EQUAZIONI DI CAUCHY-RIEMANN

Sia f derivabile in senso complesso in z_0.

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) = a+ib$$

Allora

$$\lim_{|h|\to 0} \frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h|}{|h|} = 0$$

La mappa $L: h \longmapsto f'(z_0)h$ è $\mathbb{R}$ lineare ed è il differenziale secondo Fréchet.

$$L[h] = (a+ib)(h_1+ih_2) = (ah_1-bh_2)+i(ah_2+bh_1)$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Quindi se f è derivabile in senso complesso in z_0, allora f è differenziabile secondo Fréchet in senso reale, e

$$Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{dove} \quad f'(z_0) = a+ib.$$

Quindi

$$(C.R.) \begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{cases} \quad \text{e} \quad f'(z_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)$$

Viceversa, se f è Fréchet-differenziabile in senso reale in z_0 e

$$(C.R.)\begin{cases} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(z_0) \\[2ex] \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(z_0) = -\dfrac{\partial f_2}{\partial x}(z_0) \end{cases}$$

Cioè $Jf(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $\quad a = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(z_0)$, $\quad b = -\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)$

Allora, posto $w = a+ib$, si ha che

$$Jf(z_0)[h] = wh$$

E quindi

$$\frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - wh|}{|h|} \xrightarrow{|h|\to 0} 0$$

e quindi f è derivabile in senso complesso, con $f'(z_0) = w = \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(z_0) - i\dfrac{\partial f_1}{\partial y}(z_0)$