

LABORATORIO DI MECCANICA E TERMODINAMICA

A.A. 2026-2026

ANDREA BRESSAN

Informazioni sul corso 1

Primo corso di laboratorio

- Metodologia
- Uso di strumenti e tecniche di misura
- Analisi statistiche
- Applicazioni a misure di grandezze meccaniche e termodinamiche
- Misure di lunghezza, massa, densità, intervalli di tempo
- Caratteristiche del moto del pendolo semplice e misura dell'accelerazione di gravità
- Studio delle caratteristiche elastiche dei materiali
- Misure di calori specifici a diverse temperature e calori latenti
- Misure di pressione
- ...

Esperienze:

Esperienze di meccanica:

- **Densità di materiali** (volume e massa). Metro lineare, **calibro a nonio**, **calibro Palmer** e **Bilancia analitica** con sensibilità di 0.2 mg
- **Accelerazione di gravità**. Metro lineare, **calibro a nonio**, **cronometro**, **goniometro** (bilancia).
- Misura della **costante elastica** di una molla (metodo statico e dinamico). Metro lineare, **cronometro**, **bilancia**
- Misura del **Modulo di Young e di Coulomb** dell'acciaio. **Leva ottica**, **pendolo di torsione**, metro lineare, **calibro Palmer**, **calibro a nonio**, **cronometro**

Esperienze di termodinamica

- Misura del **calore specifico** di un solido e del calore latente di fusione del ghiaccio. **Calorimetro delle mescolanze**, **termocoppie**, **multimetro**, **cronometro**, **bilancia**
- Misura del **calore specifico medio** di un solido nell'intervallo di temperatura tra 77 e 300 K. Vaso di Dewar contenente **azoto liquido**, **termocoppie**, **bilancia**, **resistore**, **circuito volt-amperometrico**, **generatore di tensione in corrente continua**
- Misura della **temperatura superficiale del sole**. **Multimetro**, **termocoppie**, **circuito integrato** per la misura di temperature

Esperienze (2)

Sono esperienze eseguite con strumenti semplici (cronometri, bilance, calibri), non interfacciati a sistemi di acquisizione. Lo scopo del corso è di introdurvi al metodo sperimentale e non quello di insegnarvi ad usare strumenti specifici.

Linguaggi	Sistemi Operativi	Scripting	Filesystem	Versioning	Editor
Fortran 77	Ultrix/OpenVMS	bash	afs (Andrew file system)	...	...
Mortran	CernVM	(t)csH	Cvmfs (CernVM File System)	svn	vi
C++	Unix	Javascript	GPFS (General Parallel File System)	git	emacs
Perl	Scientific Linux		EOS + Fuse	overleaf	gedit
(S)HTML	CentOS/ALMA9				
Latex	Windows (...)				
	MacOS				

Informazioni sul corso

Il corso consiste in

- una parte di teoria e modelli
 - considerazioni di base sulla misura di grandezze fisiche e analisi dei dati sperimentali
 - approfondimenti sugli argomenti relativi alle esperienze, in particolare sugli aspetti 'non ideali' rispetto alla trattazione teorica

E' necessario conoscere quanto trattato nei corsi di Meccanica Newtoniana e Termodinamica

- una parte sperimentale
 - strumentazione
 - Introduzione a metodi di analisi dati
 - esperienze di laboratorio

Informazioni sul corso



Lab. centrale Ed. B (Ingegneria)

Informazioni sul corso

Il corso è centrato sulle esperienze di laboratorio alla cui descrizione ed esecuzione con relativa analisi dei dati è dedicata la maggior parte del tempo. Le esperienze non sono **dimostrazioni** ma devono essere svolte nel modo più autonomo possibile.

Una parte importante del corso è dedicata a fornire informazioni sugli elementi utili alla stima degli errori ed all'uso di strumenti.

Per favorire la partecipazione attiva alle esperienze

- ci saranno 4 turni, con <40 persone per turno divisi in 9-10 gruppi
- in generale il lavoro viene fatto in gruppi di 4 studenti

La frequenza in laboratorio è obbligatoria e viene verificata (*)

Seguire le lezioni è essenziale per il corretto svolgimento delle esperienze

- cosa fare viene spiegato in aula, e la descrizione dell'esperienza non verrà ripetuta all'inizio di ciascun turno né durante i turni

(*) in caso di problemi specifici, cercheremo caso per caso le possibili soluzioni ⁷

Orario del corso

turni: un pomeriggio alla settimana/persona; non tutte le 14 settimane, ma 7, i.e. il numero delle esperienze

in aula; in genere tempo dedicato a:

- A. Introduzione alla metrologia, statistica e trattazione degli errori
- B. preparazione per l'esperienza di laboratorio della settimana
- C. discussione su aspetti relativi alle esperienze effettuate

Giorno	Lezione	Lezione	Laboratorio
Lunedì	11:00-13:00	14:00-16:00	
Martedì	09:00-11:00		14:00-18:00
Mercoledì			14:00-18:00
Giovedì			14:00-18:00
Venerdì			14:00-18:00

Calendario

Attività di lezione e laboratorio

settimana 23/2 - 06+00h - solo lezione

settimana 02/3 - 06+00h - solo lezione

settimana 09/3 - 06+20h - laboratorio misura densità (balance)

settimana 16/3 - 06+00h - solo lezione

settimana 23/3 - 06+20h - laboratorio accelerazione di gravità

settimana 30/3 - 06+00h - solo lezione (break pasquale da venerdì)

settimana 06/4 - 00+00h - break pasquale

settimana 13/4 - 06+20h - laboratorio molle

settimana 20/4 - 06+20h - laboratorio Young e Coulomb

settimana 27/4 - 06+00h - solo lezione (1o maggio)

settimana 04/5 - 06+00h - solo lezione (DIS2026)

settimana 11/5 - 06+20h - laboratorio calorimetro delle mescolanze

settimana 18/5 - 06+20h - laboratorio azoto liquido

settimana 25/5 - 02+20h - laboratorio sole

Attività di laboratorio

>100 persone → 4 turni (in parallelo con il Laboratorio di Calcolo)

- martedì pomeriggio,
- mercoledì pomeriggio,
- giovedì pomeriggio,
- venerdì pomeriggio

Circa lo stesso numero di persone ciascun pomeriggio (a vostro vantaggio):

DOVETE

- A. scegliete un pomeriggio. Sarà sempre lo stesso (per evitare sovraffollamento in laboratorio e interferenze con altri corsi)
- B. all'interno di ogni turno, vi dividerete in gruppi di 4 persone (non necessariamente sempre le stesse per ogni esperienza)
- C. elenco con i nomi per ciascun turno: **lunedì 9 marzo**

Iscrizione ai laboratori

Turni_LabMTD_2026(copia studenti)

.XLSX

☆

📁

🔍

File

Edit

View

Insert

Format

Data

Tools

Help

🔍

Menu

↶

↷

🖨

🔊

100%

£

%

0.00

123

Times ...

-

12

+

B

I

↶

A

🔗

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

📈

📉

📊

<

google sheet nel quale scrivere il proprio nome

In laboratorio

Un pomeriggio di laboratorio alla settimana:

Il tempo è (quasi-)sufficiente per eseguire una esperienza, elaborarne i dati per ottenere il risultato della misura

- alla fine di ogni esperienza, ogni gruppo deve avere ottenuto:
 - **tabelle riassuntive con i dati**
 - **risultati ottenuti dall'analisi «on-line»**
- per 4 delle esperienze deve essere presentata una **relazione individuale completa**, da scrivere **entro un paio di settimane dall'esecuzione dell'esperienza** e da consegnare prima dell'esame.

FORMAZIONE SULLA SICUREZZA

L'art. 37 del D.Lgs. 81/2008 prevede **l'obbligo di formazione sulla sicurezza** anche per gli studenti che frequentano **laboratori universitari**, che svolgono attività didattica esterna o che partecipano a tirocini formativi e di orientamento. Se negli ultimi cinque anni hai già frequentato un corso sulla sicurezza in cui sono stati trattati gli argomenti previsti per il tuo corso di studi come segue:

- **rischio videoterminale/computer (obbligatorio per tutti i corsi di studio)**
- rischio chimico (obbligatorio per chi frequenta un corso delle aree chimica, farmaceutica, ingegneria chimica e materiali, geologia)
- rischio chimico e biologico (obbligatorio per chi frequenta un corso delle aree biologiche e scienze naturali e medica)
- **rischio meccanico (obbligatorio per chi frequenta un corso delle aree fisica e ingegneria)**
- rischio attività all'aperto (obbligatorio per chi frequenta un corso delle aree biologica, scienze naturali, archeologia e geologia)
- rischio nei cantieri (obbligatorio per chi frequenta un corso delle aree di ingegneria civile, architettura, archeologia e geologia)

fatti rilasciare l'attestato di frequenza che dovrai esibire al preposto/responsabile del laboratorio, attività esterna o tirocinio. Se invece non hai mai seguito un corso sulla sicurezza, prima di iniziare a frequentare una delle attività citate sopra, segui il videocorso on-line: potrai accedervi solo dopo aver ricevuto la mail di avvenuta immatricolazione (verifica nei servizi online l'attribuzione del numero di matricola). Il corso è gratuito e disponibile su:

<https://moodle2.units.it> > tutti i corsi > amministrazione centrale > servizio prevenzione e protezione > sicurezza studenti.

In caso di dubbi o problemi scrivi a: formazionesicurezza@units.it

Esame

- L'esame (**solo orale**) consiste nella discussione di una delle esperienze svolte, nella discussione delle relazioni e in domande sulla parte “teorica” e di trattazione dei dati
- La durata dell'esame può andare dai 30 min a più di un ora, con la differenza di tempo motivata da possibili difficoltà nel valutare il grado di preparazione
- Il livello di preparazione sugli argomenti di fisica attinenti può essere verificato in modo anche approfondito, se vengono evidenziate lacune durante l'esposizione
- E' importante saper motivare ogni passaggio ed ogni scelta fatta in tutte le fasi dell'esperienza
- Il voto si baserà sull'esame, ma anche sul lavoro fatto durante il corso e sulla qualità delle relazioni

Testi

La parte principale per lo studio è costituita da:

- Materiale didattico distribuito durante il corso (circa 700 slide + alcuni articoli)
- I vostri appunti

In più ci sono alcuni testi di consultazione consigliati
(solo per le parti effettivamente svolte durante il corso)

- [M. Dapor, M. Ropele, Elaborazione dei dati sperimentali, Sito bibliotecario di Ateneo](#)
- [M. Dapor, M. Ropele, Elaborazione dei dati sperimentali, Springer](#)

Infine avete sempre a disposizione i testi di **Meccanica** e di **Termodinamica** da **rivedere** per le parti di teoria relativa alle esperienze

Finalità

Un corso di laboratorio deve:

- insegnare le metodologie necessarie per effettuare degli **esperimenti di verifica di leggi fisiche**
- insegnare le metodologie necessarie per **trovare leggi empiriche** che descrivano un dato fenomeno e trovare il valore sperimentale dei parametri che caratterizzano tale leggi.

Nel fare ciò, ci si imbatte in due problematiche sperimentali:

- **incertezze di misura** degli strumenti e/o gli **incertezze** (errori) **stocastiche** (casuali) inerenti al processo di misura
- presenza di **effetti sistematici** che alterano il processo di misura (allontanando il risultato da caso ideale) e dei quali occorre minimizzare l'impatto e/o sottrarre il contributo in fase di analisi dei dati.

Lo sperimentatore deve tenere conto di tutti gli errori, siano essi di misura, statistici e sistematici, e ridurre gli effetti secondari con un apparato sperimentale opportuno.

IL RISULTATO DI UNA MISURA È UN VALORE ED UN'INCERTEZZA SU TALE VALORE

Suggerimenti generali - I

Nella realizzazione di un esperimento è bene seguire alcune regole generali, sebbene ogni esperimento costituisca un caso a sé stante:

- Conoscere la trattazione teorica del fenomeno che si vuole misurare e dei fenomeni secondari presenti
- Ideare un procedimento di misura ed un apparato sperimentale che vi permetta di verificare il fenomeno in studio, riducendo nello stesso tempo gli altri effetti secondari.
- Valutare la precisione che si vuole/può raggiungere in base agli strumenti di misura a disposizione.
- Fatto ciò inizia la fase di presa dati. Nella presa dati è necessario essere pignoli, accurati e meticolosi. Tutti i dati presi vanno registrati, insieme con le condizioni sperimentali generali, nel vostro “diario di bordo” (logbook).

Suggerimenti generali - II

- Durante la presa dati occorre fare un'analisi degli stessi, grossolana ma veloce, in tempo reale (online) che permetta di scoprire eventuali errori, oppure la necessità di prendere dati in condizioni diverse, ed effettuare quindi le nuove misure necessarie.
- Terminate le misure, si procede all'analisi dati finale (offline), dove andranno applicate le opportune tecniche di analisi statistica dei dati. In questa fase occorre anche valutare la presenza di errori sistematici, correggerli se possibile, oppure valutarne l'entità ed includere questa incertezza nell'errore finale.

Suggerimenti generali - III

- Occorre infine trarre delle conclusioni dall'esperimento effettuato:
 - La prima conclusione ovvia è il valore trovato, con il suo errore, della grandezza che si voleva misurare.
 - Si può quindi discutere se il nostro esperimento verifichi o meno l'ipotesi teorica di partenza e con quale significatività statistica.
 - Si possono eventualmente suggerire dei cambiamenti all'apparato sperimentale che permettano di migliorare la bontà della misura
- Ultima parte dell'esperimento (da non trascurare) è la **scrittura del "lavoro"**. Questa consiste nella pubblicazione su una rivista scientifica da parte del ricercatore e nella scrittura della relazione da parte degli studenti. Quest'ultimo passo è in genere **non amato**, sia dagli studenti che da ricercatori affermati, tuttavia **senza quest'ultimo sforzo tutto il resto sarà stato inutile!**

Suggerimenti generali - IV

La progettazione, realizzazione ed esecuzione di un esperimento è difficile da insegnare in quanto non ci sono regole ferree valide per tutte le situazioni

Deve essere stimolata una visione critica dell'attività che si sta svolgendo.

Occorre inoltre esercitare senso pratico, elasticità mentale, inventiva e fantasia.

Gli studenti in genere reagiscono “male” a queste sollecitazioni e preferiscono la strada sicura della regola matematica.

La valenza positiva (che fa sì che in generale un fisico si adatti facilmente a qualsiasi contesto lavorativo e/o di ricerca) risiede proprio nell'abitudine a lavorare senza “regole” preconcrete.

Informazioni utili - I

Occorre innanzitutto fare una distinzione tra il diario di laboratorio (**logbook**) e la **relazione di laboratorio**. Il **logbook** va riempito durante lo svolgimento dell'esperimento. Nel **logbook** vanno riportati:

- Una descrizione dell'apparato sperimentale
- **Gli strumenti utilizzati con le loro caratteristiche**
- Una descrizione del procedimento di misura
- **Una o più tabelle con i dati dell'esperimento (posso anche registrarle direttamente su un foglio excel o calc di libreoffice)**
- Uno o più grafici che permettano un controllo immediato se i dati seguono l'andamento previsto o meno. Non è necessario a questo livello un'analisi statistica accurata.
- **Una prima stima, anche con una valutazione grossolana degli errori, della grandezza che si vuole misurare.**

Informazioni utili - II

- È importante imparare a registrare accuratamente tutti i dati sperimentali, così come sono stati misurati, in modo che chiunque altro possa comprenderli ed utilizzarli (ad esempio se vuole ripetere il vostro esperimento).
- I dati vanno registrati tenendo conto del corrispondente errore di misura. Di regola, si usa una cifra significativa per l'errore, ma sono tollerate (si possono utilizzare) due cifre significative. **NON SONO TOLLERATE > DI DUE CIFRE SIGNIFICATIVE**
- Il **logbook** costituisce la base di partenza per la stesura della relazione di laboratorio, quindi tanto più esso sarà ordinato e completo, tanto più sarà facilitata l'analisi dei dati offline e la scrittura della relazione.

Relazioni - I

1. **Introduzione teorica:** descrivete brevemente cosa volete misurare e perché, oppure quale relazione teorica volete verificare. **Non dovete scrivere nessuna dimostrazione**, ma limitatevi a riportare la formula finale, illustrando eventualmente i parametri che la caratterizzano e/o i limiti di validità di applicazione.
2. **Procedimento di misura:** illustrate il procedimento di misura adottato. In genere questo aiuta a capire la descrizione successiva della presa dati.
3. **Descrizione dell'apparato sperimentale:** descrivete brevemente l'apparato sperimentale utilizzato, le caratteristiche degli strumenti e qualunque altra informazione utile per riprodurre l'esperimento da voi effettuato.
4. **Descrizione della presa dati:** descrivete la procedura da voi seguita per la presa dati, discutete gli errori che attribuite alle varie grandezze, riportate le tabelle di dati delle vostre misure.

Relazioni - II

5. **Analisi dei dati:** descrivete il tipo di analisi dati che avete effettuato. Nella maggior parte dei casi avrete a che fare con delle relazioni lineari (o riconducibili) delle quali dovrete trovare il coefficiente angolare. È importante che voi sappiate cosa state facendo. Riportate uno o più grafici che descrivono i vostri dati includendo nel grafico anche la retta risultante. Illustrate le successive elaborazioni che conducono al risultato finale.
6. **Conclusioni e Commenti:** riportate chiaramente il risultato finale da voi trovato. Aggiungete poi ogni tipo di commento volto alla comprensione del risultato. Potete fare ad esempio un'analisi dei vari errori che concorrono all'errore finale per determinare la causa dominante, e così via. È molto importante che il risultato finale sia chiaramente indicato; alle volte, in relazioni anche lunghe e articolate è risultato difficile trovare quale fosse stato il risultato della misura

Un articolo

PHYSICAL REVIEW D **99**, 114004 (2019)

Transversity distributions from difference asymmetries in semi-inclusive DIS

V. Barone,¹ F. Bradamante,² A. Bressan,² A. Kerbizi,² A. Martin,² A. Moretti,² J. Matousek,² and G. Sbrizzai²

¹Di.S.I.T., Università del Piemonte Orientale, 15121 Alessandria, Italy,
and INFN, Sezione di Torino, 10125 Torino, Italy

²Dipartimento di Fisica, Università di Trieste, and INFN, Sezione di Trieste, 34127 Trieste, Italy

(Received 25 March 2019; published 5 June 2019)

In recent years information on the transversity distribution h_1 has been obtained by combining the Collins asymmetry results from semi-inclusive deep inelastic scattering (SIDIS) data on transversely polarized nucleon targets with the information on the fragmentation function of a transversely polarized quark from the asymmetries measured in e^+e^- annihilation into hadrons. An alternative method was proposed a long time ago, which does not require the e^+e^- data but allows one to get ratios of the u and d quark transversity distributions from the SIDIS data alone. The method utilizes the ratio of the difference of the Collins asymmetries of positively and negatively charged hadrons produced on transversely polarized proton and deuteron targets. We have applied this method to the COMPASS proton and deuteron data and extracted the ratio h_1^u/h_1^d . The results are compared to those obtained in a previous point-by-point extraction based both on SIDIS and e^+e^- data.

DOI: 10.1103/PhysRevD.99.114004

I. INTRODUCTION

Much interest has been dedicated to the transversity distribution in the past 20 years. Usually called h_1 , it is a leading-twist parton distribution function (PDF) which describes the transverse polarization of quarks inside a transversely polarized nucleon (for reviews, see [1–3]).

Being chirally odd, transversity cannot be measured in deep inelastic scattering (DIS). Over the last decade single-spin asymmetries clearly related to the transversity distribution function have been measured in semi-inclusive deep inelastic scattering (SIDIS) on transversely polarized nucleons, namely, in DIS processes in which at least one hadron of the current jet is detected. In these processes the cross section exhibits a spin-dependent azimuthal modulation that can be expressed in terms of a convolution of the transversity PDF and a fragmentation function (FF) which is also chiral odd, thus guaranteeing the cross section to be chirally even. Two observables have been studied so far. The first one is single hadron spin asymmetry, namely, the amplitude of the target-spin-dependent azimuthal modulation of each of the produced hadrons. The second one is the amplitude of the target spin-dependent azimuthal modulation of the plane defined by any two of the oppositely

charged hadrons produced in the same SIDIS event. In the case of transversely polarized proton targets, clear nonzero azimuthal modulations have been measured for both observables by the HERMES [4,5] and the COMPASS [6,7] Collaborations, assessing beyond any doubt that the transversity PDFs, the single hadron FF, and the dihadron FF are all nonzero. Corresponding measurements on a transversely polarized deuteron target by the COMPASS Collaboration [8,9] gave asymmetries compatible with zero, which have been interpreted as evidence of cancellation between h_1^u and h_1^d .

The underlying physics of these processes [10,11] is the left-right asymmetry in the hadronization of a transversely polarized quark, where left and right are relative to the plane defined by the quark direction of motion and its transverse spin. Such asymmetry is encoded, in the first case, in the so-called Collins FF $H_1^\perp$ [12] and, in the second case, in the dihadron FF $H_1^{\perp\perp}$ [13,14]. Independent evidence that both the Collins function and the dihadron FF are different from zero came from the measurements of azimuthal asymmetries in hadron inclusive production in e^+e^- annihilation by the Belle [15,16], BABAR [17], and BESIII [18] Collaborations.

Combining the SIDIS data and the $e^+e^- \rightarrow$ hadrons measurements, first extractions of both the transversity functions and of the two transversely polarized quark FFs have been possible [19,20]. In all those works, in order to solve the convolution over the transverse momenta between the transversity PDF and the FF which appears in the cross

V. BARONE *et al.*

section, some parametrization for both h_1 and for the FFs had to be assumed. An exception is the recent extraction of transversity [21] which has been performed point by point directly from the COMPASS SIDIS and the Belle $e^+e^- \rightarrow$ hadrons data, without using any parametrization for the collinear variables.

An alternative way to measure transversity from the Collins asymmetries alone is via the so-called “difference asymmetries,” which allow extracting combinations of the u and d quark transversity without knowing the Collins FF. This method was proposed a long time ago [22–24] to access the helicity PDFs and has been used by the SMC Collaboration [25]. It was also included in the COMPASS proposal [26] to measure both longitudinal and transverse spin asymmetries. At that time it looked particularly interesting since the Collins FF was completely unknown. Later it was used to measure the helicity PDFs in COMPASS [27], and recently it was proposed again in the context of the Sivers, Boer-Mulders, and transversity distributions [28]. In the present work the difference asymmetries are used for the first time to access transversity with the COMPASS measurements of the Collins asymmetries on p [6] and d targets [8].

The paper is organized as follows. In Sec. II we describe the formalism and the procedure. Section III is dedicated to the Monte Carlo studies. The results are discussed in Sec. IV.

II. CROSS SECTIONS AND DIFFERENCE ASYMMETRIES

In this paper we extract the asymmetries of differences from the Collins asymmetries measured by the COMPASS Collaboration impinging a 160 GeV/c momentum muon beam either on a transversely polarized deuteron (^dLiD) target or a transversely polarized proton (NH_3) target. The data we have considered were taken in the years 2002–2004 [8] and 2010 [6].

In order to ensure the DIS regime, only events with photon virtuality $Q^2 > 1$ (GeV/c)², fractional energy of the virtual photon $0.1 < y < 0.9$, and mass of the hadronic final state system $W > 5$ GeV/c² were considered in the data analysis. The charged hadrons were required to have at least 0.1 GeV/c transverse momentum P_T with respect to the virtual photon direction and a fraction of the available energy $z > 0.2$. All the details of the event selection and of the analysis can be found in [6,8]. The published data are binned in x , the target nucleon momentum fraction carried by the struck quark, in z and in P_T . In our analysis we only consider the asymmetry data binned in x , in 9 bins, from 0.003 to 0.7.

In the following, for simplicity, we write explicitly only the Collins part of the SIDIS transverse spin-dependent cross section and consider charged pions, even if, at the end, we use the results for charged hadrons assuming they are all pions, as was done, for instance, in [21]. This is

justified by the fact that the hadron samples are mainly constituted of pions (about 70% for positive hadrons, 75% for negative hadrons), a composition which is almost independent of x [6].

The SIDIS cross section can be written as

$$\sigma_C^{\pm}(\Phi_C) = \sigma_{0,i}^{\pm} + f P_i D_{Nq} \sigma_{C,i}^{\pm} \sin \Phi_C \quad (1)$$

where Φ_C is the Collins angle, f is the target dilution factor, P_i is the target polarization, and D_{Nq} is the mean transverse spin-transfer coefficient not included in σ_C to simplify the expressions used in the following. Only the deuteron (or hydrogen) nuclei in the targets are polarized, and the target dilution factor f is given by the ratio of the absorption cross sections on the deuteron (or proton) to that of all nuclei in the target. The signs $\pm$ refer to the pion charge and $i = p, d$ is the target type. The Collins angle $\Phi_C = \phi_h + \phi_p - \pi$ is the sum of the azimuthal angles ϕ_h of the hadron transverse momentum and of the spin direction ϕ_p of the target nucleon with respect to the lepton scattering plane, in a reference system in which the z axis is the virtual photon direction.

We take as a measure of the Collins asymmetry the ratio

$$A_{C,i}^{\pm} = \frac{\sigma_{C,i}^{\pm}}{\sigma_{0,i}^{\pm}}. \quad (2)$$

In terms of the ordinary PDFs and FFs, the unpolarized part of the cross sections in Eq. (1) can be written as (omitting a kinematic factor that cancels out when taking the ratios of cross sections)

$$\sigma_{0,p}^{\pm} \sim x[(4f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,3p} + (4f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,nd}] + (f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,s}, \quad (3)$$

$$\sigma_{0,p}^{\pm} \sim x[(4f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,nd} + (4f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,3p}] + (f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,s}, \quad (4)$$

$$\sigma_{0,d}^{\pm} \sim x[(f_1^{\pm} + f_1^{\pm})(4D_{1,3p} + D_{1,nd}) + (f_1^{\pm} + f_1^{\pm})(D_{1,3p} + 4D_{1,nd}) + 2(f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,s}], \quad (5)$$

$$\sigma_{0,d}^{\pm} \sim x[(f_1^{\pm} + f_1^{\pm})(D_{1,3p} + 4D_{1,nd}) + (f_1^{\pm} + f_1^{\pm})(4D_{1,3p} + D_{1,nd}) + 2(f_1^{\pm} + f_1^{\pm})D_{1,s}], \quad (6)$$

where $D_{1,3p}$ ($D_{1,nd}$) is the favored (unfavored) unpolarized FF, $D_{1,s}$ is the strange sea unpolarized FF, and $f_1^{\pm}$ are the unpolarized PDFs.

Following [21], the corresponding spin-dependent cross sections are obtained by replacing $f_1^{\pm}$ with the transversity

TRANSVERSITY DISTRIBUTIONS FROM DIFFERENCE ...

PHYS. REV. D **99**, 114004 (2019)

PDFs $h_1^{\pm}$ and the FFs D_1 with the “half moments” of the Collins function, $H_1^{\pm(1/2)}$, defined as

$$H_1^{\pm(1/2)}(z, Q^2) = \int d^2p_T \frac{p_T}{2M_h} H_1^{\pm}(z, p_T^2, Q^2). \quad (7)$$

Thus, we have

$$\sigma_{C,p}^{\pm} \sim x \left[(4h_1^{\pm} + h_1^{\pm})H_1^{\pm(1/2)} + (4h_1^{\pm} + h_1^{\pm})H_1^{\pm(1/2)} \right], \quad (8)$$

$$\sigma_{C,p}^{\pm} \sim x \left[(4h_1^{\pm} + h_1^{\pm})H_1^{\pm(1/2)} + (4h_1^{\pm} + h_1^{\pm})H_1^{\pm(1/2)} \right]. \quad (9)$$

$$\sigma_{C,d}^{\pm} \sim x \left[(h_1^{\pm} + h_1^{\pm})(4H_1^{\pm(1/2)} + H_1^{\pm(1/2)}) + (h_1^{\pm} + h_1^{\pm})(H_1^{\pm(1/2)} + 4H_1^{\pm(1/2)}) \right], \quad (10)$$

$$\sigma_{C,d}^{\pm} \sim x \left[(h_1^{\pm} + h_1^{\pm})(H_1^{\pm(1/2)} + 4H_1^{\pm(1/2)}) + (h_1^{\pm} + h_1^{\pm})(4H_1^{\pm(1/2)} + H_1^{\pm(1/2)}) \right], \quad (11)$$

where we have assumed $H_1^{\pm(1/2)} = 0$.

$$\frac{A_{D,d}}{A_{D,p}} = 3 \left[\frac{(4f_1^+ + 4f_1^+ + f_1^+ + f_1^+)(D_{1,3p} + D_{1,nd}) + 2(f_1^+ + f_1^+)D_{1,s}}{5(f_1^+ + f_1^+ + f_1^+ + f_1^+)(D_{1,3p} + D_{1,nd}) + 4(f_1^+ + f_1^+)D_{1,s}} \right] \frac{h_1^+ + h_1^+}{4h_1^+ - h_1^+}, \quad (16)$$

and the only unknowns are the transversity PDFs. Thus, by measuring A_D on p and d , one obtains the ratio h_1^u/h_1^d in terms of known quantities.

In order to determine $A_{D,i}$, one should, in principle, fit the quantity

$$\sigma_C^p(\Phi_C) = (\sigma_{0,i}^+ - \sigma_{0,i}^-) + f P_i D_{Nq} (\sigma_{C,i}^+ - \sigma_{C,i}^-) \sin \Phi_C \quad (17)$$

and extract the amplitude of the $\sin \Phi_C$ modulation. Since the acceptances for positively and negatively charged particles are not usually the same, one should correct the number of events for the acceptance before taking the differences and treat the statistical errors carefully.

The measurements are much simpler if the Φ_C acceptance for positively charged particles is equal to that for negatively charged ones. In this case it is not necessary to evaluate the difference asymmetries from the amplitude of the modulation, as it is possible to get them from the measured Collins asymmetries. In fact, one has

$$A_{D,i} = \frac{\sigma_{0,i}^+}{\sigma_{0,i}^+ - \sigma_{0,i}^-} A_{C,i}^+ - \frac{\sigma_{0,i}^-}{\sigma_{0,i}^+ + \sigma_{0,i}^-} A_{C,i}^-. \quad (18)$$

We now define the difference asymmetries as

$$A_{D,i} = \frac{\sigma_{C,i}^+ - \sigma_{C,i}^-}{\sigma_{0,i}^+ + \sigma_{0,i}^-}. \quad (12)$$

In [23] an alternative definition was proposed, namely,

$$A'_{D,i} = \frac{\sigma_{C,i}^+ - \sigma_{C,i}^-}{\sigma_{0,i}^+ - \sigma_{0,i}^-}. \quad (13)$$

As we will see, the two definitions give the same results. For the sake of simplicity, our discussion in the following is centered on the definition (12), but we also briefly summarize the results obtained with Eq. (13).

Writing explicitly the asymmetries, one gets

$$A_{D,p} = \frac{1}{9} \frac{H_{1,3p}^{\pm(1/2)} - H_{1,nd}^{\pm(1/2)}}{\sigma_{0,p}^+ + \sigma_{0,p}^-} (4h_1^+ - h_1^+). \quad (14)$$

$$A_{D,d} = \frac{1}{3} \frac{H_{1,3p}^{\pm(1/2)} - H_{1,nd}^{\pm(1/2)}}{\sigma_{0,d}^+ + \sigma_{0,d}^-} (h_1^+ + h_1^+). \quad (15)$$

When taking the ratios of the asymmetries on the deuteron and proton, the Collins FFs cancel out:

where the ratios of the cross sections are known. In order to apply this procedure, extensive Monte Carlo studies have been performed. They are described in the next section. Notice that if one uses instead the definition (13), the ratio of the difference asymmetries has the form

$$\frac{A'_{D,d}}{A'_{D,p}} = \frac{4f_1^+ - f_1^+}{f_1^+ + f_1^+} \frac{h_1^+ + h_1^+}{4h_1^+ - h_1^+} \quad (19)$$

and the equivalent of Eq. (18) is

$$A_{D,i} = \frac{\sigma_{0,i}^+}{\sigma_{0,i}^+ - \sigma_{0,i}^-} A_{C,i}^+ - \frac{\sigma_{0,i}^-}{\sigma_{0,i}^+ + \sigma_{0,i}^-} A_{C,i}^-. \quad (20)$$

III. MONTE CARLO STUDIES

The acceptance of the COMPASS spectrometer for positively charged and negatively charged hadrons has been investigated with Monte Carlo simulations. In the case of the deuteron data, collected in the years 2002–2004, this work was a prerequisite to the extraction of the $\sin \phi_h$, $\cos \phi_h$, and $\cos 2\phi_h$ modulations [29] which are expected in

Un articolo

V. BARONE *et al.*

PHYS. REV. D 99, 114004 (2019)

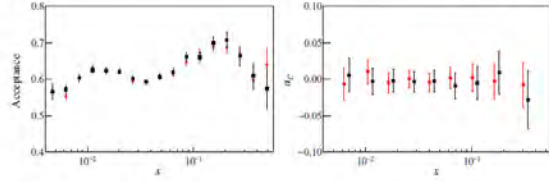


FIG. 1. Left panel: Experimental acceptance for positively charged (red points) and negatively charged (black points) hadrons as a function of x . Right panel: Amplitude of the a_C modulation in the azimuthal acceptance as a function of x for positively (red points) and negatively (black squares) charged hadrons.

the unpolarized SIDIS cross section. Within the statistical errors, the acceptance is essentially the same for positive and negative hadrons. In 2010, when the proton data were collected, the spectrometer was substantially different from the one utilized for the deuteron data taking; thus the whole work had to be repeated. To this end we have used a full Monte Carlo chain with LEPTO [30] as an event generator and TGEANT, a GEANT4 [31] based program, for the simulation of the particle interaction with the COMPASS apparatus and the detector response. The Monte Carlo events have been reconstructed with the COMPASS package CORAL [32] and analyzed to extract the acceptances and the acceptance ratios. The same kinematic selections used for the analysis of the real data have been applied on the generated variables and on the reconstructed ones. While integrating over the other kinematical variables, the acceptances $A(x) = N^{\text{rec}}(x)/N^{\text{gen}}(x^{\text{gen}})$ have been obtained by taking the ratio of the reconstructed and generated events counted in every bin using, respectively, the generated x^{gen} and the reconstructed x^{rec} values. In this way the smearing due to the experimental resolution is also accounted for.

The acceptances, which include both the geometrical acceptance of the apparatus and the reconstruction efficiency, are shown in Fig. 1 (left panel). The acceptances for positively (red points) and negatively (black points) charged hadrons are in good agreement, and the small differences are compatible with the statistical fluctuations. Their ratios are constant over the full x range of the measurement, with an average value of 1.003 ± 0.006 .

A possible Collins modulation in the acceptance was also studied, separately for positively and negatively charged hadrons, by fitting in each x bin the Φ_C distribution with a function $c(1 + a_C \sin(\Phi_C))$. The results for a_C are shown in Fig. 1 (right panel). The amplitudes of the modulation are compatible with zero over the full x range for both positive and negative hadrons. This result also stays true when repeating the procedure for the ratio of the acceptances.

IV. RESULTS

On the basis of the Monte Carlo results, the difference asymmetries have been calculated using Eq. (18) with the Collins asymmetries from the 2010 COMPASS data. Actually, since $\sigma_{\text{had}}^2 \sim N_{\text{had}}^2$ and $\text{var}(A_{C,j}^{\pm}) \sim 1/N_{\text{had}}^2$, where N_{had}^2 is the total number of hadrons that have been used to extract the Collins asymmetries, in a given x bin, Eq. (18) can be rewritten as

$$A_{D,j} = \frac{\text{var}(A_{C,j}^+)}{\text{var}(A_{C,j}^+) + \text{var}(A_{C,j}^-)} A_{C,j}^+ - \frac{\text{var}(A_{C,j}^-)}{\text{var}(A_{C,j}^+) + \text{var}(A_{C,j}^-)} A_{C,j}^- \quad (21)$$

The calculation of the difference asymmetries can thus be performed using the published COMPASS data for $A_{C,j}^{\pm}$ and their statistical uncertainties [6]. An interesting remark is that $A_{D,j}$ is equal to the weighted mean of the Collins asymmetries for positive and negative hadrons, after changing the sign to $A_{C,j}^-$. The results for the proton and the deuteron are shown in Fig. 2.

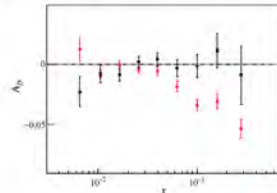


FIG. 2. Difference asymmetries $A_{D,p}$ (red points) and $A_{D,d}$ (black points) as a function of x .

TRANSVERSITY DISTRIBUTIONS FROM DIFFERENCE ...

PHYS. REV. D 99, 114004 (2019)

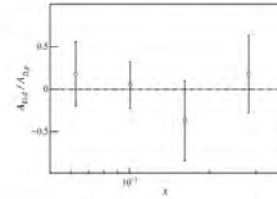


FIG. 3. Ratio $A_{D,d}/A_{D,p}$ of the difference asymmetries on the deuteron and on the proton as a function of x . Here and in the next figure, the ratio in the missing x bins has values out of scale with very large statistical errors.

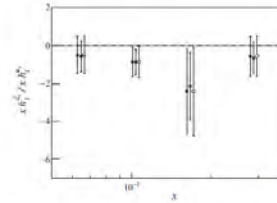


FIG. 4. Ratio h_1^d/h_1^p from the asymmetries A_D (closed circles), from the asymmetries A_p (closed squares), and from [21] (open circles).

The ratio $A_{D,d}/A_{D,p}$ is shown in Fig. 3. Only the four points at larger x are plotted in the figure. The points at smaller x have much-too-large uncertainties since the proton asymmetries in that region are compatible with zero.

From the ratios $A_{D,d}/A_{D,p}$ the quantities $(h_1^d + h_1^e)/(4h_1^d - h_1^e)$ have been extracted using Eq. (16) and standard parametrizations and tables for the unpolarized PDFs [33] and FFs [34].

Finally, from the quantities $(h_1^d + h_1^e)/(4h_1^d - h_1^e)$ the ratios h_1^d/h_1^e are determined. They are shown as closed circles in Fig. 4. Again, the values in the first five x bins have very large uncertainties, are compatible with zero, and are not plotted in the figure. At larger x the values are negative, in agreement with previous extractions. The same

procedure has been carried out starting from the difference asymmetries $A_{D,p}$ and using Eq. (19), getting essentially the same values and similar statistical uncertainties, which are shown as closed squares in Fig. 4. In the same figure we also compare our results with the values of h_1^d/h_1^e calculated from the transversity values obtained in [21] (open circles). In the evaluation of the uncertainty of the ratio h_1^d/h_1^e from [21], we take a proper account of the correlations between the extracted values of h_1^d and h_1^e , and we make use of the correlation coefficients as evaluated in [35]. The results of the three determinations are in very good agreement, but some reduction (up to $\sim 20\%$) of the uncertainties can be observed in the ratios obtained in the present work from the difference asymmetries $A_{D,j}$.

V. CONCLUSION

We have determined for the first time the transverse-spin difference asymmetries of positively and negatively charged hadrons using the SIDIS p and d COMPASS data. Thanks to the good COMPASS spectrometer acceptance, they could be easily obtained from the measured Collins asymmetries. From the ratio between the difference asymmetries on deuterons and on protons, we have extracted the quantity h_1^d/h_1^e , the ratio between the valence d -quark and u -quark transversity PDF. At small x the difference asymmetries on the protons are compatible with zero; thus the statistical uncertainty on the ratio h_1^d/h_1^e is too large, and no useful information is provided by the present analysis. On the other hand, for larger x ($x \geq 0.05$) the extracted ratio h_1^d/h_1^e has negative sign and is in very good agreement with the results of a previous point-by-point extraction.

The method we applied is interesting and simple, and it does not require any knowledge of the Collins fragmentation functions. Hence it strengthens the validity of the methods utilized so far to extract the transversity distributions, based on a combined analysis of SIDIS and e^+e^- data, and it can be used as a useful cross-check for more elaborated extractions.

ACKNOWLEDGMENTS

This work is possible thanks to Project No. FRA2015, supported by the Università degli Studi di Trieste. V.B. is partially supported by "Fondi di Ricerca Locale ex-60%" of the University of Piemonte Orientale. We would like to thank E. Christova and E. Leader for interesting discussions. We are grateful to the COMPASS Collaboration for use of the Monte Carlo chain.

V. BARONE *et al.*

PHYS. REV. D 99, 114004 (2019)

- [1] V. Barone, F. Bradamante, and A. Martin, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **65**, 267 (2010).
- [2] C. A. Aidala, S. D. Bass, D. Hasch, and G. K. Mallot, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 655 (2013).
- [3] H. Avakian, A. Bressan, and M. Contalbrigo, *Eur. Phys. J. A* **52**, 150 (2016); **52**, 165(F) (2016).
- [4] A. Airapetian *et al.* (HERMES Collaboration), *Phys. Lett. B* **693**, 11 (2010).
- [5] A. Airapetian *et al.* (HERMES Collaboration), *J. High Energy Phys.* **06** (2008) 017.
- [6] C. Adolph *et al.* (COMPASS Collaboration), *Phys. Lett. B* **717**, 376 (2012).
- [7] C. Adolph *et al.* (COMPASS Collaboration), *Phys. Lett. B* **736**, 124 (2014).
- [8] E. S. Ageev *et al.* (COMPASS Collaboration), *Nucl. Phys. B* **765**, 31 (2007).
- [9] C. Adolph *et al.* (COMPASS Collaboration), *Phys. Lett. B* **713**, 10 (2012).
- [10] C. Adolph *et al.* (COMPASS Collaboration), *Phys. Lett. B* **753**, 406 (2016).
- [11] A. Kerbizi, X. Artru, Z. Belgibabi, F. Bradamante, and A. Martin, *Phys. Rev. D* **97**, 074010 (2018).
- [12] J. C. Collins, *Nucl. Phys. B* **396**, 161 (1993).
- [13] J. C. Collins, S. F. Hoppelmann, and G. A. Ladinsky, *Nucl. Phys. B* **420**, 565 (1994).
- [14] M. Radici, R. Jakob, and A. Bianconi, *Phys. Rev. D* **65**, 074031 (2002).
- [15] R. Seidl *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. D* **78**, 032011 (2008); **86**, 039905(E) (2012).
- [16] A. Vossen *et al.* (Belle Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **107**, 072004 (2011).
- [17] J. P. Lees *et al.* (BABAR Collaboration), *Phys. Rev. D* **90**, 052003 (2014).
- [18] M. Ablikim *et al.* (BESIII Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **116**, 042001 (2016).
- [19] M. Anselmino, M. Boglione, U. D'Alesio, J. O. Gonzalez Hernandez, S. Melis, F. Murgia, and A. Prokudin, *Phys. Rev. D* **92**, 114023 (2015) and references therein.
- [20] Z. B. Kang, A. Prokudin, P. Sun, and F. Yuan, *Phys. Rev. D* **93**, 014009 (2016) and references therein.
- [21] A. Martin, F. Bradamante, and V. Barone, *Phys. Rev. D* **91**, 014034 (2015).
- [22] L. L. Frankfurt, M. I. Strikman, L. Mankiewicz, A. Schäfer, E. Rondio, A. Sandacz, and V. Papavassiliou, *Phys. Lett. B* **230**, 141 (1989).
- [23] E. Christova and E. Leader, *Nucl. Phys. B* **6407**, 369 (2001).
- [24] A. N. Sissakian, O. Yu. Shevchenko, and O. N. Ivanov, *Phys. Rev. D* **73**, 094026 (2006).
- [25] B. Adeva *et al.* (Spin Muon Collaboration), *Phys. Lett. B* **369**, 92 (1996).
- [26] G. Baum *et al.* (COMPASS Collaboration), COMPASS: A Proposal for a Common Muon and Proton Apparatus for Structure and Spectroscopy, Reports No. CERN-SPSLC-96-14 and No. CERN-SPSLC-P-297, 1996.
- [27] M. Alekseev *et al.* (COMPASS Collaboration), *Phys. Lett. B* **660**, 458 (2008).
- [28] E. Christova and E. Leader, *J. Phys. Conf. Ser.* **678**, 012012 (2016).
- [29] C. Adolph *et al.* (COMPASS Collaboration), *Nucl. Phys. B* **886**, 1046 (2014).
- [30] G. Ingelman, A. Edin, and J. Rathman, *Comput. Phys. Commun.* **101**, 108 (1997).
- [31] M. Asai, A. Dotti, M. Verderi, and D. H. Wright (GEANT4 Collaboration), *Ann. Nucl. Energy* **82**, 19 (2015).
- [32] P. Abbon *et al.* (COMPASS Collaboration), *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A* **577**, 455 (2007).
- [33] H. L. Lai, J. Huston, S. Kuhlmann, J. Morfin, F. Olness, J. F. Owens, J. Pampulin, and W. K. Tung (CTEQ Collaboration), *Eur. Phys. J. C* **12**, 375 (2000).
- [34] D. de Florian, R. Sassot, and M. Stratmann, *Phys. Rev. D* **75**, 114010 (2007).
- [35] K. Augusten *et al.* (COMPASS Collaboration), Addendum to the COMPASS-B Proposal, d-Quark Transversity and Proton Radius, Reports No. CERN-SPSC-2017-034, SPSC-P-340-ADD-1, 2018.

Metodo Scientifico

Ciò che distingue la ricerca scientifica da altre attività del pensiero è il metodo di indagine utilizzato che va sotto il nome di Metodo Scientifico (o Metodo Sperimentale).

Scienza (da *scientia*, conoscenza): insieme di conoscenze su un determinato argomento basato su valutazioni quantitative e procedimenti rigorosi («*Nissuna umana investigazione si può dimandare vera scienza, s'essa non passa per le matematiche dimostrazioni*»^{*}).

Fenomeno (φαινόμενον, che appare): qualsiasi oggetto fatto od avvenimento esterno osservato direttamente o per mezzo di dispositivi.

La matematica si basa sul **Metodo Deduttivo** (introdotto da Aristotele come metodo scientifico ideale). Il metodo deduttivo parte da un **postulato** (ovvero una verità assoluta o dogma) e da questo deduce con un ragionamento logico le conseguenze, tutte corrette ma la cui validità crollerebbe se si dimostrassero false le premesse.

La fisica usa il **Metodo Induttivo** (Galileiano) in cui si creano leggi a partire dall'osservazione dei fatti, mediante generalizzazione del comportamento osservato. Le leggi si considerano valide fino a quando non vengono evidenziati casi che non soddisfino tali leggi.

