovalori di segno opposto.

Esempio:
$q(h_1, h_2, h_3) = -3h_1^2 + 2h_1h_3 - 3h_2^2 + 2h_2h_3 - h_3^2$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -(\lambda+3)\cdot(\lambda^2 + 4\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -3, \lambda = -2 \pm \sqrt{3}$$

q è definita negativa

Esercizio:

Classificare le seguenti f.q. in $\mathbb{R}^2$ utilizzando il test degli autovalori:

1. $q_1(x, y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$
2. $q_2(x, y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$
3. $q_3(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$
4. $q_4(x, y) = 3xy$
5. $q_5(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

Esercizio:

Classificare, utilizzando o il metodo dei minori principali o quello degli autovalori, le f.q. su $\mathbb{R}^3$:

1. $q_1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz$
2. $q_2(x, y, z) = 2xz + 2y - y^2 - 2yz$

Esercizio:

Studiare al variare di $k \in \mathbb{R}$ la seguente f.q. in $\mathbb{R}^4$ (utilizzare il metodo dei minori principali):

$$q(x, y, z, t) = -x^2 + xy - y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + kt^2$$

Nel seguito ci tornerà utile la seguente:

Proposizione

Se $q(\boldsymbol{h}) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{h}$ è definita positiva, allora, $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\boldsymbol{h}) \geq \lambda_{\text{min}} |\boldsymbol{h}|^2$$

dove λ_{min} è il minimo autovalore di $\boldsymbol{A}$.
Se $q(\boldsymbol{h})$ è definita negativa, allora, $\forall \boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^n$:

$$q(\boldsymbol{h}) \leq \lambda_{\text{max}} |\boldsymbol{h}|^2$$

dove λ_{max} è il massimo autovalore di $\boldsymbol{A}$.

Osservazione

Se $q(\boldsymbol{h})$ è una f.q. in $\mathbb{R}^n$, allora $q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\nabla q(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
La natura del punto critico $\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$ dipende dal segno di q.

1. q è definita positiva (negativa) $\Rightarrow$ $\boldsymbol{h} = 0$ è punto di minimo (massimo) globale forte.
2. q è indefinita $\Rightarrow$ $\mathbf{0}$ è di colle.
3. q (non nulla) è semidefinita positiva (negativa) $\Rightarrow$ $\mathbf{0}$ è di minimo (massimo) globale debole.

Studio della natura dei punti critici

Come determinare la natura di un punto stazionario di una funzione di classe almeno C^2?

$$f\left(\boldsymbol{x}^0+\boldsymbol{h}\right)-f\left(\boldsymbol{x}^0\right)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0)h_i h_j+o(|\boldsymbol{h}|^2)$$

Il segno dipende da quello della forma quadratica $d^2f(\boldsymbol{x}_0)$, nel caso in cui $\boldsymbol{x}_0$ sia un punto critico per f.

La matrice corrispondente al *differenziale secondo* $d^2f(\boldsymbol{x}_0)$ di f in $\boldsymbol{x}_0$ è l'**Hessiana** di f in $\boldsymbol{x}_0$, cioè:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)=(f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0))_{i,j=1,\dots,n}$$

che risulta simmetrica se $f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0))=f_{x_j x_i}(\boldsymbol{x}_0)$, $\forall i,j=1,\dots,n$; questo accade, ad esempio, se f è di classe C^2.

Ricordiamo che, se $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è differenziabile in X, allora per ogni $\boldsymbol{x} \in X$ esistono le derivate parziali $f_{x_j}(\boldsymbol{x})$, $j = 1, \dots, n$. Se queste derivate sono a loro volta differenziabili in $\boldsymbol{x}$ diremo che f è due volte differenziabile in $\boldsymbol{x}$ e si chiama *differenziale secondo* di f in $\boldsymbol{x}$ nell'incremento $\boldsymbol{h} = (h_1, \dots, h_n)$:

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) : \boldsymbol{h} \to \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) h_j h_j$$

$$d^2 f(\boldsymbol{x}) := \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}) dx_i dx_j$$

La matrice quadrata di ordine n i cui elementi sono $f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x})$ si chiama *matrice Hessiana* di f nel punto $\boldsymbol{x}$ e viene indicata col simbolo $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x})$:

$$\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_1 x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_1 x_n}(\boldsymbol{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_2 x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_2 x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\boldsymbol{x}) & f_{x_n x_2}(\boldsymbol{x}) & \dots & f_{x_n x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}$$

Usando la teoria delle f.q. ricaviamo il seguente:

Teorema (studio della natura dei punti critici - caso generale)

Sia $f \in C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^n$. Siano $\boldsymbol{x}_0$ un punto critico per f e:

$$d^2 f(\boldsymbol{x}_0) = q(\boldsymbol{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0) h_i h_j$$

la f.q. corrispondente. Allora:

1. Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è definita positiva (negativa), $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di minimo (massimo) locale forte;
2. Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è indefinita, $\boldsymbol{x}_0$ è un punto di colle.

