ⓐ $\alpha(t) = \left(\frac{t^3}{3}, e^t, \frac{t^4}{4}\right)$, $\alpha'(t) = (t^2, e^t, t^3) \neq (0,0,0)$
$\Rightarrow$ è regolare

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\alpha''(t) = (2t, e^t, 3t^2)$$

$$\alpha'(t) \wedge \alpha''(t) = \left(e^t(3t - t^3), -t^4, (t^2 - 2t)e^t\right)$$

$$\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2 = \left(t^2 e^t (3-t)\right)^2 + t^8 + \left(te^t(t-2)\right)^2 = 0 \iff t = 0$$

$\Rightarrow$ la curva è biregolare $\forall t \neq 0$

ⓑ $\alpha(s) = \left(\frac{s}{3}, e, \frac{s}{4}\right)$

$$\alpha'(s) = (s, e, s)$$

$$\alpha''(s) = (2, e, 3)$$

$$T(s) = \frac{\alpha'(s)}{\|\alpha'(s)\|} = \frac{(s, e, s)}{\sqrt{2s + e^2}}$$

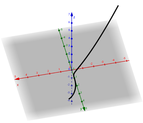
$$b(s) = \frac{\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|} = \frac{(2e, -s, -e)}{\sqrt{s + 5e^2}}$$

$$n(s) = b(s) \wedge T(s) = \frac{(-s + e^2, -3e, 2e^3 + s)}{\sqrt{s + 5e^2}\sqrt{2s + e^2}}$$

$$k(s) = \frac{\sqrt{s + 5e^2}}{\left(\sqrt{2s + e^2}\right)^3}$$

$$\alpha'''(s) = (0, e, e)$$

$$\tau(s) = -\frac{(\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)) \cdot \alpha'''(s)}{\|\alpha'(s) \wedge \alpha''(s)\|^2} = \frac{3e}{s + 5e^2}$$



ⓒ $S = \{(x,y,z) : xyz = 1\}$

ⓐ È regolare perché è il luogo regolare di $F(x,y,z) = xyz$; infatti

$$\nabla F = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$ si annulla solo in $(0,0,0)$

e $F(0,0,0) \neq 1$

Campo di versori normali è dato da $N = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{1}{\sqrt{y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2}} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$
è definito su tutto S.

ⓑ : ovvero che $\forall (x,y,z) \in S$, $x, y, z \neq 0$

$\Rightarrow$ posso esprimere S come $z = \frac{1}{xy}$, quindi una parametrizzazione locale è

$$f(s,t) = \left(s, t, \frac{1}{st}\right)$$

$$f : (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}^3$$

$$f_s = \left(1, 0, \frac{-1}{s^2t}\right) \qquad E = 1 + \frac{1}{s^4t^2}$$

$$f_t = \left(0, 1, \frac{-1}{st^2}\right) \qquad F = \frac{1}{s^2t^2}$$

$$f_{ss} = \left(0, 0, \frac{2}{s^3t}\right) \qquad G = 1 + \frac{1}{s^2t^4}$$

$$f_{st} = \left(0, 0, \frac{1}{s^2t^2}\right) \qquad EG - F^2 = \left(1 + \frac{1}{s^4t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{s^2t^4}\right) - \frac{1}{s^4t^4}$$

$$f_{tt} = \left(0, 0, \frac{2}{st^3}\right) \qquad = 1 + \frac{1}{s^2t^4} + \frac{1}{s^4t^2}$$; poniamo $Z = \sqrt{EG - F^2}$

$$e = \det(f_s, f_t, f_{ss})/Z$$

$$Z \cdot e = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{s^2t} & \frac{-1}{st^2} & \frac{2}{s^3t} \end{pmatrix} = \frac{2}{s^3t}$$

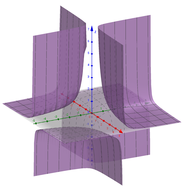
$$Z \cdot f = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{s^2t} & \frac{-1}{st^2} & \frac{1}{st^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{st^2}$$

$$Z \cdot g = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{s^2t} & \frac{-1}{st^2} & \frac{2}{st} \end{pmatrix} = \frac{2}{st^3}$$

$$Z^2(eg - f^2) = \frac{4}{s^4t^4} - \frac{1}{s^4t^4} = \frac{3}{s^4t^4} > 0$$

$\Rightarrow$ i punti sono tutti ellittici

ⓓ Non è possibile un'isometria con il piano perché $K > 0$.



ⓔ E_3 di S: $y^2 + z^2 = 1$

E_3 di S': $x^2 + z^2 = 1$

Parametrizzazione di S:

$f : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$f(s,v) = (s, \cos v, \sin v)$

Parametrizzazione di S':

$\tilde{f} : \mathbb{R} \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$

$\tilde{f}(s,v) = (\cos v, s, \sin v)$

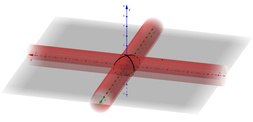
Studio

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 - y^2 = y^2 \end{cases} \Rightarrow (x-y)(x+y) = 0$$

$\Rightarrow$ $S \cap S'$ è unione di 2 curve piane, intersezioni di: $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$ e $\begin{cases} y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{matrix} (u, \cos v, \sin v) \\ \text{sia } x = y \Rightarrow u = \cos v \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1(v) = (\cos v, \cos v, \sin v); \\ \alpha_1'(v) = (-\sin v, -\sin v, \cos v) \neq (0,0,0) \ \forall v \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (u, \cos v, \sin v) \\ u = -\cos v \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_2(v) = (-\cos v, \cos v, \sin v) \\ \alpha_2'(v) = (\sin v, -\sin v, \cos v) \neq (0,0,0) \ \forall v \in (0, 2\pi) \end{matrix}$$

$\alpha_1(v) = (\cos v, \cos v, \sin v)$

$\alpha_2(v) = (\cos v, -\cos v, \sin v)$ (si tratta di 2 ellissi piane)