(*) e se tu dirai che le scienze, che principiano e finiscono nella mente, abbiano verità, questo non si concede, ma si nega, per molte ragioni, e prima, che in tali discorsi mentali non accade esperienza, senza la quale nulla dà di sé certezza. (Leonardo da Vinci, Trattato sulla pittura)

Galileo Galilei: il metodo induttivo-deduttivo



- **Galileo Galilei** è stato il primo ad intuire che la scienza si deve basare sulla costruzione di un METODO SCIENTIFICO necessario per arrivare, attraverso osservazioni sperimentali di fenomeni fisici, a CONCLUSIONI inconfutabili.
- Le esperienze, come per **Bacone**, (sir Francis Bacon) stanno alla base del metodo scientifico, ma occorre cercare le connessioni quantitative (le leggi), facendo uso della **matematica** (teniamo presente che questo non era il caso ad esempio di Cartesio, Rene Descartes, che seppure profondo matematico, tardò all'estenderne l'uso alla descrizione di fenomeni fisici)
- 'La natura è scritta in lingua matematica' di Galileo lo eleva ad essere il **FONDATORE DELLA SCIENZA MODERNA**: nel 'Dialogo' Simplicio dice: «dirò bene con Aristotele che nelle cose naturali non si deve sempre cercare una necessità di dimostrazione matematica», ottenendo l'ironica risposta di Sagredo «**Si, forse, dove la non si può avere ; ma se qui ella ci è perché non la volete voi usare?**»
- Il metodo scientifico secondo Galileo Galilei si basa sull'osservazione sperimentale e su due processi mentali fondamentali: l'**INDUZIONE** e la **DEDUZIONE** (ricavo la legge fisica per induzione e deduco dalla legge tutte le possibili conseguenze)
- Se volete divertirvi sull'uso della matematica nella fisica: [Richard Feynman - Cornell Lectures](#) (in particolare la 2nda di sei...il link è sulla prima, così le vedete tutte)

Le 4 fasi del sapere

1. Osservazioni sotto forma di esperimenti
2. Catalogazione, misurazione e selezione dei dati sperimentali accumulati: ricerca di uno schema di inquadramento
3. Proposta: costruzione di una ipotesi → fase INDUTTIVA. Dal particolare al generale, dare forma e consistenza ai dati sperimentali raccolti, inquadrandoli in una visione generale.
4. Verifica della legge: da ipotesi a teoria → fase DEDUTTIVA. Costruzione di un modello, di una teoria di validità generale. Deduzione logico-matematica: dalla generalizzazione dei dati empirici si costruisce un modello generale.

Verifica sperimentale. Ripetizione dell'esperimento

K. R. Popper, Scienza e filosofia

Desidero perciò dire che io non credo che esista nulla di simile al metodo induttivo, o a un procedimento induttivo [...].

Non faccio mai questioni di parole, e naturalmente non ho nessuna seria obiezione contro chi voglia chiamare col nome “induzione” il metodo di discussione critica. Ma in questo caso è necessario rendersi conto che si tratta di qualcosa di molto diverso da tutto ciò che in passato è stato chiamato “induzione”. Infatti, si è sempre pensato che **l'induzione debba fondare una teoria**, o una generalizzazione, mentre **il metodo della discussione critica non fonda un bel niente**. Il suo verdetto è sempre e invariabilmente “non provato”. La miglior cosa che possa fare – e raramente la fa – è quella di venir fuori con il verdetto che una certa teoria sembra la migliore disponibile, cioè la migliore che finora sia stata sottoposta alla discussione, quella che sembra risolvere una gran parte del problema che era destinata a risolvere, e che è sopravvissuta ai controlli più severi che siamo stati finora in grado di escogitare. Ma naturalmente ciò non fonda la verità della teoria; cioè non stabilisce che la teoria corrisponde ai fatti, o è una descrizione adeguata della realtà; tuttavia possiamo dire che un verdetto positivo di questo genere equivale al dire che, **alla luce della discussione critica, la teoria appare come la migliore approssimazione alla verità che si sia finora raggiunta.**

In realtà, l'idea di “migliore approssimazione alla verità” è, allo stesso tempo, il principale modello della nostra discussione critica e lo scopo che speriamo di raggiungere, come risultato della discussione. Tra i nostri altri modelli ci sono il potere esplicativo di una teoria e **la sua semplicità.**

Nel passato il termine “induzione” è stato usato soprattutto in due sensi. La prima è l'induzione ripetitiva (o induzione per enumerazione), che consiste di osservazioni spesso ripetute, osservazioni che dovrebbero fondare qualche generalizzazione della teoria. La mancanza di validità di questo genere di ragionamento è ovvia: nessun numero di osservazioni di cigni bianchi riesce a stabilire che tutti i cigni sono bianchi (o che la probabilità di trovare un cigno che non sia bianco è piccola). Allo stesso modo, **per quanti spettri di atomi d'idrogeno osserviamo non potremo mai stabilire che tutti gli atomi d'idrogeno emettono spettri dello stesso genere.** Tuttavia considerazioni di ordine teorico possono suggerirci quest'ultima generalizzazione, e considerazioni teoriche ulteriori possono suggerirci di modificarla introducendo spostamenti Doppler e spostamenti verso il rosso propri della gravitazione einsteiniana.

Dunque l'induzione per enumerazione è fuori causa: non può fondare nulla.

K. R. Popper, Scienza e filosofia

Il secondo senso principale in cui il termine “**induzione**” è stato usato in passato è l'induzione eliminatoria: l'induzione fondata sul metodo dell'eliminazione o confutazione delle teorie false. A prima vista questo tipo di induzione può sembrare molto simile al metodo della discussione critica che io sostengo, ma in realtà è molto diverso. Infatti **Bacone e Mill, e gli altri diffusori di questo metodo dell'induzione per eliminazione credevano che, eliminando tutte le teorie false, si possa far valere la teoria vera.**

«Ogni qualvolta una teoria ti sembra essere l'unica possibile, prendilo come un segno che non hai capito né la teoria né il problema che si intendeva risolvere.» (Karl Popper, Conoscenza oggettiva: un punto di vista evoluzionistico.)

In altre parole, non si rendevano conto che il numero delle teorie rivali è sempre infinito, anche se, di regola, in ogni momento particolare possiamo prendere in considerazione soltanto un numero finito di teorie. Dico “di regola”, perché qualche volta ci troviamo di fronte a un numero infinito di tali teorie: ad esempio, qualcuno suggerì di modificare la legge newtoniana dell'attrazione secondo l'inverso dei quadrati, sostituendo al quadrato una potenza che differisca solo di poco al numero 2. Questa proposta equivale al suggerimento che si dovrebbe considerare un numero infinito di correzioni, di poco differenti tra loro, della legge di Newton.

Il fatto **che per ogni problema esiste sempre un'infinità di soluzioni logicamente possibili**, è uno dei fatti decisivi di tutta la scienza; è una delle cose che fanno della scienza un'avventura così eccitante. Esso infatti rende inefficaci tutti i metodi basati sulla mera routine. Significa che, nella scienza, dobbiamo usare l'immaginazione e idee ardite, anche se l'una e le altre devono sempre essere temperate dalla critica e dai controlli più severi.

Tra l'altro, mette anche in evidenza l'errore di coloro i quali pensano che lo scopo della scienza sia, puramente e semplicemente, quello di stabilire correlazioni tra gli eventi osservati, o le osservazioni (o, peggio ancora, fra i “dati sensibili”). **In scienza, tendiamo a molto di più. Tendiamo a scoprire nuovi mondi dietro il mondo dell'esperienza ordinaria, mondi come, ad esempio, un mondo microscopico o submicroscopico; come, ad esempio, un mondo non-euclideo, un mondo popolato di forze invisibili: forze gravitazionali, chimiche, elettriche e nucleari, alcune delle quali, forse, sono riducibili ad altre, mentre altre non lo sono. Proprio la scoperta di questi nuovi mondi, di queste possibilità che nessuno si era mai sognato, accresce di tanto il potere liberatore della scienza.** I coefficienti di correlazione sono interessanti, non perché mettono le nostre osservazioni in relazione fra loro ma perché, e solo quando, ci aiutano a imparare qualcosa di più intorno a questi mondi.

Il Metodo Scientifico Ipotetico Deduttivo

Popper afferma quindi che il metodo scientifico non può essere induttivo. Non basta osservare: bisogna sapere cosa osservare! Per dimostrarlo cita Kant e la “Critica della Ragion Pura”.

“Allorché Galilei fece rotolare lungo un piano inclinato le due sfere, il cui peso era stato da lui stesso prestabilito e Torricelli fece sopportare all’aria un peso, da lui precedentemente calcolato pari a quello di una colonna d’acqua nota....una gran luce risplendette per tutti gli indagatori della natura.

Si resero allora conto che la ragione scorge soltanto ciò che essa stessa produce secondo il proprio disegno, e compresero che essa deve procedere innanzi coi principi dei suoi giudizi secondo leggi stabili, costringendo la natura a rispondere alle proprie domande, senza lasciarsi guidare da essa, per così dire, colle dande.

In caso diverso le nostre osservazioni casuali, fatte senza un piano preciso, non trovano connessione in alcuna delle leggi necessarie di cui invece la ragione va alla ricerca ed ha impellente bisogno” [Critica della Ragion Pura, B XII-XIII, 1967 pag 42.

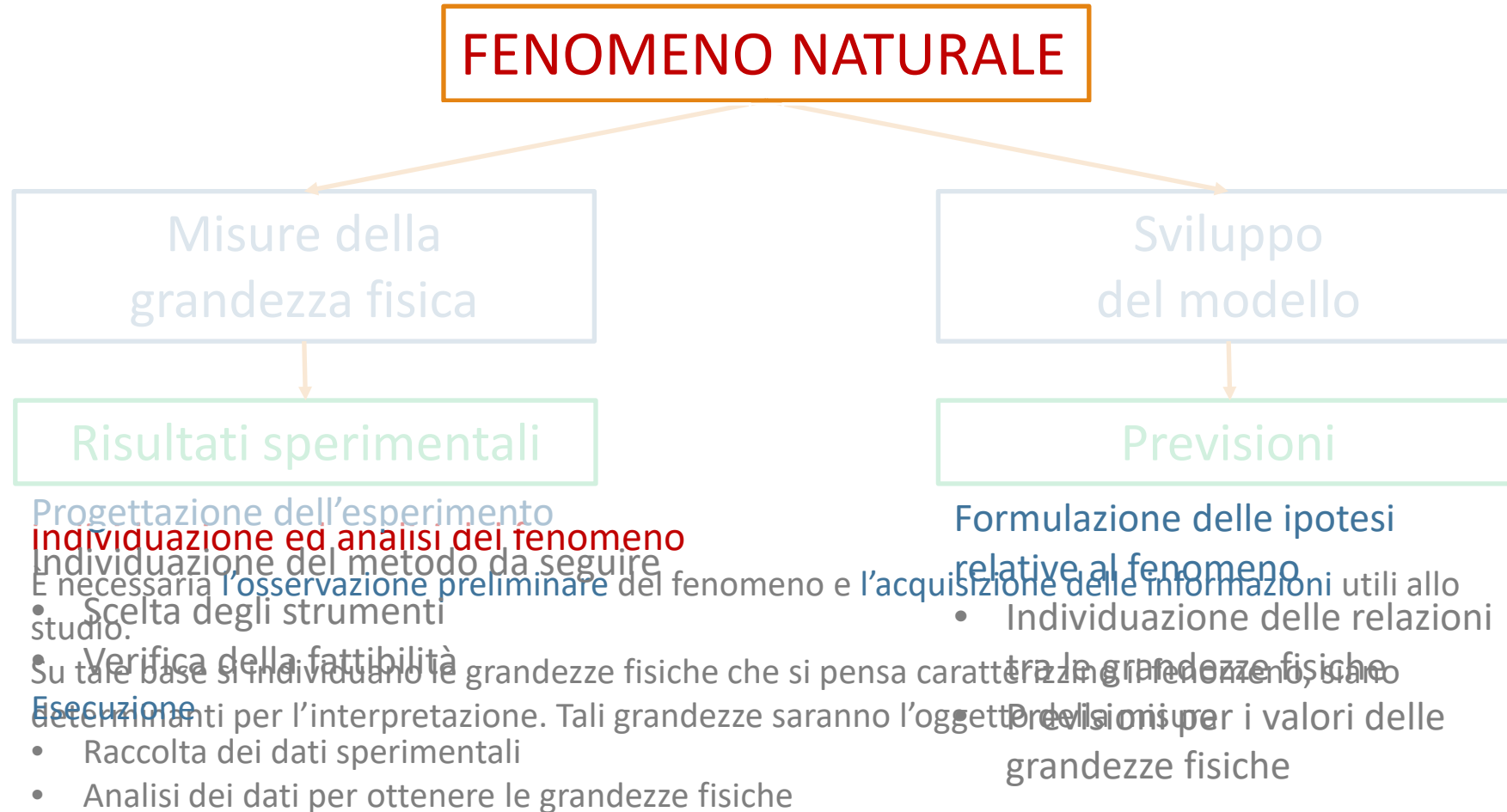
Il Metodo Scientifico Ipotetico Deduttivo

- In altre parole, già Kant vide con estrema chiarezza che la storia della scienza ha confutato quell'idea del metodo – che è un dogma infondato – stando alla quale noi dovremmo partire dalle osservazioni e derivare poi da esse le nostre teorie (se osservo un fenomeno, è già insita in me una risposta!).
- In realtà, facciamo qualcos'altro: partiamo da un problema, con l'aiuto di un' ipotesi.
- Questo è il metodo della ricerca scientifica, adottato anche per l'apprendimento.
- Popper afferma quindi che il metodo per tentativi ed errori, il metodo ipotetico-deduttivo, sia un metodo universale.
- Osservazioni fatte a caso, senza un piano elaborato in anticipo, non possono essere connesse da leggi, mentre sono proprio le leggi ciò di cui la ragione va alla ricerca
- [Teoria del Faro \[K. Popper\]](#): dobbiamo presentarci davanti alla natura con le nostre ipotesi, cercando risposte alle nostre domande, o meglio, ai nostri problemi. 'Se osserviamo un coleottero alla ricerca di cibo, lo vediamo muovere tutt'intorno le sue antenne: ogni movimento corrisponde all'ipotesi di poter trovare cibo, o qualsiasi altra cosa stesse cercando, in una certa direzione; quando poi muove le sue antenne in un'altra direzione, questa è una nuova ipotesi, cioè che quanto esso cerca si trovi in quest'altra direzione, che esplora, come se avvertisse che quella è la via giusta per trovare qualcosa.'

Metodo scientifico

ATTIVITÀ SPERIMENTALE

ATTIVITÀ TEORICA



Grandezze Fisiche

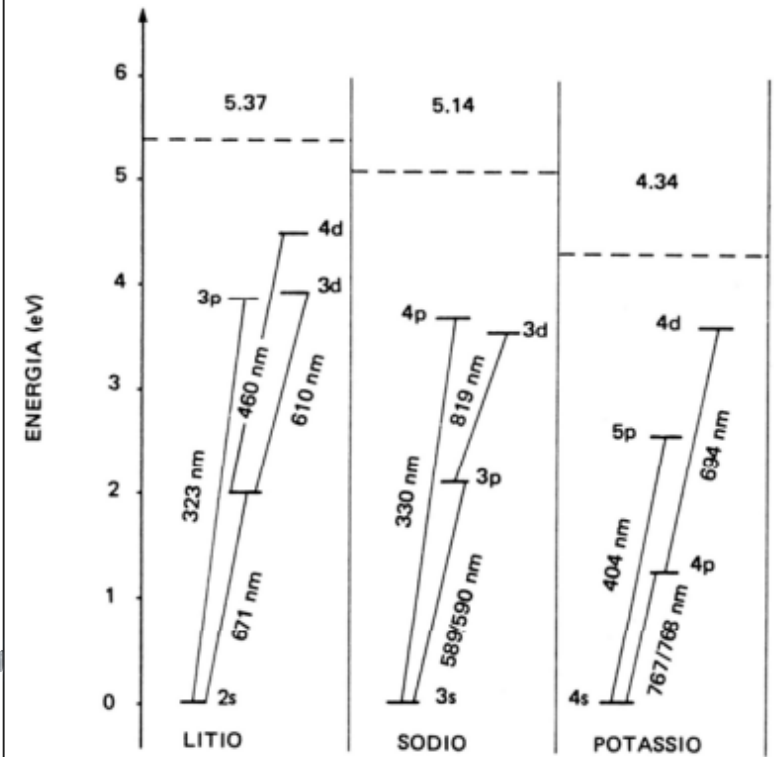
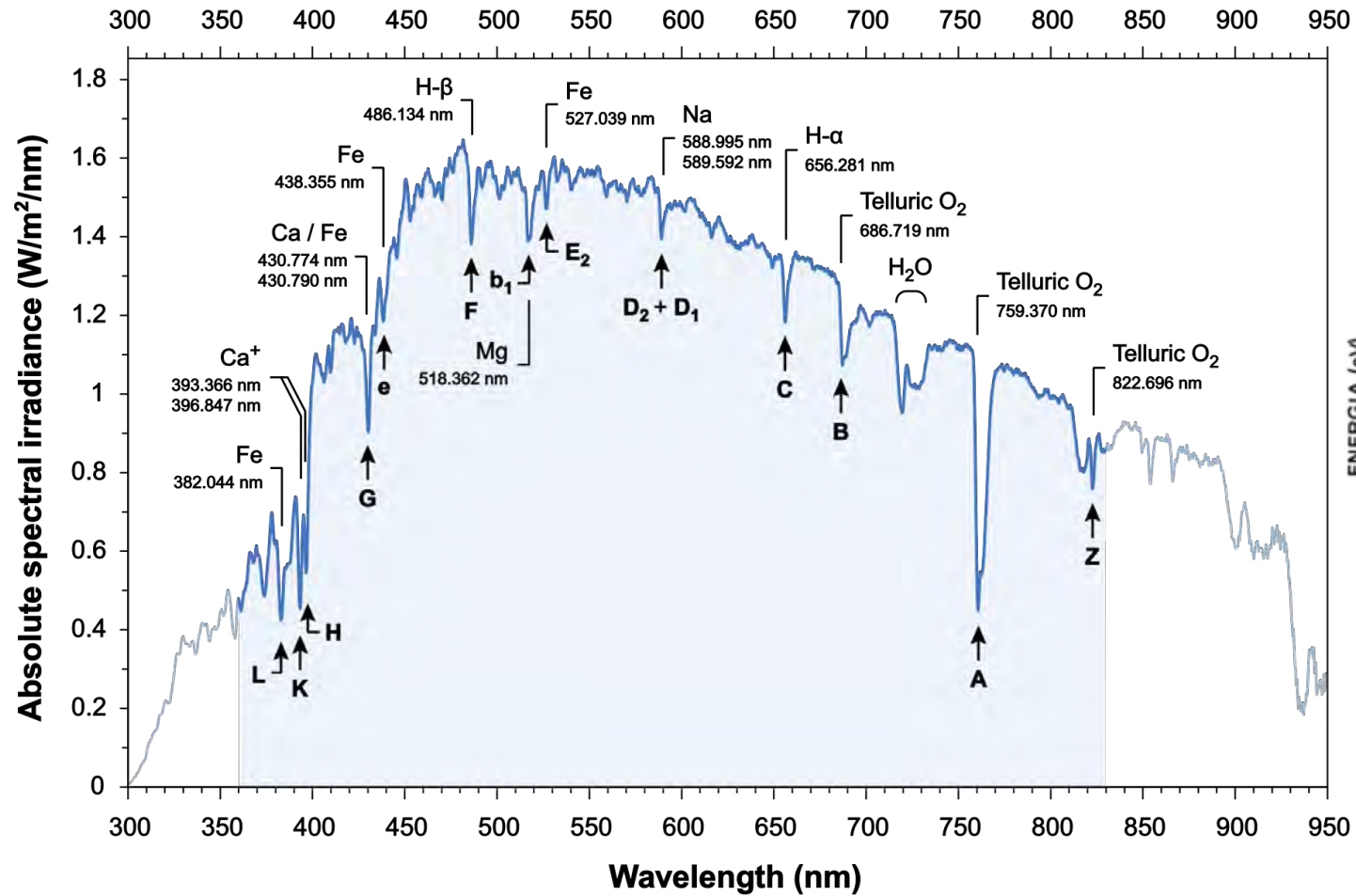
Dal [Vocabolario Internazionale di Metrologia \(VIM\)](#):

- **Grandezza:** proprietà di un fenomeno, corpo o sostanza che può essere espressa quantitativamente mediante un numero e un riferimento

NOTA: Il concetto generale di grandezza può essere progressivamente specificato come mostrato nel prospetto che segue

lunghezza, l	raggio, r	raggio del cerchio A, r_A o $r(A)$
	lunghezza d'onda, λ	lunghezza d'onda della radiazione D del sodio, λ_D o $\lambda(D; Na)$
energia, E	energia cinetica, T	energia cinetica della particella i in un dato sistema, T
	calore, Q	calore di vaporizzazione di un campione prelevato i di acqua, Q_i
carica elettrica, Q		carica elettrica del protone, e
resistenza elettrica, R		resistenza elettrica del resistore i -esimo in un dato circuito, R_i

Linee di Fraunhofer nello spettro di irradianza solare



Specie di grandezza

- aspetto comune di grandezze mutuamente confrontabili
 - ESEMPIO 1 Le grandezze diametro, circonferenza e lunghezza d'onda sono generalmente considerate grandezze della stessa specie, ovvero della specie di grandezza lunghezza.
 - ESEMPIO 2 Le grandezze calore, energia cinetica, ed energia potenziale sono generalmente considerate grandezze della stessa specie, ovvero della specie di grandezza energia
- NOTA: **Grandezze** della stessa specie all'interno di un determinato sistema di grandezze hanno medesima dimensione. Tuttavia, **grandezze** aventi la stessa dimensione, non sono necessariamente della stessa **specie**.
 - ESEMPIO Per convenzione le grandezze momento di una forza ed energia non sono considerate della stessa specie, benché abbiano la medesima dimensione.

Sistema di grandezze

- insieme di grandezze associato a un insieme di equazioni non contraddittorie tra le **grandezze** medesime

Dimensioni fisiche

Qualsiasi **grandezza** misurata direttamente può essere definita come «**fondamentale**». Di tali grandezze, alcune sono state scelte (insieme alle relative unità di misura) come sottoinsiemi di grandezze con cui descrivere tutte le altre.

È necessario (ed anche sufficiente) definire almeno una grandezza fondamentale. Ciononostante si preferisce definirne un numero più elevato per chiarezza delle espressioni derivate.

Le operazioni algebriche su grandezze fondamentali F_i con cui è definita una **grandezza derivata** D sono indicate con le dimensioni fisiche delle grandezza. Se D e F_i sono legate da:

$$D = c \prod_i F_i^{\alpha_i}$$

(con $\prod$ prodotto sia scalare che vettoriale, c costanti numeriche adimensionali), allora la relazione tra le dimensioni è convenzionalmente scritta come

$$[D] = \prod_i [F_i]^{\alpha_i}$$

Dove $[]$ indica la **dimensione** della grandezza fisica ($[m]$ ad esempio si legge «dimensione fisica della massa») e $\prod$ il **prodotto** tra le dimensioni (la costante non compare in quanto, come detto, adimensionale).

Dal VIM

NOTA 1: La potenza di un fattore è il fattore elevato a un determinato esponente. **Ciascun fattore è la dimensione di una grandezza di base.**

NOTA 2: Per convenzione, la rappresentazione simbolica della dimensione di una grandezza di base è costituita da una sola lettera maiuscola, in carattere non corsivo senza grazie (sans serif). Per convenzione, la rappresentazione simbolica della dimensione di una **grandezza derivata** è costituita dal prodotto delle potenze delle dimensioni delle **grandezze di base** conformemente alla definizione della grandezza derivata. La **dimensione** di una **grandezza Q** è indicata **$\dim Q$** .

NOTA 3: Per stabilire la dimensione di una **grandezza** non si prende in considerazione il suo carattere scalare, vettoriale o tensoriale.

NOTA 4: In un **sistema di grandezze**:

- le **grandezze** della stessa **specie** hanno la stessa **dimensione**;
- le **grandezze** che hanno **dimensioni** diverse sono sempre di **specie** diversa;
- le **grandezze** che hanno **dimensioni** uguali non sono necessariamente della stessa **specie**.



Esempio

Grandezze fondamentali per la meccanica (L, T, M)

Con questa scelta:

Superficie	$[S] = [L]^2 [T]^0 [M]^0$ $\circ dimS = L^2 T^0 M^0$ $\circ dimS = L^2$
Volume	$[V] = [L]^3 [T]^0 [M]^0$
Velocità	$[v] = [L] [T]^{-1} [M]^0$
Accelerazione	$[a] = [L] [T]^{-2} [M]^0$
Densità	$[\rho] = [L]^{-3} [T]^0 [M]^1$
Forza	$[F] = [L] [T]^{-2} [M]^1$

Considerazioni

- le dimensioni non definiscono la grandezza fisica (per esempio non rendono conto della sua natura scalare, vettoriale o tensoriale)
- poiché un cambiamento di unità non influisce sulla validità della legge, grandezze fisiche o loro funzioni possono essere legate da uguaglianze in una legge fisica solo se i due membri hanno le stesse dimensioni. Infatti l'uguaglianza indica l'equivalenza delle operazioni di misura.
- Può essere quindi necessario, per esprimere una data legge, introdurre dei coefficienti con dimensioni opportune, ed un valore numerico dipendente dal sistema di unità di misura. Ad esempio per la legge di gravitazione universale di Newton:

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad \text{o meglio} \quad \vec{F} = -G \frac{M_1 M_2}{r^2} \hat{r}$$

La costante di gravitazione universale G ha le dimensioni

$$[G] = [L]^3 [T]^{-2} [M]^{-1} \quad \text{ed un valore di } G = (6.67408 \pm 0.00031) \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

- Le dimensioni di una grandezza fisica hanno sempre la forma di prodotto dimensionale con potenze positive o negative. E' possibile sommare solo grandezze omogenee
- Per essere usate come argomenti di funzioni ($\sin x$, e^{-x} ...) le grandezze fisiche devono sempre essere combinate in modo da avere argomenti adimensionali...come evidente da

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + \dots$$

Cambiamento di grandezze fondamentali

Se vengono introdotte m nuove grandezze fondamentali H_j a sostituzione delle n iniziali F_i ; dobbiamo determinare le dimensioni delle F_i nel nuovo sistema:

$$[F_i] = \prod_{j=1,m} [H_j]^{\beta_{ij}}$$

E quindi valutare le dimensioni delle grandezze derivate:

$$\begin{aligned} [D] &= \prod_{i=1,n} [F_i]^{\alpha_i} = \prod_{i=1,n} \left(\prod_{j=1,m} [H_j]^{\beta_{ij}} \right)^{\alpha_i} = \prod_{i=1,n} \prod_{j=1,m} ([H_j]^{\beta_{ij}})^{\alpha_i} = \prod_{i=1,n} \left(\prod_{j=1,m} [H_j]^{\beta_{ij}\alpha_i} \right) \\ &= \prod_{j=1,m} \left(\prod_{i=1,n} [H_j]^{\beta_{ij}\alpha_i} \right) = \prod_{j=1,m} [H_j]^{\sum_{i=1,n} \alpha_i \beta_{ij}} = \prod_{j=1,m} [H_j]^{\eta_j} \end{aligned}$$

Con gli η che sono elementi del vettore ottenuti dal prodotto del vettore α per la matrice β :

$$(\eta_1 \quad \cdots \quad \eta_m) = (\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_n) \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nm} \end{pmatrix}$$

Sistema Internazionale → Unità Naturali

Il sistema di **unità naturali** è usato frequentemente in fisica delle particelle ed in particolare dai teorici. In esso si pone $\hbar = c = 1$, ovvero la **costante di Planck ridotta $\hbar$** (universale) e la **velocità della luce nel vuoto c** (universale) pari ad **1** ed **adimensionali**.

È facile dimostrare che per la meccanica questa scelta implica l'uso di una sola unità fondamentale, la **lunghezza**.

$$\text{Nel SI } \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,726(47) \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \qquad c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} (*)$$

(*) Esatta! Il metro è definito come la lunghezza del percorso fatto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $1/299\,792\,458$ di secondo ed il secondo è definito come unità fondamentale.

Sistema Internazionale → Unità Naturali

Prendiamo la lunghezza come unità fondamentale nel sistema di Unità Naturali $[L]_{un}$. Poiché la velocità è una quantità adimensionale ($c = 1$), tempo e lunghezza devono avere la stessa dimensione nel sistema di unità naturali; ovvero $[T]_{un} = [L]_{un}$

Essendo l'azione (energia per tempo o $[L]^2[T]^{-1}[M]^1$) adimensionale (e per la relazione sopra) la massa deve avere le dimensioni dell'inverso di una lunghezza; ovvero $[M]_{un} = [L]_{un}^{-1}$

$$\begin{aligned} [L]_{SI} &= [L]_{un}^1 \\ \text{Quindi: } [T]_{SI} &= [L]_{un}^1 \text{ o } (\beta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ La velocità è quindi: } (\eta_j)_v = (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ [M]_{SI} &= [L]_{un}^{-1} \end{aligned}$$

[calcolare le dimensioni per l'energia]

$$\text{L'energia è quindi: } (\eta_j)_E = (2 \quad -2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1$$

Unità Naturali

Quantity	Planck	Stoney	Atomic	Particle and atomic physics	Strong	Schrödinger
Defining constants	$c, G, \hbar, k_B$	c, G, e, k_e	$e, m_e, \hbar, k_e$	$c, m_e, \hbar, \epsilon_0$	$c, m_p, \hbar$	$\hbar, G, e, k_e$
Speed of light c	1	1	$1/\alpha$	1	1	$1/\alpha$
Reduced Planck constant $\hbar$	1	$1/\alpha$	1	1	1	1
Elementary charge e	—	1	1	$4\pi\alpha$	—	1
Vacuum permittivity ϵ_0	—	$1/4\pi$	$1/4\pi$	1	—	$1/4\pi$
Gravitational constant G	1	1	η_e/α	η_e	η_p	1

Unità naturali

Dove:

α è la costante di struttura fine ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137} \approx 0,007297$)

$$\eta_e = \frac{Gm_e^2}{\hbar c} \approx 1,7518 \times 10^{-45}$$

$$\eta_p = \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \approx 5,9061 \times 10^{-39}$$

Il trattino (—) indica che il sistema non è sufficiente a specificare la quantità.

Quantity	Expression	Metric value
Length	$\hbar/m_e c$	$3.862 \times 10^{-13} m$
Mass	m_e	$9.109 \times 10^{-31} kg$
Time	$\hbar/m_e c^2$	$1.288 \times 10^{-21} s$
Electric charge	$\sqrt{\epsilon_0 \hbar c}$	$5.291 \times 10^{-19} C$

Quantity	Expression	Metric value
Length	$\hbar/m_p c$	$2.103 \times 10^{-16} m$
Mass	m_p	$1.673 \times 10^{-27} kg$
Time	$\hbar/m_p c^2$	$7.015 \times 10^{-25} s$

Generalità - I

Una determinata scelta di **unità di misura (fondamentali)** delle grandezze fondamentali F_i costituisce un **sistema di unità di misura**.

Un sistema di unità di misura è detto:

- **completo** se tutte le grandezze fisiche si possono ricavare dalle grandezze fondamentali tramite relazioni analitiche;
- **coerente** se le relazioni analitiche che definiscono le unità delle grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità diversi da 1;
- **decimale** se multipli e sottomultipli delle unità di misura sono tutti potenze di 10.

Generalità - I

Due sistemi possono differire:

- per una diversa scelta di unita fondamentali (legata alla scelta delle grandezze fondamentali)
- per una diversa definizione dei campioni di misura
- per entrambe

Le unità di misura U di grandezze derivate si ottengono dalla definizione della grandezza derivata

$$D = k \prod_i F_i^{\alpha_i}$$

indicando con U le unità di misura delle grandezze fondamentali:

$$U(D) = K(D) \prod_i U^{\alpha_i}(F_i)$$

Generalità

Sono quindi:

- coerenti, le unità di misura per cui $K = 1$

$$N = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

$$Pa = 1 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

- non coerenti in caso contrario ($K \neq 1$)

[ad esempio, l'unità di **pressione atmosferica** ($1 \text{ atm} = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}$) è un'unità di misura **non coerente**, ma molto usata]

IMPORTANTE: seppure la scelta delle unità fondamentali è arbitraria è necessario che:

- siano definite senza ambiguità
- siano costanti nel tempo e nello spazio

SISTEMA INTERNAZIONALE (SI)

Grandezza di base		Unità di base	
Nome della grandezza di base	Simbolo	Nome dell'unità di misura base	Simbolo
lunghezza	$l, x, r, \text{etc.}$	metro	m
massa	m	chilogrammo (o kilogrammo)	kg
tempo, durata	t	secondo	s
corrente elettrica	I, i	ampere	A
temperatura termodinamica	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	I_v	candela	cd

Bureau International des Poids et Mesures
<http://www.bipm.org/en/measurement-units/>

SI – Definizione delle unità

grandezza	unità	simbolo	definizione
lunghezza	metro	m	tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un tempo di $1/299\,792\,458$ di secondo
massa	kilogrammo	kg	Definito a partire dal valore numerico della costante di Planck $h = 6.62607015 \times 10^{-34} J s$ o $kg m^2 s^{-1}$ da cui $1kg = \frac{h}{6.62607015 \times 10^{-34}} m^2 s^{-1}$
intervallo di tempo	secondo	s	durata di $9\,192\,631\,770$ periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133 $^{133}_{55}Cs$
intensità di corrente elettrica	ampere	A	Definito a partire dalla carica elettrica elementare $e = 1.602176634 \times 10^{-19} C$ con l'unità Coulomb che è uguale ad $A s$ da cui $1A = \frac{e}{1.602176634 \times 10^{-19}} s^{-1}$
temperatura termodinamica	kelvin	K	Definito a partire dalla costante di Boltzmann $k = 1.380649 \times 10^{-23} J K^{-1}$ o $kg m^2 s^{-1} K^{-1}$ $1K = \frac{k}{1.380649 \times 10^{-23}} kg m^2 s^{-2}$
quantità di sostanza	mole	mol	1 mole contiene un numero N_A di molecole $1 mol = \frac{6.02214076 \times 10^{23}}{N_A}$
intensità luminosa	candela	cd	intensità luminosa di una sorgente che emette una radiazione monocromatica con frequenza $540 \times 10^{12} Hz$ e intensità energetica di $1/683 W/sr$.

SISTEMA INTERNAZIONALE di UNITÀ di MISURA

Definito dal Bureau International des Poids et Measures (<http://www.bipm.org/en/about-us/>),

- “the intergovernmental organization through which Member States act together on matters related to measurement science and measurement standards.”

L’attuale standard è definito nella: SI Brochure: The International System of Units (SI) [9th edition, May 2019]

<https://www.bipm.org/en/publications/si-brochure/>

In cui trovate anche il PDF completo

<https://www.bipm.org/utis/common/pdf/si-brochure/SI-Brochure-9.pdf>

Definizioni precedenti - I

Se guardiamo le definizioni attuali osserviamo la necessità di svincolare le unità di misura fondamentali dai campioni materiali, per associarle a fenomeni fisici.

I vantaggi di tale intento sono una maggiore e fedele riproducibilità, in quanto le costanti universali sono conosciute con tolleranze minime, ed inoltre i campioni non sono soggetti ad alterazioni ambientali.

METRO:

- nel 1799 era determinato dalla lunghezza di una sbarra di platino, pari ad un quaranta milionesimo della lunghezza del meridiano terrestre;
- nel 1875 era riferito alla distanza delle due tacche incise sulla sbarra campione di platino(90%)-iridio(10%), conservata a temperatura costante (0°C) nell' Ufficio Internazionale di Pesi e Misure di Sèvres di Parigi;
- nel 1960 era rappresentato da 1650763,73 lunghezze d'onda, nel vuoto, della radiazione corrispondente alla transizione fra i livelli $2p^{10}$ e $5d^5$ dell'atomo del cripto-86;
- dal 1983 è quella attualmente in uso (tragitto percorso dalla luce nel vuoto in un tempo di $1/299\,792\,458$ di secondo).

Definizioni precedenti - II

Se guardiamo le definizioni attuali osserviamo la necessità di svincolare le unità di misura fondamentali dai campioni materiali, per associarle a fenomeni fisici.

I vantaggi di tale intento sono una maggiore e fedele riproducibilità, in quanto le costanti universali sono conosciute con tolleranze minime, ed inoltre i campioni non sono soggetti ad alterazioni ambientali.

KILOGRAMMO:

- Unica unità che compare nel SI con un prefisso del SI.
- dal 1795 fino al 2019 coincidente con la massa di 1 dm^3 di acqua distillata posta alla temperatura di 4°C .
- Dal 2019 definito a partire dal valore numerico della costante di Planck h

SECONDO:

- prima del 1960 era rappresentato dalla $86400 = 60 \times 60 \times 24$ parte del giorno solare medio;
- dopo il 1960 era determinato da una frazione dell'anno tropico (tempo impiegato dal Sole per tornare nella stessa posizione, vista dalla Terra) alla data del 1900;
- dal 1967 è quella attualmente in uso (durata di 9 192 631 770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio-133 $^{133}_{55}\text{Cs}$).

SI – Unità derivate

Grandezza derivata		Unità SI derivata	
area	A	metro quadrato	m^2
volume	V	metro cubo	m^3
velocità	v	metro al secondo	$m\ s^{-1}$
accelerazione	a	metro al secondo quadrato	$m\ s^{-2}$
numero d'onda	σ	metro alla meno uno	m^{-1}
densità, massa volumica	ρ	kilogrammo al metro cubo	$kg\ m^{-3}$
densità superficiale	ρ_A	kilogrammo al metro quadrato	$kg\ m^{-2}$
volume specifico	v	metro cubo al kilogrammo	$m^3\ kg^{-1}$
densità di corrente (elettrica)	j	ampere al metro quadro	$A\ m^{-2}$
(intensità di) campo magnetico	H	ampere al metro	$A\ m^{-1}$
concentrazione (di quantità di sostanza)	c	mole al metro cubo	$mol\ m^{-3}$
concentrazione di massa/ densità	ρ, γ	kilogrammo al metro cubo	$kg\ m^{-3}$
luminanza	L_v	candela al metro quadro	$cd\ m^{-2}$
indice di rifrazione	n	(il numero) uno	1
permeabilità relativa	μ_r	(il numero) uno	1

SI – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivate	Nome	Simbolo	Fz. di altre unità SI	Fz. di unità SI di base
angolo piano	radiante	<i>rad</i>	1	$m\ m^{-1}$
angolo solido	steradiano	<i>sr</i>	1	$m^2\ m^{-2}$
Frequenza	hertz	<i>Hz</i>		s^{-1}
Forza	newton	<i>N</i>		$m\ kg\ s^{-2}$
pressione, sforzo	pascal	<i>Pa</i>	N/m^2	$m^{-1}\ kg\ s^{-2}$
energia, lavoro, quantità di calore	joule	<i>J</i>	$N\ m$	$m^2\ kg\ s^{-2}$
potenza, flusso radiante	watt	<i>W</i>	J/s	$m^2\ kg\ s^{-3}$
carica elettrica, quantità di elettricità	coulomb	<i>C</i>		$s\ A$
differenza di potenziale elettrico, forza elettromotrice	volt	<i>V</i>	W/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
capacità (elettrica)	farad	<i>F</i>	C/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^4\ A^2$
resistenza elettrica	ohm	Ω	V/A	$m^2\ kg\ s^{-3}\ A^{-2}$
conduttanza elettrica	siemens	<i>S</i>	A/V	$m^{-2}\ kg^{-1}\ s^3\ A^2$
flusso magnetico	weber	<i>Wb</i>	$V\ s$	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-1}$

SI – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivata	Nome	Simbolo	Fz. di altre unità SI	Fz. di unità SI di base
densità di flusso magnetico	tesla	T	Wb/m^2	$kg\ s^{-2}\ A^{-1}$
induttanza	henry	H	Wb/A	$m^2\ kg\ s^{-2}\ A^{-2}$
temperatura Celsius	grado Celsius	$^{\circ}C$		K
flusso luminoso	lumen	lm	$cd\ sr$	cd
luminanza	lux	lx	lm/m^2	$m^{-2}\ cd$
attività di un radionuclide	becquerel	Bq		s^{-1}
dose assorbita, energia specifica (impartita), kerma	gray	Gy	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
equivalente di dose (ambientale, direzionale, personale)	sievert	Sv	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
viscosità dinamica		pascal per secondo	$Pa\ s$	$m^{-1}\ kg\ s^{-1}$
momento di una forza		newton per metro	$N\ m$	$m^2\ kg\ s^{-2}$
tensione superficiale		newton al metro	N/m	$kg\ s^{-2}$
velocità angolare		radiante al secondo	rad/s	$m\ m^{-1}\ s^{-1} = s^{-1}$
accelerazione angolare		radiante al secondo quadrato	rad/s^2	$m\ m^{-1}\ s^{-2} = s^{-2}$

SI – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivata	Nome	Simbolo	Fz. di altre unità SI	Fz. di unità SI di base
densità di flusso di calore, irradianza		watt al metro quadro	W/m^2	$kg\ s^{-3}$
capacità termica, entropia		joule al kelvin	J/K	$m^2\ kg\ s^{-2}\ K^{-1}$
capacità termica specifica, entropia specifica		joule al kilogrammo e al kelvin	$J/(kg\ K)$	$m^2\ s^{-2}\ K^{-1}$
energia specifica		joule al kilogrammo	J/kg	$m^2\ s^{-2}$
conducibilità termica		watt al metro e al kelvin	$W/(m\ K)$	$m\ kg\ s^{-3}\ K^{-1}$
densità di energia		joule al metro cubo	J/m^3	$K^{-1}\ kg\ s^{-2}$
(intensità di) campo elettrico, forza elettrica		volt al metro	V/m	$m\ kg\ s^{-3}\ A^{-1}$
densità di carica elettrica		coulomb al metro cubo	C/m^3	$m^{-3}\ s\ A$
densità superficiale di carica		coulomb al metro quadro	C/m^2	$m^{-2}\ s\ A$
densità di flusso elettrico, spostamento elettrico		coulomb al metro quadro	C/m^2	$m^{-2}\ s\ A$

SI – Unità derivate con nomi e simboli definiti

Grandezza derivata	Nome	Simbolo	Fz. di altre unità SI	Fz. di unità SI di base
permettività		farad al metro	F/m	$m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2$
permeabilità		henry al metro	H/m	$m kg s^{-2} A^{-2}$
energia molare		joule alla mole	J/mol	$m^2 kg s^{-2} mol^{-1}$
entropia molare, capacità termica molare		joule alla mole e al kelvin	$J/(mol K)$	$m^2 kg s^{-2} K^{-1} mol^{-1}$
esposizione (a raggi X e γ)		coulomb al kilogrammo	C/kg	$kg^{-1} s A$
rateo di dose assorbita		gray al secondo	Gy/s	$m^2 s^{-3}$
intensità di radiazione		watt allo steradiante	W/sr	$m^4 m^{-2} kg s^{-3}$ $= m^2 kg s^{-3}$
radianza		watt al metro quadro e allo steradiante	$W/(m^2 sr)$	$m^2 m^{-2} kg s^{-3} = kg s^{-3}$

Unità non nel SI accettate per uso nel SI

Grandezza	Nome	Simbolo	Valore in unità SI
tempo, durata	minuto	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
	ora	<i>h</i>	$1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$
	giorno	<i>d</i>	$1 \text{ d} = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$
angolo piano	grado	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
	minuto	'	$1' = (1/60)^\circ = (\pi/10\,800) \text{ rad}$
	secondo	"	$1'' = (1/60)' = (\pi/648\,000) \text{ rad}$
area	ettaro	<i>ha</i>	$1 \text{ ha} = 1 \text{ hm}^2 = 10^4 \text{ m}^2$
volume	litro	<i>L, l</i>	$1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$
massa	tonnellata	<i>t</i>	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$

Unità non nel SI accettate per uso nel SI

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo	Valore in unità SI
energia	elettronvolt	eV	$1\ eV = 1.602\ 176\ 53(14) \times 10^{-19}\ J$
massa	dalton	Da	$1\ Da = 1.660\ 538\ 86(28) \times 10^{-27}\ kg$
	unità unificata di massa atomica	u	$1\ u = 1\ Da$
lunghezza	unità astronomica	ua	$1\ ua = 1.495\ 978\ 706\ 91(6) \times 10^{11}\ m$
Unità naturali			
velocità	unità naturale della velocità (velocità della luce nel vuoto)	c_0	$299\ 792\ 458\ m\ s^{-1}$
azione	unità naturale di azione (costante di Planck ridotta)	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1.054\ 571\ 68(18) \times 10^{-34}\ Js$
massa	unità naturale di massa (massa dell'elettrone)	m_e	$9.109\ 382\ 6(16) \times 10^{-31}\ kg$
tempo, durata	unità naturale del tempo	$\hbar/(m_e c_0^2)$	$1.288\ 088\ 667\ 7(86) \times 10^{-21}\ s$
Unità atomiche			
carica	unità atomica di carica (carica elementare)	e	$1.602\ 176\ 53(14) \times 10^{-19}\ C$
massa	unità atomica di massa (massa dell'elettrone)	m_e	$9.109\ 382\ 6(16) \times 10^{-31}\ kg$
azione	unità atomica di azione (costante di Planck ridotta)	$\hbar$	$1.054\ 571\ 68(18) \times 10^{-34}\ Js$
lunghezza	unità atomica di lunghezza (raggio del Bohr)	a_o	$0.529\ 177\ 210\ 8(18) \times 10^{-10}\ m$
energia	unità atomica di energia (energia di Hartree)	E_h	$4.359\ 744\ 17(75) \times 10^{-18}\ J$
tempo, durata	unità atomica del tempo	$\hbar/E_h$	$2.418\ 884\ 326\ 505(16) \times 10^{-17}\ s$

Unità non SI

Grandezza	Nome dell'unità	Simbolo	Valore in unità SI
pressione	bar	bar	$1\ bar = 0.1\ MPa = 10^5\ Pa$
	millimetro di mercurio	$mm\ Hg$	$1\ mm\ Hg \approx 133.322\ Pa$
lunghezza	angström	$\text{\AA}$	$1\ \text{\AA} = 0.1\ nm = 10^{-10}\ m$
distanza	miglio marino	M	$1\ M = 1852\ m$
area	barn	b	$1\ b = 100\ fm^2 = 10^{-28}\ m^2$
velocità	nodo	kn	$1\ kn = (1852/3600)\ m\ s^{-1}$
quantitativi rapporto logaritmico	neper	Np	
	bel	B	
	decibel	dB	

Prefissi di multipli e sottomultipli del S.I.

Fattore	Nome	Simbolo	Fattore	Nome	Simbolo
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	<i>d</i>
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	<i>c</i>
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	<i>m</i>
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	<i>n</i>
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	<i>p</i>
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	<i>f</i>
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	<i>a</i>
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	<i>z</i>
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	<i>y</i>

Ordini di grandezza

L'**ORDINE DI GRANDEZZA** di un numero è la **POTENZA DEL 10 PIU' VICINA AL NUMERO CONSIDERATO**.