Dimostrazione:

1. Per ipotesi $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è def. positiva $\Rightarrow$ per la prop. precedente abbiamo che $d^2 f(\boldsymbol{x}_0) \geq \lambda_m |\boldsymbol{h}|^2$, dove λ_m è il minimo autovalore di $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}_0)$.
   Ma:
   $$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} d^2 f(\boldsymbol{x}_0) + o(|\boldsymbol{h}|^2) \geq \frac{1}{2} \lambda_m |\boldsymbol{h}|^2 + o(|\boldsymbol{h}|^2) =$$
   $$= \frac{1}{2} \lambda_m |\boldsymbol{h}|^2 \{1 + o(1)\} > 0 \quad (\text{per } \boldsymbol{h} \to 0)$$
   perciò $\boldsymbol{x}_0$ è punto di minimo locale forte.
   Nel caso $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ definita negativa la dimostrazione è analoga:
   $$f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^0) \leq \frac{1}{2} \lambda_M |\boldsymbol{h}|^2 \{1 + o(1)\}$$
   dove λ_M (che è negativo) è il massimo autovalore di $\boldsymbol{H}_f(\boldsymbol{x}^0)$.
   Quindi $f(\boldsymbol{x}^0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}^0) < 0$ definitivamente per $\boldsymbol{h} \to 0$ quindi $\boldsymbol{x}^0$ è punto di massimo locale forte.

2. Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è indefinita esistono due vettori incremento $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{k}$ in corrispondenza ai quali $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è rispettivamente positiva e negativa:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0) h_i h_j > 0 \qquad \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0) k_i k_j < 0$$

Valutiamo l'incremento di f lungo la retta $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Abbiamo che:

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2} t^2 \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0) h_i h_j + o(t^2) =$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i x_j}(\boldsymbol{x}_0) h_i h_j + o(1) \right\} \quad (\text{per } t \to 0)$$

che è definitamente positivo. Con lo stesso ragionamento troviamo che per $|t|$ piccolo $f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{k}) - f(\boldsymbol{x}_0) < 0$. Quindi in ogni intorno si trovano punti in cui f è maggiore di $f(\boldsymbol{x}_0)$ e punti in cui è minore. Quindi $\boldsymbol{x}_0$ è punto di colle. $\square$

Osservazione

Se $d^2 f(\boldsymbol{x})$ è definita positiva o negativa per ogni $\boldsymbol{x} \in X$ (non solo in $\boldsymbol{x}_0$), f risulta strettamente convessa o concava, rispettivamente, e perciò $\boldsymbol{x}_0$ risulta l'unico punto di estremo globale forte, minimo o massimo rispettivamente.

Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ è semidefinita, non si può più stabilire la natura del punto critico considerando soltanto il differenziale secondo.

Proposizione

Sia $f \in C^2(X)$. Se $d^2 f(\boldsymbol{x}_0)$ non è nulla ed è semidefinita positiva (negativa), allora $\boldsymbol{x}_0$ non può essere punto di massimo (minimo).

Regola nel caso bidimensionale

Teorema (studio della natura dei punti critici - caso $n = 2$)

Sia $f \in C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^2$. Sia $(x_0, y_0) \in X$ un punto critico per f e sia:

$$H_f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

la matrice Hessiana di f nel punto critico. Allora:

1. $\det H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è definita positiva e (x_0, y_0) è punto di minimo locale forte.
2. $\det H_f(x_0, y_0) > 0 \wedge f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è definita negativa e (x_0, y_0) è punto di massimo locale forte.
3. $\det H_f(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è semidefinita (positiva o negativa) e occorre un'analisi ulteriore.
4. $\det H_f(x_0, y_0) < 0 \Rightarrow H_f(x_0, y_0)$ è indefinita e (x_0, y_0) è punto di colle.