Dato un numero a il suo **ORDINE DI GRANDEZZA** viene indicato con **ODG (a)**. E' definito come la potenza di 10 con esponente il numero intero z per cui $||a| - 10^z| < 5$

Per determinare l'**ORDINE DI GRANDEZZA** di un numero possiamo:

- Scrivere il numero in **NOTAZIONE SCIENTIFICA** $a = k \times 10^n$ con $1 \leq k < 10$ (k -mantissa)
- Quindi $\mathbf{ODG}(a) = \begin{cases} 10^n & \text{se } |k| < 5 \\ 10^{n+1} & \text{se } |k| \geq 5 \end{cases}$ $\mathbf{ODM}(a) = \dots \text{next slide}$

	NOTAZIONE SCIENTIFICA	Cos'è	Potenza (ODG)	ODM(a)
6 371 km	$6.371 \times 10^6 \text{ m}$	Raggio terrestre	10^7 m	8
9 999 t	$9.999 \times 10^6 \text{ kg}$	Peso torre Eiffel	10^7 kg	8
384 400 km	$3.844 \times 10^8 \text{ m}$	Distanza terra-luna	10^8 m	9
149 600 000 km	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$	Distanza terra-sole	10^{11} m	11

Ordini di grandezza (2)

Alle volte trovate (come per esempio a partire dall'Order of Magnitude nella letteratura inglese) L'**ORDINE DI GRANDEZZA** definito a usando il logaritmo a base 10 di a ed allora le cose cambiano un po': abbiamo infatti:

$$|\log_{10} a - z| < \frac{1}{2}$$

Il che equivale a dire che quando scrivo il numero in notazione scientifica:

$$a = k \times 10^n$$

$$l'ODG(a) = \begin{cases} n - 1 & \text{se } k < \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.316 \\ n & \text{se } \frac{1}{\sqrt{10}} < k < \sqrt{10} \\ n + 1 & \text{se } k > \sqrt{10} = 3.16 \end{cases}$$

La misura

Misurare

Trasformare caratteristiche osservabili di oggetti in serie ordinate di numeri

Misura di una grandezza

Rapporto tra una grandezza ed un'altra ad essa omogenea, scelta come unità di misura



Tutte le misure sono soggette ad **INCERTEZZA**

Errori

Nell'eseguire una misurazione, si commette sempre un errore E

$$E = M - V$$

Gli errori si dividono in quattro tipologie diverse, a seconda della loro natura:

- **errori grossolani:** errori dovuti alla distrazione dell'operatore che legge un valore sbagliato del risultato della misurazione sullo schermo di uno strumento numerico, o sbagliando a dare un valore numerico alla posizione dell'indice in uno strumento analogico. Questi errori sono generalmente di natura tale da poter essere facilmente identificati, e la relativa misura viene perciò scartata e se possibile ripetuta;
- **errori sistematici:** sono errori che in misure ripetute mantengono il proprio segno e la propria ampiezza. In linea di principio tali errori possono essere corretti, in quanto il loro contributo resta sempre uguale: tuttavia la correzione è completa solo se si riesce a determinarne il valore senza incertezza, il che è impossibile. Anche dopo la correzione resterà perciò un'aliquota la cui entità dipende dalla bontà della misura effettuata per correggere l'errore sistematico;
- **errori aleatori o incertezze statistiche:** sono così definiti quegli errori il cui valore in modulo e segno varia ad ogni misurazione. Tralasciando gli errori grossolani, e ricordando che gli errori sistematici lasciano in eredità un'aliquota imponderabile, di fatto gli unici errori che restano tali sono quelli aleatori, che sono governati da leggi di tipo statistico.
- **Errori di sensibilità:** è l'errore di risoluzione che abbiamo quando il valore fornito in una misurazione è situato tra due suddivisioni successive della scala graduata dello strumento. Se la sensibilità di uno strumento di misura non è sufficiente ad apprezzare le fluttuazioni della grandezza da misurare dovute ad errori casuali, misurazioni successive forniscono sempre lo stesso valore. In tal caso si assume come misura del valore vero della grandezza il valore letto sullo strumento, e come incertezza di misura la semiampiezza dell'intervallo minimo che lo strumento può apprezzare.

Definizioni

- **INCERTEZZA:** parametro che misura la dispersione dei valori che possono essere attribuiti al misurando.
- **ERRORE:** differenza tra il risultato di una misura ed il valore “vero” del misurando.

Incertezza della misura - I

- Ripetizioni di misure con un risultato non identico sono il risultato di incertezze di misura
- Le condizioni sperimentali non possono essere ripetute esattamente
- L'ipotesi della teoria della misura è che i risultati di misura approssimano il valore **vero**
⇒ il valore vero esiste
- È indispensabile l'elaborazione delle misure
- Nelle ripetizioni di misure con un medesimo risultato, l'incertezza è data dalla risoluzione dello strumento che utilizziamo.

Incertezza della misura - II

- La grandezza fisica fondamentale può essere misurata per confronto diretto con il campione (abbiamo visto che ciò è stato abbandonato dal BIPM)
- Grandezze fisiche derivate
 - Da combinazione di grandezze fisiche fondamentali
 - Misure indirette

Incertezza della misura - II

— Strumento di misura

- Permette il confronto delle grandezze con l'unità di misura
- È composto da un rivelatore (sensibile alla grandezza da misurare)
- Da un trasduttore (eventualmente) ovvero un dispositivo che legge una grandezza presente in **ingresso** e ne genera un'altra in **uscita**, proporzionale alla prima.
- Dispositivo per la presentazione dei risultati

Strumenti di misura

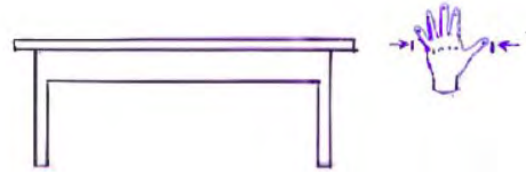
ANALOGICI



DIGITALI



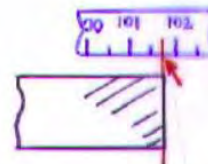
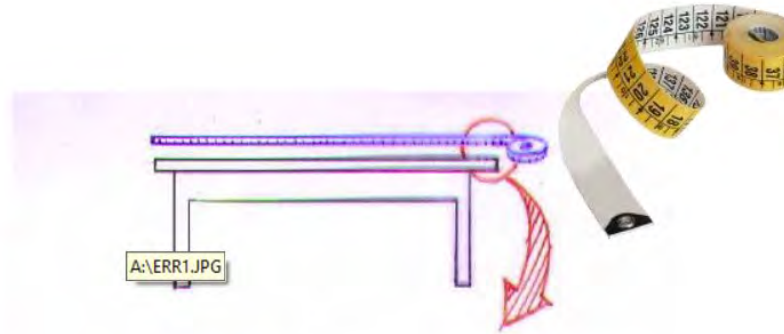
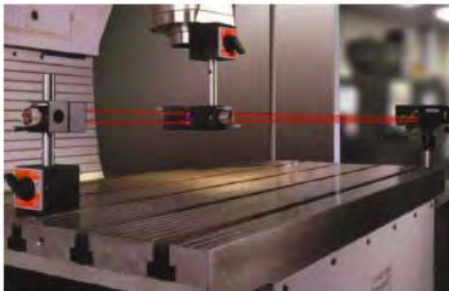
Misure ed errore



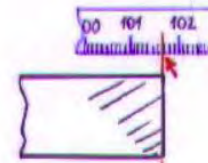
~1 m
(± qualche cm)



Ma qual è la lunghezza?



~101.7 cm
(± qualche mm)



~101.69 cm
(± qualche 0.1 mm)



~101.68435734 cm
(± 10⁻⁶ m)



Errori di misura

- Valutazione dell'incertezza associata alle misure finalizzata a:
 - Minimizzare l'errore
 - Accertare la validità dei risultati
- Da ribadire: il valore vero è un concetto ed è non misurabile e non noto
- Definizioni [REPETITA IUVANT]
 - **Errore, scarto o deviazione**: differenza tra **valore misurato** e **valore vero**
 - **Incerteza**: **dispersione dei valori** espressa come deviazione standard, errore probabile, indice di precisione

Caratteristiche degli strumenti di misura

Indichiamo con:

- G – la grandezza fisica
- $R(G)$ – la risposta dello strumento usato quale risultato della misura di G
- $M(G)$ – il risultato dell'operazione di misura di G
- $V(G)$ – il valore vero della grandezza fisica ($V(G) = M(G)$ solo se la misura è priva di errore)

Uno strumento fornisce una risposta, sul dispositivo di visualizzazione, in corrispondenza ad una determinata sollecitazione rilevata dall'elemento sensibile e connessa alla grandezza in misura.

Pertanto, per completare l'operazione di misura occorre conoscere la relazione tra la risposta $R(G)$ ed il valore della sollecitazione $V(G)$.

$$M(G) = \alpha R(G)$$

Tale relazione si chiama *taratura dello strumento*. Si ricava rilevando la risposta dello strumento per valori di G già noti.

Caratteristiche degli strumenti di misura

Per definire le caratteristiche generali degli strumenti (oltre alle condizioni di funzionamento) devono essere note:

- **L'intervallo di funzionamento**: definito tra il valore massimo – **portata** – ed il valore minimo – **soglia** – della grandezza da misurare che lo strumento è in grado di fornire.
- **La prontezza**: ovvero il tempo necessario affinché lo strumento risponda ad una variazione della sollecitazione; quanto minore è tale tempo – **tempo caratteristico** – tanto maggiore è la prontezza. Tanto più i tempi di variazione di G sono piccoli rispetto al tempo caratteristico, tanto minore è la capacità dello strumento di misurarli (normale voltmetro ha un tempo caratteristico di 1s, un oscilloscopio di 1ns).
- **La sensibilità**: definita come il rapporto tra la variazione della risposta dello strumento $R(G)$ e la corrispondente variazione del valore vero $V(G)$ della grandezza, al limite per variazioni nulle:

$$S[V(G)] = \frac{dR(G)}{dV(G)}$$

Se vi è una relazione lineare tra la risposta ed il valore vero, S è costante, ma in generale S è funzione di $V(G)$.

Caratteristiche degli strumenti di misura

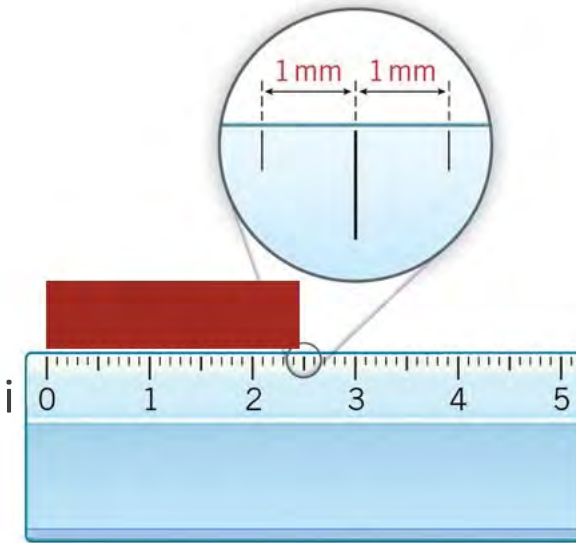
- L'errore di sensibilità, o errore di risoluzione, ΔV : per ogni strumento esiste un limite all'accuratezza con cui si può rilevare la risposta. Valori di $R(G)$ che differiscono di meno $2\Delta R(G)$ vengono percepiti come lo stesso valore dall'osservatore. Ciò determina un'incertezza sulla conoscenza del valore $V(G)$ pari a:

$$2\Delta V(G) = \frac{2\Delta R(G)}{S}$$

Il fattore 2 è presente per comodità: l'indeterminatezza sulla lettura del valore di $R(G)$ implica che il valore effettivo è compreso tra $R(G) - \Delta R(G)$ e $R(G) + \Delta R(G)$ che corrisponde ad una grandezza misurata nell'intervallo compreso tra $M(G) - \Delta V(G)$ e $M(G) + \Delta V(G)$. Per convenzione si esprime questa indeterminazione indicando come risultato della misura:

$$M(G) \pm \Delta V(G)$$

Con $\Delta V(G)$ l'errore di sensibilità. In molti strumenti $R(G)$ può assumere valori continui (analogici come calibri, metri, voltmetri) in altri solo discreti (strumenti digitali, contasecondi...). Nel secondo caso, non si può parlare di sensibilità ma solo di errore di sensibilità. Nel primo caso (generalmente) si fa in modo che la **suddivisione della scala corrisponda proprio a $2\Delta V(G)$** in modo da poter leggere non solo il valore della misura ma anche il corrispondente errore di sensibilità.



Metro a laser

Immaginiamo un metro a laser con la risoluzione di 1mm e di voler misurare un oggetto della lunghezza di 10m. La misurazione avviene tramite l'emissione di luce laser (monocromatica).

Il metro a laser (comune) non misura la il tempo, perché la precisione necessaria sarebbe eccessiva. Il mio strumento dovrebbe avere una risoluzione tale da misurare il tempo che la luce impiega a percorrere 1mm:

$$t(1mm) = \frac{1 \times 10^{-3}}{2.998 \times 10^8} = 3.336 \times 10^{-12}s$$

Il metro a laser misura la frequenza con cui la luce riflessa spegne il laser. Nel nostro caso il periodo è dato dal tempo impiegato a percorrere 2×10 m e la frequenza è l'inverso del periodo

$$T(20m) = \frac{20}{2.998 \times 10^8} = 6.67111 \times 10^{-8}s$$

ed una frequenza di 1.49900×10^7 Hz o 14.4900 MHz. Se vado avanti vedo che per

$$T(20.001 m) = \frac{20.001}{2.998 \times 10^8} = 6.67148 \times 10^{-8}s$$

e la frequenza diventa di 14.9892 MHz

Metro a laser

 Scegli la categoria 

Cerca su eBay 

Tutte le categorie 

Cerca 

 Avanzata[Pagina precedente](#) > Commercio, ufficio e indust... > Misurazione, collaudo e isp... > Misuratori e rilevatori > Contatori di frequenza [Condividi](#)

IN 9 CARRELLI



104 

Misuratore di frequenza RF ad alta precisione 1~500 MHz modulo tester per radio prosciutto-[mostra il titolo originale](#)

 DiyBox Electronic (79009) · Venditore professionale
99,3% di feedback positivi · [Altre inserzioni del venditore](#) · [Contatta il venditore](#) **US \$15,85**
Circa EUR 14,63
o Proposta d'acquistoCondizione: Nuovo Quantità: Più di 10 disponibili · 109 venduti

Compralo Subito

Aggiungi al carrello

Fai una proposta

 Aggiungi agli oggetti che osservi

 Goditi i vantaggi. Restituzioni accettate. C'è grande richiesta. 104 persone lo tengono d'occhio.

Ne hai uno da vendere? [Vendine uno simile](#)

Metro a laser

Ma la velocità della luce in aria non è quella della luce nel vuoto. La differenza dipende dall'indice di rifrazione n :

$$c(n) = \frac{c}{n}$$

L'indice di rifrazione dipende dalla frequenza...ma noi abbiamo un laser monocromatico...

$$T(20m) = \frac{20 \times 1.0003 = 20.006}{2.998 \times 10^8} = 6.67311 \times 10^{-8} s$$

e quindi devo sperare che per calcolare la distanza venga usato l'indice di rifrazione corretto.

Materiale	n a $\lambda=589,3$ nm
elio	1,000 036
aria	1,000 292 6
anidride carbonica	1,000 45
ghiaccio	1,31
acqua (20 °C)	1,333
etanolo	1,36
glicerina	1,472 9

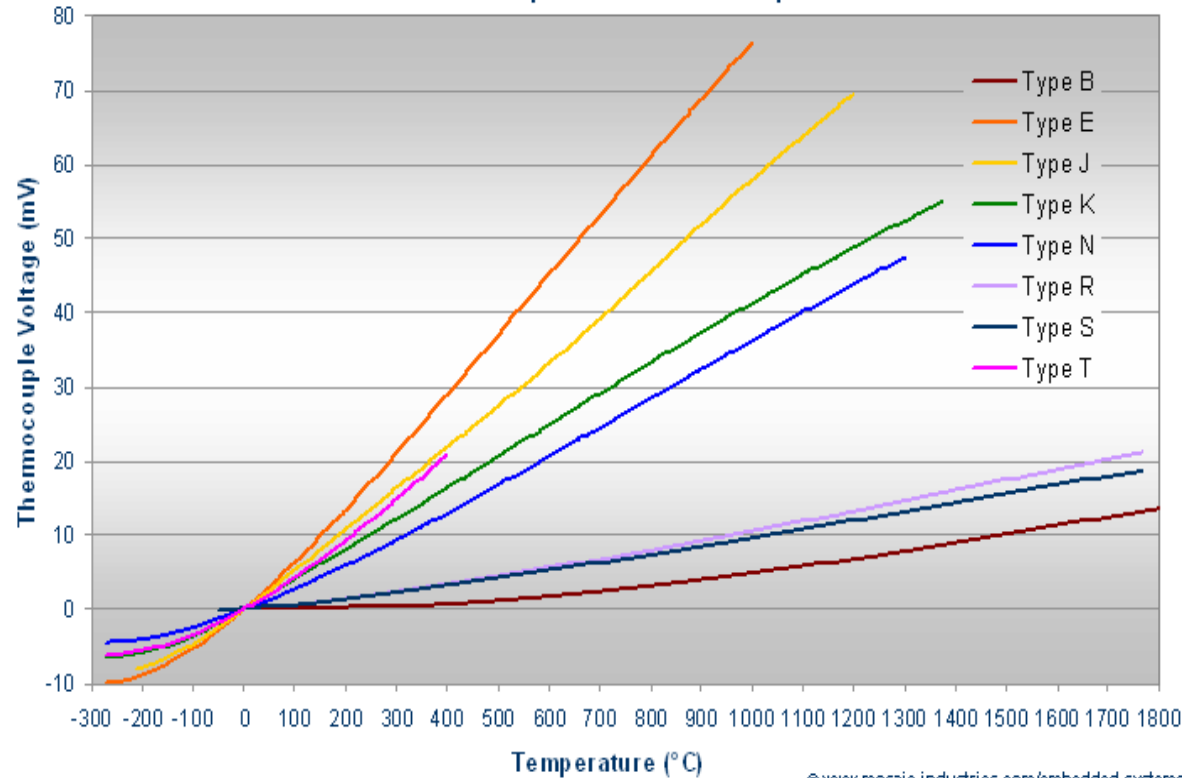
Termocoppie: simboli ANSI

Constantana: lega di Cu e Ni (60-40)

Chromel: lega di Ni e Cr (90-10)

Alumel: lega di Ni, Mn, Al, Si

Thermocouple Potential vs Temperature



Simbolo	Materiali	Intervallo (°C)	Vmax (mV)
S	Pt-10%Rh/Pt	-50/1760	18
R	Pt-13%Rh/Pt	-50/1650	19
B	Pt30%Rh/Pt6%Rh	0/1820	14
E	Chromel/Costanteana	-270/1000	75
J	Fe/Costanteana	-210/1200	50
K	Chromel/Alumel	-270/1370	54
T	Cu/Costanteana	-270/400	21

K-type

This section contains coefficients for type K thermocouples for the two subranges of temperature listed below. The coefficients are in units of °C and mV and are listed in the order of constant term up to the highest order. The equation below 0 °C is of the form

$$E = \text{sum}(i=0 \text{ to } n) c_i t^i.$$

The equation above 0 °C is of the form

$$E = \text{sum}(i=0 \text{ to } n) c_i t^i + a_0 \exp(a_1 (t - a_2)^2).$$

Temperature Range (°C)

-270.000 to 0.000

0.000 to 1372.000

name: reference function on ITS-90

type: K

temperature units: °C

emf units: mV

range: -270.000, 0.000, 10

0.000000000000E+00

0.394501280250E-01

0.236223735980E-04

-0.328589067840E-06

-0.499048287770E-08

-0.675090591730E-10

-0.574103274280E-12

-0.310888728940E-14

-0.104516093650E-16

-0.198892668780E-19

-0.163226974860E-22

range: 0.000, 1372.000, 9

-0.176004136860E-01

0.389212049750E-01

0.185587700320E-04

-0.994575928740E-07

0.318409457190E-09

-0.560728448890E-12

0.560750590590E-15

-0.320207200030E-18

0.971511471520E-22

-0.121047212750E-25

exponential:

a0 = 0.118597600000E+00

a1 = -0.118343200000E-03

a2 = 0.126968600000E+03

$$E(mV) = \sum_{m=0}^{10} c_m t^m$$

$$E(mV) = \sum_{m=0}^9 c_m t^m + a_0 e^{a_1 (t - a_2)^2}$$

K-type

This section contains coefficients of approximate inverse functions for type K thermocouples for the subranges of temperature and voltage listed below. The range of errors of the approximate inverse function for each subrange is also given.

The coefficients are in units of °C and mV and are listed in the order of constant term up to the highest order. The equation is of the form

$$t_{90} = d_0 + d_1 * E + d_2 * E^2 + \dots + d_n * E^n,$$

where E is in mV and t₉₀ is in °C.

Temperature range (°C)	Voltage range (mV)	Error range (°C)
-200. to 0.	-5.891 to 0.000	-0.02 to 0.04
0. to 500.	0.000 to 20.644	-0.05 to 0.04
500. to 1372.	20.644 to 54.886	-0.05 to 0.06

$$t(^{\circ}\text{C}) = \sum_{m=0}^9 d_m E^m$$

Inverse coefficients for type K:

Temp	-200.	0.	500.
range:	0.	500.	1372.

Voltage	-5.891	0.000	20.644
Range:	0.000	20.644	54.886

0.000000E+00	0.000000E+00	-1.318058E+02
2.5173462E+01	2.508355E+01	4.830222E+01
-1.1662878E+00	7.860106E-02	-1.646031E+00
-1.0833638E+00	-2.503131E-01	5.464731E-02
-8.9773540E-01	8.315270E-02	-9.650715E-04
-3.7342377E-01	-1.228034E-02	8.802193E-06
-8.6632643E-02	9.804036E-04	-3.110810E-08
-1.0450598E-02	-4.413030E-05	0.000000E+00
-5.1920577E-04	1.057734E-06	0.000000E+00
0.000000E+00	-1.052755E-08	0.000000E+00

Error	-0.02	-0.05	-0.05
Range:	0.04	0.04	0.06

Caratteristiche degli strumenti di misura

- **La ripetibilità**: la capacità dello strumento di fornire la stessa risposta alla stessa sollecitazione.
- **L'affidabilità**: robustezza di funzionamento nel tempo ed in condizioni di lavoro variabili.
- **L'accuratezza**: valore vero $\approx$ valore misurato (ovvero assenza di effetti sistematici)
- **La precisione**: fornisce un'indicazione di quanto **R(G)** non dipende solo da **V(G)**. In ogni dispositivo infatti non possono essere trascurati effetti quali attriti meccanici, tolleranze costruttive, isteresi, fluttuazione di livelli elettrici, rumore elettronico, che fanno sì che la risposta non sia sempre la stessa per la stessa sollecitazione.
- **Classe di precisione**:

$$c_P = 100 \left(\frac{|M(G) - V(G)|}{P(\text{ortata})} \right) \Rightarrow |M(G) - V(G)| = \frac{c_P P}{100}$$

Le norme CEI (comitato elettrotecnico italiano) fissano i seguenti indici di classe normalizzati per strumenti di misura elettrici o elettronici:

$$c = 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 5$$

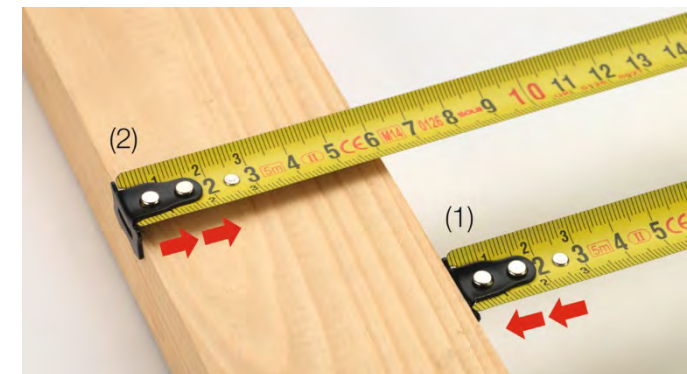
(11 classi)

Flessometri (i.e. metri a nastro)

Classi CE indicate sullo strumento:

Variazioni $\pm$ mm relative alla lunghezza totale			
Lunghezza	Classe I	Classe II	Classe III
2 m	0.30	0.70	1.40
3 m	0.40	0.90	1.80
5 m	0.60	1.30	2.60
8 m	0.90	1.90	3.80
10 m	1.10	2.30	4.60

Ovvero:



Inciso: regola della mezza divisione

Per il metro, $\Delta x = \frac{1}{2}$ divisione... non corrisponde all'errore di sensibilità. L'occhio umano riesce ad interpolare bene tra due tacche ad un millimetro. Prendete un calibro e confrontate le misure effettuate interpolando tra i millimetri con i valori del nonio. La dispersione delle misure sarà dell'ordine del decimo di millimetro (~ 0.07 mm).

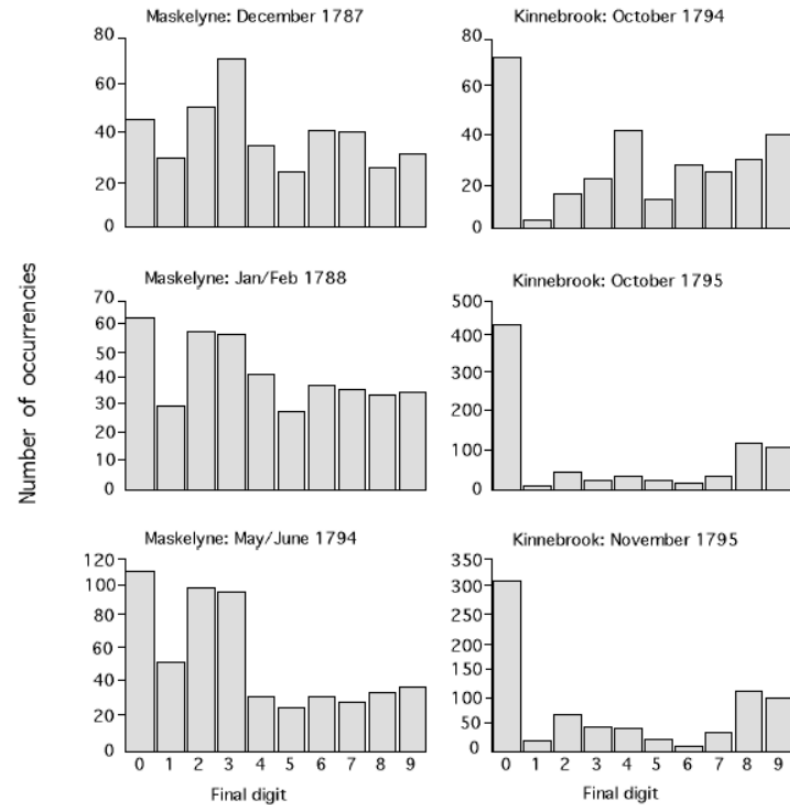
Attrezzi da disegno – modalità di controllo per squadre, righe e multi decimetri (UNI 5131) riporta:

«sulla lunghezza ℓ della parte millimetrata è ammessa una tolleranza di $\pm \frac{0.2}{1000} \ell$ »

Che fornisce per letture a fondo scala precisioni di 0.1 mm. DIN infatti dice «line scales mainly have scale numbering with regular spacing and are mostly intended for a continuous reading»

- UNI: Ente nazionale italiano di unificazione
- ISO: International Organization for Standardization
- DIN: Deutsches Institut für Normung

Da un articolo su Nature del 1996



Risultato: Maskelyne licenziò l'assistente Kinnebrooke accusandolo di inaccuratezza nelle letture.



Figura 4: Istogramma dell'ultima cifra significativa nei dati di Maskelyne e in quelli del suo assistente.

Distribuzione delle misure

In alcuni casi la ripetizione delle misure di una stessa grandezza non fornisce identici valori per identiche condizioni.

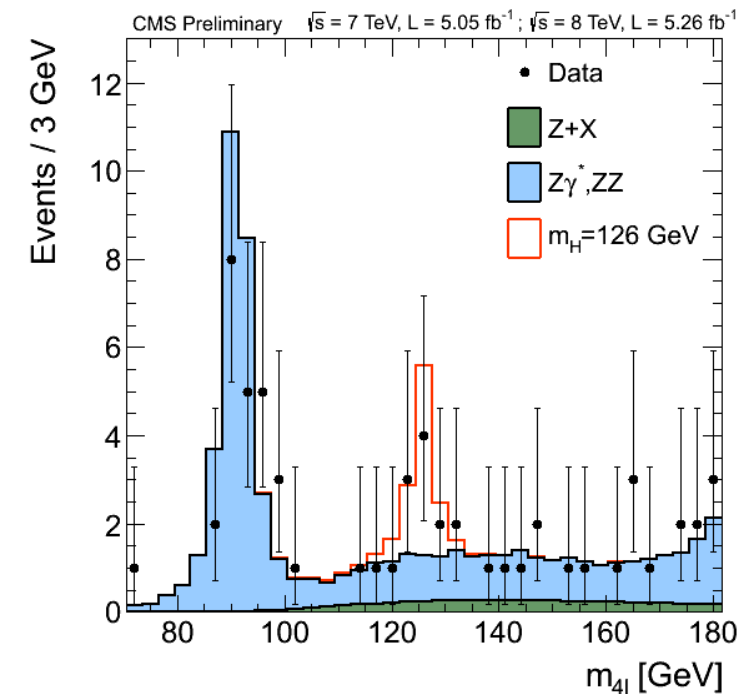
Qualitativamente possiamo dare ragione di questo risultato considerando l'assunto **di identiche condizioni** come una **condizione ipotetica** non realizzabile microscopicamente:

- Il valore assunto da una grandezza è dovuto all'effetto concomitante di tanti contributi di cui non è possibile tenere conto individualmente (ad esempio l'attrito è il risultato di tanti micro-effetti; correnti e potenziali elettrici sono dovuti al movimento di innumerevoli corpi elettricamente carichi, soggetti ad agitazione termica ed a moti disordinati).
- La non riproducibilità complessiva non è manifesta quando i suoi effetti sono contenuti all'interno l'errore di sensibilità dello strumento di misura,
- Nel caso contrario la non riproducibilità è manifesta, e si riscontra una **variabilità delle $M(G)$** messa in evidenza in una particolare rappresentazione grafica chiamata **istogramma**.

Istogramma

Un istogramma si realizza riportando:

- In ascissa i valori possibili di $M(G)$ sono suddivisi in n intervalli di ampiezza opportuna Δ , **ma comunque non inferiori a $2\Delta V(G)$** .
- Un intervallo i -esimo andrà da $\left(x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right]$, quello successivo da $\left(x_{i+1} - \frac{\Delta}{2}, x_{i+1} + \frac{\Delta}{2}\right]$ con $x_{i+1} - x_i = \Delta$
- L'ordinata dell'intervallo i -esimo sarà il numero ' n_i ' delle misure il cui valore è compreso nell'intervallo $x_{mis} \in \left(x_i - \frac{\Delta}{2}, x_i + \frac{\Delta}{2}\right]$.
- La scala orizzontale ha l'unità di misura di G (es. mm)
- La scala verticale ha come unità di misura il numero di conteggi nell'intervallo (es. Eventi di misura/5 mm); è quindi una densità di frequenza, ossia è pari al rapporto fra la frequenza di conteggi e l'ampiezza 2Δ dell'intervallo.



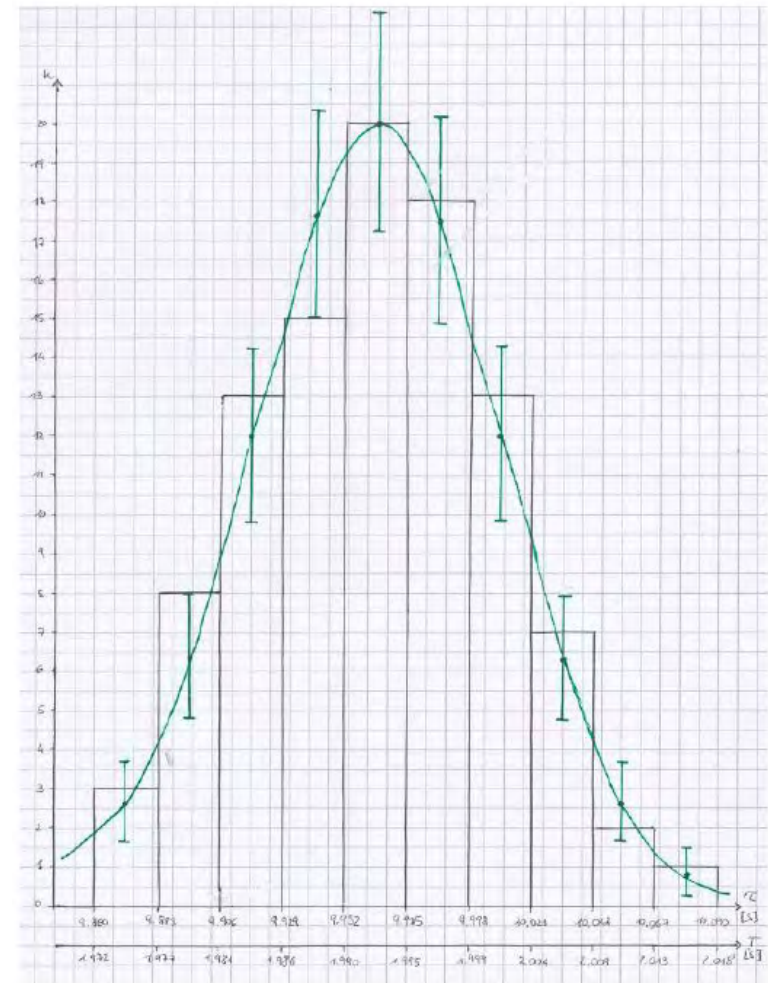
Istogramma

7) Con $l_{filo} = 100 \text{ cm}$ e $\theta_0 = 5^\circ$

N°	τ_i [s]	σ_τ^2 [s ²]	N°	τ_i [s]	σ_τ^2 [s ²]
τ_1	9.90 ± 0.01	$4.02 \cdot 10^{-3}$	τ_{51}	10.03 ± 0.01	$4.44 \cdot 10^{-3}$
τ_2	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$	τ_{52}	10.00 ± 0.01	$1.34 \cdot 10^{-3}$
τ_3	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$	τ_{53}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_4	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$	τ_{54}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_5	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{55}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$
τ_6	10.00 ± 0.01	$1.34 \cdot 10^{-3}$	τ_{56}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$
τ_7	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$	τ_{57}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$
τ_8	9.90 ± 0.01	$4.02 \cdot 10^{-3}$	τ_{58}	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$
τ_9	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{59}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{10}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{60}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$

τ_{11}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$	τ_{61}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$
τ_{12}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{62}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{13}	9.94 ± 0.01	$0.55 \cdot 10^{-3}$	τ_{63}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{14}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$	τ_{64}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$
τ_{15}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$	τ_{65}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$
τ_{16}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$	τ_{66}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$
τ_{17}	9.89 ± 0.01	$5.39 \cdot 10^{-3}$	τ_{67}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{18}	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$	τ_{68}	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$
τ_{19}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$	τ_{69}	10.06 ± 0.01	$9.33 \cdot 10^{-3}$
τ_{20}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$	τ_{70}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{21}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$	τ_{71}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$
τ_{22}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$	τ_{72}	9.94 ± 0.01	$0.55 \cdot 10^{-3}$
τ_{23}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$	τ_{73}	10.02 ± 0.01	$3.20 \cdot 10^{-3}$
τ_{24}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{74}	9.89 ± 0.01	$5.39 \cdot 10^{-3}$
τ_{25}	9.91 ± 0.01	$2.85 \cdot 10^{-3}$	τ_{75}	9.90 ± 0.01	$4.02 \cdot 10^{-3}$
τ_{26}	10.03 ± 0.01	$4.44 \cdot 10^{-3}$	τ_{76}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{27}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$	τ_{77}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$
τ_{28}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$	τ_{78}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{29}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$	τ_{79}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$
τ_{30}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$	τ_{80}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$
τ_{31}	9.89 ± 0.01	$5.39 \cdot 10^{-3}$	τ_{81}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{32}	9.91 ± 0.01	$2.85 \cdot 10^{-3}$	τ_{82}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{33}	9.95 ± 0.01	$0.18 \cdot 10^{-3}$	τ_{83}	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$
τ_{34}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$	τ_{84}	9.90 ± 0.01	$4.02 \cdot 10^{-3}$
τ_{35}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$	τ_{85}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{36}	9.87 ± 0.01	$8.72 \cdot 10^{-3}$	τ_{86}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$
τ_{37}	9.91 ± 0.01	$2.85 \cdot 10^{-3}$	τ_{87}	9.92 ± 0.01	$1.88 \cdot 10^{-3}$
τ_{38}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$	τ_{88}	9.86 ± 0.01	$1.069 \cdot 10^{-2}$
τ_{39}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$	τ_{89}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$
τ_{40}	10.04 ± 0.01	$5.87 \cdot 10^{-3}$	τ_{90}	10.03 ± 0.01	$4.44 \cdot 10^{-3}$
τ_{41}	10.05 ± 0.01	$7.50 \cdot 10^{-3}$	τ_{91}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{42}	10.09 ± 0.01	$1.603 \cdot 10^{-2}$	τ_{92}	10.04 ± 0.01	$5.87 \cdot 10^{-3}$
τ_{43}	9.93 ± 0.01	$1.12 \cdot 10^{-3}$	τ_{93}	9.90 ± 0.01	$4.02 \cdot 10^{-3}$

τ_{44}	10.04 ± 0.01	$5.87 \cdot 10^{-3}$	τ_{94}	9.98 ± 0.01	$0.28 \cdot 10^{-3}$
τ_{45}	9.97 ± 0.01	$0.04 \cdot 10^{-3}$	τ_{95}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$
τ_{46}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$	τ_{96}	9.91 ± 0.01	$2.85 \cdot 10^{-3}$
τ_{47}	9.87 ± 0.01	$8.72 \cdot 10^{-3}$	τ_{97}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{48}	10.00 ± 0.01	$1.34 \cdot 10^{-3}$	τ_{98}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$
τ_{49}	9.96 ± 0.01	$0.01 \cdot 10^{-3}$	τ_{99}	10.01 ± 0.01	$2.17 \cdot 10^{-3}$
τ_{50}	10.04 ± 0.01	$5.87 \cdot 10^{-3}$	τ_{100}	9.99 ± 0.01	$0.71 \cdot 10^{-3}$



17: Istogramma della distribuzione dei periodi quando $l_{filo} = 100 \text{ cm}$ e $\theta_0 = 5^\circ$

Istogramma

Diversi metodi per la scelta degli intervalli (mantenendo il limite $\Delta > 2\Delta V(G)$):

Nome del metodo	Radice quadra	Sturges	Rice	Scott	Freedman-Diaconis
# intervalli	$\text{ceil}(\sqrt{n})$	$\text{ceil}(\log_2 n) + 1$	$2\sqrt[3]{n}$	$\frac{\max G - \min G}{3.5 \frac{\sigma_G}{\sqrt[3]{n}}}$	$\frac{\max G - \min G}{2 \frac{IQR(G)}{\sqrt[3]{n}}}$
Δ	$\frac{\max G - \min G}{\text{ceil}(\sqrt{n})}$	$\frac{\max G - \min G}{\text{ceil}(\log_2 n) + 1}$	$\frac{\max G - \min G}{2\sqrt[3]{n}}$	$3.5 \frac{\sigma_G}{\sqrt[3]{n}}$	$2 \frac{IQR(G)}{\sqrt[3]{n}}$
Anno	?	1926	1944	1979	1981
	Metodo di scelta di EXCEL e altri tool	Ipotesi Binomiale	Alternativa a Sturges della Rice University	Ottimizzata sulla Normale	Come Scott, ma meno sensibile alle code

Ceil: parte intera superiore, nota anche come funzione ceiling (dalla parola inglese ceiling che significa "soffitto", contrapposta a floor, "pavimento"); per ogni numero reale x , $\text{ceil}(x)$ è il più piccolo intero non minore di x .

Interquartile range (IQR) e' l'intervallo centrale che contiene il 50% del campione (e non ha nessuna informazione sul restante 50%).

Istogramma

Diversi metodi per la scelta degli intervalli (mantenendo il limite $\Delta > 2\Delta V(G)$):

Nome del metodo	Radice quadra	Sturges	Rice	Scott
10	$\text{ceil}(\sqrt{n})$ $= \text{ceil}(3.16)$ $= 4$	$\text{ceil}(\log_2 n) + 1$ $= \text{ceil}(3.32)$ $+ 1 = 5$	$2\sqrt[3]{n} = 2 \cdot 2.15$ ≈ 4	$\frac{6}{3.5} \sqrt[3]{10} \approx 4$
100	10	$= \text{ceil}(6.64)$ $+ 1 = 8$	$2 \cdot 4.64 \approx 9$	$\frac{6}{3.5} \sqrt[3]{100} \approx 8$
1000	$\text{ceil}(31.6) = 32$	$= \text{ceil}(9.97)$ $+ 1 = 11$	$2 \cdot 10 = 20$	17
1000000	1000	$= \text{ceil}(19.93)$ $+ 1 = 21$	$2 \cdot 100 = 200$	170

Dalla “Introduction to Statistics”, Rice University: The best advice is to experiment with different choices of width, and to choose a histogram according to how well it communicates the shape of the distribution.

Istogramma

Limiti degli intervalli: aperti o chiusi?

Due opzioni

- A. ogni intervallo sarà aperto a sinistra e chiuso a destra.
- B. Ogni intervallo sarà aperto a destra e chiuso a sinistra

In entrambi i casi alcuni eventi saranno esclusi...

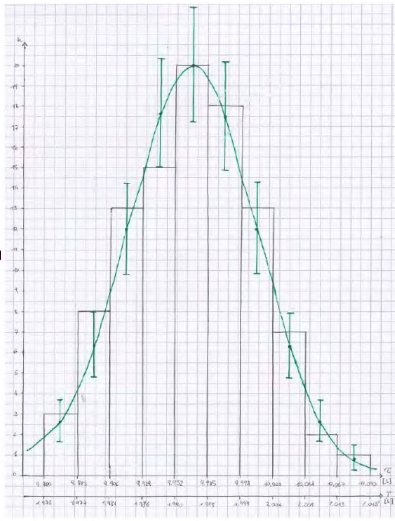
Interpretazione

- Un istogramma può a sua volta essere interpretato come la **rappresentazione sperimentale** di una funzione $f(M(G))$ che tiene conto del modo in cui gli effetti microscopici influiscono su $M(G)$.
- Poiché **non è semplice determinare in modo deduttivo la forma funzionale** della funzione f ci si può limitare (per ora) a darne una rappresentazione grafica, cercando poi 'ad occhio' una curva che riproduca la forma dell'istogramma.
- Si usa poi rappresentare sinteticamente il complesso dei valori di $M(G)$ per mezzo di due grandezze significative; date n misure queste sono:

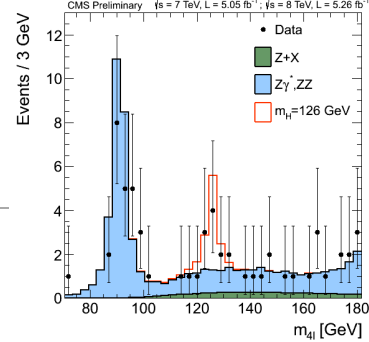
- La **media aritmetica** $\bar{M}(G) = \frac{1}{n} \sum_i M_i(G) \simeq \frac{1}{n} \sum_j n_j M_j(G)$
- La 'stima' della deviazione standard o scarto quadratico medio

$$\sigma_G = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_i (\bar{M}(G) - M_i(G))^2} \simeq \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_j n_j (\bar{M}(G) - M_j(G))^2}$$

Dove n è il numero totale di misure, $M_i(G)$ è la misura i -esima, n_j è il numero di misure che cade all'interno dell'intervallo j -esimo dell'istogramma e $M_j(G)$ è il valor medio della misura all'interno dell'intervallo j -esimo dell'istogramma.



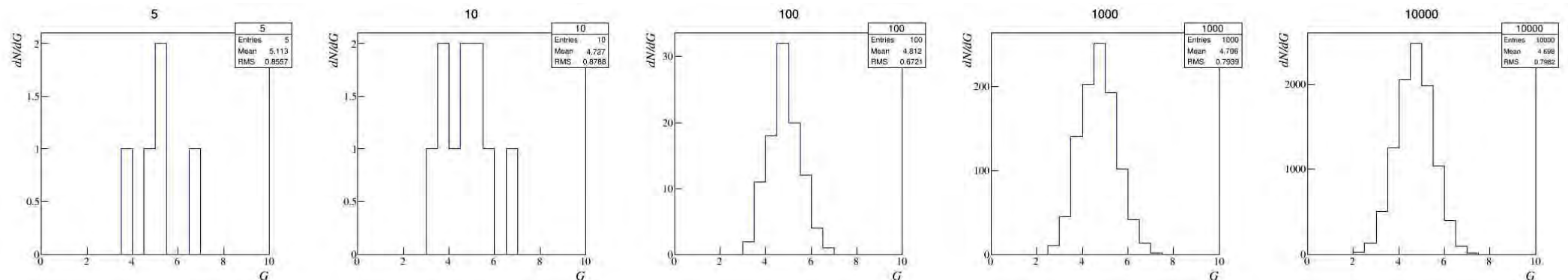
17: Isthogramma della distribuzione dei periodi quando $l_{fido} = 100$ cm e $\theta_0 = 5^\circ$



Errori casuali

Nel caso di non riproducibilità delle misure $V(G)$ può essere conosciuto solo con una certa indeterminazione chiamato **errore casuale** o meglio **‘incertezza statistica’**. Distinguiamo quindi tra:

- **Errori di sensibilità o massimi** : se ripetendo la stessa misura si ottiene sempre lo stesso (o 2) risultato allora $\Delta V(G)$ è molto maggiore della fluttuazione intrinseca di G e delle fluttuazioni prodotte dall'apparato di misura. Non si ha quindi nessuna informazione per valutare il valore medio o la deviazione standard. In questo caso $\Delta V(G)$ assume il **significato di errore massimo** ed il risultato dell'operazione di misura viene indicato con la stessa notazione usata per gli errori di sensibilità.
- **Incertezze statistiche o errori casuali**: nel caso (opposto) in cui $\Delta V(G) \ll \sigma_G$ si ottengono valori diversi ad ogni misura. Istogrammando le misure visualizzo un andamento dei dati che si avvicina sempre più alla funzione di distribuzione che descrive gli errori casuali al crescere del numero di misure effettuate (e tanto minore è $\Delta V(G)$ rispetto a σ_G). In questo caso σ_G è detta incertezza statistica (o errore statistico).



5.11 ± 0.86

4.73 ± 0.88

4.81 ± 0.67

4.71 ± 0.79

4.70 ± 0.80

Propagazione degli errori

Non è la stessa per errori casuali ed errori massimi.

Immaginiamo che una certa grandezza Y sia funzione generica delle n grandezze G_i :

$$Y = f(G_1, G_2, \dots, G_n)$$

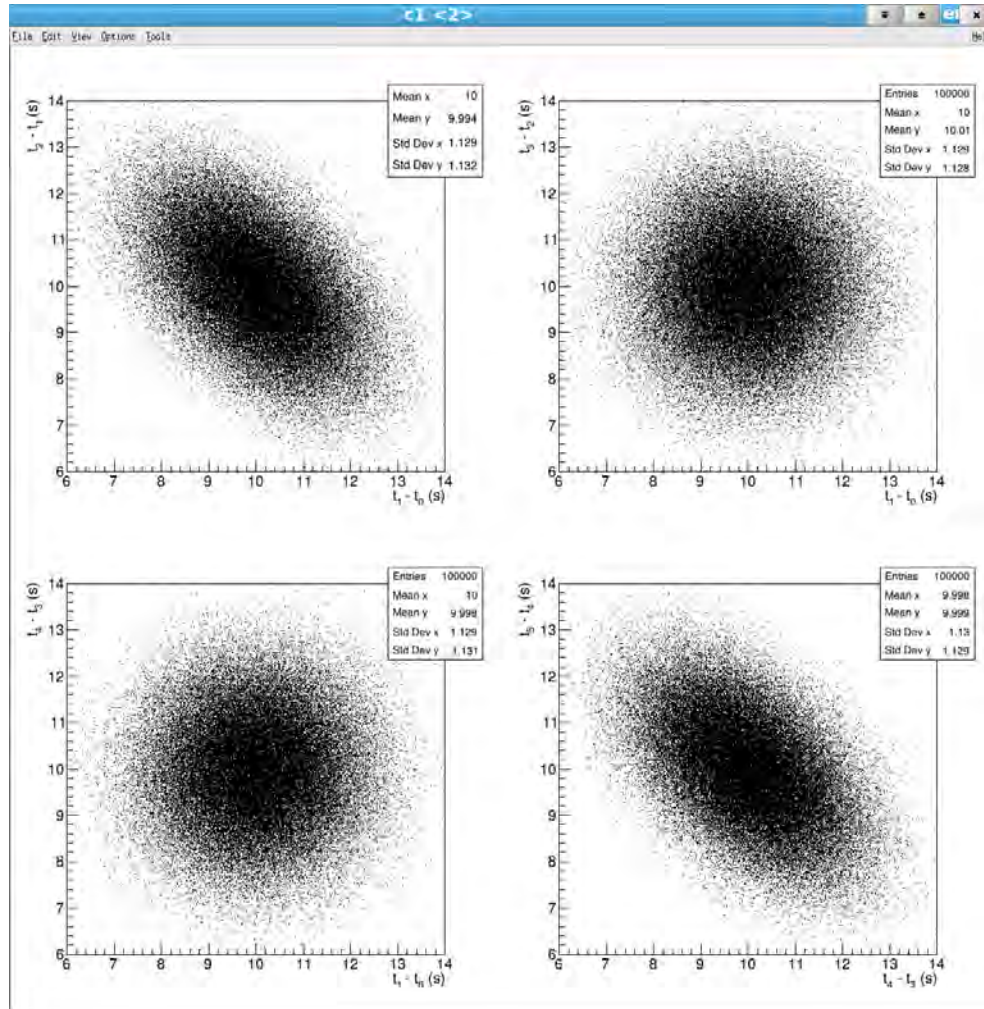
Si può ottenere una misura indiretta (o derivata) di Y inserendo le misure delle G_i , $M(G_i)$ nella corrispondente relazione:

$$M(Y) = f(M(G_1), M(G_2), \dots, M(G_n))$$

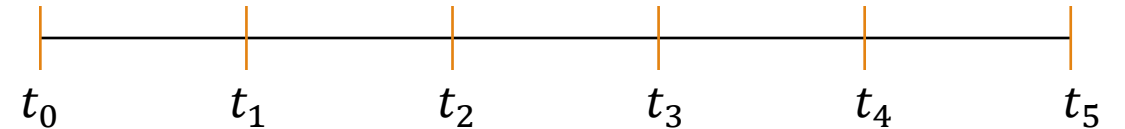
E gli errori sulle misure dei diversi G_i si ripercuotono sull'incertezza su Y . Sono possibili 3 casi (anche se al momento ci limitiamo al primo caso):

- Le incertezze sulle G_i sono indipendenti, ovvero l'errore su (ad esempio) G_1 non è influenzato dagli errori sugli altri G_i .
- Gli errori non sono indipendenti, ovvero l'errore sulla misura di (ad esempio) G_1 è in relazione con gli errori sugli altri G_i
- Gli errori sono 'correlati', ovvero c'è sia una componente dipendente ed una indipendente.

Correlazione



Faccio partire il cronometro all'istante 0 e misuro 5 successivi intervalli tra 5 oscillazioni del mio pendolo di lunghezza pari al metro ($T = 2.00 \text{ s} \Rightarrow \tau = 5T \approx 10 \text{ s}$).



La deviazione standard $\sigma_t \approx 0.8$ in ogni singola misura del tempo.

Misure successive sono anticorrelate, mentre non trovo nessuna correlazione tra misure non adiacenti

Propagazione degli errori massimi

È noto che il differenziale totale di una funzione di più variabili $y = f(x_1, \dots, x_n)$ è dato da:

$$dy = \sum_i \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \cdot dx_i$$

Che rappresenta l'infinitesima variazione di y per infinitesime variazioni degli x_i . Ho usato le derivate parziali indicate dal simbolo ∂ ; la loro definizione è la seguente:

$$\frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + \Delta x_i, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}$$

Ovvero, nelle derivate parziali di una funzione di più variabili viene fatto il limite del rapporto incrementale solo per la variabile rispetto al quale stiamo derivando, mentre le altre sono tenute (considerate) costanti. Non teniamo quindi in considerazione eventuali dipendenze di una variabile dalle altre.

Propagazione degli errori massimi

Una relazione analoga, anche se approssimata, vale per variazioni finite degli x_i , ma sufficientemente piccole

$$\Delta f \cong \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i$$

Come vediamo dalla relazione qui sopra i contributi possono essere sia positivi che negativi a seconda del valore della derivata.

Nella propagazione degli errori massimi, dal nome, prendiamo in esame i contributi nel modo più sfavorevole possibile. Diamo ai Δx_i il significato di errore di sensibilità dei nostri strumenti; sostituendo $M(G_i)$ a x_i ed attribuendo a $\Delta M(G_i)$ il significato di errori massimi, si può quindi ottenere l'errore massimo propagato sulla misura di Y , pur di assumere per i coefficienti di $\Delta M(G_i)$ solo valori positivi, in modo da combinare gli effetti nel più pessimistico dei modi:

$$\Delta M(Y) \cong \sum_i \left| \frac{\partial f}{\partial G_i} \right|_{\vec{G}=\vec{M}(\vec{G})} \cdot \Delta V(G_i)$$

Va tutto bene ? (vedremo a breve qualche paradosso)

Propagazione degli incertezze statistiche

Qualora le $M(G_i)$ siano affette da errori statistici, la deviazione standard σ_Y si può ricavare con buona approssimazione dalle deviazioni standard σ_{G_i} mediante l'espressione (**LEGGE DI PROPAGAZIONE DELLA VARIANZA**):

$$\sigma_Y^2 \cong \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial G_i} \right)_{\vec{G}=\vec{M}(\vec{G})}^2 \cdot \sigma_{G_i}^2$$

Troveremo più avanti giustificazione all'uso di questa espressione.

E nel caso in cui le diverse misure siano in parte affette da errori massimi ed in parte da errori statistici? **Di nuovo... daremo una risposta più avanti a questo interrogativo.**

Anticipazione: Significato probabilistico

Le leggi di propagazione degli errori che abbiamo visto si riferiscono a due condizioni opposte nelle nostre misure;

- Risoluzione degli strumenti dominante sugli effetti statistici.
- Effetti statistici dominanti sulla risoluzione degli strumenti di misura usati.

Vedremo più avanti che saremo in grado di associare due diverse funzioni di «densità di probabilità» (uniforme e Gaussiana) alla distribuzione degli errori. Vi anticipo comunque il diverso significato probabilistico che attribuiamo all'errore massimo Δx ed all'incertezza statistica σ_x :

- Δx : La probabilità che l'intervallo $[x_m - \Delta x, x_m + \Delta x]$ contenga il valore vero x_v è pari a 1 (100%).
- σ_x : La probabilità che l'intervallo $[x_m - \sigma_x, x_m + \sigma_x]$ contenga il valore vero x_v è pari a 0.68268 (68.3%)..

Anticipazione: Conversioni

- se la risoluzione di lettura è bassa più grande delle fluttuazioni statistiche, le fluttuazioni del valore misurato non sono apprezzabili, **domina l'incertezza "massima" dovuta alla risoluzione di lettura**. La trattazione statistica può comunque effettuata essere usando la distribuzione uniforme, che fornisce una deviazione standard

$$\sigma_x = \Delta x / \sqrt{3}$$

- Viceversa, si può passare dall'incertezza statistica dovuta a errori accidentali all'incertezza massima ponendo $\Delta x = 3\sigma_x$. Infatti, per le proprietà della funzione di Gauss, all'affermazione $x_1 - 3\sigma_x \leq a \leq x_1 + 3\sigma_x$ corrisponde una probabilità di 0.997, molto vicina a 1.

$$\Delta x = 3\sigma_x$$

Errori relativi

Per valutare l'entità dell'errore (in molti casi) è utile confrontarlo con la misura stessa, nel caso di errori massimi l'errore relativo è dato da, ed è adimensionale:

$$E_r = \frac{\Delta V(G)}{M(G)}$$

Si può anche introdurre l'errore percentuale:

$$E_{\%} = 100 \cdot E_r = 100 \frac{\Delta V(G)}{M(G)}$$

L'uso di errori relativi permette di confrontare l'impatto dell'errore sulla misura di diverse grandezze dirette su misure di grandezze derivate.

Errori relativi

Per misure indirette dominate da errori di sensibilità l'errore relativo si scrive come:

$$\frac{\Delta M(Y)}{|M(Y)|} \cong \sum_i \frac{\left| \frac{\partial f}{\partial G_i} \right|_{G_i=M(G_i)}}{|M(Y)|} \cdot \Delta V(G_i)$$

Per misure indirette dominate da incertezze statistiche, la legge di propagazione della varianza fornisce:

$$\frac{\sigma_Y^2}{Y^2} \cong \frac{1}{Y^2} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial G_i} \right)_{G_i=M(G_i)}^2 \cdot \sigma_{G_i}^2 = \sum_i \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial G_i} \right)_{G_i=M(G_i)}^2}{Y^2} \cdot \sigma_{G_i}^2$$

In particolari casi entrambi assumono un'espressione estremamente semplice.

Esempio propagazione errori massimi

Nel caso in cui la grandezza che vogliamo misurare è un prodotto di varie grandezze generiche indipendenti eventualmente elevate a diverse valori di potenze:

$$w = x^{\alpha} y^{\beta} z^{-\gamma}$$

L'errore massimo su w ottenuto mediante la legge di propagazione degli errori massimi è:

$$\begin{aligned}\Delta w &= \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial w}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial w}{\partial z} \right| \Delta z \\ &= \alpha x^{\alpha-1} y^{\beta} z^{-\gamma} \Delta x + \beta x^{\alpha} y^{\beta-1} z^{-\gamma} \Delta y + |-\gamma| x^{\alpha} y^{\beta} z^{-\gamma-1} \Delta z\end{aligned}$$

Interessante è per questi prodotti l'errore relativo:

$$\frac{\Delta w}{w} = |\alpha| \frac{\Delta x}{|x|} + |\beta| \frac{\Delta y}{|y|} + |\gamma| \frac{\Delta z}{|z|}$$

Somma dei diversi errori relativi pesata per la potenza!

Esempio propagazione della varianza

Nel caso in cui la grandezza che vogliamo misurare è un prodotto di varie grandezze generiche indipendenti eventualmente elevate a diverse valori di potenze:

$$w = x^{\alpha} y^{\beta} z^{-\gamma}$$

La varianza di w ottenuto mediante la legge di propagazione della varianza è:

$$\begin{aligned}\sigma_w^2 &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 \\ &= \alpha^2 x^{2(\alpha-1)} y^{2\beta} z^{-2\gamma} \sigma_x^2 + \beta^2 y^{2(\beta-1)} x^{2\alpha} z^{-2\gamma} \sigma_y^2 + \gamma^2 z^{-2(\gamma+1)} y^{2\beta} x^{2\alpha} \sigma_z^2\end{aligned}$$

Interessante è per questi prodotti l'errore relativo:

$$\frac{\sigma_w^2}{w^2} = \alpha^2 \frac{\sigma_x^2}{x^2} + \beta^2 \frac{\sigma_y^2}{y^2} + \gamma^2 \frac{\sigma_z^2}{z^2} = \alpha^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \dots$$

Somma delle varianze relative pesate per la potenza al quadrato!

Propagazione degli errori relativi di prodotti

Più in generale, dato:

$$y = \prod_i x_i^{\alpha_i}$$

L'errore relativo su y è semplicemente dato da:

$$\frac{\Delta y}{y} = \sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{|x_i|} \quad \text{o} \quad \frac{\sigma_y^2}{y^2} = \sum_i \alpha_i^2 \cdot \left(\frac{\sigma_{x_i}}{x_i} \right)^2$$

Uno dei vantaggi di questa scrittura, oltre alla facilità di calcolo, è quello di poter valutare in modo immediato l'errore di misura dominante e quali sono viceversa i termini che possono essere trascurati. L'errore massimo su y può essere ottenuto da:

$$\Delta y = y \cdot \left(\sum_i |\alpha_i| \cdot \frac{\Delta x_i}{|x_i|} \right)$$

PS: per le somme questa 'fattorizzazione' non avviene:

$$y = \sum_i x_i^{\alpha_i} \Rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \sum_i \frac{|\alpha_i x_i^{\alpha_i-1}|}{|\sum_j x_j^{\alpha_j}|} \cdot \Delta x_i$$

Esempi:

Misura della circonferenza di un cilindro $C = \pi D$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta C = \left| \frac{\partial C}{\partial D} \right| \Delta D = \pi \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔC direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di C e quello minimo:

$$\Delta C = \frac{1}{2} [\pi(D + \Delta D) - \pi(D - \Delta D)] = \pi \Delta D$$

Avrei ottenuto esattamente la stessa cosa.

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{\pi \Delta D}{\pi D} = \frac{\Delta D}{D}$$

Esempi:

Misura della sezione di un cilindro $S = \pi D^2/4$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial D} \right| \Delta D = \frac{\pi D}{2} \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di S e quello minimo:

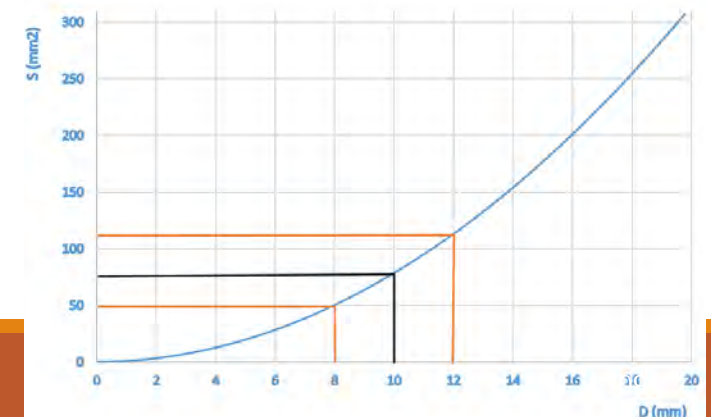
$$\Delta S = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} [(D + \Delta D)^2 - (D - \Delta D)^2] = \frac{\pi}{8} [4D\Delta D] = \frac{\pi D}{2} \Delta D$$

Avrei ottenuto esattamente lo stesso valore; ma qual è il valore delle due semidifferenze?

$$\Delta S_u = \frac{\pi}{4} [(D + \Delta D)^2 - D^2] = \frac{\pi D \Delta D}{2} + \frac{\pi (\Delta D)^2}{4} \quad \Delta S_d = \frac{\pi}{4} [D^2 - (D - \Delta D)^2] = \frac{\pi D \Delta D}{2} - \frac{\pi (\Delta D)^2}{4}$$

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\pi D \Delta D / 2}{\pi D^2 / 4} = 2 \frac{\Delta D}{D}$$



Esempi:

Misura della superficie di una sfera $S = 4\pi D^2$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

$$\Delta S = \left| \frac{\partial S}{\partial D} \right| \Delta D = 8\pi D \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di S e quello minimo:

$$\Delta S = \frac{1}{2} 4\pi [(D + \Delta D)^2 - (D - \Delta D)^2] = 2\pi [4D\Delta D] = 8\pi D \Delta D$$

Avrei ottenuto esattamente lo stesso valore ma nuovamente.

$$\Delta S^+ = \frac{4\pi}{2} [(D + \Delta D)^2 - D^2] = \frac{4\pi}{2} [2D\Delta D + \Delta D^2] \quad \Delta S^- = \frac{4\pi}{2} |2D\Delta D - \Delta D^2|$$

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{8\pi D \Delta D}{4\pi D^2} = 2 \frac{\Delta D}{D}$$

Esempi:

Misura del volume di una sfera $V = \pi D^3/6$ il valore di del diametro dato da $D \pm \Delta D$. Per la legge che abbiamo visto:

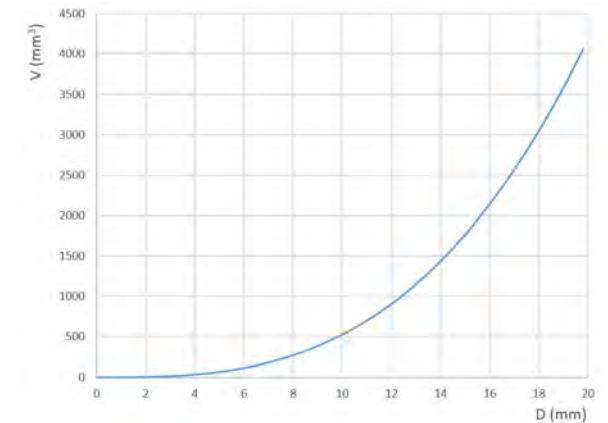
$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial D} \right| \Delta D = \frac{\pi D^2}{2} \Delta D$$

Se avessi calcolato ΔS direttamente dalla semidifferenza tra il possibile valore massimo di C e quello minimo:

$$\Delta V = \frac{1}{2} \frac{\pi}{6} [(D + \Delta D)^3 - (D - \Delta D)^3] = \frac{\pi}{12} [6D^2\Delta D + 2\Delta D^3] = \frac{\pi(3D^2\Delta D + \Delta D^3)}{6} \approx \frac{\pi D^2}{2} \Delta D$$

L'errore relativo è in questo caso pari a:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\pi D^2 \Delta D / 2}{\pi D^3 / 6} = 3 \frac{\Delta D}{D}$$



E per valori misurati $\approx$ risoluzione?

Pensiamo di dover misurare la differenza tra due spessori (una lastra da 2 mm ed una da 1 mm): $d = h_1 - h_2$ misurati con un metro lineare ($\Delta h = 0.5$ mm). L'errore su d è dato da:

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial h_1} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{\partial d}{\partial h_2} \right| \Delta h_2 = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 2\Delta h$$

Con un risultato per d che è:

$$1.0 \pm 1.0 \text{ mm}$$

Dovremmo quindi dire «le misure sono uguali entro gli errori!»

Per inciso per la somma $d = h_1 + h_2$

$$\Delta d = \left| \frac{\partial d}{\partial h_1} \right| \Delta h_1 + \left| \frac{\partial d}{\partial h_2} \right| \Delta h_2 = \Delta h_1 + \Delta h_2 = 2\Delta h$$

Stesso errore!

Cifre significative

Si chiamano cifre significative le cifre lette della misura di una grandezza fisica. Dipendono dalla sensibilità dello strumento.

- Tutti i valori non nulli rappresentano cifre significative.
- Gli zeri compresi tra cifre non nulle sono cifre significative.
 - esempio: gli zeri in verde (tutti) sono significativi 4506002
- Gli zeri che precedono la prima cifra significativa (cifra non nulla) non sono cifre significative.
 - esempio: in 0.0012, gli zeri (in rosso) non sono cifre significative (il numero in questione ha due sole cifre significative)
- Gli zeri finali sono significativi solo se presente la virgola (o punto decimale in inglese).
 - esempio: in 13900 gli zeri in rosso non sono significativi, ma in 13900. tutti gli zeri (in verde) sono significativi
 - Nel primo caso è utile l'uso della notazione scientifica 1.39×10^4

Cifre significative in operazioni

Per addizioni e sottrazioni Il numero risultante ha lo stesso numero di cifre decimali del numero a minor numero di cifre decimali.

$$20.12 + 102.423 = 122.54$$

Per moltiplicazioni e divisioni il numero risultante (prodotto) ha lo stesso numero di cifre significative del fattore con il minor numero di cifre significative.

$$10. \times 3.1415926 = 31.$$

- Nei calcoli manteniamo una o due cifre significative in più rispetto al risultato finale.
- Nelle misure indirette il numero di cifre significative è definito dall'errore associato alla misura

Cifre significative

Regole per l'arrotondamento

Per semplicità, nei calcoli intermedi mantenere tutte le cifre e arrotondare i valori finali al numero richiesto (corretto) di cifre significative.

L'arrotondamento va effettuato, di norma, prendendo in considerazione solamente la prima cifra oltre l'ultima significativa (chiamiamola "extra").

- se tale cifra è minore o uguale a 4, il valore dell'ultima cifra significativa rimane inalterato.
- se è maggiore di 5, il valore dell'ultima cifra significativa deve essere incrementato di una unità.
- se è 5 seguito da un numero maggiore di zero si opera come il caso precedente.
- se è 5 seguito solo da un certo numero di zeri senza altre cifre, caso estremamente particolare, il valore precedente viene arrotondato al numero pari più vicino.
 - 0.375000 viene arrotondato a 0.38
 - 0.365000 viene arrotondato a 0.36

Incertezze di misura e cifre significative

Si definiscono cifre significative del risultato di una misura le cifre certe e la PRIMA cifra incerta. Ovvero l'incertezza di una misura DEVE essere espressa con UNA cifra significativa.

E' tollerato, per avere una precisione maggiore sull'errore, l'uso di 2 cifre significative sull'errore. In questo caso si aumenta di un'unità le cifre significative della misura.

Esempi:

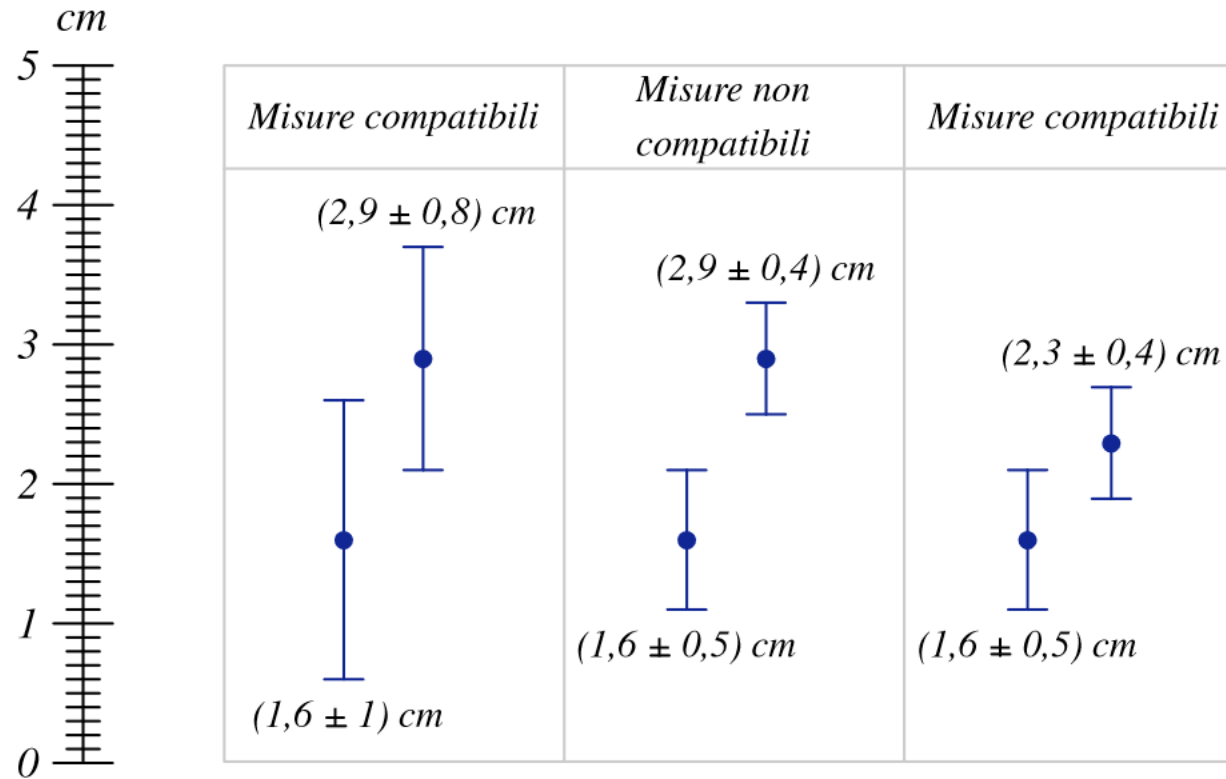
Misura	Risultato	Notazione scientifica	Risultato II
112859 ± 6240	113000 ± 6000	$(1.13 \pm 0.06) \times 10^5$	$(1.129 \pm 0.062) \times 10^5$
731 ± 23	730 ± 20	$(7.3 \pm 0.2) \times 10^2$	$(7.31 \pm 0.23) \times 10^2$
1096 ± 364	1100 ± 400	$(1.1 \pm 0.4) \times 10^3$	$(1.10 \pm 0.36) \times 10^3$
7.853 ± 0.482	7.9 ± 0.5		7.85 ± 0.48
2.9555 ± 0.06268	2.96 ± 0.06		2.956 ± 0.062
3.0524 ± 0.0148	3.05 ± 0.01		3.052 ± 0.015
3.0537 ± 0.0034	3.054 ± 0.003		3.0537 ± 0.0034

Compatibilità

Un altro concetto importante riguarda la **compatibilità di due misure affette da errori di risoluzione (o due misure indirette affette da errori massimi)**

- Due misure si dicono compatibili **se esiste un valore che rientra in entrambi gli intervalli** delle misure; ovvero se l'intersezione tra gli intervalli è non nulla.
- Ad esempio
 - le due misure $10\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 2.5\text{ cm}$ sono compatibili, perché le misure tra 8 cm e 9.5 cm soddisfano entrambi gli intervalli
 - Le due misure $10\text{ cm} \pm 1\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 1.5\text{ cm}$ non sono compatibili, perché la prima indica che la misura vera al minimo vale 9 cm , mentre la seconda dice che al massimo vale 8.5 cm
- **La differenza tra le migliori stime delle due misure si dice discrepanza.** Ad esempio
 - Tra $10\text{ cm} \pm 2\text{ cm}$ e $7\text{ cm} \pm 2.5\text{ cm}$ la discrepanza è di 3 cm
- Trovare due misure non compatibili rappresenta un problema: sicuramente c'è stato un errore nel processo di misurazione
 - In alcuni casi, potrebbe essere stata semplicemente sottostimata l'incertezza
 - In questi casi potrebbe essere necessario scartare le vecchie misure, individuare l'errore e ripetere le misurazioni dall'inizio

Esempio



Precisione e compatibilità

- In un esperimento quindi è necessario innanzitutto eseguire misurazioni in modo che il margine di errore sia minimo, ma occorre valutare attentamente quale sia l'errore massimo che possiamo ottenere
- In caso contrario, da un lato si rischia di ottenere misure poco significative (con margini di errore troppo grandi), dall'altro si potrebbero ottenere misure incompatibili che invalidano l'esperimento

ESPERIENZE CON STRUMENTI DI MISURA

Calibro ventesimale

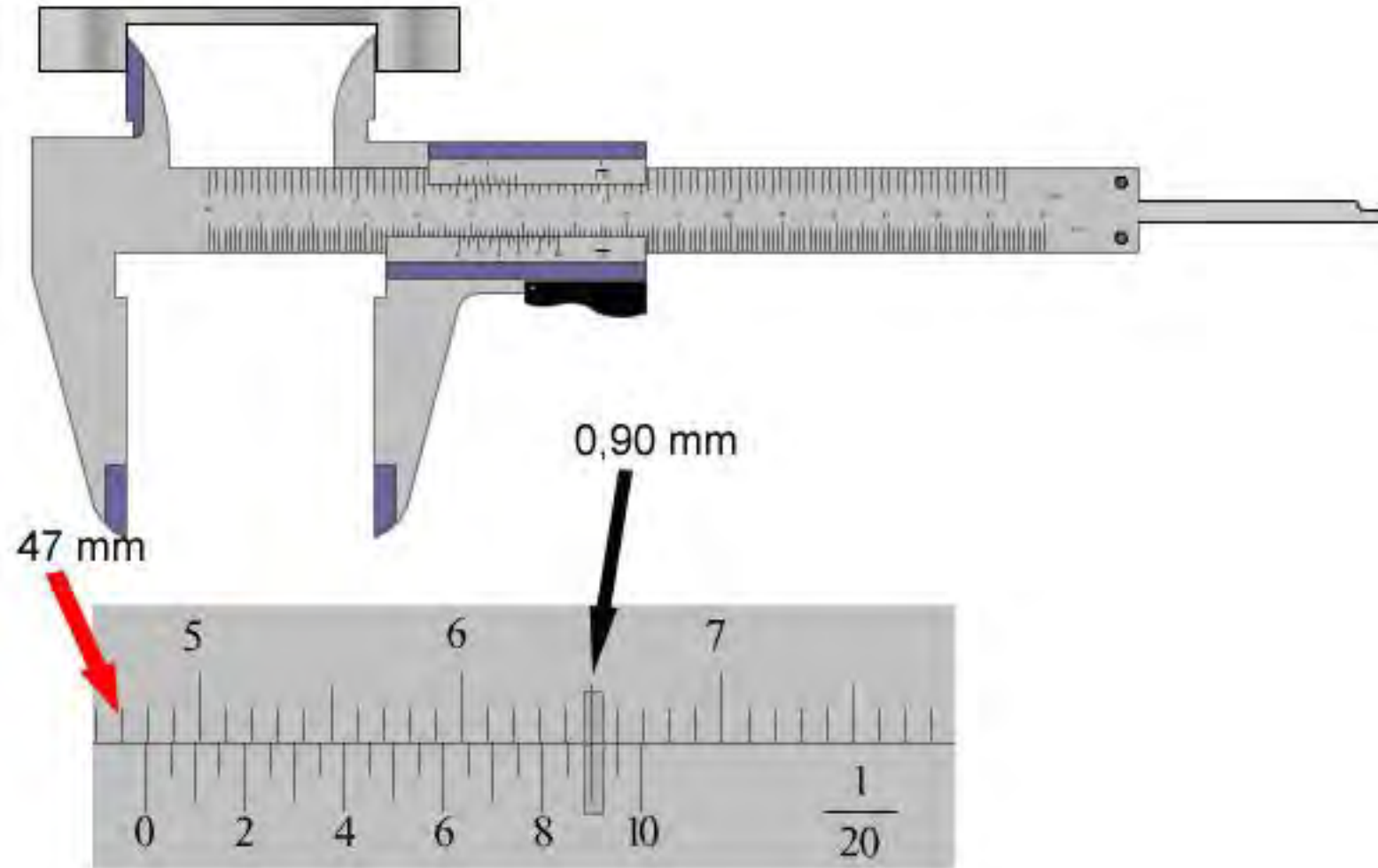
Il calibro è uno strumento realizzato in acciaio inossidabile ben lavorato meccanicamente e costituito da un **regolo** (fisso) sul quale può scorrere un cursore detto **nonio**.



Nel calibri del laboratorio 20 divisioni della scala del nonio d , corrispondono a 39 divisioni della scala principale D in millimetri. Ovvero **1 divisione del nonio misura $39/20$ di mm**, pari a 1.95 mm.

Se il nonio viene spostato in avanti di una distanza pari a $\delta = 2D - d = 0.05$ mm, allora la prima tacca del nonio coinciderà ($0.05 + 1.95 = 2.00$ mm) con la seconda tacca della scala principale; se il nonio si sposta di una quantità pari a $2\delta = 0.10$ mm allora la seconda tacca del nonio coinciderà con la quarta tacca della scala principale e così via, riazzerando la scala di lettura del nonio ad ogni millimetro della scala principale.

Calibro ventesimale, esempio di lettura



Calibro digitale

In questo tipo di calibro, sul corsoio viene montato un indicatore elettronico digitale che ne rileva lo spostamento, mentre sul corpo viene normalmente incisa una scala millimetrata, usata però solo per la verifica grossolana dello strumento elettronico.

I display sono normalmente realizzati con una **risoluzione 0,01 mm**.

Sono dotati indicatori miniaturizzati e dal consumo molto basso.

Gli indicatori possono disporre di numerose funzioni:

- visualizzazione sia di letture metriche, che inglesi;
- azzeramento della lettura in un punto arbitrario;
- settaggio arbitrario di una quota;
- collegamento seriale con un PC

I calibri vengono costruiti in modo che lo strumento dia la massima precisione alla temperatura standard di 20 °C. Misurazioni effettuate a temperature significativamente più alte, e con strumenti di grande risoluzione, devono tenere conto della dilatazione del materiale con cui è costruito il calibro stesso.



Calibro digitale

Il rilevamento di tipo capacitivo è solitamente impiegato per i commutatori di tipo tattile, dove il dito dell'utente svolge il ruolo della seconda armatura del condensatore.

Ma l'uso del rilevamento capacitivo non è limitato ai commutatori on/off e il calibro digitale ne è un classico esempio.

Più di 40 anni fa [Ingvar Andermo](#), un ingegnere elettrico che lavorava presso l'istituto di ricerca IM di Stoccolma, stava lavorando a un'applicazione per la lettura di banconote utilizzando la tecnologia capacitiva.

C.E. Johansson contattò Andermo per lo sviluppo di un calibro digitale utilizzando la tecnologia magneto-resistiva, ma Andermo ritenne quell'approccio troppo complicato e decise di sfruttare la sua esperienza nel campo del rilevamento capacitivo.

[Il primo calibro prodotto da Johansson fece il suo debutto durante un'esposizione a Chicago nel 1980.](#) Più tardi Johansson cedette in licenza la tecnologia alla giapponese [Mitutoyo](#) che alcuni anni dopo commercializzò il suo primo calibro digitale, venduto in tutto il mondo in milioni di unità

Calibro digitale

[7] Specifiche tecniche

Risoluzione: 0.01mm

Ripetibilità: 0.01mm

Precisione:

Dimensione misura	Precisione
450mm (18"), 600mm (24")	$\pm 0.05\text{mm}$ ($\pm .002''$)
500mm (20"), 750mm (30")	$\pm 0.06\text{mm}$ ($\pm .0025''$)
1000mm (40")	$\pm 0.07\text{mm}$ ($\pm .003''$)

Massima velocità di risposta : Illimitata (A causa della velocità del corsoio non risulterà il conteggio errato)

Alimentazione : 1 pila SR44 (ossido d'argento)

Durata della batteria : 3.5 anni in condizioni di normale impiego

Temperatura di funzionamento : da 0°C a 40°C

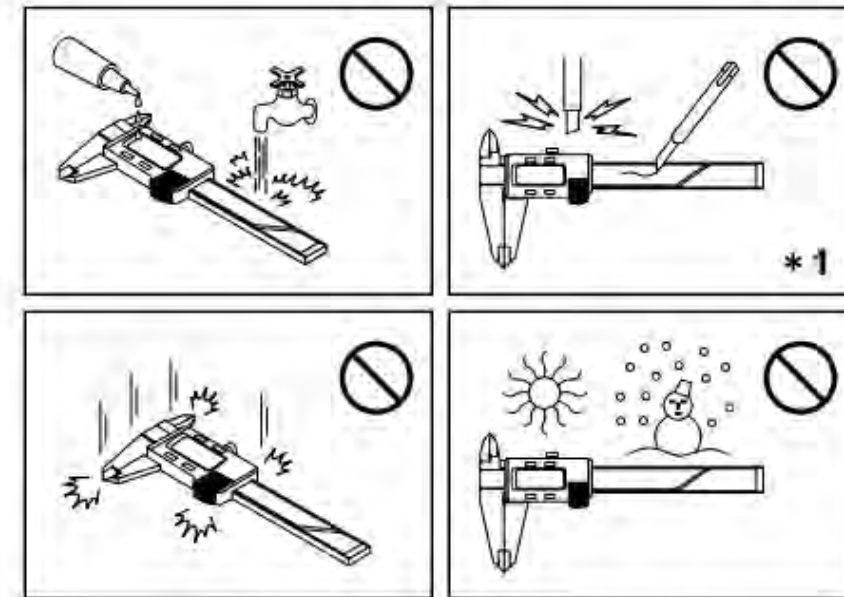
Temperatura di immagazzinamento : da -10°C a 60°C

[8] Assegnazione connettore pin

[9] Formato uscita dati

- | | | |
|---------------------|----------------------|-----------|
| (1) Ordine d'uscita | (2) Tutte "F" (1111) | (3) Segno |
| (4) Dati misurati | (5) Punto decimale | (6) Unità |

デジマチック



1

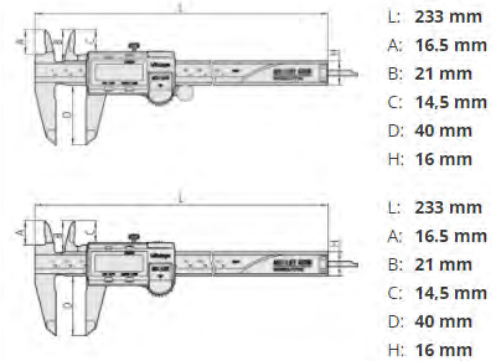
2 6 12 10 13 9 8 4 5

Calibro digitale

Caratteristiche

Campo:	0 - 150 mm
Asta di profondità:	piatta
Uscita dati:	Si
Massa:	168 g
Risoluzione:	0,01 mm
Display:	Altezza caratteri LCD 9 mm
Max. velocità di risposta:	Illimitata
Durata batteria:	Circa 18000 ore
Dotazioni:	Completo di astuccio, 1 batteria
ON/OFF:	Si
ZERO / ABS:	Si
ORIGINE:	Si
Allarme basso voltaggio:	Si
Digitale / Analogico:	Digitale
Pollici - Metrici:	Millimetri
Accuratezza:	±0,02 mm
Funzioni:	Becchi per interni ed esterni riportati in metallo duro

Dimensioni



Micrometro Palmer o calibro centesimale

Stesso principio: scala principale, divisa in 0.5(1.0) mm solidale e scala secondaria, sulla parte rotante divisa in 50(100) parti. E' costituito da una vite micrometrica di estrema precisione con passo di 0.5(1.0) mm. La vite termina in un tamburo graduato suddiviso come detto in 50(100) parti. La risoluzione del calibro è quindi di $0.5/50 = 1.0/100 = 0.01$ mm

Sfrutta come amplificatore una vite: poiché ad ogni giro la punta della vite avanza di una lunghezza pari al passo, suddividendo in più parti l'angolo giro è possibile ottenere, con passi piccoli e suddivisioni angolari numerose, elevatissime sensibilità

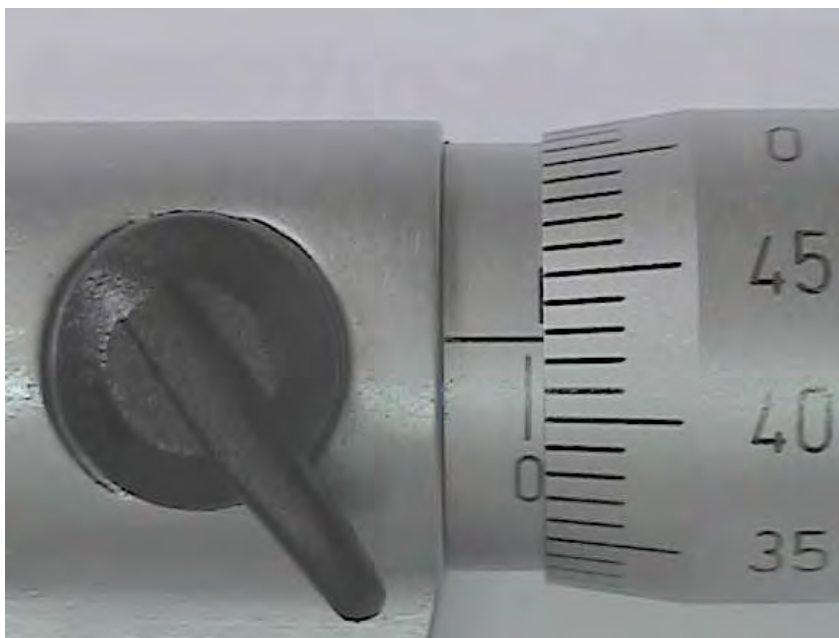


Micrometro Palmer

- Lettura dello strumento: attenzione alla scala principale: lo sbaglio più frequente è di contare un passo in più o in meno in corrispondenza dei valori sul tamburo prossimi allo zero.
- Prestate attenzione agli errori sistematici. Sforzando eccessivamente la vite a fine corsa si può provocare una deformazione della struttura dello strumento provocando uno spostamento sistematico dello zero: errore di zero.
- Un uso corretto richiede che si calcoli la media aritmetica di almeno una decina di misure effettuate a sollecitazione nulla. Il valore ottenuto va sottratto a tutti i valori letti.
- Qualora fosse necessario si potrebbe invece eseguire un azzeramento dello strumento. Questa operazione consiste nel modificare lo strumento ruotando la madre vite all'interno della struttura per spostarla fino ad annullare lo zero dello strumento.
- Per controllare la pressione esercitata sull'oggetto in misura dalla punta della vite micrometrica, la parte finale del tamburo è dotata di un meccanismo "a frizione". In prossimità del valore finale è anche necessaria una bassa velocità di rotazione del tamburo per evitare che l'energia cinetica acquisita dal tamburo consenta di superare la pressione che sarebbe stata regolata dalla frizione.

Micrometro Palmer

$0.427 \pm 0.002 \text{ mm}$



[5] SPECIFICHE TECNICHE

1. Specifiche tecniche di ciascuna serie

- *1: L'errore strumentale viene determinato a 20°C ad esclusione dell'errore di quantizzazione (± 1 digit). Il valore è stato arrotondato. L è la lunghezza massima di misurazione (mm/pollici).
- *2: Il diametro minimo di un foro in cui è possibile inserire l'incudine cambia per i modelli della serie 395. (BMB1-MJ: Φ 2mm, BMB2-MJ: Φ 3.6mm, BMB3-MJ: Φ 4.8mm, BMB4-MJ: Φ 8.2mm)

2. Specifiche tecniche comuni

- | | |
|--------------------------|---|
| Risoluzione | : 0,001mm (0,00005") |
| Errore di quantizzazione | : ± 1 digit |
| Display | : LCD (6 cifre e un segno meno) |
| Alimentazione | : cella ossido di argento (SR44), 1 pezzo |
| Durata batteria | : 1,2 anni |
| Temperatura | : da 5°C a 40°C (funzionamento), da -10°C a 60°C (immagazzinamento) |
| Accessori standard | : chiave (code. 301336) |
- Asta standard di azzeramento (per intervalli di misurazione di 25mm/1" o superiori)
- Livello di protezione IP-65 (per maggiori dettagli, fare riferimento a IEC60529).
- Protezione dalla polvere (livello 6) : proteggere l'attrezzatura dalla penetrazione della polvere.
 - Protezione dagli spruzzi d'acqua (livello 5) : proteggere l'attrezzatura dagli spruzzi d'acqua da ogni direzione.

I esperienza in laboratorio

Misura della superficie e del volume di vari oggetti e calcolo del rispettivo errore di misura.