Se:

1. $\det \boldsymbol{H}_f(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in X$, l'estremo è globale;
2. $\det \boldsymbol{H}_f(x, y) = 0$ e $f_{xx}(x, y) > 0$ (oppure $f_{yy}(x, y) > 0$) in tutto X allora (x_0, y_0) è punto di minimo globale;
3. $\det \boldsymbol{H}_f(x, y) = 0$ e $f_{xx}(x, y) < 0$ (oppure $f_{yy}(x, y) < 0$) in tutto X allora (x_0, y_0) è punto di massimo globale.

Esempio:
Vogliamo determinare gli estremi della funzione:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z - 5$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ quindi i suoi eventuali estremi si trovano tra i punti critici, che sono soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} f_x = 2x - 2 = 0 \\ f_y = 2y = 0 \\ f_z = 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

L'unica soluzione è $(1, 0, 1)$.
Inoltre $f_{xx} = f_{yy} = f_{zz} = 2$, mentre le altre derivate seconde sono nulle.
Quindi:

$$d^2 f(x, y, z) = 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$

che è una forma quadratica definita positiva per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Quindi $(1, 0, 1)$ è un punto di minimo globale.

Sintesi per l'ottimizzazione libera

Per determinare i punti di massimo e minimo relativi e di colle di una funzione $z = f(x, y)$:

1. Risolviamo $f_x = 0$, $f_y = 0$ ottenendo i punti stazionari
2. Calcoliamo $H_f(x, y)$
3. Sostituiamo in $H_f(x, y)$ le coordinate di ogni punto stazionario:

   - det $H_f(x_0 y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0 y_0) > 0 \Longrightarrow$ il punto è di minimo relativo
   - det $H_f(x_0 y_0) > 0$ e $f_{xx}(x_0 y_0) < 0 \Longrightarrow$ il punto è di massimo relativo
   - det $H_f(x_0 y_0) < 0 \Longrightarrow$ il punto è di sella
   - det $H_f(x_0 y_0) = 0$ non si può dire nulla sulla natura del punto stazionario (ma solo escludere un caso)

Esempio:
$f(x, y) = 3x^3 + 9xy^2 - 5x + 4y$
I punti critici sono $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, $C\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $D\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Calcoliamo $f''_{xx} = 18x$, $f''_{xy} = 18y$, $f''_{yy} = 18x$

$$\det H_f(x, y) = \det \begin{pmatrix} 18x & 18y \\ 18y & 18x \end{pmatrix} = 324(x^2 - y^2)$$

Abbiamo che: $\det H_f(A) = -108 < 0$ e quindi A è punto di colle, $\det H_f(B) = -108 < 0$ e quindi B è punto di colle, $\det H_f(C) = 108 > 0 \wedge f''_{xx}(C) = -12 < 0$ e quindi C è punto di massimo relativo, $\det H_f(D) = 108 \wedge f''_{yy}(D) = 12 > 0$ e quindi D è punto di minimo relativo.

Se vogliamo valutare la quota z, calcoliamo:
$f(A) = \frac{26}{9}$, $f(B) = -\frac{26}{9}$, $f(C) = \frac{28}{9}$, $f(D) = -\frac{28}{9}$

Hessiano nullo

Metodo del discriminante: in ogni caso troviamo una soluzione.

1. $f(x_0, y_0) = 0$ e $\det H_f(x_0, y_0) = 0$
2. Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) < 0, \ \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di massimo relativo.
3. Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) > 0, \ \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di minimo relativo.
4. Se esiste un intorno $U(x_0, y_0)$ tale che $f(x, y) > 0$ e $f(x, y) < 0, \ \forall (x, y) \neq (x_0, y_0) \Rightarrow (x_0, y_0)$ è di colle.

Dobbiamo studiare il segno di f nell'intorno del punto con Hessiano nullo. Quindi poniamo $f(x_0, y_0) = c$ e studiamo il segno di $f(x, y) - c$.

Esercizi

1. Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2 + 2$.
2. Determinare i punti stazionari di $f(x, y) = 3y^2 x + x^3 - 3y^2 - 3x^2$ e stabilirne la natura.
3. Determinare i punti stazionari di $f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 - \log(1 + 3x^2 + 4y^2)$. Dire se l'origine è estremante per f.
4. Determinare gli estremi liberi di $f(x, y) = x^2 y - y^2 - 1$
5. Si determinino gli eventuali punti di estremo libero di $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$