Bisogna verificare che:

- Le misure siano dominate dalla risoluzione degli strumenti
- Le tolleranze di realizzazione degli oggetti siano inferiori alla risoluzione degli strumenti usati
- La taratura degli strumenti sia corretta

Esperienza I

Esperienza 1

Misura della densità di due corpi di forma regolare

Scopo

- uso dei calibri per la misura delle dimensioni
- misura indiretta dei volumi e delle densità
- confronto delle densità dei due oggetti scelti

Strumentazione a Disposizione

- metro a nastro, per una prima misura delle dimensioni del corpo
- calibro a cursore ventesimale, per una miglior determinazione delle dimensioni
- calibro Palmer, per una misura più precisa delle dimensioni
- bilancia elettronica/bilancia di precisione per la misura della massa

Volume dei corpi

1. Operazioni Preliminari

- 1.1. determinarne l'intervallo di funzionamento e gli errori di sensibilità degli strumenti a disposizione per le misure delle lunghezze
- 1.2. verificare l'azzeramento del calibro a cursore e del calibro Palmer
- 1.3. stabilire la formula appropriata per la determinazione del volume del corpo in funzione delle sue dimensioni lineari e ottenete l'espressione del corrispondente errore utilizzando le leggi di propagazione degli errori massimi assoluti e relativi

2. Dimensioni e Volume dei corpi

- 2.1. misurare una volta le diverse dimensioni lineari che intervengono nella formula che esprime il volume del corpo utilizzando per ogni dimensione, successivamente, gli strumenti di misura nell'ordine dell'errore di sensibilità decrescente. Verificare la compatibilità dei valori ottenuti.
- 2.2. con lo strumento di sensibilità maggiore ripetere almeno 5 volte l'operazione di misura "nello stesso punto" e altrettante in punti diversi; stabilire il valore da utilizzare (ed il corrispondente errore) per la misura dei volumi e motivate la scelta
- 2.3. determinate il volume e stimate il corrispondente errore utilizzando le misure ottenute

Massa dei corpi

3. determinare la sensibilità della bilancia di precisione
4. determinare la massa dei corpi con la bilancia di precisione
5. determinate la massa dei corpi con la bilancia elettronica

Densità dei corpi

- 4.1 scrivere la formula che lega la densità media di un corpo alla sua massa ed al suo volume, e il corrispondente errore utilizzando le leggi di propagazione degli errori massimi assoluti e relativi
- 4.2 determinate la densità dei corpi ed i corrispondenti errori
- 4.3 verificare se le densità misurate sono compatibili con quelle dei materiali più diffusi e se sono compatibili tra loro

nome
data esperienza

Risultati dell'Esperienza 1 Misura della densità di due corpi di forma regolare (O1 e O2)

Strumenti di misura	intervallo di funz.	errore di sensibilità	azzeramento
metro lineare			
calibro <u>vent.</u>			
calibro <u>dig.</u>			
calibro Palmer			
calibro Palmer <u>dig.</u>			

O1
disegno schematico
con indicate le dimensioni misurate per determinarne il volume
formula per il volume e l'errore

dimensioni	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl
metro			
calibro <u>vent.</u>			
calibro <u>dig.</u>			
calibro Palmer			
calibro Palmer <u>dig.</u>			

compatibili?

ulteriori misure nello stesso punto e in punti diversi					
11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

valori usati per determinare il volume

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

motivazione:

Volume di O1 ed errore:

Massa di O1:

Densità di O1
Formula usata per la densità e l'errore (assoluto e relativo):
Risultato:

O2
disegno schematico
con indicate le dimensioni misurate per determinarne il volume
formula per il volume e l'errore

dimensioni	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl
metro			
calibro <u>vent.</u>			
calibro <u>dig.</u>			
calibro Palmer			
calibro Palmer <u>dig.</u>			

compatibili?

ulteriori misure nello stesso punto e in punti diversi					
11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl	11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

valori usati per determinare il volume

11 ± Δl	12 ± Δl	13 ± Δl

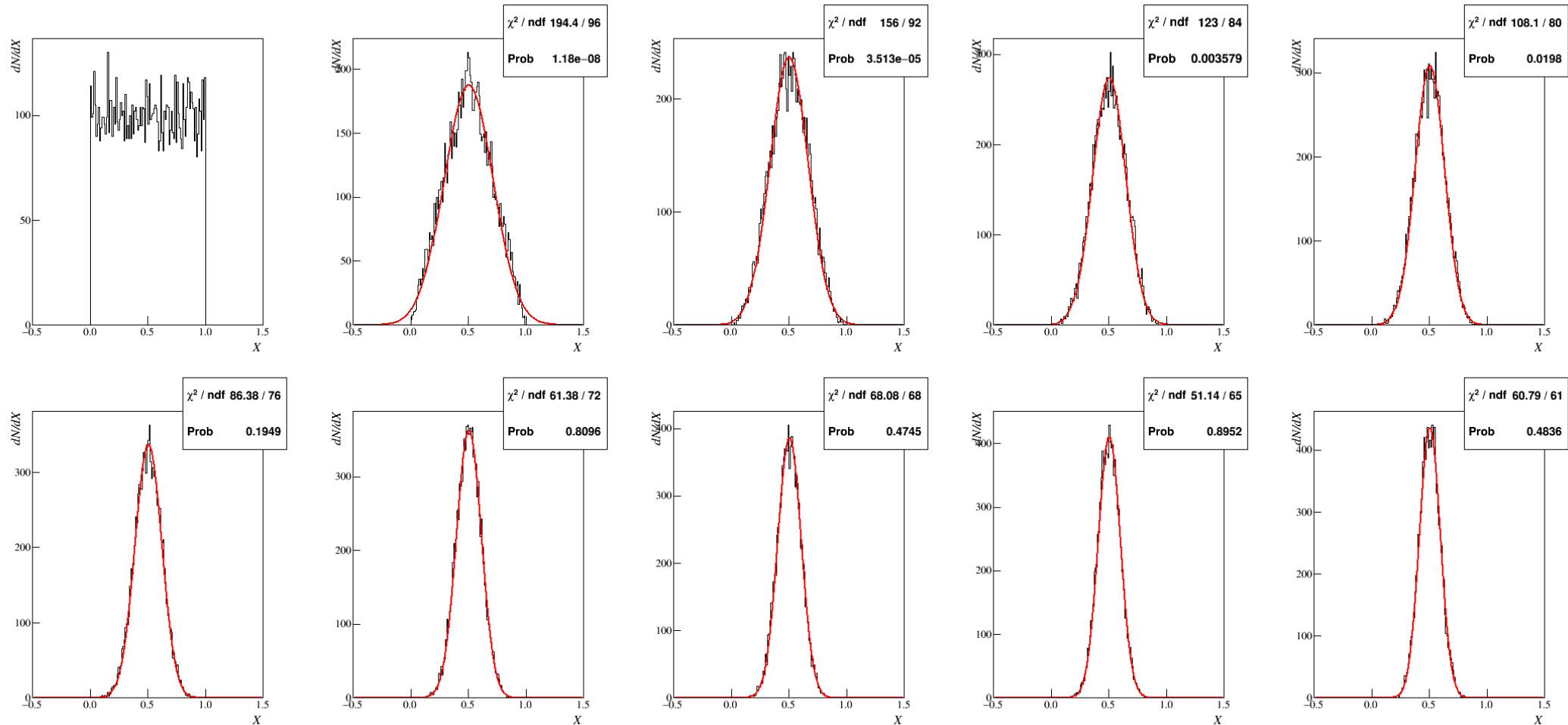
motivazione:

Volume:

Massa di O2:

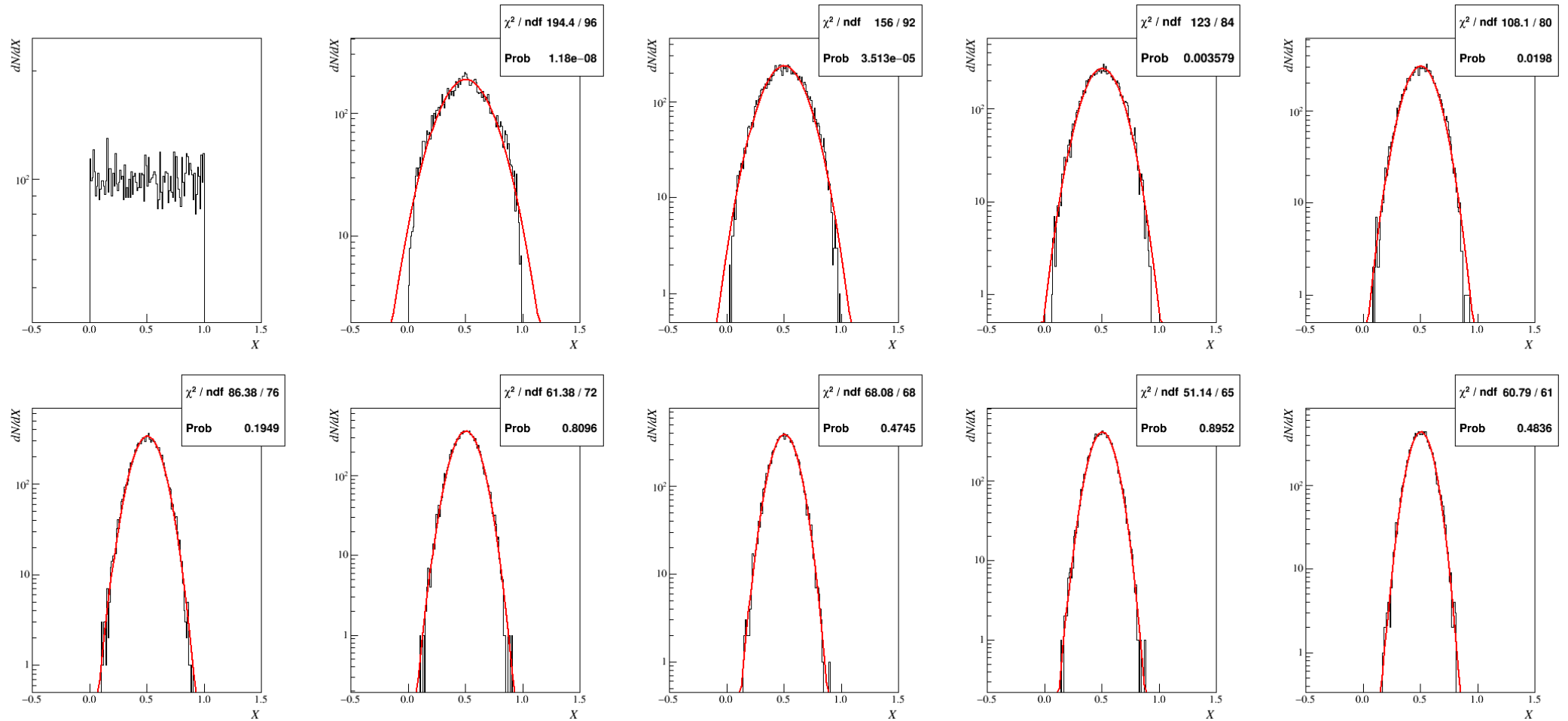
Densità di O2
Formula usata per la densità e l'errore (assoluto e relativo):

Importanza della Gaussiana: Limite centrale



La media di N variabili casuali R_n converge ad una distribuzione Gaussiana, indipendentemente dalle distribuzioni di origine

Limite centrale



Statistica: che cosa dobbiamo imparare

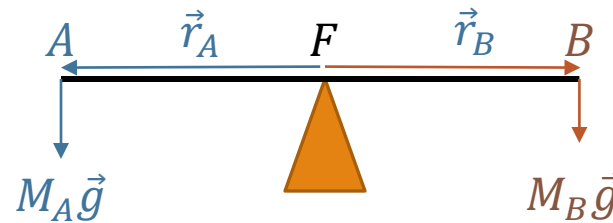
- Distribuzione degli errori casuali: Gaussiana (centrata in 0)
- Distribuzione delle misure affette da errori casuali: Gaussiana (centrata in μ)
 - Stima di μ : $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
 - Stima di σ del campione: $\hat{\sigma}_{\mu}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$
 - Stima di σ della media: $\hat{\sigma}_{\hat{\mu}}^2 = \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2$
- Media pesata per misure con stesso valore di aspettazione ma varianze diverse
- Variabili aleatorie, funzioni di variabili aleatorie (indipendenti)
 - $\mu_y \cong y(\mu_{x_1}, \mu_{x_2}, \dots, \mu_{x_n}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \sigma_{x_k}^2$
 - $\sigma_y^2 \cong \sum_{k=1}^n \left(\left[\frac{\partial y}{\partial x_k} \right]_{\vec{x}=\vec{\mu}_x} \right)^2 \sigma_{x_k}^2$
- Significato probabilistico del risultato e compatibilità di misure affette da errori casuali

Bilancia analitica

Principio di funzionamento

Si tratta di uno strumento che consente il confronto diretto della massa incognita con un corpo con massa campione.

Nella forma 'idealizzata' può essere costruita sospendendo il corpo in misura all'estremità **A** di una barra rigida detta **giogo** libera di ruotare intorno ad un asse orizzontale **F** detto **fulcro**, ed all'altra estremità **B** la massa campione



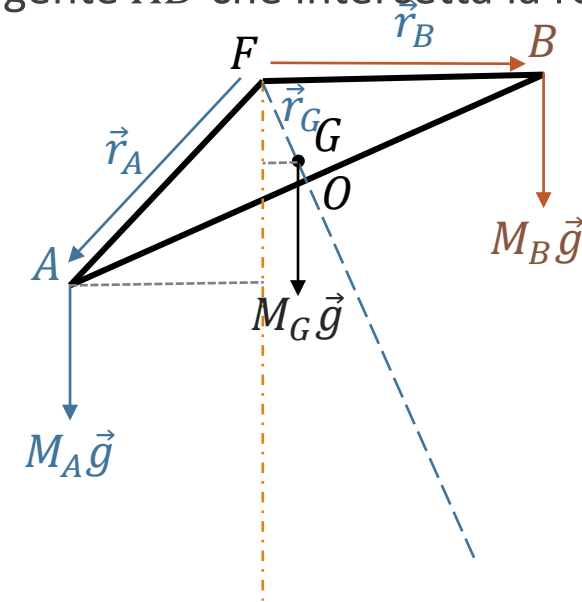
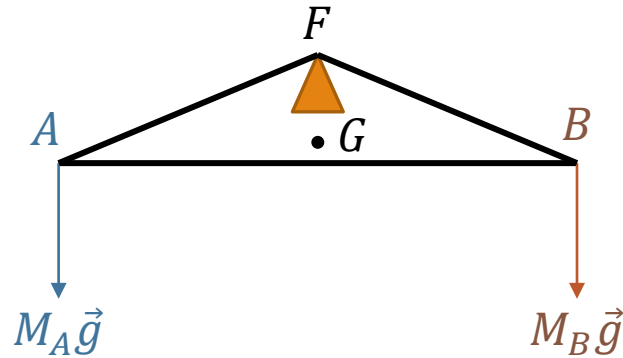
(Se la massa del giogo è trascurabile, se le forze d'attrito sono trascurabili) le forze agenti sono solo gravitazionali sulle masse ed il vincolo del fulcro. Posso trovare la condizione di equilibrio $M_e = 0$ scegliendo di calcolare i momenti rispetto ad F:

$$\vec{r}_A \times \vec{P}_A + \vec{r}_B \times \vec{P}_B = 0 = M_A g r_A - M_B g r_B \Rightarrow M_A = M_B \cdot \frac{r_B}{r_A}$$

Il valore di M_A è quindi ottenuto dal confronto con la massa campione note le due lunghezze dei bracci.

Bilancia di precisione

In realtà l'equilibrio è instabile e ciò rende inutilizzabile questo dispositivo, oltre all'idealizzazione di massa trascurabile dei bracci e rigidità del giogo. Per ovviare a ciò si usa come giogo un corpo sufficientemente massiccio (e quindi rigido) con una costruzione che pone il **fulcro F** al di sopra del **baricentro del giogo G** (equilibrio stabile) ed al di sopra della congiungente $\overline{AB}$ che intercetta la retta passante per **F** e **G** in **O**



La condizione di equilibrio è data da: $\vec{r}_A \times \vec{P}_A + \vec{r}_B \times \vec{P}_B + \vec{r}_G \times \vec{P}_G = 0$ che mi dà per l'angolo α la relazione

$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{M_A \overline{AO} - M_B \overline{BO}}{(M_A + M_B) \overline{FO} + M_G \overline{FG}}$$

Bilancia di precisione

$\vec{r}_A \times \vec{P}_A + \vec{r}_B \times \vec{P}_B + \vec{r}_G \times \vec{P}_G = 0$ fornisce

$$M_A g \overline{AA'} = M_B g \overline{BB'} + M_G g \overline{GG'}$$

$$\begin{cases} \overline{AA'} = (\overline{AO} - \overline{FO} \tan \alpha) \cos \alpha = \overline{AO} \cos \alpha - \overline{FO} \sin \alpha \\ \overline{BB'} = (\overline{BO} + \overline{FO} \tan \alpha) \cos \alpha = \overline{BO} \cos \alpha + \overline{FO} \sin \alpha \\ \overline{GG'} = \overline{FG} \sin \alpha \end{cases}$$

La condizione di equilibrio è data da:

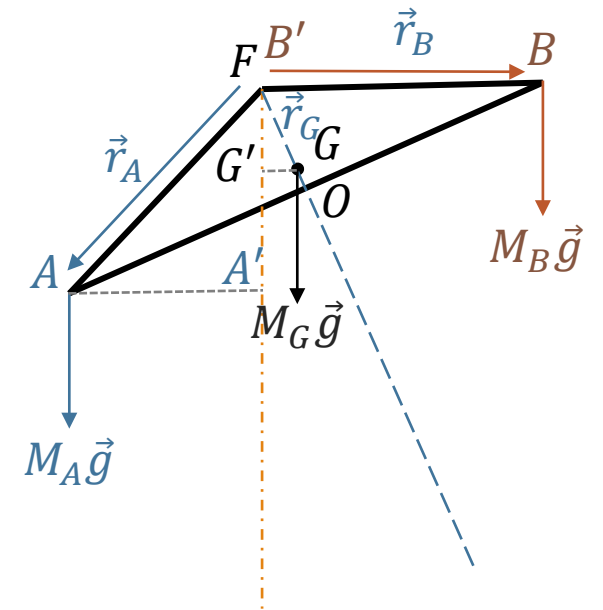
$$M_A g (\overline{AO} \cos \alpha - \overline{FO} \sin \alpha) = M_B g (\overline{BO} \cos \alpha + \overline{FO} \sin \alpha) + M_G g \overline{FG} \sin \alpha$$

Divido tutto per $\cos \alpha$ e semplifico g

$$M_A (\overline{AO} - \overline{FO} \tan \alpha) = M_B (\overline{BO} + \overline{FO} \tan \alpha) + M_G \overline{FG} \tan \alpha$$

che mi fornisce per l'angolo α la relazione

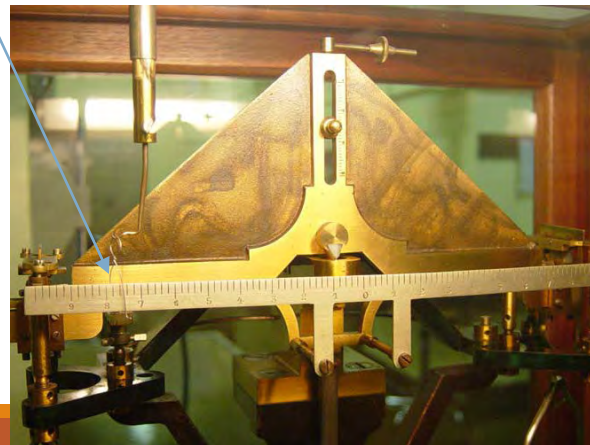
$$\tan \alpha = \frac{M_A \overline{AO} - M_B \overline{BO}}{(M_A + M_B) \overline{FO} + M_G \overline{FG}}$$



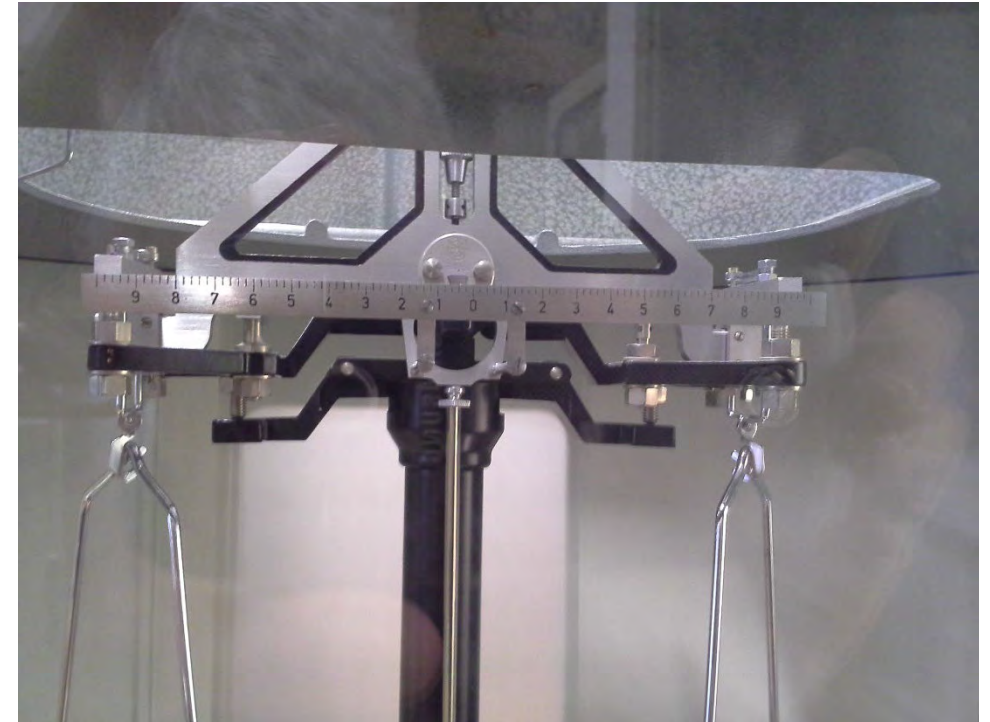
Bilancia di precisione

Un sistema come quello illustrato richiede, per la misura di M_A oltre alla conoscenza di M_B , anche la conoscenza di M_G , di α e dei diversi parametri costruttivi $\overline{AO}, \dots$. E' costituita da:

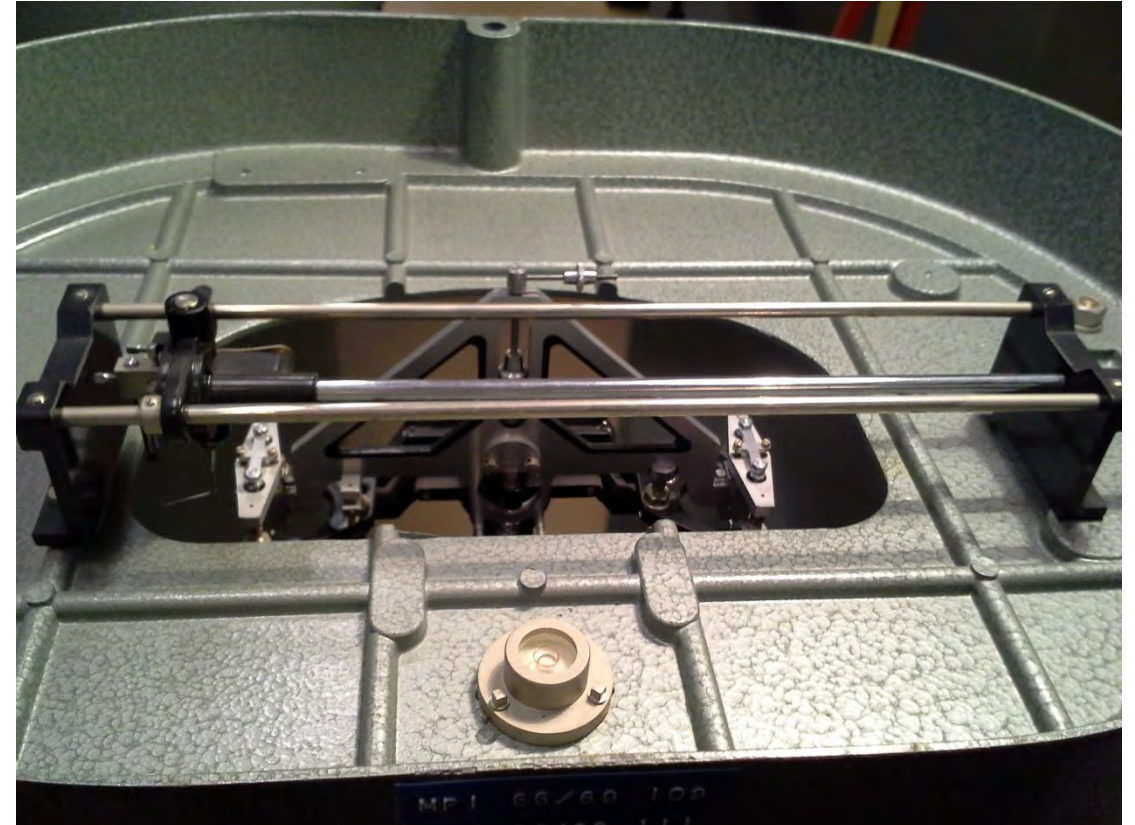
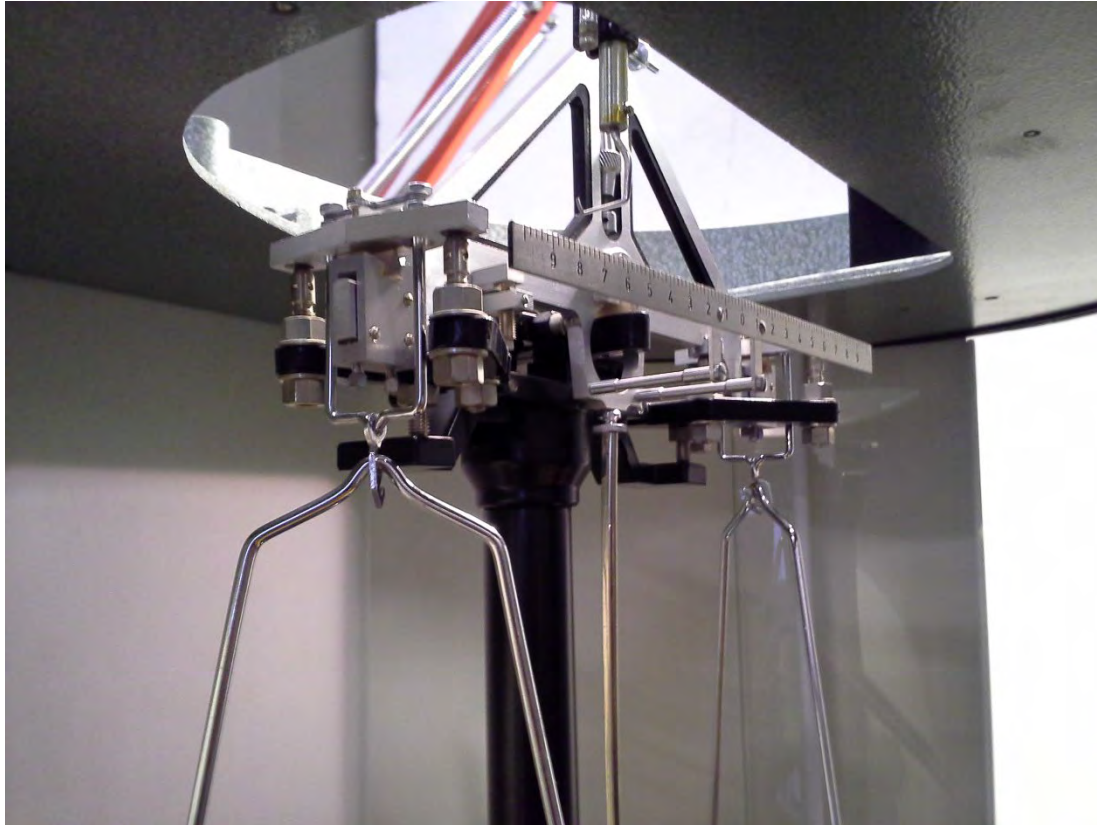
- Giogo (non deformabile)
- Piattelli (per le masse)
- Indice solidale con il giogo
- Indicatore
- 3 coltelli per A, B ed F
- Una massa campione detta '*cavalierino di Berzelius*' da 10mg Posizionabile sui bracci
- Un sistema di bloccaggio



Immagini



Immagini



Massiera o Pesiera

In uso con la bilancia analitica è data una MASSIERA (o pesiera), contenente un set completo di masse campione:

Nel nostro caso (bilancia analitica 0.2mg-200g)

Composizione:

1mg+(1mg+1mg)+2mg+5mg+	(0.010g)
10mg+10mg+20mg+50mg+	(0.090g)
100mg+100mg+200mg+500mg+	(0.900g)
1g+1g+2g+5g+	(9.000g)
10g+10g+20g+50g+	(90.000g)
100g	(100.000g)

Permette di ottenere un qualsiasi valore tra 1mg e 200g



MASSE CAMPIONE SOLO SUL PIATTO DI MISURA/TARA MASSA QUALSIASI

!!! VIETATO PRENDERE PESI DA ALTRE MASSIERE !!!



L'ente OIML Organisation Internationale de Métrologie Légale (Organizzazione Internazionale di Metrologia Legale) classifica le bilance con le seguenti categorie

Categoria I	Categoria II	Categoria III
Bilance analitiche	Bilance di precisione	Bilance commerciali

Le masse campione dedicate a queste bilance devono essere preparate con un errore inferiore a **1/3** della divisione dello strumento sottoposto ad esame.

Classe di precisione	Categoria bilancia	Risoluzione della bilancia
M1	II-III	Fino a 10 000 divisioni
F2	II	Fino a 500 00 d
F1	II	Fino a 100 000
E2	I	Oltre 100 000 d
E1	I	Oltre a 500 000 d

Nel nostro caso, inizialmente $\frac{200}{2 \times 10^{-4}} = 1\,000\,000\,d$, ora $\frac{200}{10^{-3}} = 200\,000\,d$

Misura della sensibilità

Nell'ipotesi in cui i due bracci del giogo siano uguali ($\overline{AO} = \overline{BO}$), a piatti scarichi l'indice della bilancia si fermerà su una posizione di equilibrio α_0 della scala (non necessariamente $\alpha_0 = 0$). Per valutare la sensibilità

$$S = \frac{d\alpha}{dM} \quad (\text{div} \cdot g^{-1})$$

Ponendo un piccolo sovraccarico in A o B, l'indice si sposterà di un certo numero di divisioni $\delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_0$, noto che sia il sovraccarico δM , otteniamo quindi la misura della sensibilità

$$S = \frac{\delta\alpha}{\delta M}$$

Da notare che $\delta\alpha$ dovrà essere maggiore di una singola divisione, altrimenti l'errore relativo sulla sensibilità sarà grande

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta(\delta\alpha)}{\delta\alpha} = \frac{1/2}{1} = 0.5$$

Oltre alla sensibilità della bilancia si usa introdurre anche l'inverso $\varepsilon = \frac{1}{S}$ che definisce la sensibilità di scala:

$$\varepsilon = \frac{dM}{d\alpha} \quad (g \cdot \text{div}^{-1})$$

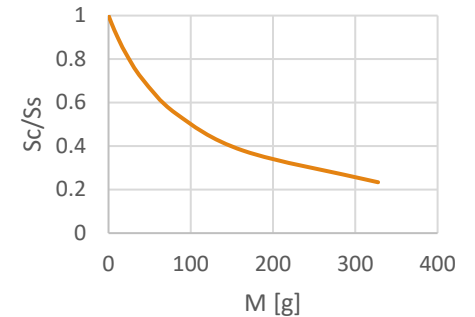
Misura della sensibilità

$$\alpha \approx \frac{M_A \overline{AO} - M_B \overline{BO}}{(M_A + M_B) \overline{FO} + M_G \overline{FG}}$$

Notiamo (dalla precedente) che per angoli piccoli è anche

$$\alpha = \frac{\delta M \overline{AO}}{\delta M \overline{FO} + M_G \overline{FG}} \Rightarrow S_{sc} = \frac{\overline{AO}}{\delta M \overline{FO} + M_G \overline{FG}} \approx \frac{\overline{AO}}{M_G \overline{FG}}$$

A piatti carichi; i.e. $M + \delta M$ in A ed M in B



$$\alpha = \frac{\delta M \overline{AO}}{2M \overline{FO} + M_G \overline{FG}} \Rightarrow S_c = \frac{\overline{AO}}{2M \overline{FO} + M_G \overline{FG}} \quad \text{or} \quad \frac{S_c}{S_{sc}} = \frac{M_G \overline{FG}}{2M \overline{FO} + M_G \overline{FG}} = \frac{1}{1 + 2 \frac{M}{M_G} \frac{\overline{FO}}{\overline{FG}}}$$

L'errore di lettura massimo è pari a mezza divisione. Usando la sensibilità è quindi possibile stimare l'errore sulla misura di massa.

$$\Delta M = \frac{\Delta \text{divisione}}{S}$$

Nel nostro caso,

$$S \sim \frac{1d}{mg} = 1 \text{ mg}^{-1}$$

$$\Delta M \sim \frac{\frac{1}{2}}{1} = 0.5 \text{ mg}$$

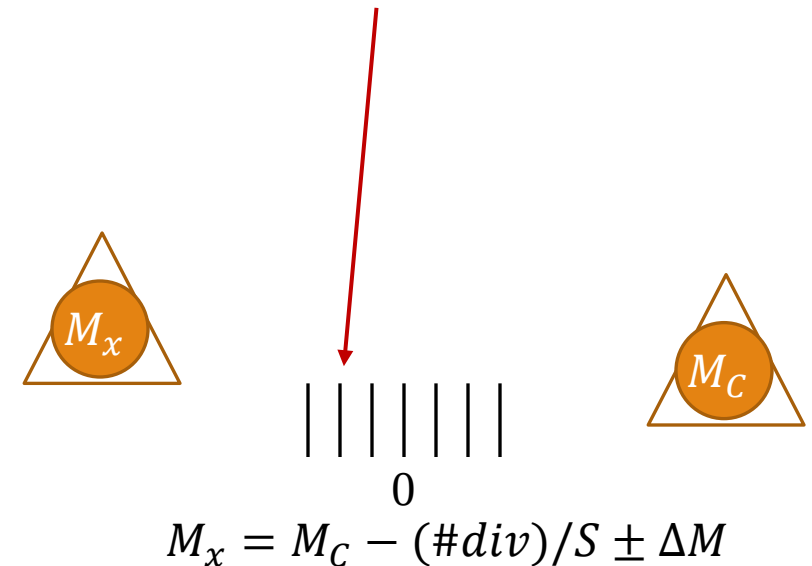
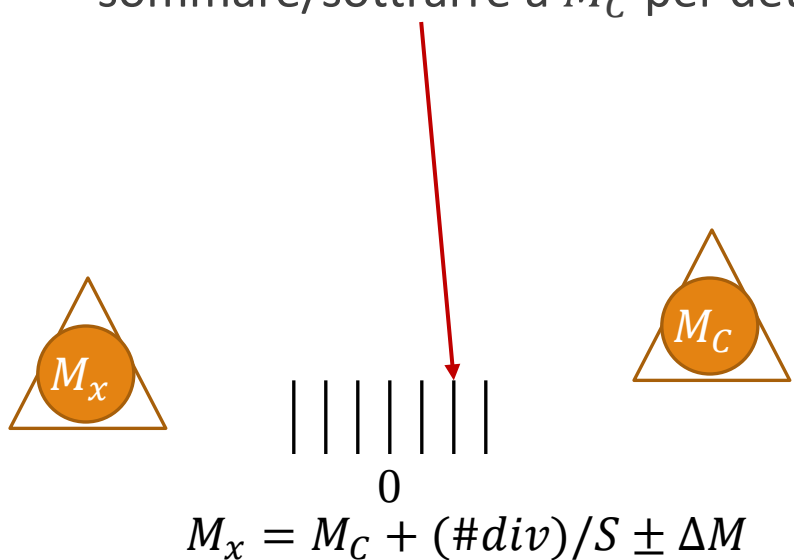
$$S \sim \frac{1d}{0.2 \text{ mg}} = 5 \text{ mg}^{-1}$$

$$\Delta M \sim \frac{\frac{1}{2}}{5} = 0.1 \text{ mg}$$

Misura di massa

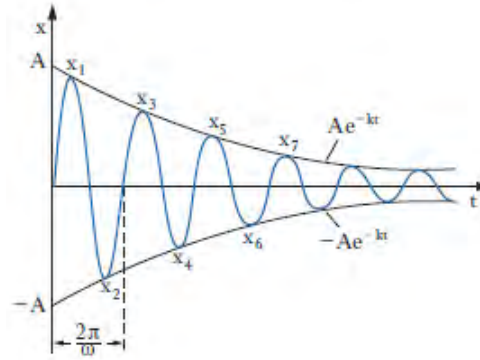
Una operazione di misura consiste quindi in (ipotesi bracci uguali):

- Individuare la posizione di equilibrio a piatti scarichi α_0
- Bloccare i piatti
- Porre la massa incognita M_x sul piatto A e delle masse campione M_C sul piatto B, per tentativi fino a trovare una posizione di equilibrio α all'interno della scala.
- La quantità $\delta M = (\alpha - \alpha_0)/S$ positiva o negativa mi da la quantità di massa da sommare/sottrarre a M_C per determinare il valore di M_x



Lettura in oscillazione

Poiché la misura di massa consiste nel confronto con una massa campione e nell'individuazione di due p.ti di equilibrio, la precisione dipende dal modo in cui si determinano i p. ti di equilibrio (le masse campione sono determinate e possono essere affette solo da errori sistematici).

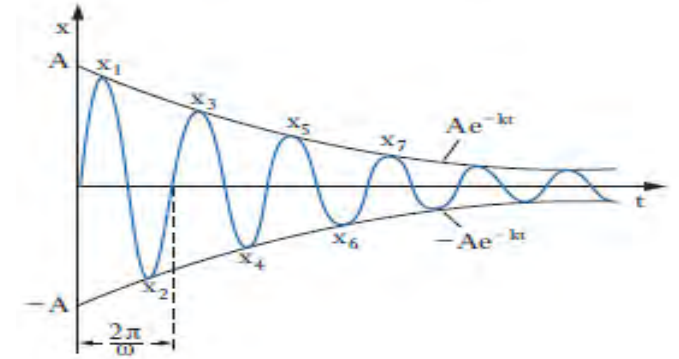


- Una volta liberato il blocco la bilancia presenta (per costruzione) un moto oscillatorio, che visti gli attriti comunque presenti, è di tipo smorzato.
- Aspettare l'arresto comporta (oltre al tempo di attesa) introdurre effetti casuali non trascurabili.
- Per ridurre tale effetto, si deve leggere la posizione dell'indice in corrispondenza a un numero dispari (5) di elongazioni massime consecutive.
- Leggiamo quindi 5 elongazioni massime x_1, x_3, x_5 a destra (assunte positive) e x_2, x_4 a sinistra (assunte negative); la posizione di equilibrio è

$$x_{eq} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_5) + \frac{1}{2} (x_2 + x_4) \right] \quad \text{con } \Delta x_{eq} = 0.5 \text{ div}$$

Lettura in oscillazione

$$x(t) = Ae^{-t/T_s} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_o}\right)$$



$$x_{eq} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} (x_1 + x_3 + x_5) + \frac{1}{2} (x_2 + x_4) \right] \quad \text{con } \Delta x_{eq} = 0.5 \text{ div}$$

Immaginiamo $T_s = 10 T_o$ (o $T_s = 5 T_o$)

Abbiamo:

$$\frac{t}{T_o} = n/2 + 0.25 \text{ e quindi } \frac{t}{T_s} = \frac{n/2 + 0.25}{10}$$

n	t/ T_o	t/ T_s	x _i	f _i	x _i *f _i
0	0.25	0.03	3.9	0.33	1.300
1	0.75	0.08	-3.7	0.50	-1.855
2	1.25	0.13	3.5	0.33	1.177
3	1.75	0.18	-3.4	0.50	-1.679
4	2.25	0.23	3.2	0.33	1.065
SUM					0.003

Principali errori sistematici

I principali errori sistematici nella bilancia di precisione sono:

- Differenza nella lunghezza dei bracci
- Se si impone l'errore relativo dovuto a questa differenza sia inferiore all'errore relativo nella misura della massa, usando una bilancia con portata $100g$ e con $\Delta M = 1\text{ mg}$ la differenza di lunghezza dei bracci, Δb , deve essere tale che

$$\frac{\Delta b}{b} < \frac{\Delta M}{M} = 10^{-5}$$

Quindi se $b = 10\text{ cm}$ deve essere $\Delta b < 10^{-4}\text{cm}$ (o 10^{-6}m). Per quanto si cerchi, all'atto della costruzione, di rendere questa differenza più piccola possibile, non si può mai essere sicuri che l'appoggio dei tre coltelli garantisca questa condizione entro il limite citato.

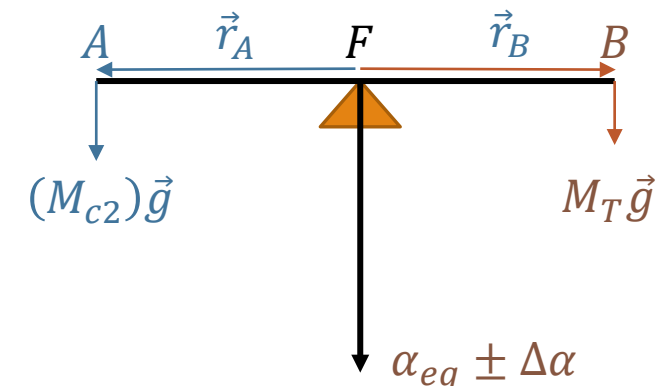
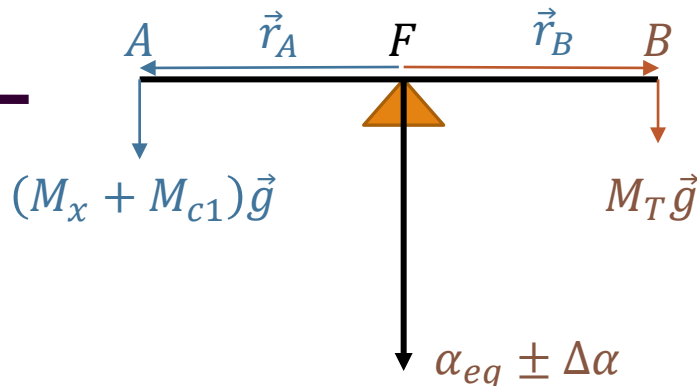
Metodo della tara

Uno dei procedimenti di misura che si può adottare per ovviare all'errore sistematico dovuto alla diversa lunghezza dei bracci del giogo è quello del metodo della tara o pesata doppia:

- Mettiamo su uno dei piatti (A) una massa detta tara (maggiore della massa da pesare $M_x \leq M_T$) e nel secondo piatto (B) la massa da pesare M_x .
- Aggiungendo opportuni pesi campione M_{c1} si raggiunge l'equilibrio ad una certa posizione α
- Ripetiamo la pesata sostituendo nel piatto (B) a $M_x + M_{c1}$ una seconda massa campione M_{c2} che riporti la bilancia nella stessa posizione di equilibrio.

È allora evidente che:

$$M_x = M_{c2} - M_{c1} \quad \text{e} \quad \Delta M_x = 2\Delta M$$



Principali errori sistematici

I principali errori sistematici nella bilancia di precisione sono:

- Spinta di Archimede

- Su ogni corpo di massa M immerso in un fluido agisce oltre la forza peso Mg una forza diretta in verso opposto e pari al peso della porzione di fluido occupata dal corpo.
- Siano: M_x la massa del corpo; ρ_x la sua densità (gr/cm³) e $V_x = M_x/\rho_x$ il suo volume.
- Siano: ρ_c la densità delle masse campioni M_c di volume $V_c = M_c/\rho_c$.
- Sia: ρ_a la densità dell'aria e
- La spinta di Archimede vale $\rho_a V_x g$ per il corpo e $\rho_a V_c g$ per la massa campione.
- La differenza nella spinta di Archimede è pari a $\rho_a (V_x - V_c)g$. Ovvero:

$$M_x \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_x}\right) = M_c \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right) \Rightarrow M_x = M_c \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_x}\right)} \cong M_c \left(1 - \frac{(\rho_x - \rho_c)}{\rho_c \rho_x} \rho_a\right)$$

Spinta di Archimede. Esempio

Siano

- $\rho_c = 8.4 \text{ g/cm}^3$ (ottone)
- $\rho_a = 1.205 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$

Se la densità dell'oggetto in misura è pari a quella dell'acqua ($\rho_x = 1.0 \text{ g/cm}^3$) la correzione risulta essere pari a

$$M_x = M_c \frac{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_c}\right)}{\left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_x}\right)} = M_c \frac{\left(1 - \frac{1.205 \times 10^{-3}}{8.4}\right)}{\left(1 - \frac{1.205 \times 10^{-3}}{1}\right)} = M_c \frac{1 - 0.0001}{1 - 0.001} \sim M_c (1 + 0.001)$$

La correzione dell'effetto sistematico è dell'ordine dello 0.1%, per difetto se $\rho_x < \rho_c$, in eccesso se $\rho_x > \rho_c$. Per una massa di 50g, ed una sensibilità di 1mg – ovvero $M_x = (50.000 \pm 0.001) \text{ g}$ – l'effetto sistematico dovuto alla densità è di 0.05 g, 50 volte l'errore di sensibilità.

Nel caso di sughero ($\rho_x = 0.25 \text{ g/cm}^3$) la correzione è maggiore di un fattore 4.

Misure di densità – bilancia idrostatica

Con bilance di precisione particolari (ma meno precise) posso anche effettuare delle misure di densità di oggetti, sfruttando nuovamente la spinta di Archimede.



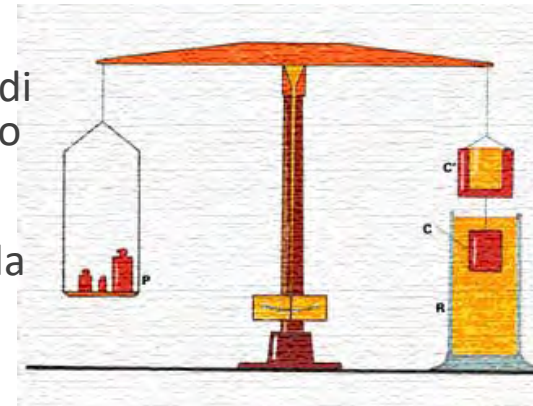
Bilancia idrostatica

Si tratta di una usuale bilancia a giogo alla quale sono state apportate due modifiche:

- al di sotto dei piatti è fissato un gancio per poter sospendere gli accessori;
- il giogo è sollevabile mediante un sistema a vite in modo da operare al di sotto dei piatti.

Le esperienze principali condotte con la bilancia idrostatica riguardano la dimostrazione sperimentale della legge di Archimede e la determinazione della densità per lo più dei solidi.

- [Nel primo caso](#), a uno dei piatti si sospende un cilindro cavo di ottone e alla base inferiore di questo un cilindro di ottone pieno, di volume uguale alla capacità del primo. Sull'altro piatto della bilancia si dispongono delle masse fino a ristabilire l'equilibrio. Quando si immerge il cilindro pieno in acqua la bilancia non è più in equilibrio. Si versa quindi acqua nel cilindro cavo fino a che quello pieno risulti totalmente immerso e si ha di nuovo equilibrio quando la spinta di Archimede è pari al peso di un volume d'acqua uguale a quella spostata.
- [Nel secondo caso](#), mediante un filo di massa trascurabile (?) si sospende il solido di cui si vuole determinare la densità al di sotto di un piatto della bilancia e se ne misura la massa. Si immerge poi il solido in acqua e si ristabilisce l'equilibrio con una massa aggiuntiva. Il rapporto tra la massa del campione a secco e quella addizionale, moltiplicato per la densità del liquido fornisce la densità del solido.



Misura della densità relativa

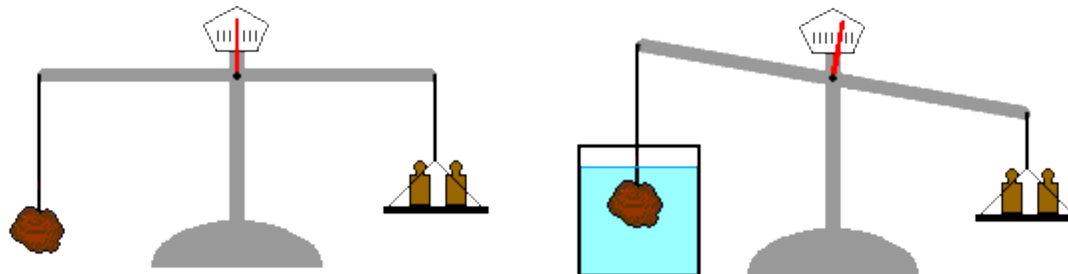
Eseguiamo due misure, la prima con il corpo sul piatto A immerso in aria, la seconda con il corpo sul piatto A immerso in acqua. Raggiungeremo la stessa posizione di equilibrio, aggiungendo sul piatto B una massa nei due casi aggiungendo in entrambe i casi di M_{c1} e M_{c2} .

Scriviamo nei due casi:

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x} \right) = M_{c1} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right)$$

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} \right) = M_{c2} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right)$$

Dividendo ottengo $\hookrightarrow$



Misura della densità relativa

Dividendo ottengo $\hookrightarrow$

$$\frac{\left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x}\right)}{\left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x}\right)} = \frac{M_{c2}}{M_{c1}}$$

ovvero

$$1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} = \frac{M_{c2}}{M_{c1}} - \frac{M_{c2}}{M_{c1}} \frac{\mu_a}{\mu_x}$$

Svolgendo rispetto a μ_x

$$\frac{1}{\mu_x} \left(\frac{M_{c2}\mu_a}{M_{c1}} - \mu_b \right) = \frac{M_{c2}}{M_{c1}} - 1$$

Ovvero

$$\mu_x = \frac{\frac{M_{c2}\mu_a - M_{c1}\mu_b}{M_{c1}}}{\frac{M_{c2} - M_{c1}}{M_{c1}}} = \frac{M_{c1}\mu_b - M_{c2}\mu_a}{M_{c1} - M_{c2}} \cong \mu_b \frac{M_{c1}}{M_{c1} - M_{c2}}$$

Ovviamente se l'oggetto ha una densità maggiore a quella dell'acqua...

Errore? Differente lunghezza bracci?

Misura della densità relativa con Tara

Eseguiamo tre misure, la prima con il corpo sul piatto A immerso in aria, la seconda con il corpo sul piatto A immerso in acqua L'ultima solo con masse campione. Raggiungeremo la stessa posizione di equilibrio, aggiungendo sul piatto A delle masse per bilanciare la

Scriviamo nei due tre casi:

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_x} \right) + M_{c1} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right) = M_T \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_T} \right) \approx M_x + M_{c1} = M_T$$

$$M_x \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} \right) + M_{c2} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right) = M_T \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_T} \right) \approx M_x \left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} \right) + M_{c2} = M_T$$

$$M_{c3} \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_c} \right) = M_T \left(1 - \frac{\mu_a}{\mu_T} \right) \approx M_{c3} = M_T$$

Da cui

$$\left(1 - \frac{\mu_b}{\mu_x} \right) = \frac{M_{c3} - M_{c2}}{M_{c3} - M_{c1}}$$

Misura dell'accelerazione di gravità con pendolo semplice

Il pendolo semplice:

Si chiama **pendolo semplice** un punto materiale di massa m appeso tramite un filo inestensibile, di lunghezza l e massa trascurabile, ad un punto O . Dal momento in cui il pendolo viene spostato dalla sua verticale e quindi lasciato, esso inizierà un moto oscillatorio che, in caso di smorzamento trascurabile, proseguirà identico fino ad una nuova interazione con l'ambiente.

Volendo ricavare il periodo delle oscillazioni possiamo scrivere le equazioni di Newton per il punto materiale in direzione centripeta e tangenziale:

$$\begin{cases} ma_c = T - mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta \end{cases}$$

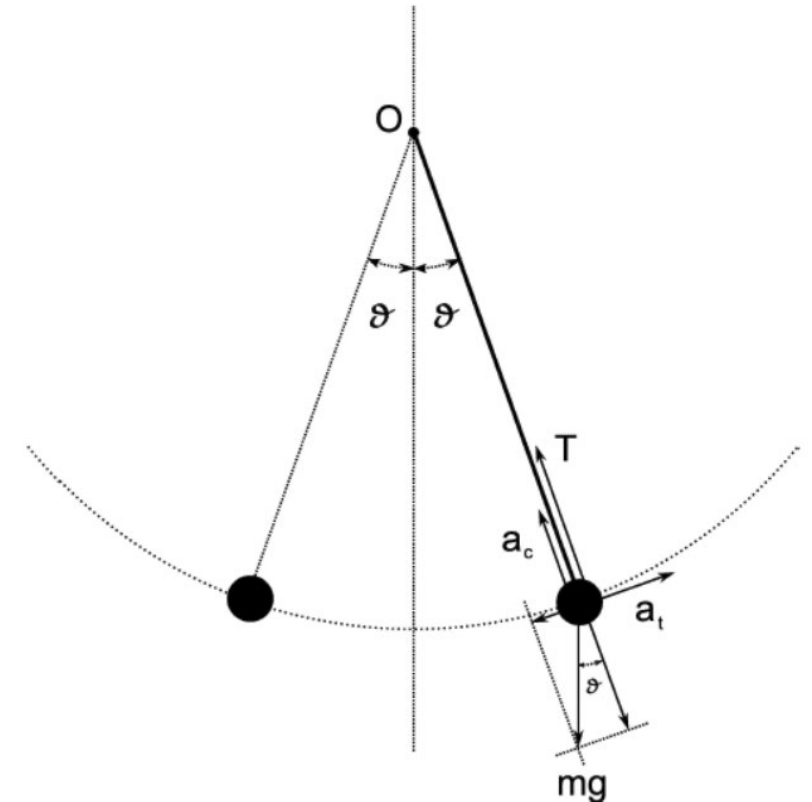
Notando che il moto è circolare, per l'accelerazione centripeta vale $a_c = l\dot{\theta}^2$, e per quella tangenziale $a_t = l\ddot{\theta}$

$$\begin{cases} ml\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \\ ml\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

Per angoli piccoli (piccole oscillazioni) si ha $\sin \theta \cong \theta$ (per $\theta = 5^\circ$ vale $(\sin \theta - \theta)/\theta \sim 0.0013$) e la seconda equazione fornisce l'equazione del moto del pendolo:

$$l\ddot{\theta} + g\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

formalmente identica all'equazione di un moto armonico.



Il pendolo semplice:

La soluzione dell'equazione differenziale può essere calcolata assumendo una generica soluzione $\theta(t) = A \sin(\omega t + \phi)$. Otteniamo:

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t + \frac{\pi}{2}\right)$$

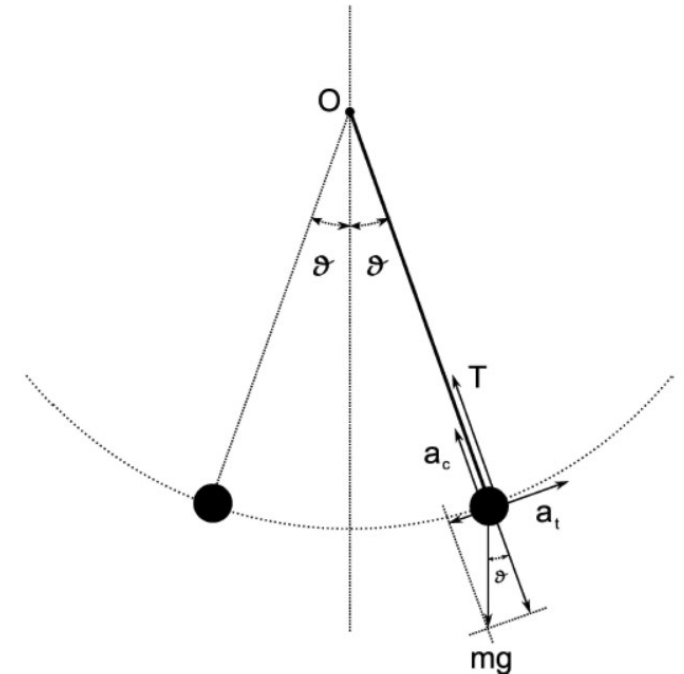
dove $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ è detta pulsazione del moto. Le costanti di integrazione (ampiezza massima e fase iniziale) si ottengono dalle costanti iniziali

$$\begin{cases} \theta(t = 0) = \theta_{max} \\ \dot{\theta}(t = 0) = 0 \end{cases}$$

Il periodo T delle (piccole) oscillazioni si ricava facilmente dalla pulsazione:

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

e come si vede non dipende dalla massa m appesa, ma solamente da g e dalla lunghezza l del filo (isocronismo delle oscillazioni).



Il pendolo fisico

Il pendolo semplice non è che il caso ideale di un oggetto chiamato pendolo fisico e costituito da un corpo rigido vincolato ad un punto di sospensione O .

Siano M la massa del corpo rigido, I il momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione passante per O e $d = |\vec{r}|$ la distanza tra il centro di massa C_m ed il centro di rotazione O .

Scegliendo come polo il centro di rotazione O , l'unica forza da considerare è il peso mg , che con il vincolo di O , risulta in un momento M_z che tende a riportare il pendolo in posizione verticale ($\vec{M} = \vec{r} \times (m\vec{g})$):

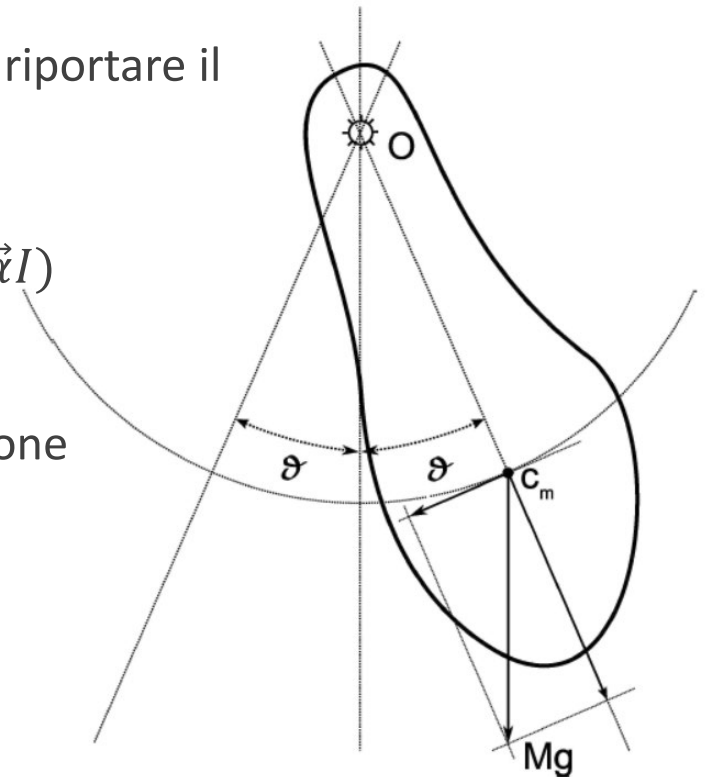
$$M_z = -mgd \sin \theta$$

Scrivendo l'equazione di Newton per la dinamica rotazionale ($\vec{M} = \frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{\alpha} I$) si ottiene (ricordando che $d\vec{L} = d\vec{r} \times m\vec{v}$):

$$-mgd \sin \theta = I\ddot{\theta}$$

che assumendo piccole oscillazioni si semplifica in $-mgd \theta = I\ddot{\theta}$. La soluzione dell'equazione è

$$\theta(t) = \theta_{max} \sin \left(\sqrt{\frac{mgd}{I}} t + \frac{\pi}{2} \right)$$



Il pendolo fisico

Il periodo delle oscillazioni è quindi:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mdg}} \quad \text{ricordiamo } I = \int r_{\perp}^2 dm$$

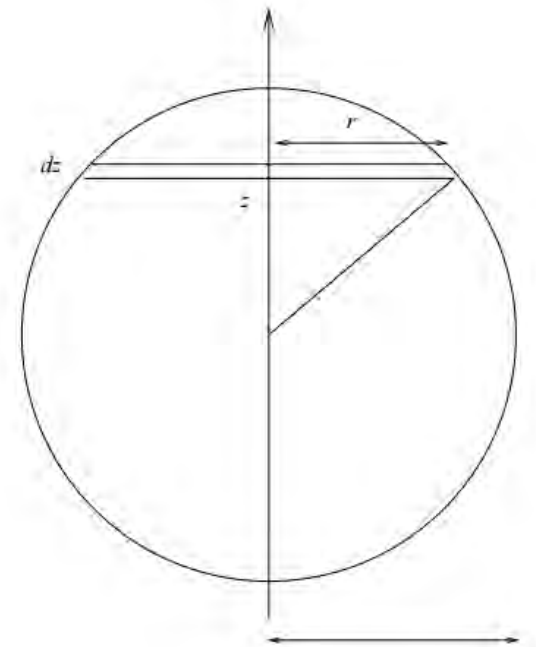
Si nota quindi che un pendolo fisico di massa M , momento d'inerzia I e centro di massa a distanza d dal punto di rotazione ha periodo delle oscillazioni identico ad un **pendolo semplice di lunghezza $l = I/md$** .

Nel caso del nostro pendolo (filo+sfera), il momento d'inerzia rispetto ad O è dato dalla somma del momento d'inerzia del filo rispetto ad O e dal momento d'inerzia della sfera, rispetto ad O . Siano M_s ed M_f le masse di sfera e filo, r_s il raggio della sfera e l_f la lunghezza del filo; vale (Huygens-Steiner)

$$I = \int_0^{l_f} \frac{M_f}{l_f} x^2 dx + M_s(l_f + r_s)^2 + \frac{1}{2} \pi \int_{-r_s}^{r_s} \frac{M_s}{\frac{4}{3} \pi r_s^3} (r_s^2 - z^2)^2 dz$$

Ovvero

$$I = \frac{1}{3} M_f l_f^2 + M_s(l_f + r_s)^2 + \frac{2}{5} M_s r_s^2$$



Confronto pendolo fisico/semplificato

Abbiamo:

$$g_S = 4\pi^2 \frac{l}{T^2} \quad \text{e} \quad g_F = 4\pi^2 \frac{I}{mdT^2}$$

Con:

- $l = l_f + r_s$
- $M = M_f + M_s$
- $d = \left[M_f \frac{l_f}{2} + M_s (l_f + r_s) \right] / (M_f + M_s)$
- $I = \frac{1}{3} M_f l_f^2 + M_s (l_f + r_s)^2 + \frac{2}{5} M_s r_s^2$

Confrontare i due approcci significa confrontare la differenza dei risultati ottenuti con gli errori:

$$\left| \frac{g_F - g_S}{g_S} \right| \leq \frac{\sigma_g}{g}$$

Che risulta:

$$\left| \frac{\frac{I}{md} - l}{l} \right| \leq \frac{\sigma_g}{g} \quad \text{ovvero} \quad \left| \frac{I - mdl}{mdl} \right| \leq \frac{\sigma_g}{g}$$

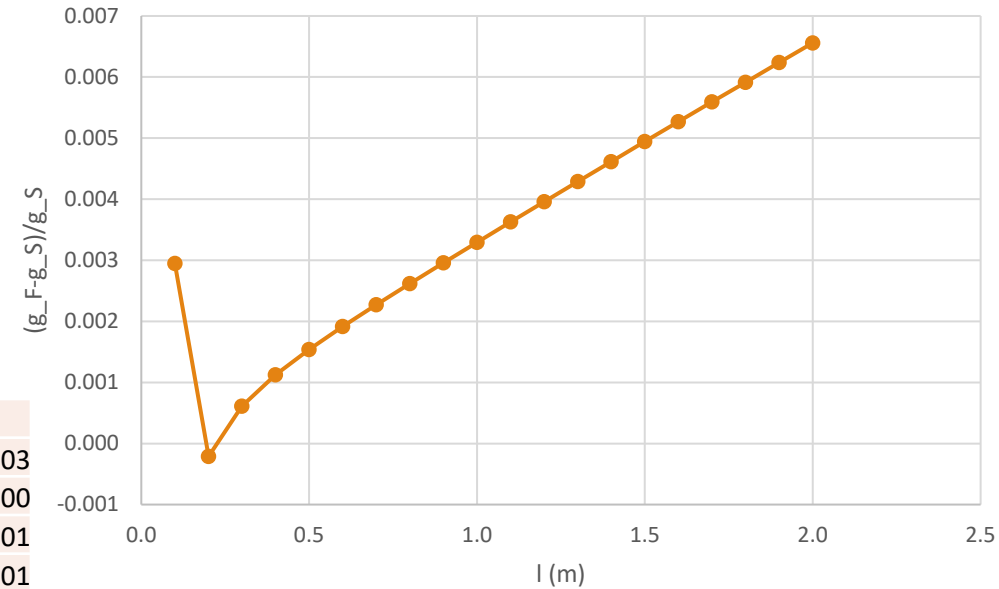
Confronto pendolo fisico/semplce

Usando:

- $r_s = 1 \text{ cm}$
- $M_s = 50 \text{ g}$
- $\mu_f = 1 \text{ g m}^{-1}$

Ottengo:

lf(m)	Mf (g)	Ms (g)	Rs (m)	d (m)	I (g m^2)	I_filo (g m^2)	I_centroS	I_S g m^2)	Dg/g
0.1	0.100	50.0	0.01	0.1099	0.6	0.0	0.6	0.002	0.003
0.2	0.200	50.0	0.01	0.2096	2.2	0.0	2.2	0.002	0.000
0.3	0.300	50.0	0.01	0.3090	4.8	0.0	4.8	0.002	0.001
0.4	0.400	50.0	0.01	0.4083	8.4	0.0	8.4	0.002	0.001
0.5	0.500	50.0	0.01	0.5074	13.0	0.0	13.0	0.002	0.002
0.6	0.600	50.0	0.01	0.6063	18.7	0.1	18.6	0.002	0.002
0.7	0.700	50.0	0.01	0.7050	25.3	0.1	25.2	0.002	0.002
0.8	0.800	50.0	0.01	0.8035	33.0	0.2	32.8	0.002	0.003
0.9	0.900	50.0	0.01	0.9019	41.7	0.2	41.4	0.002	0.003
1.0	1.000	50.0	0.01	1.0000	51.3	0.3	51.0	0.002	0.003
1.1	1.100	50.0	0.01	1.0979	62.1	0.4	61.6	0.002	0.004
1.2	1.200	50.0	0.01	1.1957	73.8	0.6	73.2	0.002	0.004
1.3	1.300	50.0	0.01	1.2933	86.5	0.7	85.8	0.002	0.004
1.4	1.400	50.0	0.01	1.3907	100.3	0.9	99.4	0.002	0.005
1.5	1.500	50.0	0.01	1.4879	115.1	1.1	114.0	0.002	0.005
1.6	1.600	50.0	0.01	1.5849	131.0	1.4	129.6	0.002	0.005
1.7	1.700	50.0	0.01	1.6817	147.8	1.6	146.2	0.002	0.006
1.8	1.800	50.0	0.01	1.7784	165.8	1.9	163.8	0.002	0.006
1.9	1.900	50.0	0.01	1.8749	184.7	2.3	182.4	0.002	0.006
2.0	2.000	50.0	0.01	1.9712	204.7	2.7	202.0	0.002	0.007



Attriti

La teoria delle equazioni differenziali ci dice che esistono **due soluzioni linearmente indipendenti** e che la soluzione generale è una combinazione lineare di queste.

Per trovare le due soluzioni, pensiamo a θ come una variabile complessa, $\theta(t) \rightarrow z(t)$.

Poiché i coefficienti sono reali, se $z(t)$ è soluzione di $\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$, allora $x(t) = \mathbb{R}[z(t)]$ è soluzione dell'equazione in x .

Dalla teoria, la forma della soluzione è:

$$z(t) = Ae^{st}$$

Posso ottenere la costante complessa s , osservando che vale:

$$\frac{d}{dt} Ae^{st} = Ase^{st} \quad e \quad \frac{d^2}{dt^2} Ae^{st} = As^2 e^{st}$$

Sostituendo ottengo:

$$Ae^{st}(s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2) = 0$$

Da cui l'equazione caratteristica

$$s^2 + 2\gamma s + \omega_0^2 = 0 \quad \text{con soluzioni} \quad s_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

E la soluzione dell'equazione in $z(t)$ risulta essere:

$$z(t) = A^+ e^{s_+ t} + A^- e^{s_- t} = e^{-\gamma t} \left[A^+ e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A^- e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

Attriti

E la soluzione dell'equazione in $z(t)$ risulta essere:

$$z(t) = A^+ e^{s_+ t} + A^- e^{s_- t} = e^{-\gamma t} \left[A^+ e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + A^- e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right]$$

Il caso che ci interessa è quello in cui il coefficiente di attrito è minore della pulsazione:

$$\gamma < \omega_0$$

In questa condizione il discriminante è negativo

$$s_{\pm} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Ed il moto è descritto dalla legge:

$$x(t) = A e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi \right)$$

E' nuovamente un moto oscillatorio smorzato, con A , e ϕ che dipendono dalle condizioni iniziali. Notare che la pulsazione misurata è influenzata dall'attrito:

$$\omega_0 \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}$$

Attriti

Se consideriamo la presenza di attriti l'equazione differenziale si modifica con un termine dipendente dalla velocità. Ovvero diventa:

$$ml\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} = -mg \sin \theta$$

Che possiamo riscrivere come:

$$\ddot{\theta} + \frac{\beta}{ml}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Nel caso di un attrito «debole», ovvero con $0 < \frac{\beta}{ml} < \sqrt{\frac{g}{l}}$, la cui soluzione è simile alla precedente ma presenta un termine di attenuazione e una pulsazione che risente dell'attrito:

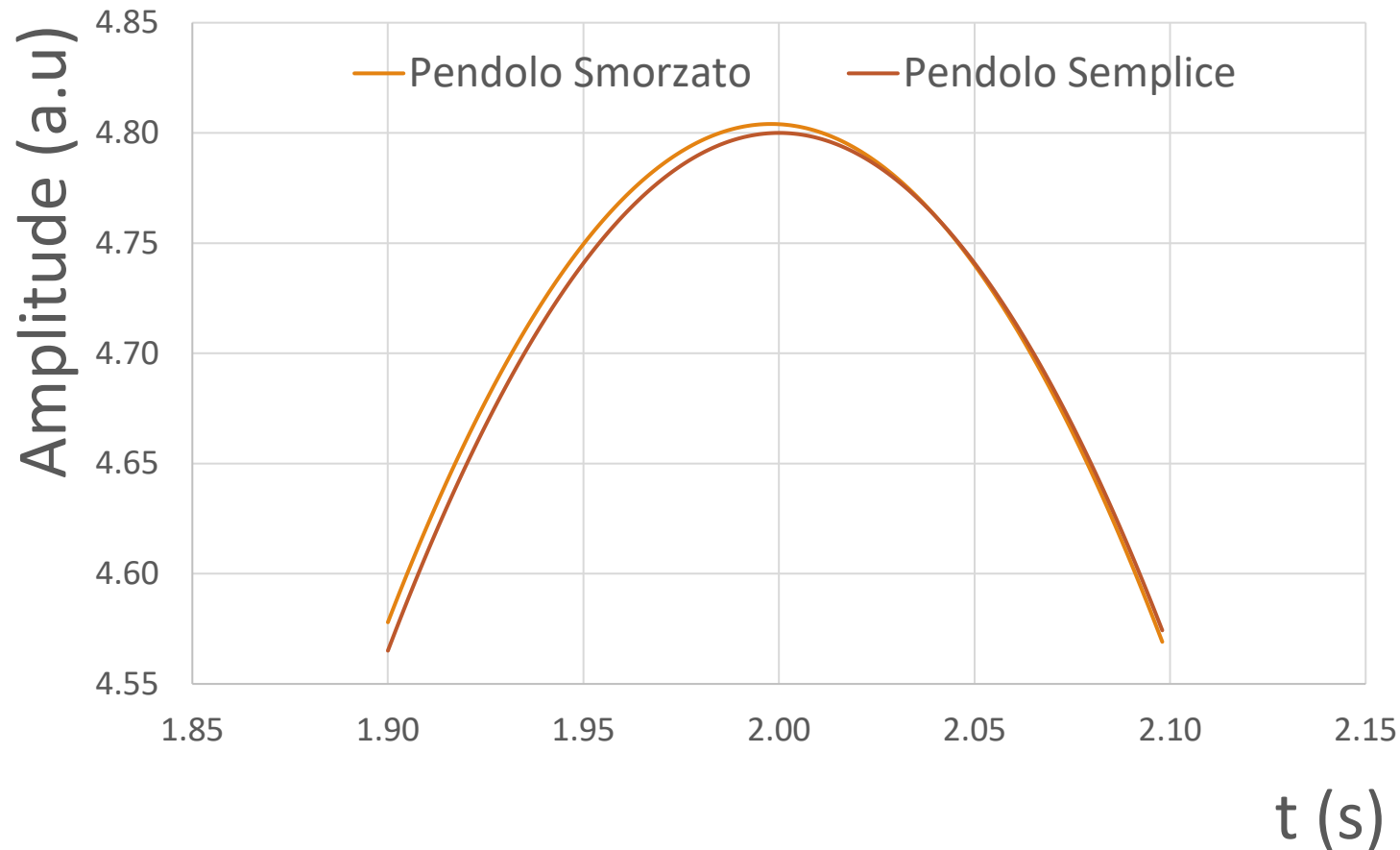
$$\theta(t) = \theta_{max} e^{-\frac{t}{\tau_A}} \sin\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Con

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{l} - \left(\frac{\beta}{2ml}\right)^2} \quad \text{e} \quad \tau_A = -\frac{2ml}{\beta}$$

Attriti

Guardando i massimi della funzione ho un effetto di spostamento che dipende dalla pendenza dell'esponenziale (più forte per tempi piccoli rispetto a τ_A , meno marcato per tempi grandi). Comunque anche per coefficienti di attrito estremamente piccoli (50s) l'effetto rimane contenuto:



Massimo per:

$$d(e^{-\alpha t} \cos \beta t) = 0$$

ovvero

$$t = \frac{1}{\beta} \operatorname{atan} \left(-\frac{\alpha}{\beta} \right) + nT$$

Oltre le piccole oscillazioni

Ricaviamo ora brevemente alcuni risultati non considerando l'approssimazione di piccole oscillazioni.

Imponendo la conservazione dell'energia meccanica ($\Delta K = -\Delta U$) ed avendo scelto lo zero del potenziale alla quota di O posso scrivere:

$$\frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}ml^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mgl(\cos \theta - \cos \theta_{max})$$

Da cui

$$\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos \theta - \cos \theta_{max})} = \frac{2\pi}{T_0} \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}$$

Separando le variabili, l'equazione diventa

$$dt = \frac{T_0 d\theta}{2\pi \sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}}$$

Oltre le piccole oscillazioni

Integrando su un quarto del periodo

$$\frac{T}{4} = \int_0^{T/4} dt = \frac{T_0}{2\pi} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} = \frac{T_0}{2\pi} \mathfrak{I}$$

$\mathfrak{I}$ è un integrale ellittico di prima specie e perciò non calcolabile in forma chiusa, ma approssimabile numericamente o tramite sviluppo in serie.

$$T = \frac{2}{\pi} T_0 \mathfrak{I}$$

Una buona approssimazione è $T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_{max}^2}{16}\right)$ che ammette un errore relativo massimo di una parte su 500 per angoli di ampiezza massima pari a 10° (il termine successivo nell'espansione è $\frac{9}{1024} \theta_{max}^4$, ovvero $\frac{9}{1024} \times 0.174^4 = \frac{9 \times 0.00092}{1024} = 0.000008$).

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

L'integrale $\mathfrak{I} = \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{\max})}}$ può essere riscritto, usando le formule di bisezione per il coseno $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, nella forma:

$$\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2} \left(1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}} \right)}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}}} \int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}}}}$$

Posso ora fare un'ulteriore sostituzione di variabile, $u = \sin \frac{\theta}{2} / \sin \frac{\theta_{\max}}{2}$ o meglio $\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\theta_{\max}}{2}$. Gli estremi di integrazione diventano

$$\begin{aligned}\theta = 0 &\Rightarrow u = 0 \\ \theta = \theta_{\max} &\Rightarrow u = 1\end{aligned}$$

Inoltre:

$$d \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = du \sin \frac{\theta_{\max}}{2} \Rightarrow d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_{\max}}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} du = \frac{2 \sin \frac{\theta_{\max}}{2}}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}}} du = \frac{2 \sin \frac{\theta_{\max}}{2}}{\sqrt{1 - u^2 \sin^2 \frac{\theta_{\max}}{2}}} du$$

Sostituendo la variabile nell'integrale ho ...

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Quindi inserendo al posto di $\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\theta_{max}}{2}$ e di $d\theta = \frac{2 \sin \frac{\theta_{max}}{2}}{\sqrt{1-u^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} du$ ottengo:

$$\frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} \int_0^1 \frac{\frac{2 \sin \frac{\theta_{max}}{2}}{\sqrt{1 - u^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} du}{\sqrt{1 - \frac{u^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}{\sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}}}$$

Semplificando

$$\frac{2 \sin \frac{\theta_{max}}{2}}{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}} \sqrt{1 - u^2}} = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - u^2 \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2}}}$$

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Con $k = \sin \frac{\theta_{max}}{2}$ ho infine

$$\int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 u^2} \cdot \sqrt{1 - u^2}} du$$

Possiamo usare lo sviluppo in serie poiché $k^2 u^2 < 1$; possiamo sviluppare in serie di Mc Laurin (caso particolare di serie di Taylor se $x_0 = 0$) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)_{x=0} x^n$ per scrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 u^2}} &= 1 + \frac{1}{2} (k^2 u^2) + \frac{1}{2} \frac{3}{4} (k^2 u^2)^2 + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} (k^2 u^2)^3 + \dots + \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{(2n-1)}{2n} (k^2 u^2)^n \\ &\equiv \binom{-\frac{1}{2}}{n} (k^2 u^2)^n \end{aligned}$$

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Vale:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{\pi}{2}$$

Calcolando per sostituzione: $u = \sin \varphi$ e $du = \cos \varphi d\varphi$.

Sempre per sostituzione $u = \sin \varphi$ e $du = \cos \varphi d\varphi$:

$$\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

per $n > 0$ poi:

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{(2n-1)}{2n} \frac{\pi}{2}$$

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

Ricordiamo che vale per $n > 0$:

$$\int_0^1 \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} du = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{(2n-1)}{2n} \frac{\pi}{2}$$

Usando tutto ciò otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} &= \int_0^{\theta_{max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \theta_{max})}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 k^2 + \left(\frac{3}{8} \right)^2 k^4 + \left(\frac{15}{48} \right)^2 k^6 + \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{(2n-1)}{2n} \right)^2 k^{2n} \right] \end{aligned}$$

Ritornando all'inizio e ricordando che $T = \frac{2}{\pi} T_0 \mathfrak{I}$ ottengo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_{max}}{2} + \cdots \right]$$

Oltre le piccole oscillazioni: calcolo

$$\frac{T}{4} = \frac{T_0}{4} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\prod_{m=1}^n (2m-1)}{\prod_{m=1}^n (2m)} \right)^2 k^{2n} \right)$$

Con, come scritto prima, $k = \sin \frac{\theta_{max}}{2}$ ottengo $T = T_0 \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\theta_{max}}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\theta_{max}}{2} + \dots \right)$ da cui ad esempio per $\theta_{max} = 10^\circ = 0.174$ ho

$$T = T_0 (1 + 0.0017 + 0.000008 + \dots)$$

mentre a $\theta_{max} = 5^\circ = 0.087$ ho

$$T = T_0 (1 + 0.0005 + 0.0000003 + \dots)$$

Per angoli sufficientemente piccolo posso nuovamente approssimare $\sin \frac{\theta_{max}}{2} \approx \frac{\theta_{max}}{2}$ da cui:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{16} \theta_{max}^2 + \frac{9}{1024} \theta_{max}^4 \dots \right)$$

Cenni di calcolo combinatorio/fattoriale

Si chiama **combinazione semplice** una presentazione di elementi di un insieme nella quale **non ha importanza l'ordine dei componenti**, ovvero, non si può ripetere lo stesso elemento più volte solo variando l'oggetto al suo interno.

Il numero di combinazioni $C_{n,r}$ e' dato da:

$$C_{n,r} = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! (n-r)!}$$

Con la definizione di fattoriale:

$$n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{i=0}^{n-1} (n-i)$$

Vale $0! = 1$ perché posso sistemare solo in un modo 0 elementi (inoltre, per ricorrenza poiché $1! = 1$, e visto che $n! = n \cdot (n-1)!$, ho che $1 = 1! = 1 \cdot 0! \Rightarrow 0! = 1$)

Breve cenno sui fattoriali 1

Fattoriale di un numero negativo:

$$n! = \prod_{i=0}^{n-1} (n - i)$$

$$(c)^n n! = \prod_{i=0}^{n-1} c(n - i)$$

$$(-1)^n n! = \prod_{i=0}^{n-1} -(n - i) = (-n)!$$

Fattoriale di un numero reale positivo (Eulero 1730, introduce la funzione Pi Π):

$$x! = \Pi(x) = \int_0^1 (-\ln q)^x dq = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \quad (i.e. \text{ponendo } t = -\ln q)$$

Con la proprietà

$$\Pi(x + 1) = (x + 1)\Pi(x)$$

Breve cenno sui fattoriali 2

Sempre Eulero estende nel 1768 la definizione a tutti i numeri reali introducendo la funzione Gamma Γ , con uno spostamento di una unità della variabile:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

La funzione Γ è legata alla funzione Π dalla relazione seguente:

$$\Pi(x) = \Gamma(x+1) = x!$$

Vale:

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$$

Da questa, visto che $\Gamma(1) = 1$ ottengo:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

In questo modo sono definite le combinazioni semplici:

$$\binom{z}{k} = \frac{\Gamma(z+1)}{k! \Gamma(z-k+1)}$$

Importanti relazioni tra le funzioni Gamma sono le seguenti (Formola di riflessione di Eulero):

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Inciso: la notazione ! per fattoriale fu introdotta solo nel 1808 da Kramp; Inciso 2: successivamente è stato esteso anche ai numeri complessi

Inciso3: la notazione Gamma Γ fu introdotta dal Laplace

Breve cenno sui fattoriali 3

Importanti relazioni tra le funzioni Gamma sono le seguenti:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \qquad \Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

La prima relazione permette di calcolare $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Infatti vale:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi$$

La seconda permette di calcolare $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\pi}$. Infatti vale:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\pi$$

Ed infine:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2}\right)\cdots \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

Che posso riscrivere come:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{2^n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$$

Misura dell'accelerazione di gravità

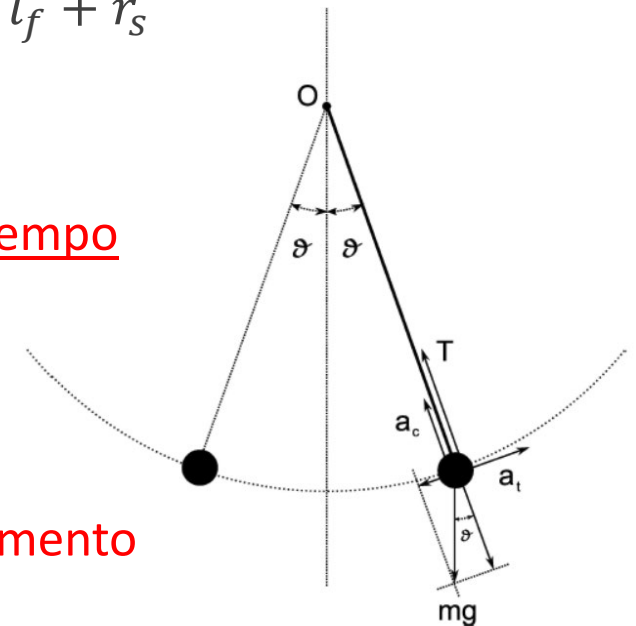
Dalla misura del periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, nota la distanza del punto materiale dall'asse di oscillazione, possiamo ricavare g

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

- Il periodo T è misurato con un cronometro digitale. La sensibilità del cronometro è del centesimo di secondo, ma la misura è dominata dagli errori casuali.
- La distanza l del punto materiale dall'asse di oscillazione è data da $l = l_f + r_s$ nell'ipotesi di una massa del filo nulla.
 - l_f è misurato con il metro a nastro.
 - $r_s = d_s/2$ si misura con il calibro Palmer (o ventesimale...cambia?)
- Poiché la deviazione standard sulle misure di tempo non dipende dal tempo invece di misurare il singolo periodo si misurano 4 ÷ 5 periodi $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$. Per la legge di propagazione della varianza

$$\sigma_T^2 = \frac{\sigma_\tau^2}{25}$$

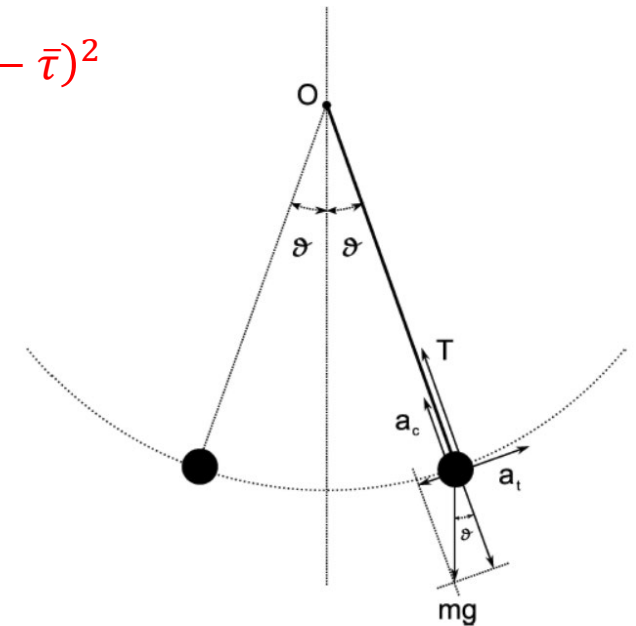
- Per una misura più precisa dell'intervallo di tempo, **usiamo come riferimento il passaggio sull'asse verticale (velocità dell'oscillazione massima)**



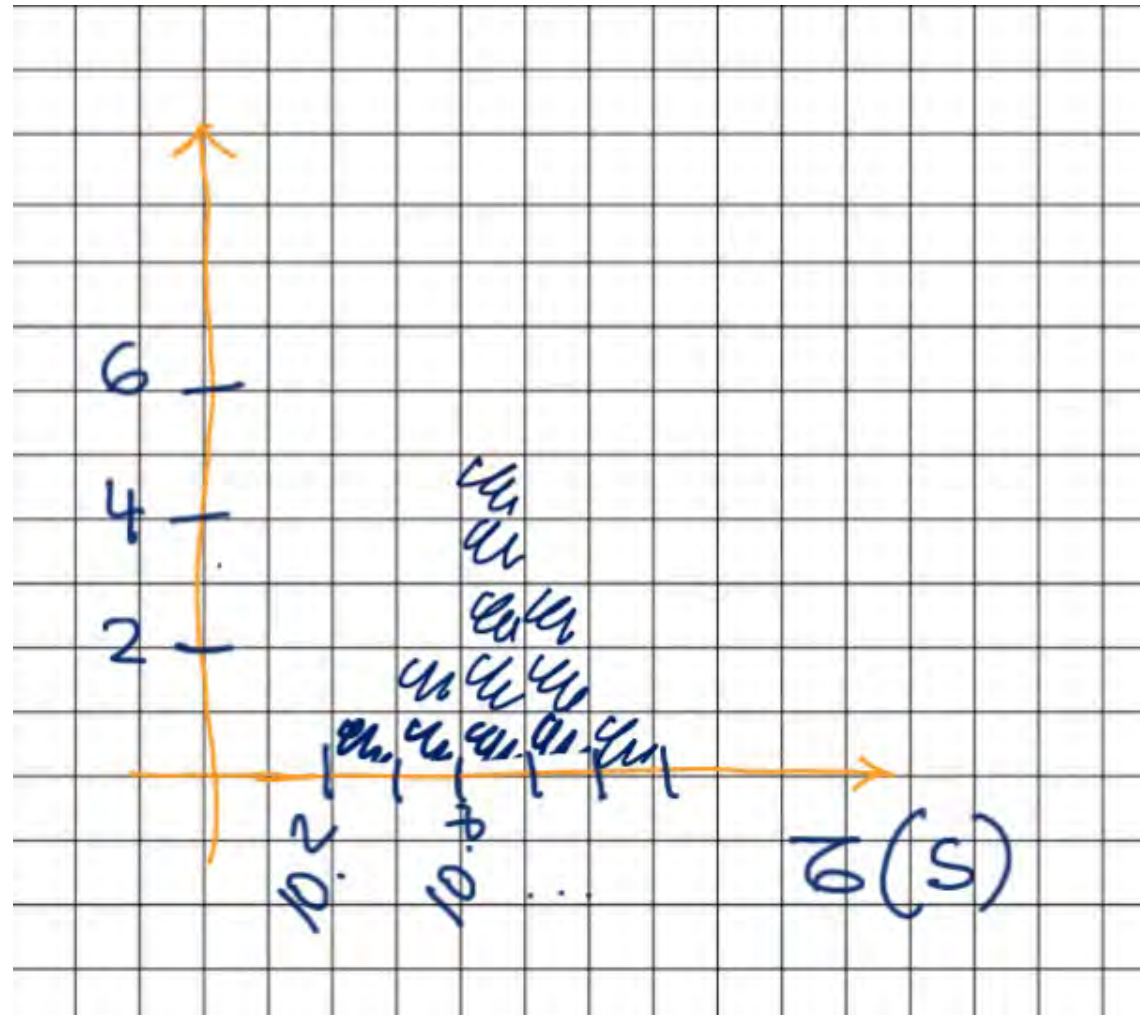
Misura di τ

Misurare $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$ per ogni lunghezza l .

- Misurare $\tau = 5T = t_{stop} - t_{start}$ per n (almeno 10) volte.
- Fare un istogramma con le n (almeno 10) misure
- Come vedremo, i risultati seguono una distribuzione Gaussiana con le seguenti caratteristiche:
 - La miglior stima del valore vero di τ è il valor medio $\bar{\tau} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tau_i$
 - La miglior stima della varianza del campione τ è data da $\sigma_{\tau}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\tau_i - \bar{\tau})^2$
 - La miglior stima della varianza della media è data da $\sigma_{\bar{\tau}}^2 = \frac{\sigma_{\tau}^2}{n}$
 - Abbiamo quindi $\bar{\tau} \pm \sigma_{\bar{\tau}}$ dove $\sigma_{\bar{\tau}} = \sqrt{\sigma_{\tau}^2/n}$.
 - Tenuto conto che $\bar{T} = \bar{\tau}/5$ e che $\sigma_{\bar{T}} = \sigma_{\bar{\tau}}/5$ abbiamo anche misurato $\bar{T} \pm \sigma_{\bar{T}}$
 - Scrivere i risultati con il corretto numero di cifre significative



Istogramma



Misura della dipendenza di T da l

- Misurare il periodo T (attraverso la misura dell'intervallo di tempo per 4-5 oscillazioni complete) per una lunghezza variabile del filo/raggio sfera da 180 a 30 cm (180, 150, 120, 60, 30, 100) con quindi lunghezze all'incirca di questi valori (non è necessario avere valori esatti perché comunque saranno misurati).
- **Alla lunghezza di 100 cm, ripetere la misura $n \times 10$ volte, istogrammando i risultati sia a gruppi di 10 (10 istogrammi) e tutti le $n \times 10$ misure assieme (1 istogramma). Fare inoltre un istogramma usando i 10 valori medi.**
- **GLI ISTOGRAMMI SONO FATTI SU FOGLI A QUADRETTI, NON SU CARTA MILLIMETRATA**
- I periodi attesi, per un valore dell'accelerazione di gravità di 9.807 m/s^2 sono:

l (m)	T (s)
0.30	1.10
0.60	1.55
1.00	2.01
1.20	2.20
1.50	2.46
1.80	2.69

Misura della dipendenza di T da l

- Utilizzando le opportune trasformazioni di variabili per rendere il problema lineare, verificare graficamente l'accordo dei dati con le possibili relazioni:

$$T = al^2, T = al, T = al^{1/2}, T = al^{2/3}$$

- Assumendo che $T = al^{1/2}$ sia la relazione in miglior accordo con i dati, stimare il parametro a con il metodo grafico e verificare la compatibilità dei valori misurati con questa ipotesi.
- Fare un grafico dei risultati in carta log-log e misurare la pendenza della retta.

Rappresentazione grafica

La scelta del **fattore di scala** per le unità di misura delle ascisse e delle ordinate deve essere fatta in modo da ottenere una rappresentazione grafica **chiara e di facile interpretazione**

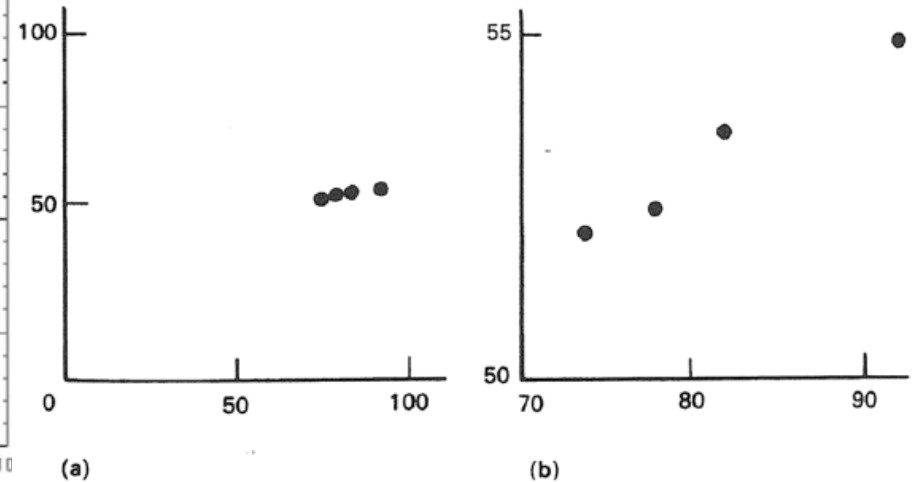
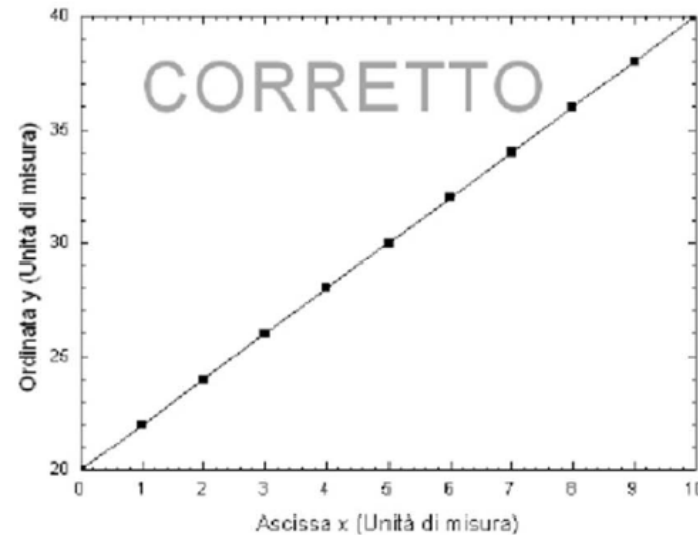
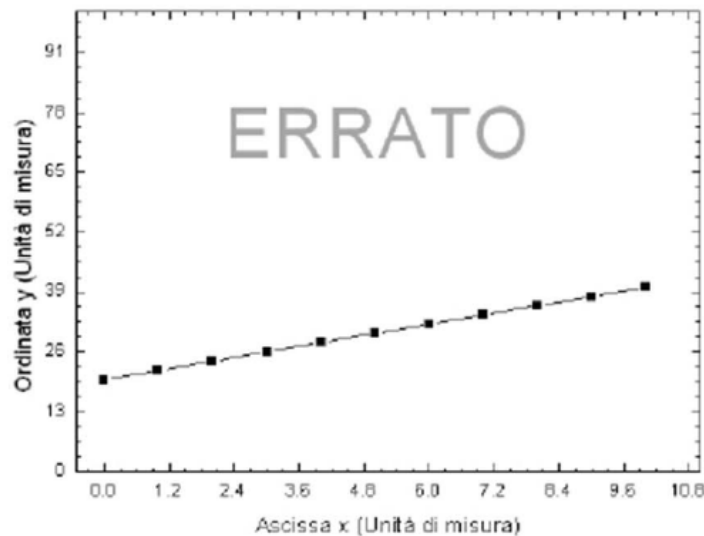


Fig. 11.4. (a) is not a very useful graph. The same results are plotted on an expanded scale in (b).

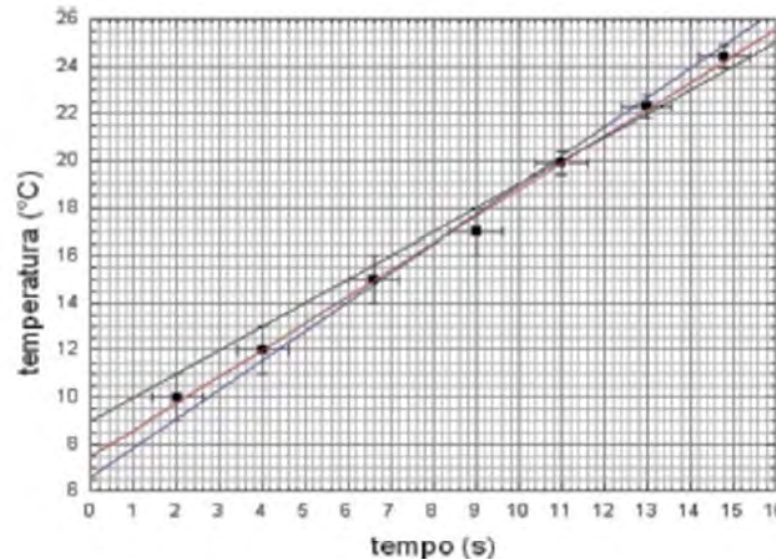
Asse orizzontale: **CAUSA**

Asse verticale: **EFFETTO**

Relazione tra grandezze: Metodo grafico

Per trovare le relazioni tra grandezze misurate usiamo il metodo grafico:

- Usiamo il grafico con scale adatte per avere relazioni lineari;
- Tracciamo i valori misurati con le incertezze associate
- Tracciamo la retta che visivamente interpola meglio i punti, e le due 2 rette, ancora in accordo con i punti ma con rispettivamente le pendenze massime e minime
- Fit della retta (in realtà una soluzione analitica) più avanti



Uso della scala Log-Log

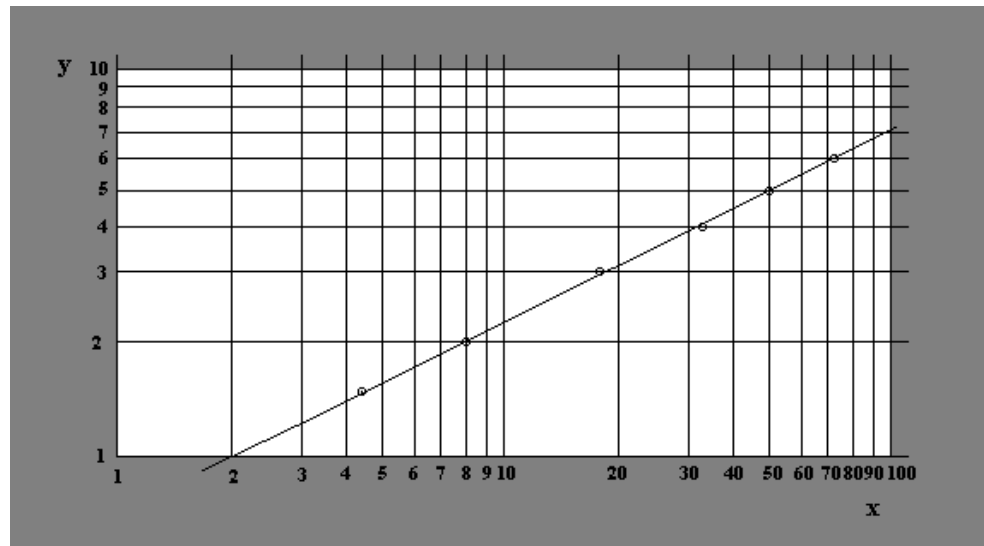
Nel caso in cui abbiamo una relazione tra le variabili di tipo:

$$y = \alpha x^\beta$$

è utile usare i grafici con carte millimtrate in scala logaritmica su entrambi i lati. Infatti se prendiamo i logaritmi vediamo che vale:

$$\log y = \log \alpha + \beta \log x$$

Abbiamo cioè una dipendenza grafica lineare da β di $\log y$. Invece di calcolare i logaritmi usiamo carte millimtrate con le succitate distanze logaritmiche o log-log



Uso della scala semilogaritmica

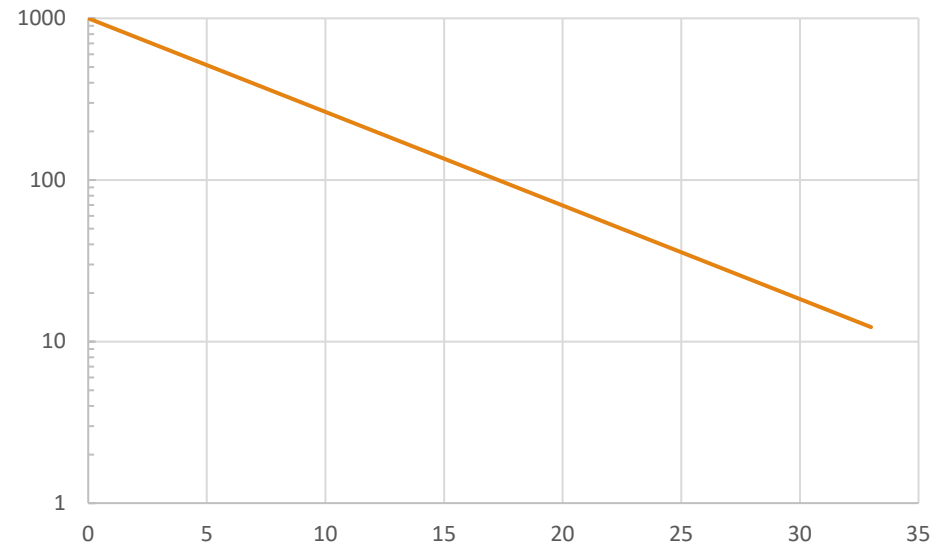
Nel caso in cui abbiamo una relazione tra le variabili di tipo:

$$y = \alpha e^{\beta x}$$

è utile usare i grafici con carte millimetriche in semilogaritmica, in cui l'asse orizzontale ha una separazione tra le tacche lineare, mentre quello verticale ha una separazione logaritmica. Infatti se prendiamo il logaritmo y che vale:

$$\log y = \log \alpha + \beta x \log e$$

Abbiamo cioè una dipendenza grafica lineare da β e x di $\log y$. Invece di calcolare i logaritmi usiamo carte millimetriche con le succitate distanze logaritmiche sulle ordinate



Misura di g

Per ognuna delle diverse lunghezze $l_1, \dots, l_k$ calcolare il valore di g :

$$g_{l_j} = 4\pi^2 \frac{l_j}{\bar{T}_{l_j}^2}$$

E la corrispondente varianza. Nell'ipotesi che l'errore dominante sia quello sul periodo, trasformiamo l'errore sulla lunghezza da massimo a deviazione standard: $\sigma_{l_i} = \Delta l_i / \sqrt{3}$.

Abbiamo quindi:

$$\frac{\sigma_{g_{l_j}}^2}{g_{l_j}^2} = 4 \frac{\sigma_{\bar{T}_{l_j}}^2}{\bar{T}_{l_j}^2} + \frac{\sigma_{l_j}^2}{l_j^2}$$

Per ognuna delle lunghezze $l_1, \dots, l_k$.

Fare un grafico di g in funzione di l e valutare la compatibilità delle misure e l'eventuale esistenza di un trend non compatibile con $g = \text{const.}$

Valore finale (ed errore corrispondente) di g come media pesata delle g_{l_i} (perché?)

PER LA LUNGHEZZA DEL FILO AD UN METRO PRENDERE $n \times 10$ MISURE

Misura di g

- Per ognuna delle diverse lunghezze $l_1, \dots, l_k$ calcolare il valore di g e di $\sigma_{g_{l_j}}$

$$g_{l_j} = 4\pi^2 \frac{l_j}{\bar{T}_{l_j}^2} \qquad \sigma_{g_{l_j}}^2 = g_{l_j}^2 \left[4 \frac{\sigma_{\bar{T}_{l_j}}^2}{\bar{T}_{l_j}^2} + \frac{\sigma_{l_j}^2}{l_j^2} \right]$$

- Valore finale (ed errore corrispondente) di g come media pesata delle g_{l_i}

$$g = \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{l_j}}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right) / \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right) \qquad \sigma_g^2 = 1 / \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right)$$

Risultato

$$g \pm \sigma_g$$

Misura di τ_A

Possiamo misurare τ_A a partire dalla dell'ampiezza massima. Ovvero, possiamo misurare la variazione dell'ampiezza massima in un arco di tempo lungo (gli effetti non sono grandi) pari a 5-10 minuti, ed usando ampiezze massime iniziali θ_{max} grandi (dell'ordine di 20-25 gradi, per massimizzare l'effetto). Avrò infatti

$$\theta_{max}(t) = \theta_{max} e^{-\frac{t}{\tau_A}}$$

Le misure a diversi t_i dei valori di $\theta_{max}(t_i)$ mi permettono di ricavare τ_A :

$$\frac{\theta_{max}(t_i)}{\theta_{max}} = e^{-\frac{t_i}{\tau_A}} \Rightarrow -\frac{t_i}{\tau_A} = \ln \frac{\theta_{max}(t_i)}{\theta_{max}}$$

Che posso anche cambiare di segno:

$$\frac{t_i}{\tau_A} = \ln \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}(t_i)}$$

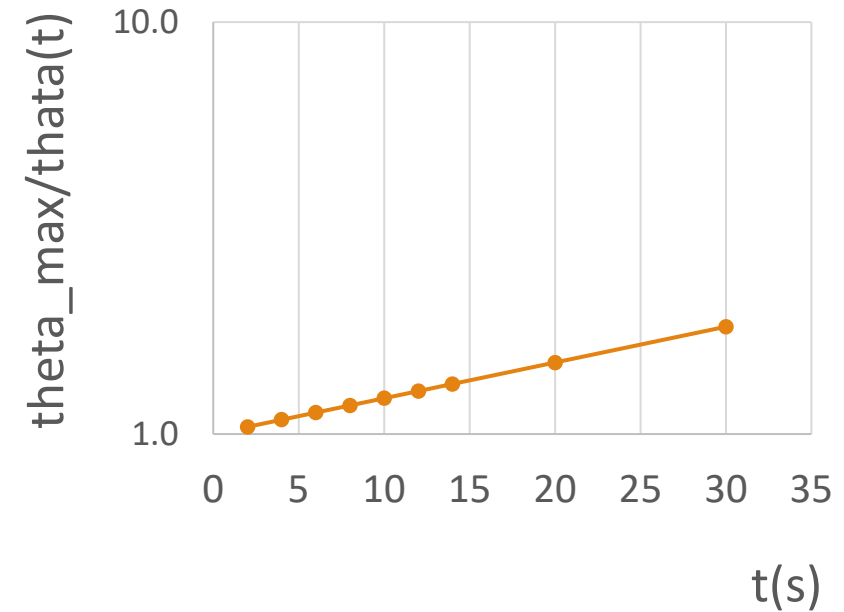
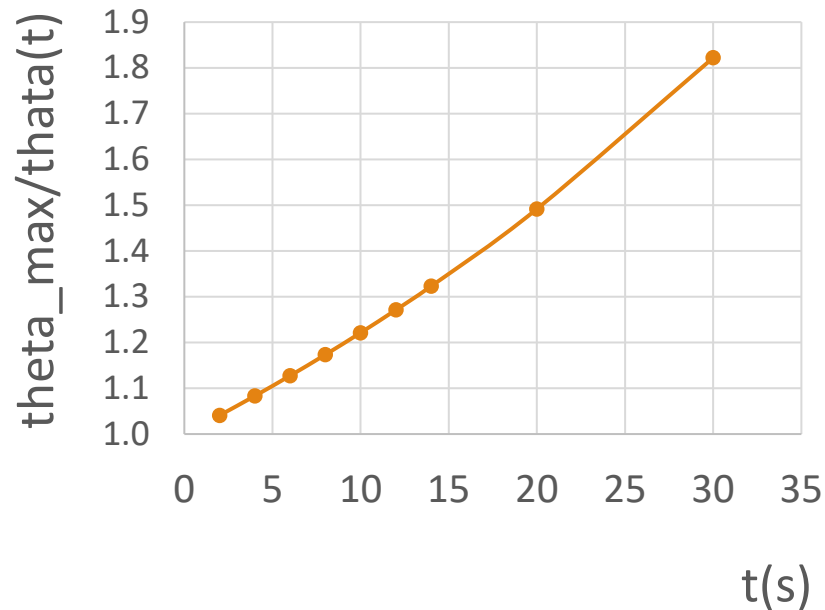
Se faccio un grafico con in ascissa il tempo t ed in ordinata $\ln \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}(t)}$ il coefficiente angolare della retta risultante mi fornisce l'inverso di τ_A

$$\ln \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}(t)} = y = mx = \left(\frac{1}{\tau_A} \right) t$$

Misura di τ_A

Posso anche fare il grafico direttamente in carta semilogaritmica, dove metto in ascissa sempre il valore del tempo t ed in ordinata il valore del rapporto $\theta_{max}/(\theta_{max}(t_i))$; in questo caso devo tenere conto del cambio di base per passare dalla pendenza al valore di τ_A , ovvero

$$\ln \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}(t_i)} = \frac{\log \frac{\theta_{max}}{\theta_{max}(t_i)}}{\log e}$$



Misura della dipendenza di T da θ_{max}

- Alla lunghezza di 180 (o 150 o ...) cm:
 - Misurare il periodo in funzione dell'angolo massimo ($n > 10$ misure per singolo angolo, $5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 30^\circ, \dots$ abbiamo già a disposizione $n > 10$ misure a 5°).
 - Fare gli istogrammi.
 - Fare un grafico con in ascissa l'angolo ed in ordinata il valore del periodo con l'errore associato.
- Partendo da un angolo grande (20° o 30°) prendiamo $n > 10$ misure dell'angolo massimo, 1 ogni 30 secondi circa (meno se necessario) registrando anche il tempo a cui prendiamo la misura
- Fare un grafico dei valori misurati in funzione del tempo
- Fare un grafico in carta millimetrata del valore di $\ln(\theta_{max}/(\theta_{max}(t_i)))$ in funzione t di per la stima di τ_A
- Stimare il valore di τ_A

Misura della dipendenza di T da l e di g

- Utilizzando le opportune trasformazioni di variabili per rendere il problema lineare, **verificare graficamente in carta millimetrata** l'accordo dei dati con le possibili relazioni $T = al^2, T = al, T = al^{1/2}, T = al^{3/2}$.
- Assumendo che $T = al^{1/2}$ sia la relazione in miglior accordo con i dati, stimare il parametro a con il **metodo grafico** e verificare la compatibilità dei valori misurati con questa ipotesi.
- Fare un **grafico** dei risultati in **carta log-log** e misurare la pendenza della retta.
- Fare un **grafico in carta millimetrata** del valore di $\ln(\theta_{max}/(\theta_{max}(t_i)))$ in funzione t di per la stima di τ_{max}
- Per ognuna delle diverse lunghezze $l_1, \dots, l_k$ calcolare il valore di g e di $\sigma_{g_{l_j}}$

$$g_{l_j} = 4\pi^2 \frac{l_i}{\bar{T}_{l_j}^2} \qquad \sigma_{g_{l_j}}^2 = g_{l_j}^2 \left[4 \frac{\sigma_{\bar{T}_{l_j}}^2}{\bar{T}_{l_j}^2} + \frac{\sigma_{l_j}^2}{l_j^2} \right]$$

- **Fare un grafico in carta millimetrata** di g in funzione di l e valutare la compatibilità delle misure e l'eventuale esistenza di un trend non compatibile con $g = \text{const.}$
- Valore finale (ed errore corrispondente) di g come media pesata delle g_{l_i}

$$g = \left(\sum_{j=1}^n \frac{g_{l_j}}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right) / \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right) \qquad \sigma_g^2 = 1 / \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{g_{l_j}}^2} \right)$$

Misura dell'accelerazione gravitazionale

Dati due corpi di massa m_1 ed m_2 la legge della gravitazione universale di Newton dice che la forza di attrazione tra le due masse è diretta lungo la congiungente e pari a:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

Data la costante di gravitazione universale $G = 6.6738(8) \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, la massa della terra $M_{\oplus} = 5.9726(7) \times 10^{24} \text{ kg}$ ed il suo raggio medio all'equatore di $R_{\oplus} = 6.378137 \times 10^6 \text{ m}$, posso calcolare la **forza** che la terra applica **sulla sua superficie su** una massa **m**

$$\vec{F} = -m\vec{g} = -m \left(G \frac{M_{\oplus}}{R_{\oplus}^2} \right) \hat{r}$$

Che fornisce un valore di $g = 9.7984 \text{ m s}^{-2}$.

L'effettiva accelerazione che la Terra produce su un corpo in caduta varia al variare del luogo in cui questa è misurata. In particolare dipende della latitudine e dell'altitudine

Per questo motivo è stato introdotto un valore convenzionale per $g_0 = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$. Si tratta di un valore medio che approssima il valore dell'accelerazione di gravità presente al livello del mare a una latitudine di $45,5^\circ$.

Dipendenza dall'altezza (caso $h > 0$)

Dato che $g(r) = GM_{\oplus} \frac{1}{r^2}$ per $r \geq R_{\oplus}$ ho che la variazione con r di g è in prima approssimazione:

$$g(h) = \frac{GM_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^2} = g \frac{1}{(1 + h/R_{\oplus})^2} \approx g(1 - 2(h/R_{\oplus}) + 6(h/R_{\oplus})^2 + \dots)$$

O più semplicemente:

$$\frac{\Delta g}{g} \approx -2 \frac{\Delta r}{r} = -2 \frac{h}{R_{\oplus}}$$

Salendo a mille metri d'altezza la variazione è quindi pari a $\Delta g/g \approx -2000/6.378137 \times 10^6 = 3.1 \times 10^{-4}$, ovvero di circa 3 parti su 10000, e $\Delta g = -3 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$, o $g(h = 1000\text{m}) = 9.806 - 0.003 = 9.803 \text{ m s}^{-2}$

La forma non perfettamente sferica **della terra, schiacciata ai poli** con una diminuzione del raggio di circa **21.4 km**, comporta un aumento dell'accelerazione di gravità ai poli, rispetto all'equatore di 1/298.

$$\Delta g_P \approx 2g_E \frac{\Delta r}{r} = 2 \cdot 9.7984 \frac{1}{298} = 0.066 \text{ m s}^{-2} \quad \text{o} \quad g_P = 9.864 \text{ m s}^{-2}$$

Dipendenza dalla latitudine (raggio terrestre)

La terra può essere approssimata ad un ellissoide con parametri:

$$a \text{ (raggio equatoriale)} = 6378137 \text{ m}, \quad b \text{ (raggio polare)} = 6356752 \text{ m},$$
$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 6.69438 \times 10^{-3}$$

Il raggio geocentrico (medio) in funzione della latitudine φ è:

$$R_{\oplus}(\varphi) = a \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Alla latitudine di Trieste ($45^\circ 38' 10''$) $\varphi = 45 + (38/60) + (10/3600) = 45.6361^\circ = 0.7965 \text{ rad}$

$$R_{\oplus}(0.7965) = 6367252 \text{ m, ovvero } R_{\oplus} - R_{\oplus}(\varphi = 0.7965) = 10885 \text{ m}$$

$$\Delta g_{Ts} \approx 2g_E \frac{\Delta r}{r} = 2 \cdot 9.7982 \frac{1}{586} = 0.033 \text{ m s}^{-2} \quad \text{o} \quad g_{Ts} = 9.830 \text{ m s}^{-2}$$

Effetto dell'accelerazione centripeta

La terra compie una rotazione completa sul suo asse in 24 h. La velocità angolare è quindi pari a

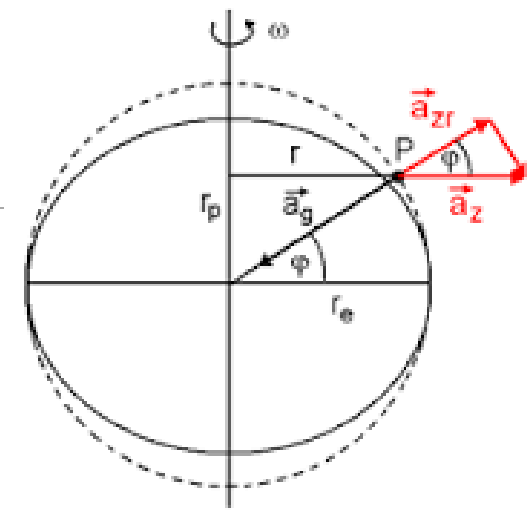
$$\omega_c = \frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$$

L'accelerazione centripeta è data da $a_c = \omega_c^2 r$, che all'equatore vale $a_c = \omega_c^2 R_\oplus = 0.034 \text{ m s}^{-2}$.

Nel sistema non inerziale solidale con la terra, all'equatore abbiamo un'accelerazione centrifuga diretta nella stessa direzione ed in verso opposto a g , per un'accelerazione di gravità apparente pari a $g_E^a = g - \omega_c^2 R_\oplus = 9.798 - 0.034 = 9.764 \text{ m s}^{-2}$.

Alla latitudine φ , nell'approssimazione sferica, il raggio è $R(\varphi) = R_\oplus \cos \varphi$, inoltre solo la componente di a_c lungo g ha un effetto sul modulo dell'accelerazione di gravità apparente, questa proiezione comporta un secondo fattore $\cos \varphi$ per cui $a_c^\parallel(\varphi) = \omega_c^2 R_\oplus \cos^2 \varphi = \omega_c^2 R_\oplus (1 - \sin^2 \varphi)$.

Alla latitudine di Trieste ($45^\circ 38' 10''$) $\varphi = 0.7965 \text{ rad}$, per cui $a_c^\parallel = 0.017 \Rightarrow 9.830 - 0.017 = 9.813 \text{ m s}^{-2}$



$$g_\varphi^a = g - \omega_c^2 R_\oplus + \omega_c^2 R_\oplus \sin^2 \varphi = g_E^a \left(1 + \frac{\omega_c^2 R_\oplus}{g_E^a} \sin^2 \varphi \right)$$

Dipendenza dalla Latitudine

Tenendo conto sia:

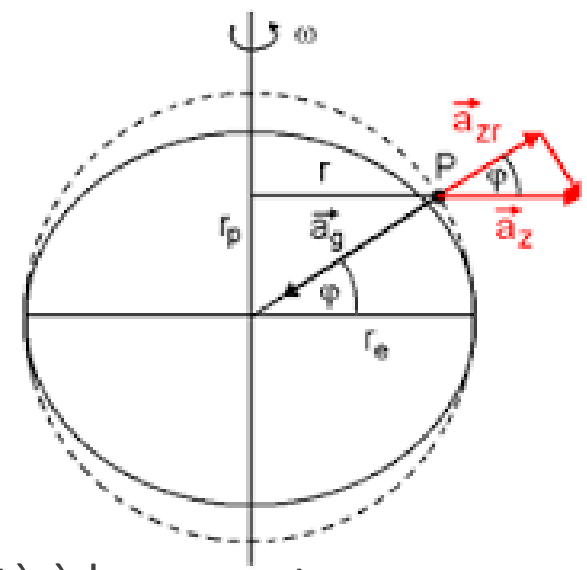
- dell'accelerazione centripeta in funzione della latitudine
- della variazione del raggio terrestre medio in funzione della latitudine
- dell'altezza nel punto in cui g viene misurata

Una formula che approssima bene il valore 'medio' dell'accelerazione di gravità è la seguente:

$$g(\varphi, h) = 9.780327 (1 + 0.005302 \sin^2 \varphi - 5.8 \times 10^{-6} \sin^2 2\varphi) - 3.086 \times 10^{-6} h \quad m s^{-2}.$$

Che fornisce un valore con una precisione di $\sim \pm 5 \times 10^{-5}$

Il valore che tale formula fornisce per Trieste ($45^\circ 38' 10''$) è di $g = 9.807 m s^{-2}$.



Il Global Positioning System GPS

Il Sistema GPS

- 24 satelliti ad un'altezza di 20 000 km
- 6 orbite inclinate di 55° rispetto l'equatore
- Almeno 4 sempre sopra l'orizzonte
- I satelliti forniscono ora e posizione
- Orologio al Cesio con precisione di 10^{-14}

MISURA di TEMPO

$$1 \text{ giorno} = 24 \times 60 \times 60 \text{ s} = 86400 \text{ s}$$

$$1 \text{ anno} = 365 \text{ giorni} = 3.1536 \times 10^7 \text{ s}$$

$$\text{Errore } \Delta t = 86\,400 \times 10^{-14} = 0.86 \text{ ns}$$

In posizione Meno di 30 cm



Dove mi trovo?

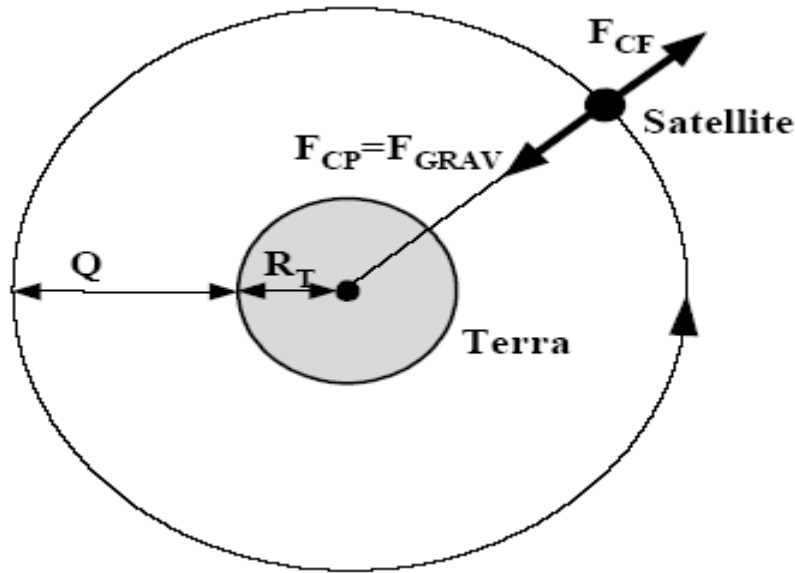
La mia posizione nello spazio è ottenuta risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} c(t - t_1) = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \\ c(t - t_2) = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2} \\ c(t - t_3) = \sqrt{(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2} \\ c(t - t_4) = \sqrt{(x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2} \end{cases}$$

Il posizionamento GPS non funzionerebbe senza usare:

- La relatività ristretta (cinematica relativistica)
- La relatività generale (deformazione della spazio-tempo)
- Inoltre c'è il problema della velocità di propagazione nel mezzo

Satelliti (per GPS)



$$F_{GRAV} = G \frac{M_T m_s}{a^2} \quad F_{CF} = m_s \frac{V^2}{a} \quad a = R_T + Q$$

$$v = \sqrt{G \frac{M_{\oplus}}{a}}$$

La velocità non dipende dalla massa della sonda ma solo da quella della terra. Allo stesso modo la relazione tra altezza e periodo, noto che $T=2\pi a/V$, è:

$$\begin{aligned} G_N &= 6.673 \times 10^{-11} \quad m^3 kg^{-1} s^{-1} \\ R_{\oplus} &= 6.378 \times 10^6 \quad m \\ M_{\oplus} &= 5.974 \times 10^{24} \quad kg \end{aligned}$$

$$a = \sqrt[3]{\frac{T^2 G_N M_{\oplus}}{4\pi^2}} \quad \text{espressa in [m]}$$

Quota (Km)	T (min)	V (Km/s)	Satelliti
850	102	7,4	meteorologici della serie NOAA
20200	$720 \cong 12^h$	3,9	del sistema GPS
35730	$1436 \cong 24^h$	3,1	geostazionari tipo Meteosat o Immarsat

Characteristics

a satellite-based navigation system

developed and operated by the U.S. Department of Defence (DoD)

First GPS satellite launched in February, 1978

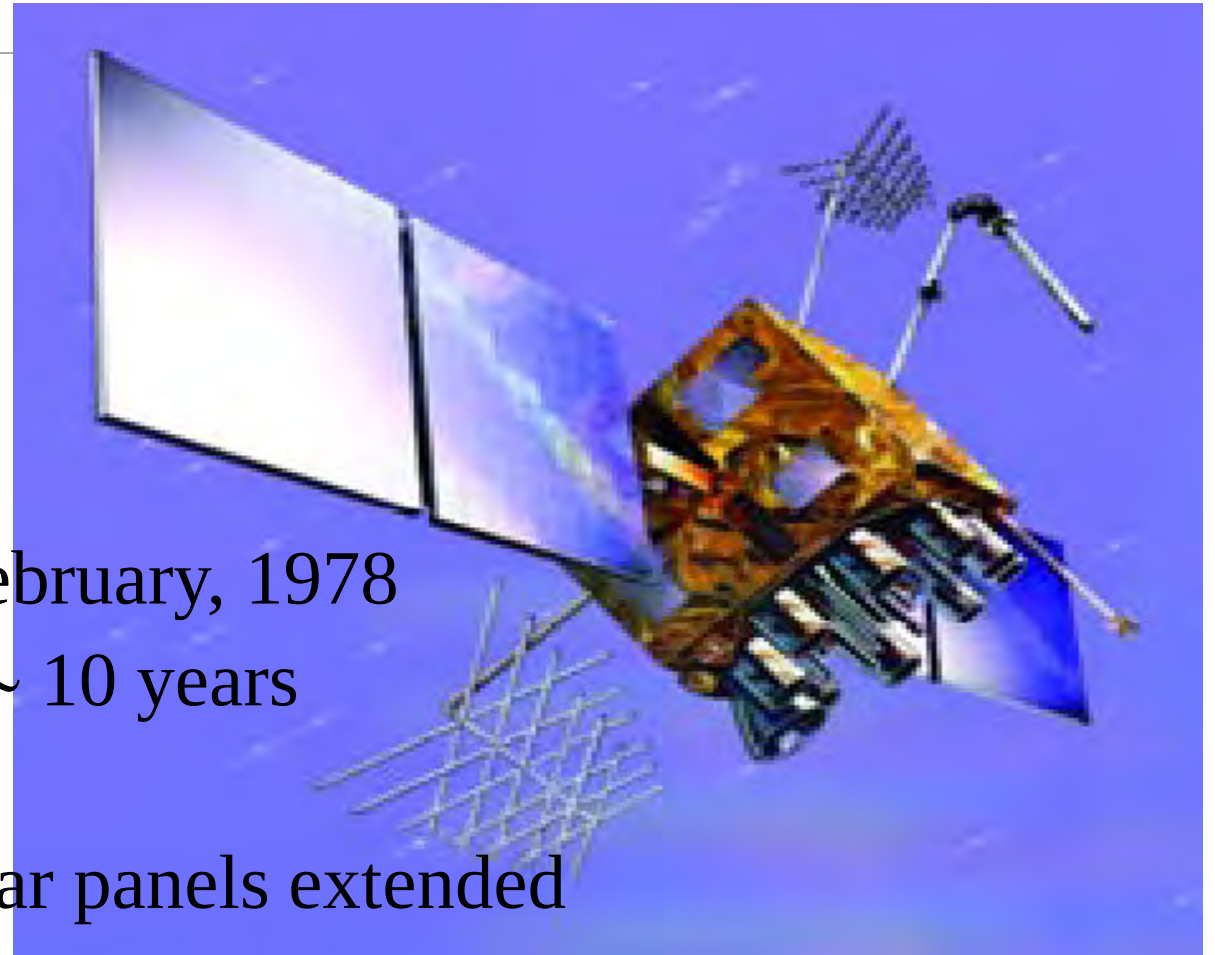
Each satellite is expected to last ~ 10 years

Mass ~ 2,000 pounds (910 kg)

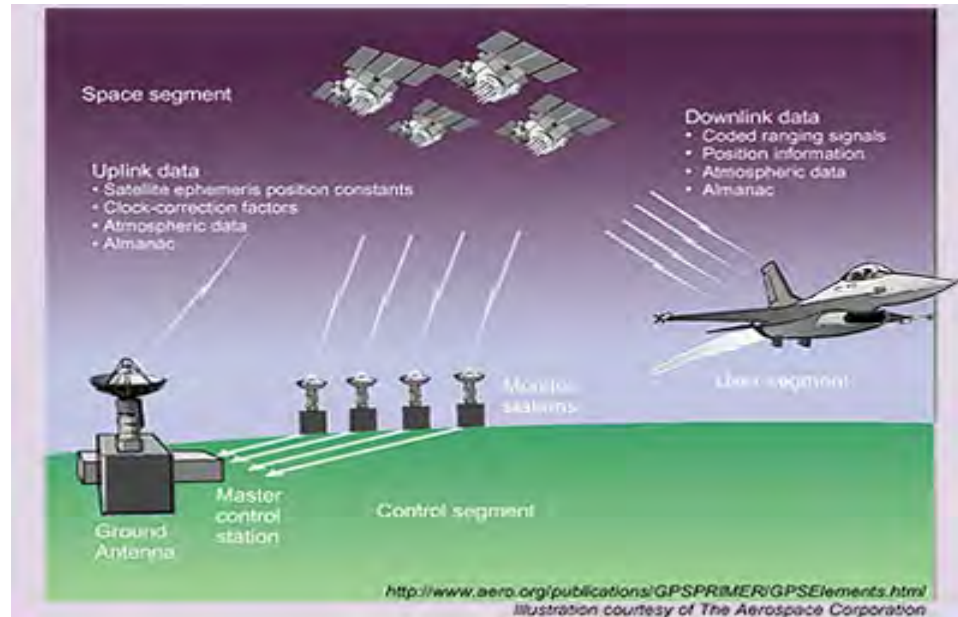
Dimensions ~ 17 feet (5.2 m) solar panels extended

Transmitter power ≤ 50 watts

Each satellite transmits two signals, L1 (civilian, 1575.42 MHz) and L2 (1267,60 MHz)



Struttura a Segmenti



Tradizionalmente il sistema è diviso in tre segmenti denominati:

- 1) **Segmento spaziale**, che è formato da una costellazione nominale di 24 satelliti, che trasmettono dei codici di distanza a radio frequenza e dei dati di navigazione.
- 2) **Segmento di controllo**, che consiste in una rete di monitoraggio e di mezzi di controllo per il mantenimento della costellazione e per l'aggiornamento dei messaggi di navigazione dei satelliti.
- 3) **Segmento dell'utilizzatore**, che consiste in una varietà di ricevitori, di decodificatori e di elaboratori dei segnali GPS.

FONDAMENTALE caratteristica del sistema: Ogni satellite porta onboard un orologio atomico e tutti i satelliti sono sincronizzati sulla stessa ora.

Segmento Spaziale

Principali caratteristiche:

- 4 oscillatori ad altissima precisione:
2 al cesio e 2 al rubidio
- Razzi per correzione orbita
- 2 pannelli solari (area 7.25mq)
per la produzione di energia
- Peso 845 kg
- Vita media progetto: 7,5 anni

Le principali funzioni sono:

- 1- trasmettere varie informazioni agli utilizzatori attraverso l'invio di diversi segnali
- 2- ricevere e memorizzare informazioni trasmesse dal segmento di controllo
- 3- mantenere un segnale di tempo molto accurato utilizzando i 4 oscillatori portati a bordo
- 4- eseguire manovre di correzione d'orbita con razzi guidati dal segmento di controllo

Colorado Springs

Segmento di Controllo
Kwajalein



Hawaii

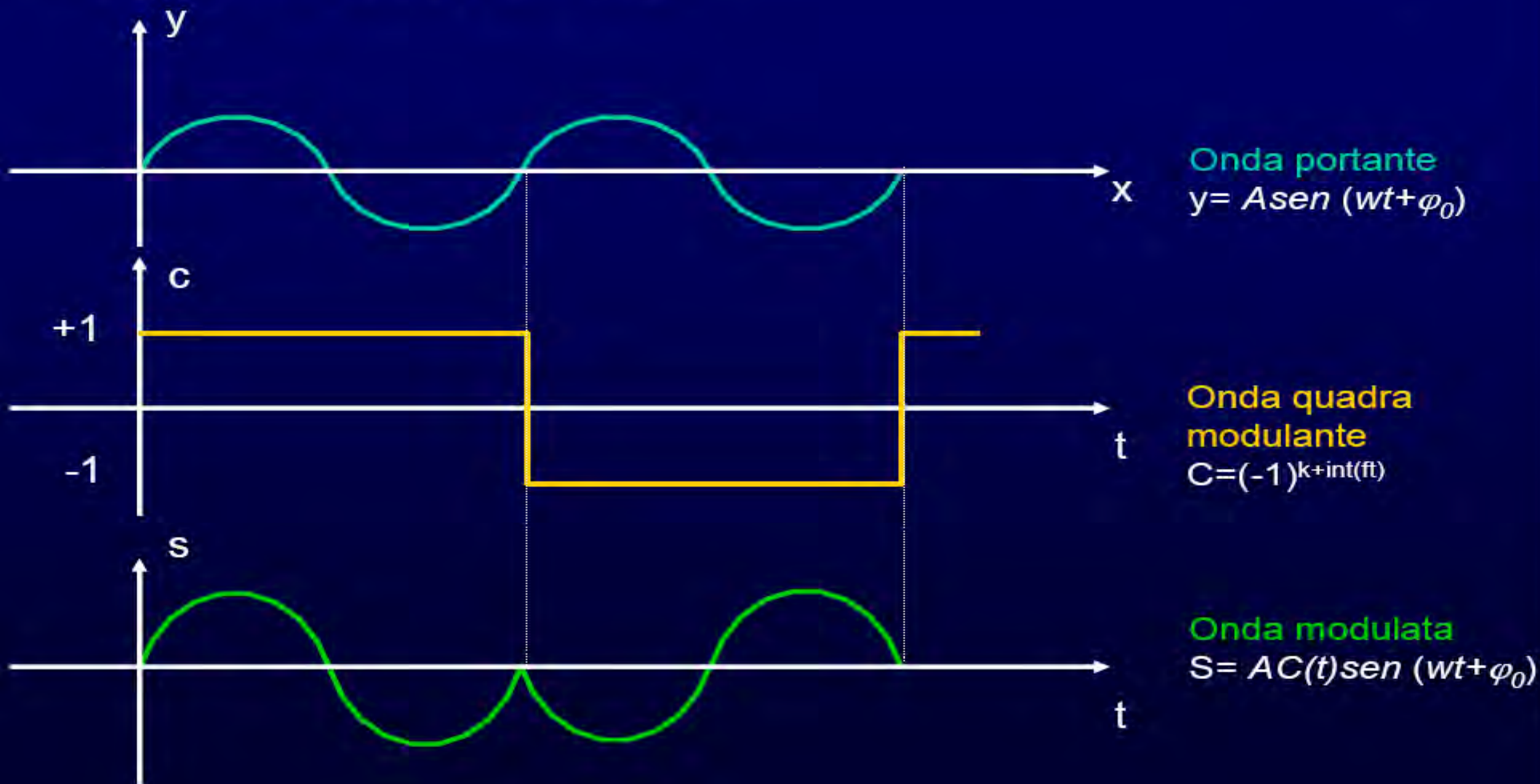
Ascencion

Diego Garcia



- 5 stazioni equispaziate lungo l'equatore in posizioni note con grande precisione;
- vengono classificate come Monitor Stations (MSs), **Master Control Station (MCS)** e Ground Control Stations (GCS).

Modulazione del segnale in fase



Il segnale

PORTANTI:

L1 di frequenza f_1
pari a $154 \cdot f_0 = 1575,42$ MHz e lunghezza d'onda $\lambda_1 = 19$ cm

L2 di frequenza f_2
pari a $120 \cdot f_0 = 1227,60$ MHz e lunghezza d'onda $\lambda_2 = 24$ cm



2 per valutare gli effetti negativi della ionosfera

Modulate con:

C/A (course acquisition)

$$f_{C/A} = 1/10 f_0$$

$$\lambda_{C/A} \approx 300 \text{ m}$$

P (precision)

$$f_P = 1/10 f_0$$

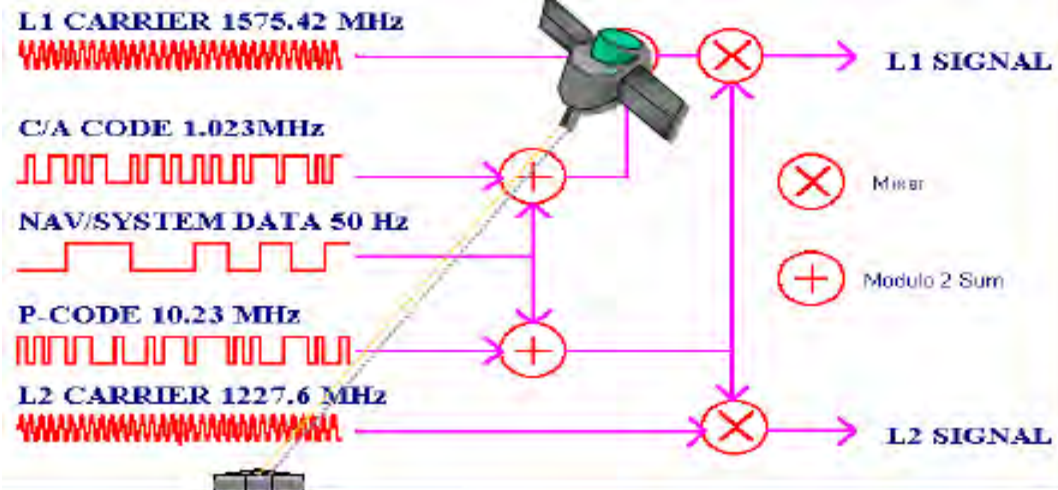
$$\lambda_P \approx 30 \text{ m}$$

D (data code)

$$f_D = 50 \text{ Hz}$$

Pseudo random
noise

Sequenza
casuale
+1 -1



Il segnale

- si ripete ogni millesimo di secondo
- diverso per ogni satellite

Modulate con:
C/A (course acquisition)

$$f_{C/A} = 1/10 f_0$$

$$I_{C/A} \approx 300\text{m}$$

P (precision)

$$f_P = 1/10 f_0$$

$$I_P \approx 30\text{m}$$

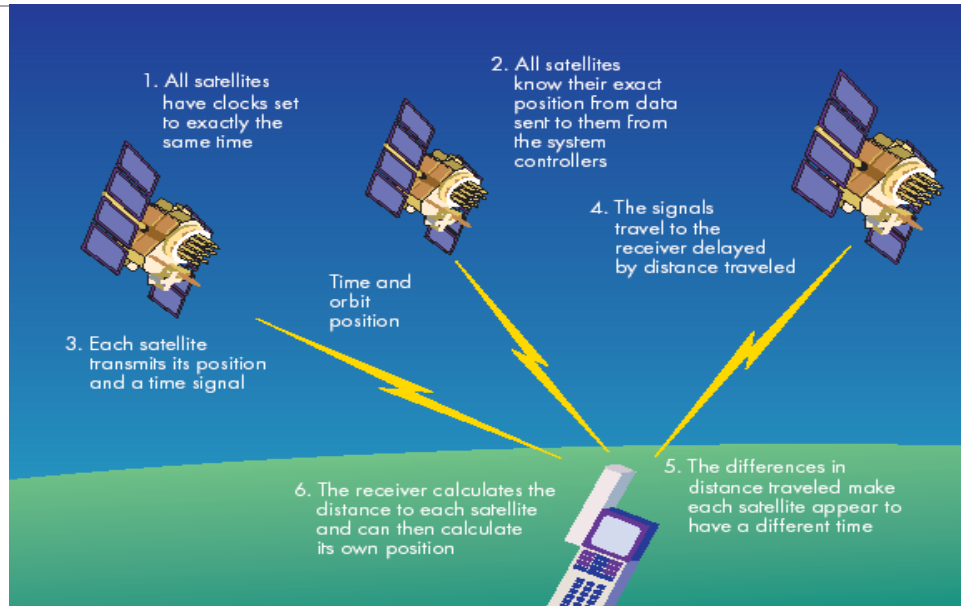
D (data code)

$$f_D = 50\text{Hz}$$

- si ripete ogni 267 giorni

- Codice binario
- Trasmette un messaggio organizzato in 5 sezioni:
 - Almanacco dei satelliti (posizione approssimata)
 - Effemeridi inviate (parametri kepleriani)
 - Parametri per la correzione degli orologi
 - Stato satelliti
 - Modello ionosferico

Come Funziona



TLM (TeLeMetry word) HOW (HandOver Word)

I satelliti inviano continuamente il: **Codice D (Navigation Data o Messaggio di Navigazione)**

trasmesso a bassa velocità, 50 bps, che contiene:

- le effemeridi del satellite ossia la posizione esatta per un dato istante ed i parametri utili per il calcolo delle sue successive posizioni; i dati vengono trasmessi con continuità e vengono aggiornati dal satellite ogni ora.
- l'istante di trasmissione del messaggio;
- le correzioni per l'orologio di bordo
- le correzioni per i ritardi causati dalla rifrazione ionosferica e troposferica
- stato dei satelliti (il cosiddetto health)
- l'almanacco, ossia le effemeridi approssimate di tutti gli altri satelliti.

Working Principle - 2

GPS receiver acquires the signal, measures the **interval between transmission and receipt** of the signal to determine the distance between the receiver and the satellite

The receiver has to calculate this data for **at least three satellites**, to determine its location on the Earth's surface (**triangulation**):

- the distance to **one satellite** narrows down the receiver's position to some place on **an imaginary sphere**
- the distance to a **second satellite** narrows the position down to **the intersection of two spheres**
- the exact position of a **third satellite** narrows the possibilities down to **two points of intersection**

The **exact position** is usually known now because one of the points is usually not on the surface of the Earth

A **fourth satellite** position can be used to find the one single location without any doubt

Working Principle - 3

Distance from the receiver to the satellite is measured **by timing how long it takes for a signal** sent from the satellite to arrive at the receiver

Both the satellite and the receiver simultaneously generate the same **pseudo random code**

The time delay before both codes will **synchronise**, multiplied by the speed of light gives the distance

The pseudo random code is a very complicated code that looks like random electrical noise:

- it makes sure that the receiver doesn't accidentally sync up to some other signal
- It guarantees that the receiver doesn't accidentally pick up another satellite's signal (each satellite has its own unique pseudo random code)

Correzioni per Relatività

Rispetto ad un orologio sulla superficie terrestre, la frequenza ν dell'atomo di cesio sul satellite si sposta di una quantità relativa $\Delta\nu/\nu$ che risente dell'effetto gravitazionale e di quello Doppler, il contributo può essere espresso come:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{hg}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} = 1.1 \times 10^{15}h - 5.6 \times 10^{-18}v^2$$

Con h l'altezza rispetto al riferimento gravitazionale terrestre, g l'accelerazione di gravità e v la velocità relativa.

Orologio al suolo, $v = 465\text{m/s}$, in orbita, $v = 3800\text{ m/s}$

Lo scarto relativo sarà di 2×10^{-9} , che, al giorno, provoca una differenza di:

$$\Delta t = t \frac{\Delta\nu}{\nu} = 86400 \times 2 \times 10^{-9} = 100 \times 10^{-6} \Rightarrow 100\mu s$$

Che implica un errore di distanza di

$$\Delta s = c\Delta t = 3 \times 10^8 \times 10^{-4} = 30000m \Rightarrow 30\text{ km}$$

Errori nel sistema GPS

Errori strumentali

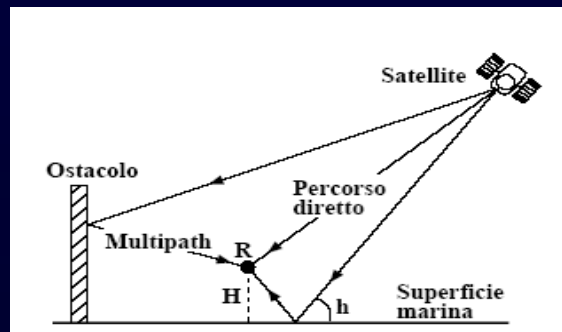
Errori di modello (sistematici)

- biases orologi
- biases d'orbita
- biases atmosferici
- biases di ambiguità delle portanti

Errori di osservazione

- cycle slips
- Multipath
- centro di fase

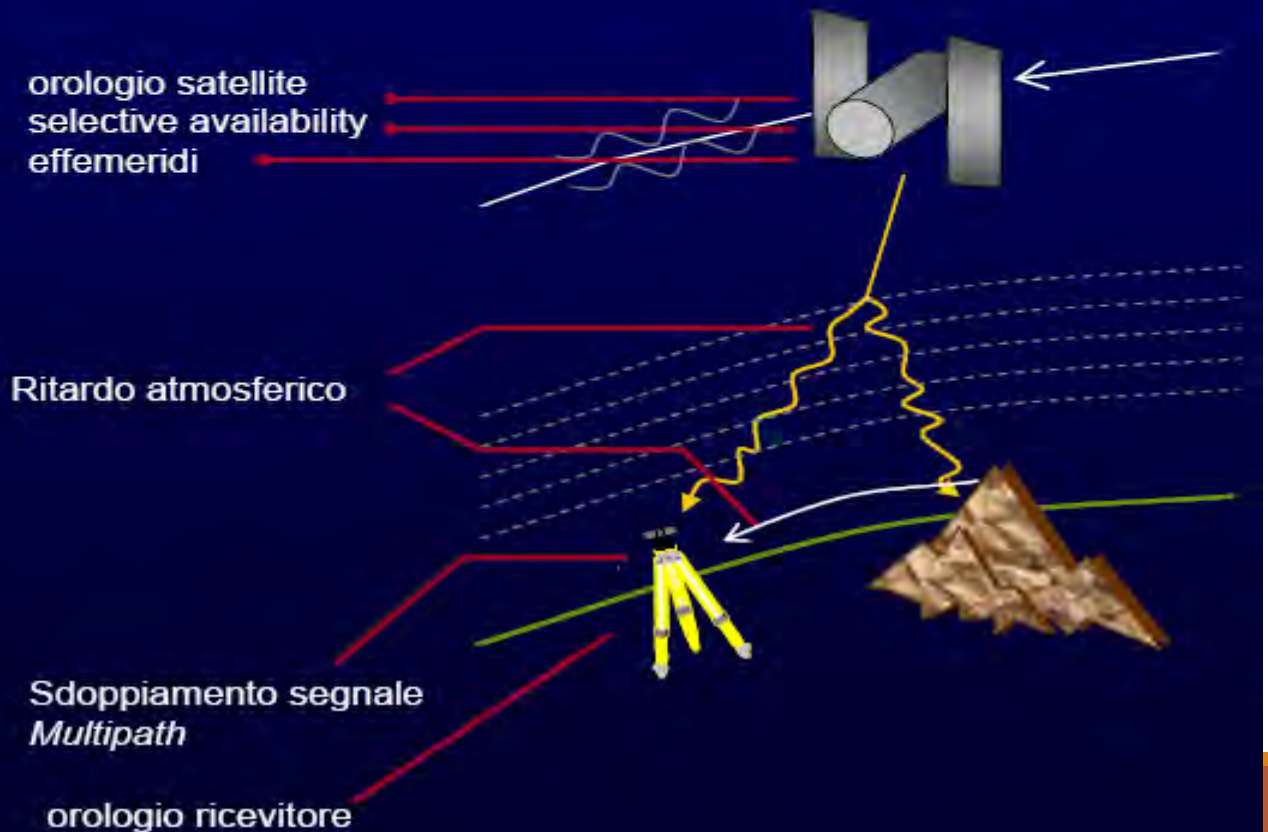
Selective availability



$$\nu_{fase} = \frac{c}{n} \quad \nu_{gruppo} = c \cdot n$$

$$n = \sqrt{1 - \frac{e^2}{4\pi^2 m_e} \frac{n_e}{\nu^2}} \approx \sqrt{1 - 81 \frac{n_e}{\nu^2}}$$

taglio per $\nu = \nu_{cut} = \sqrt{81 \cdot n_e} \approx 10 \text{ MHz}$
(per $n_e \approx 10^{12} \text{ elettroni/m}^3$)



Solution

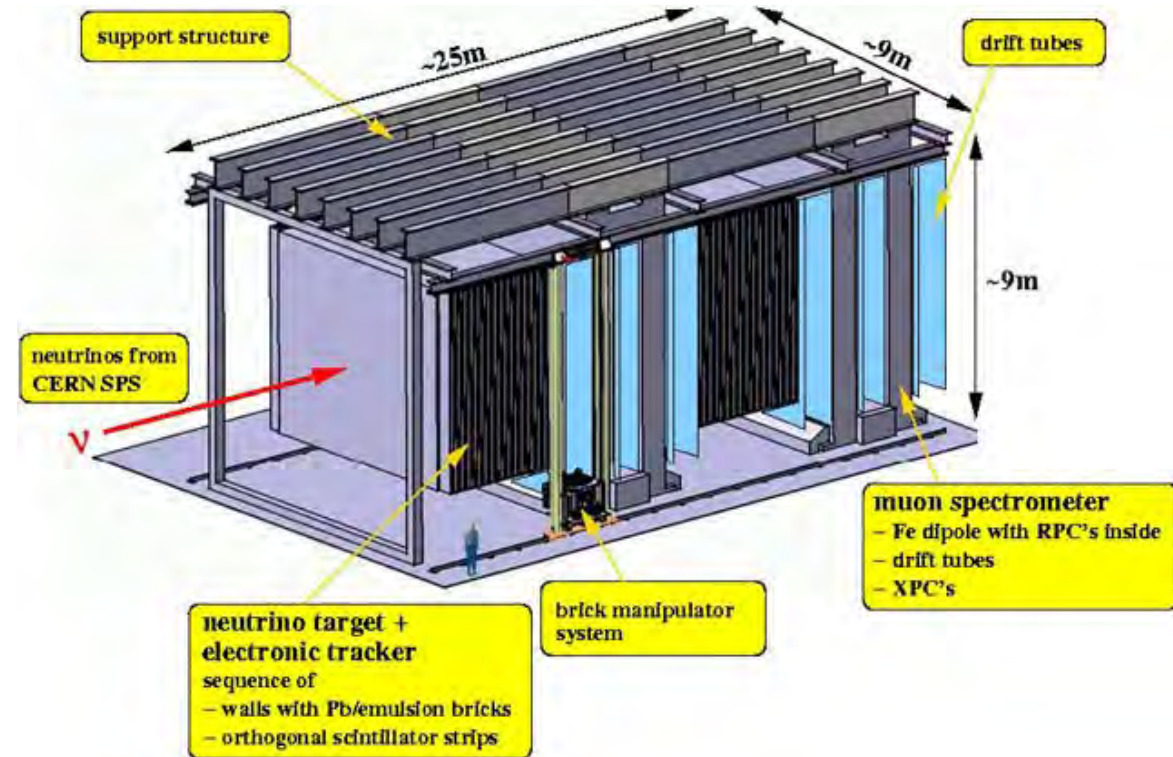
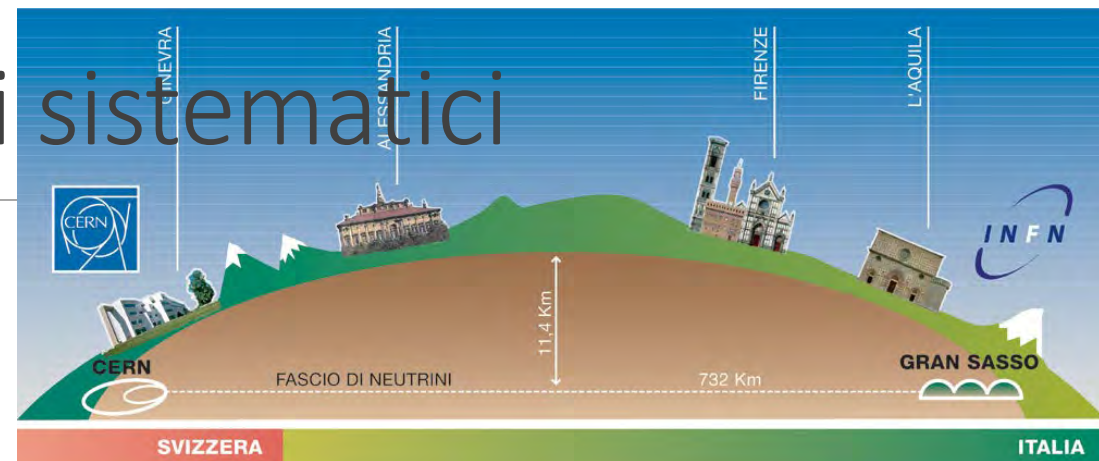
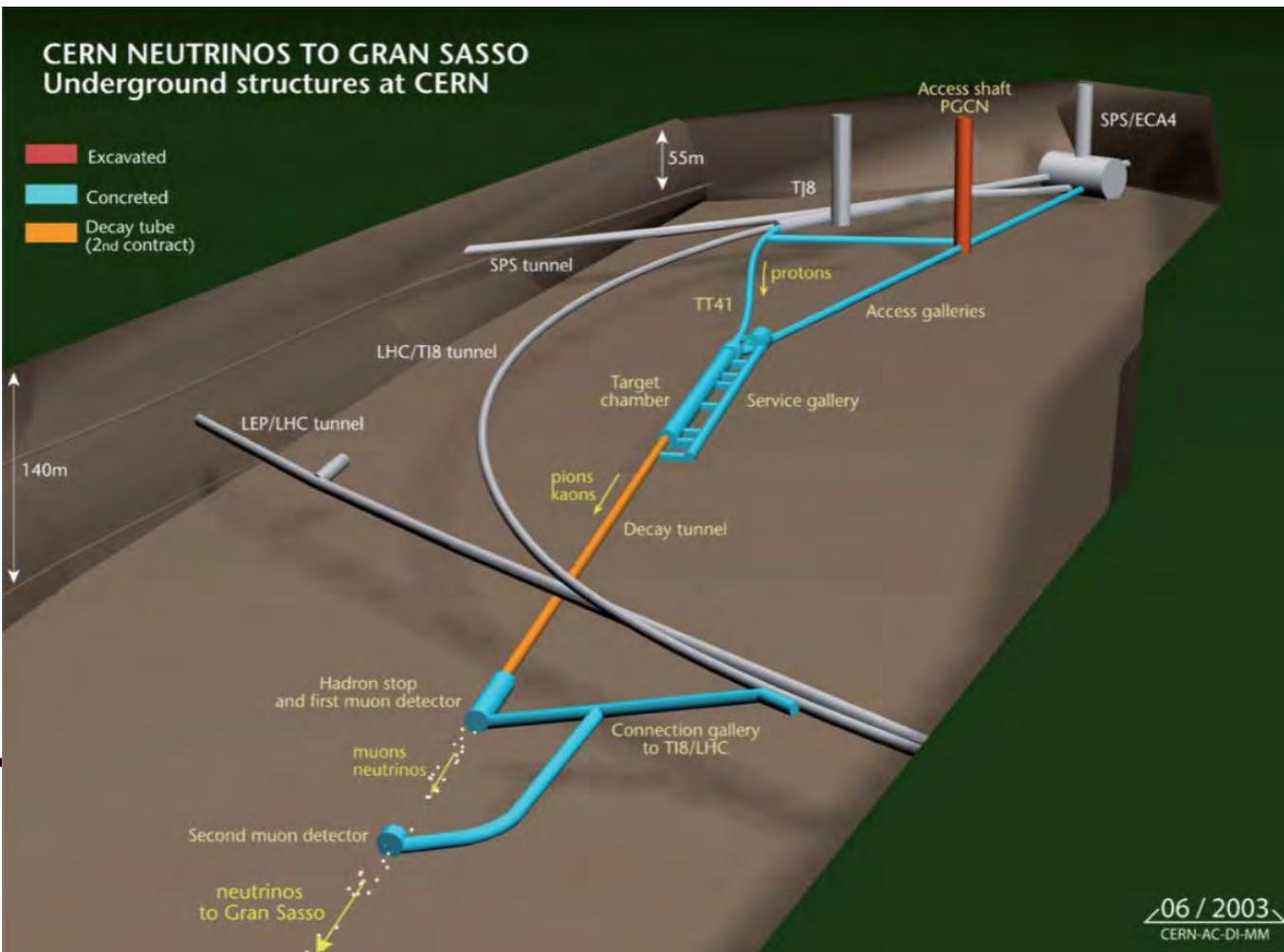
Dual GPS (DGPS)

Accuracy: 3 ÷ 15 feet ($\sim$ 1 ÷ 5 m)

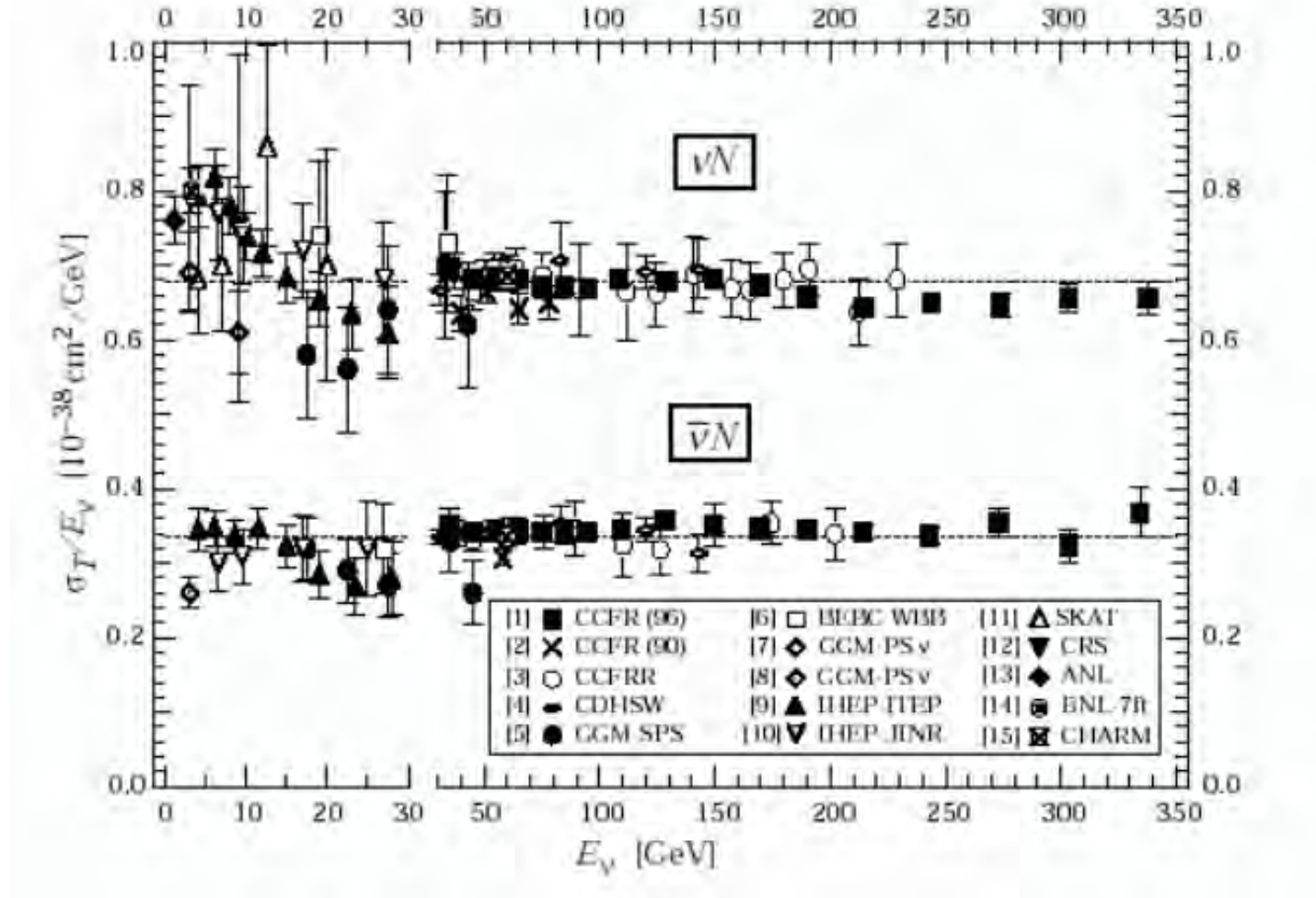
U.S. Coast Guard, U.S. Army Corps of Engineers + foreign government departments transmit DGPS corrections (from L2 channel) through marine beacon stations

These beacons operate in the 283.5 - 325.0 kHz frequency range and are free of charge

Difficoltà di stima di effetti sistematici



Sezione d'urto dei neutrini...



$$\text{Rate}[s^{-1}] = \text{Flusso Incidente } \Phi [s^{-1}m^{-2}] \times \text{Sezione d'Urto } \sigma[m^{-2}] \times \text{Numero di Centri Diffusori } N_{CD}$$

Due conti

Fascio di neutrini del CERN per i LNGS: 2 estrazioni di $10.5\mu s$ separate da 50ms ogni 6 secondi.

(produzione dei neutrini: protoni da 300-400 GeV su bersaglio di berillio: $p \text{ Be} \rightarrow \pi K X$ con i pioni che successivamente decadono $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ e $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ con vite medie dell'ordine di $2.6 \times 10^{-8}s$).

Il numero di protoni inviato sul bersaglio ogni 10s è dell'ordine di 10^{13} . L'efficienza di produzione dei neutrini non è molto elevata e nello stesso tempo sono prodotti $\sim 5 \times 10^7$ neutrini.

Di questi solo il 10% circa passa attraverso la superficie del rivelatore di Opera. Il flusso utile sui $5m^2$ di superficie ortogonale al fascio del rivelatore OPERA è quindi pari a $\phi_\nu \sim 5 \times 10^5 \nu/s$. Il flusso per unità di superficie (cm^2) è $\phi_\nu \sim 10 \nu/(s \cdot cm^2)$

Ipotizziamo che il bersaglio di OPERA (emulsioni) sia pari a 10T di carbonio. Il numero di nucleoni (protoni/neutroni) su cui i neutrini possono interagire dando un segnale è:

$$N_{CD} = 12 \frac{10^4 \text{ kg}}{1.6 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 5 \times 10^{32}$$

+altri due conti

La sezione d'urto totale per i neutrini di 20 GeV è di $\sigma_T = 20 \times 0.7 \times 10^{-38} = 1.5 \times 10^{-37} \text{ cm}^2$,

La rate è quindi data da:

$$Rate = \frac{\text{numero segnali}}{s} = \phi_\nu \cdot N_{CD} \cdot \sigma_T \cdot \varepsilon = 10 \times 5 \times 10^{32} \times 1.5 \times 10^{-37} \varepsilon = 7.5 \times 10^{-4} s^{-1} \varepsilon$$

3 anni di presa dati sono $\sim 3.6 \times 10^7 s$ quindi il numero di eventi totale che mi aspetto, con questi conti, è:

$$10^7 \times 7.5 \times 10^{-4} \sim 3 \times 10^4 \varepsilon$$

Misura del tempo di volo si basa su 10^{20} protoni dell'SPS del CERN con un segnale totale di 15223 neutrini rivelati.

Difficoltà di stima di effetti sistematici

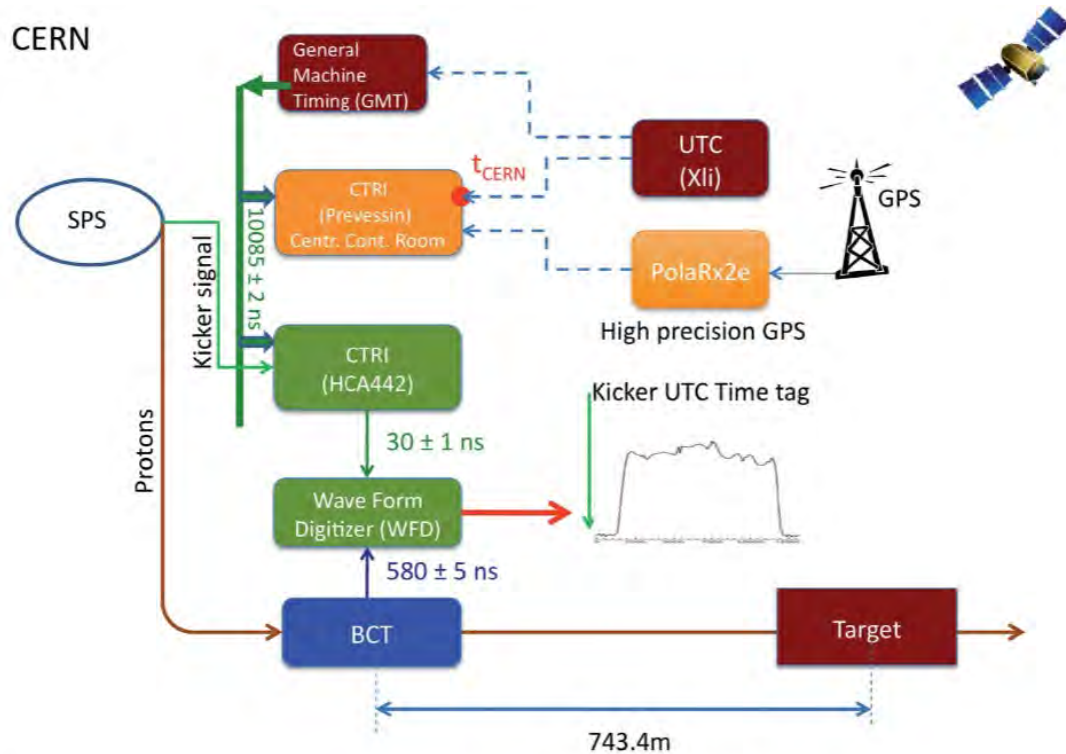


Figure 3. Schematic of the CERN SPS/CNGS timing system. Green boxes indicate detector time-response. Orange boxes refer to elements of the CNGS-OPERA synchronisation system. Details on the various elements are given in Section 6.

Coordinated Universal Time - UTC

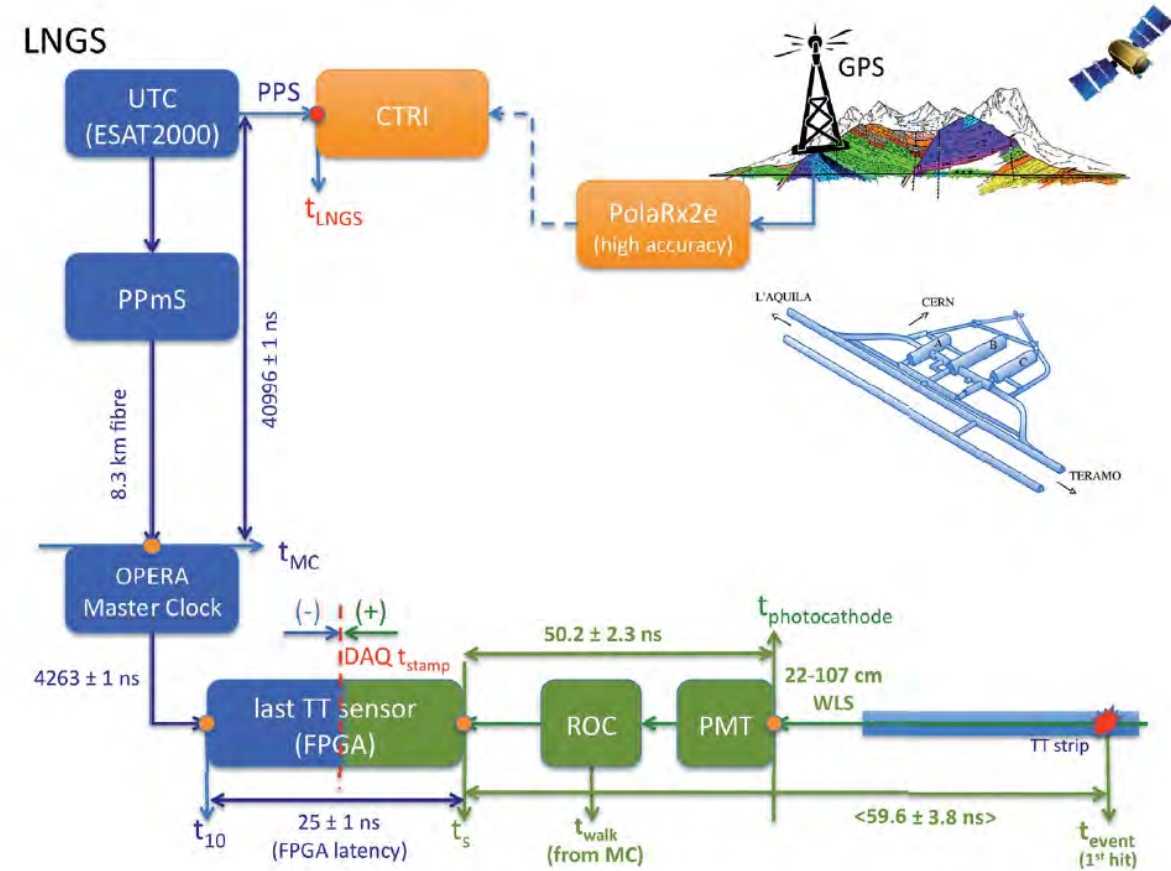


Figure 6. Schematic of the OPERA timing system at LNGS. Blue delays include elements of the time-stamp distribution; increasing delays decrease the value of δt . Green delays indicate detector time-response; increasing delays increase the value of δt . Orange boxes refer to elements of the CNGS-OPERA synchronisation system.

Difficoltà di stima di effetti sistematici

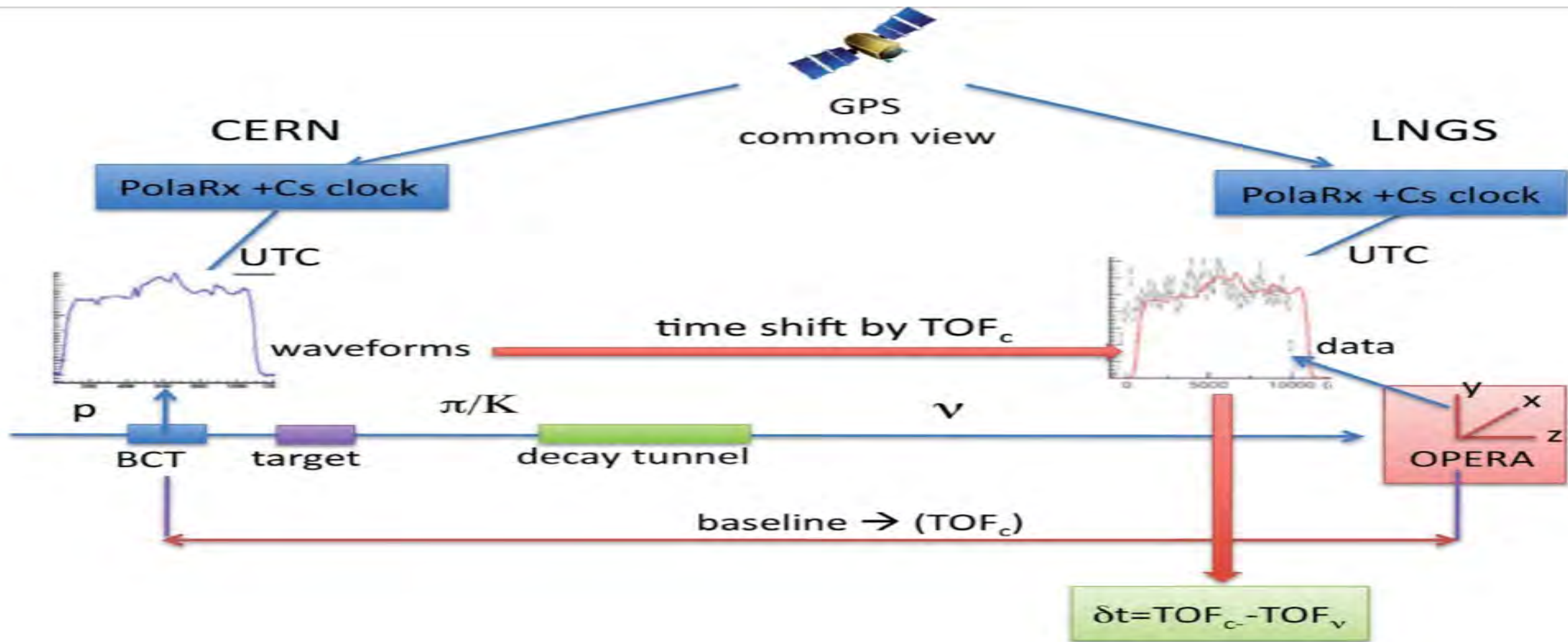


Figure 5. Schematic of the time of flight measurement.

Difficoltà di stima di effetti sistematici

First result: early arrival by: $60.7 \text{ ns} \pm 6.9 \text{ ns}$

Erratum: $6.5 \text{ ns} \pm 7.4 \text{ ns}$

Table 2. Contribution to the overall systematic uncertainty on the measurement of δt .

Error source	ns	Error distribution
Baseline (20 cm)	0.67	Gaussian
Meson decay point	0.2	Exponential (1 side)
Interaction point of external neutrino events	2.0	Flat (1 side)
CTRI signal propagation through GMT chain Δt_{UTC}	2.0	Gaussian
Kicker magnet signal to WFD $\Delta t_{trigger}$	1.0	Gaussian
BCT calibration Δt_{BCT}	5.0	Gaussian
CNGS-OPERA GPS synchronisation	1.7	Gaussian
LNGS 8.3 km fibre to OPERA Master Clock	3.7	Gaussian
Master Clock to FPGA Δt_{clock}	1.0	Gaussian
TT PMT signal to FPGA	2.3	Gaussian
TT timing simulation of ν interactions	3.0	Gaussian
FPGA latency	1.0	Gaussian
RPC signal formation	5.0	Gaussian
RPC signal propagation	1.0	Gaussian
RPC FEB delay	1.0	Gaussian
RPC DAQ clock trasmission	2.0	Gaussian
RPC FPGA calibration	1.0	Gaussian
RPC plane disuniformity	3.9	Gaussian
Total systematic uncertainty for TT based analysis	-8.0, +8.3	
Total systematic uncertainty for RPC based analysis	-9.6, +9.9	

The analysis of internal neutral current and charged current events, and external ν_μ CC interactions from the 2009, 2010 and 2011 CNGS data was carried out to measure the neutrino velocity, v . The sensitivity of the measurement of $(v - c)/c$ is about one order of magnitude better than former accelerator neutrino experiments.

The results of the study using CNGS muon neutrinos with an average energy of 17 GeV indicate a neutrino arrival time compatible within errors to the one computed by assuming the speed of light in vacuum:

$$\delta t = (6.5 \pm 7.4 \text{ (stat.)}_{-8.0}^{+8.3} \text{ (sys.)}) \text{ ns.}$$

The corresponding relative difference of the muon neutrino velocity and the speed of light is:

$$(v - c)/c = (2.7 \pm 3.1 \text{ (stat.)}_{-3.3}^{+3.4} \text{ (sys.)}) \times 10^{-6}.$$

An alternative analysis in which the likelihood function is built by associating each neutrino interaction to its waveform instead of using the global PDF leads to a compatible value of $\delta t = (3.5 \pm 5.6 \text{ (stat.)}_{-9.1}^{+9.4} \text{ (sys.)}) \text{ ns}$ affected by an additional contribution to the systematic error.

Che cos'è successo

A major problem showed up. On December 6 – 8, measurements took place of the time interval between

- the moment when a signal (a laser pulse) is sent from the lab's GPS timing equipment somewhere on the earth's surface, across 8.3 kilometers down into the underground lab and to OPERA itself, where the laser pulse is converted (in a special device, which I'll just call **the box**) to an electronic signal for use by the OPERA Master Clock, and
- the moment when the Master Clock sends a timing pulse to synchronize all of OPERA's many computers and other devices.

Time delay from the external LNGS Lab to the OPERA Master Clock^(*)

20 Jul 2006	(41001.4 ± 0.3) ns	r.m.s. ~ 3 ns	confirmed in 2007
6-8 Dec 2011	(41074.6 ± 0.5) ns	r.m.s. ~ 6 ns	(73.2 ± 0.6 stat) ns larger than 2006
13 Dec 2011	(41000.0 ± 0.3) ns	r.m.s. ~ 3 ns	consistent with 2006

(*) The value quoted in ArXiv:v2 is 40996 and is obtained by subtracting 5.9 ns

28/03/2012 LNGS

G.Sirri - INFN BOLOGNA

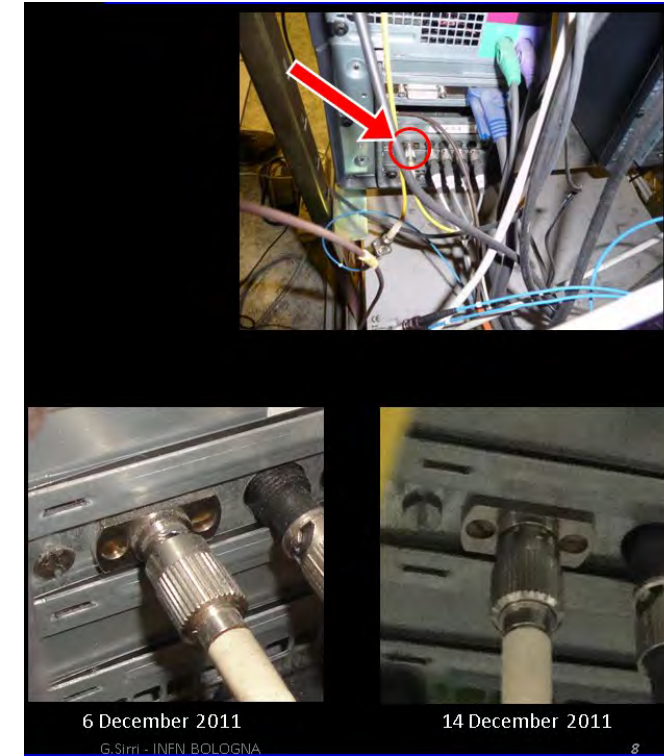
5

- This change was of the right type to potentially cause an apparent early arrival time for the neutrinos, and of roughly the right size to explain OPERA's measurement.

Che cos'è successo

efforts to track down the problem led people to discover that the fiber carrying the laser pulse to OPERA's converter had not been screwed correctly into **the box**.

- this is not a “loose wire”. A copper wire that isn't tightly connected to an electrical lead can cause an electrical device to behave erratically, because electrical current will sometimes flow and sometimes not. But the optical fiber isn't what most people think of as a wire — it carries light, not electrical current; and it wasn't loose, it just wasn't screwed in all the way
- Those within OPERA who were studying this problem found was that when they screwed the optical fiber in tightly, the time interval went right back to 41000 seconds
- But at around the same another problem appeared. They detected some kind of timing *drift*. For technical reasons, OPERA took data in 0.6 second chunks, and cross-checks of measurements suggested that the timing at the end of a chunk was not calibrated properly relative to the beginning of a chunk. So this added confusion to the situation. The drift would also have affected their measurements, though possibly in the other direction, causing neutrinos to apparently arrive *later*.



what was causing the two effects?

Che cos'è successo

Delay measured at an early stage of the amplifier circuit



The effect is related to the charging up of the photodiode capacitance.

The Reset signal sent to the sensors is delayed by the same amount as the MC PPmS.

→ Underestimation of the neutrinos ToF

Che cos'è successo

What about the drift? It turns out the Master Clock itself was not properly calibrated. After it fired with the laser pulse, at the start of each 0.6 second data chunk, it then drifted slightly during the next 0.6 seconds, by a total of 74 nanoseconds. Then it would be re-synchronized 0.6 seconds later (albeit incorrectly, due to the improper fiber connection) by one of the laser pulses coming down the fiber. On average, its drift would have an effect of 37 nanoseconds, but it would be worse at some times and better at others during the 0.6 second chunk of data. **This effect would make the neutrinos appear to arrive late, but turns out to be insufficient to cancel the effect of the fiber.**

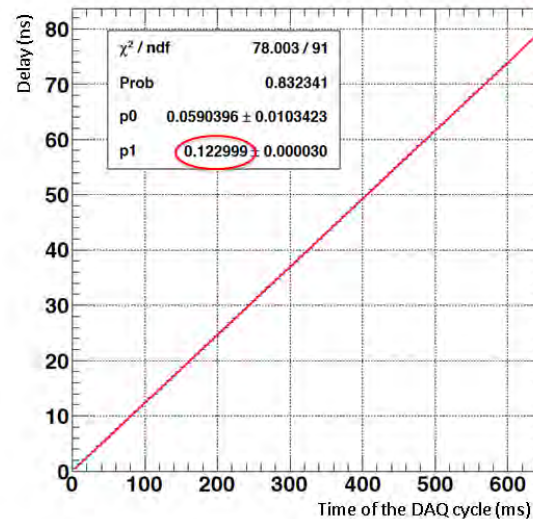
Time delay from 1st trigger of the DAQ cycle
(keeping only the ns digits of the DAQ time)

1 Trigger / 1ms
DAQ cycle: 0.6 s

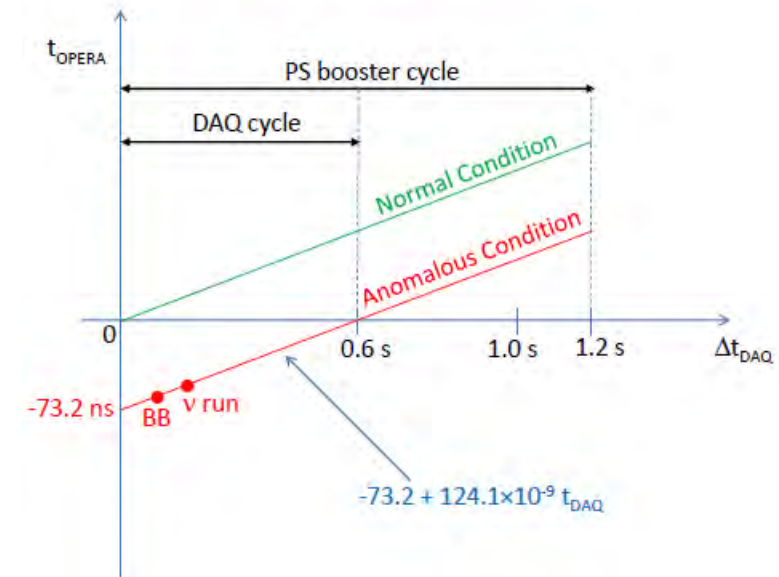
time delay between 2 triggers:
1ms + 0.123 ns

at the end of the DAQ cycle
⇒ 74 ns more

⇒ time drift between the OPERA MC and ESAT GPS2 oscillators



A working model



Inciso

Attività di ricerca – Dipartimento di Fisica

astrofisica

fisica teorica

fisica sperimentale

- fisica nucleare e subnucleare
- stato solido
-

in collaborazione con INFN

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)

Per garantire almeno il futuro impiego delle risorse del CNR a favore della ricerca fondamentale, Colonnetti (professore di scienza delle costruzioni al Politecnico e presidente del CNR) decise, in accordo con Amaldi e con il Comitato di Fisica ([Gleb Wataghin](#)-Torino, [Gilberto Bernardini](#)-Roma, [Antonio Rostagni](#)-Padova, [Pietro Caldirola](#)-Padova ed [Edoardo Amaldi](#)-Roma), di dare vita a un apposito Istituto:

L'8 agosto 1951 era nato così, con il **decreto n. 599 del presidente del CNR**, l'Istituto Nazionale di Fisica Nucleare.

Compito dell'INFN, secondo l'art. 2, primo comma, del decreto istitutivo, era «il coordinamento dell'attività scientifica del

- Centro di studio per la fisica nucleare, costituito in Roma,
- del Centro di studio degli ioni veloci, costituito in Padova,
- del Centro sperimentale e teorico di fisica nucleare, costituito in Torino»;
- era inoltre prevista la possibilità di ampliare l'Istituto aggregandovi «altri organi di studio e di ricerca

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN)



“è l’istituto che promuove, coordina ed effettua la ricerca scientifica nel campo della fisica subnucleare, nucleare e astro particellare, nonché lo sviluppo tecnologico necessario alle attività in tali settori. Opera in stretta connessione con l’Università e nell’ambito della collaborazione e del confronto internazionale.”

COMPASS

CSN1-GR1 -FISICA PARTICELLARE

CSN2- GR2- FISICA ASTROPARTICELLARE

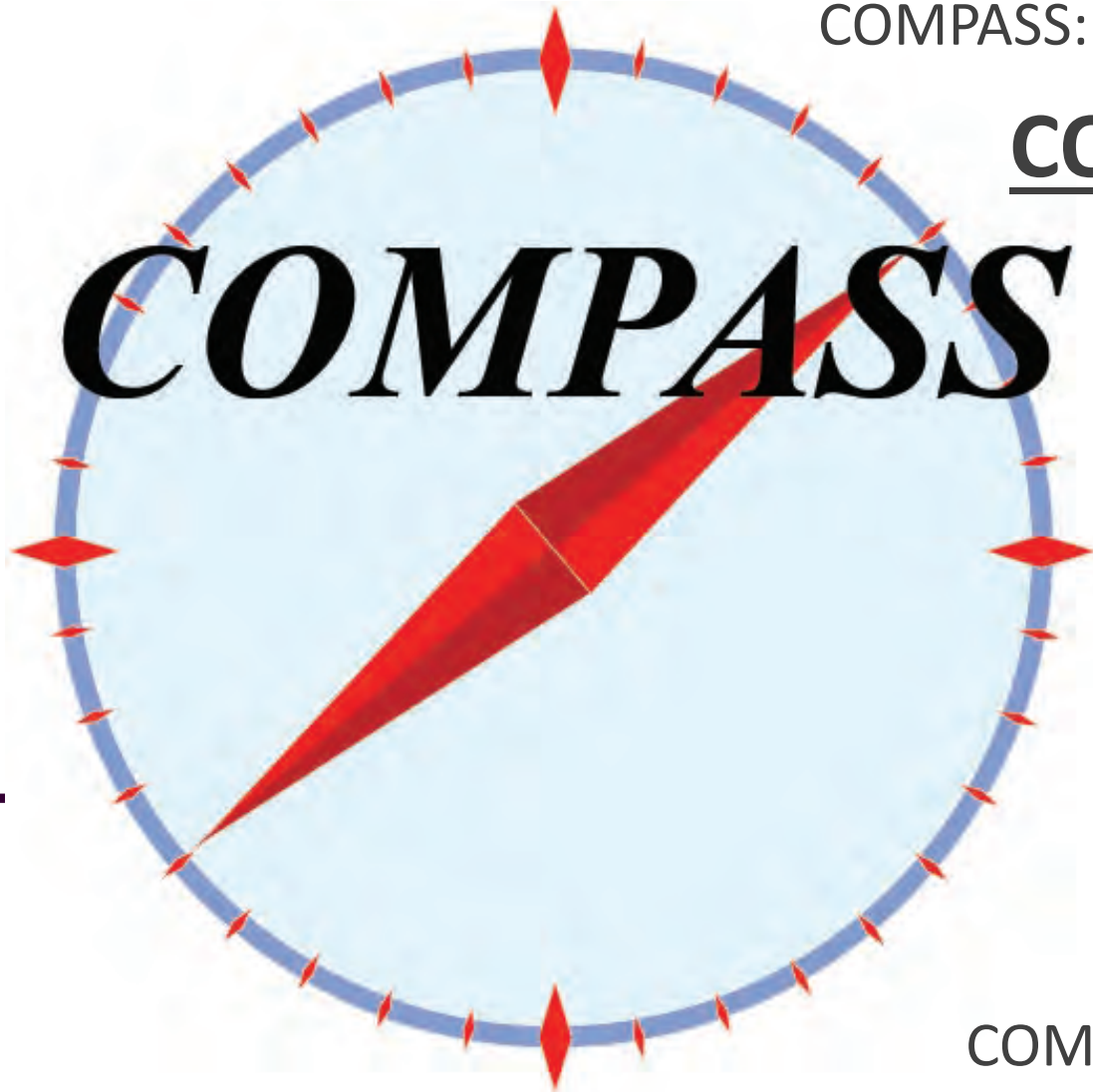
CSN3-GR3- FISICA NUCLEARE

CSN4-GR4 - FISICA TEORICA

CSN5-GR5 - RICERCA TECNOLOGICA

What does “COMPASS” stand for?

COMPASS: NA58, EHN2, building 888:



Common

Muon

Proton

Apparatus for

Structure and

Spectroscopy

COMPASS is the *largest surface experiment* at CERN

COMPASS Collaboration



Дубна (LPP and LNP),
Москва (INR, LPI, State
University),
Протвино



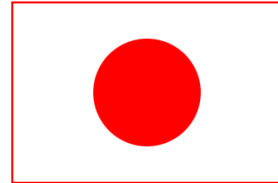
CERN



Bochum, Bonn (ISKP
& PI), Erlangen,
Freiburg, Mainz,
München TU



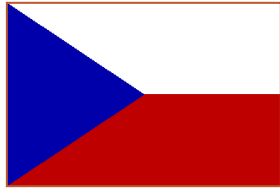
Warsawa (NCBJ),
Warsawa (TU)
Warsawa (U)



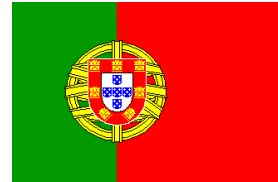
Yamagata



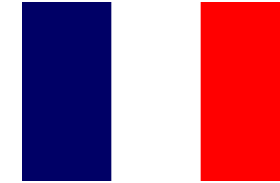
USA (UIUC)



Praha



Lisboa



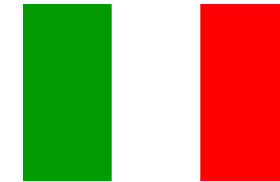
Saclay



Burden, Calcutta



Tel Aviv



Torino
(University, INFN),
Trieste
(University, INFN)



Taipei (AS)

- about 220 members
- from more than 13 different countries
- involving 24 universities and research institutes

The People



Gruppo di Trieste: ricercatori, assegnisti, dottorandi

- **Dipartimento di Fisica:** A. Bressan, A. Martin, A. Kerbizi, J. Matousek, A. Moretti
- **Sezione INFN:** S. Dalla Torre, S. Levorato, S. Tessaro, F. Tessarotto, F. Bradamante, ...
- **ICTP:** A. Cicuttin, M.L. Crespo
>18 persone

COMPASS – some facts

Located at CERN North Area beam line (Possible beams: μ^+ , μ^- , π^+ , π^- , K , p , $\bar{p}$ → Several physics programs)

- 1996: COMPASS proposal
- 1999-2000: construction and installation
- 2001: commissioning run

■ Experiments with **muon beam**

- Spin structure: Gluon polarization
- u,d,s flavor decomposition of the nucleon spin
- Transverse spin
- Quark transverse momentum distribution

■ Experiments with **hadron beams**

- Pion polarizability
- Search for exotic states:
 - Light meson spectroscopy
 - Baryon spectroscopy

COMPASS - II (2012 – 2018)

- '3D' structure of the nucleon (DVCS)
- Unpolarised quark transverse momentum distribution and strangeness
- Pion and Kaon polarizabilities
- Polarized Drell-Yan: universality of transverse momentum distribution

COMPASS – some facts

- Experiments with **muon beam**

COMPASS - I (2002 – 2011)

- Nucleon Spin structure
- p, d polarized target (L & T)

COMPASS - II (2012 – 2017)

- DVCS/Unpolarised
- Long LH₂ target

- Experiments with **hadron beams**

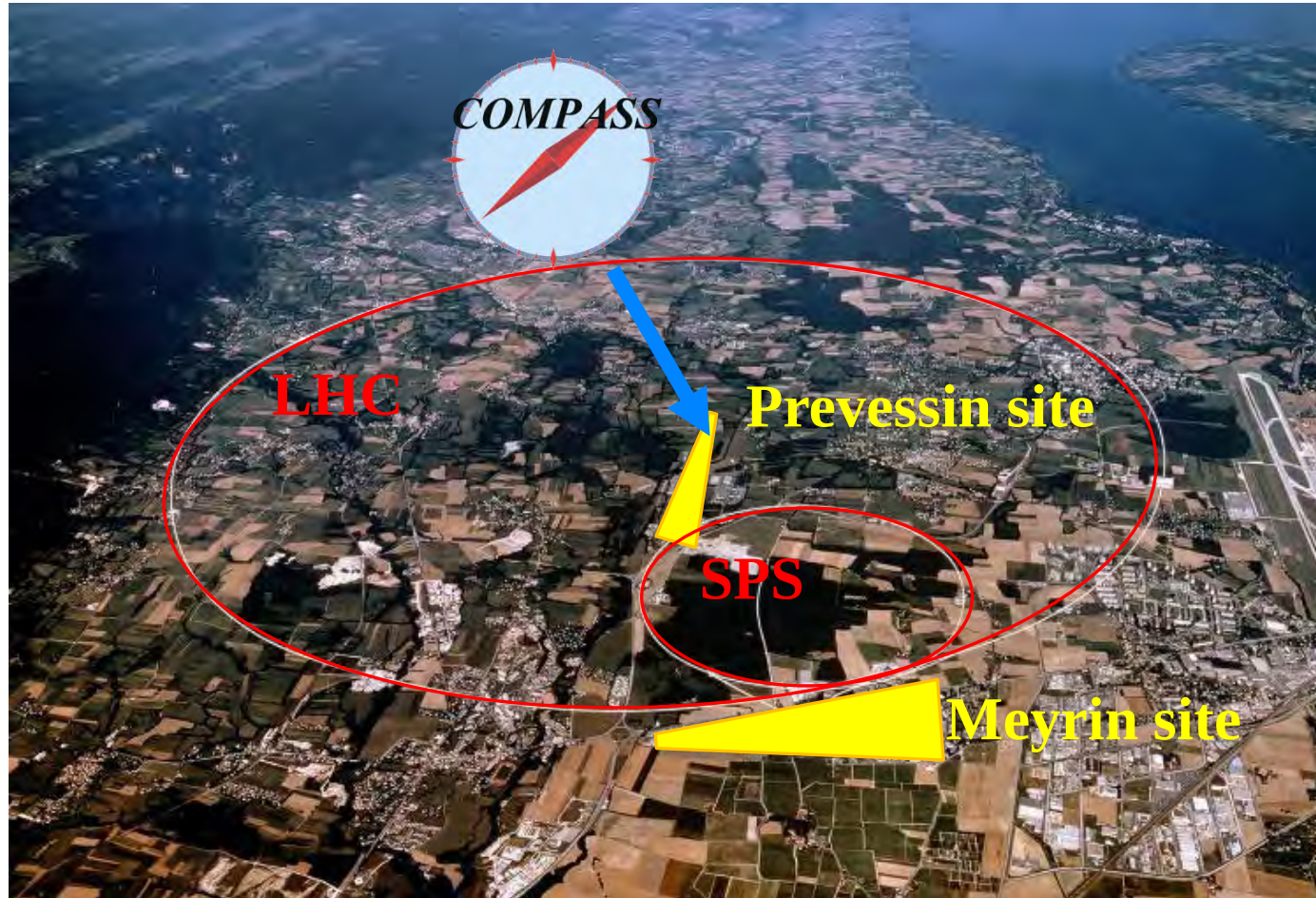
- Hadron spectroscopy
- Small LH₂ or nuclear targets

- Polarized Drell-Yan studies
- Polarized target (T)

Reconfigurable target region - versatile experimental setup!

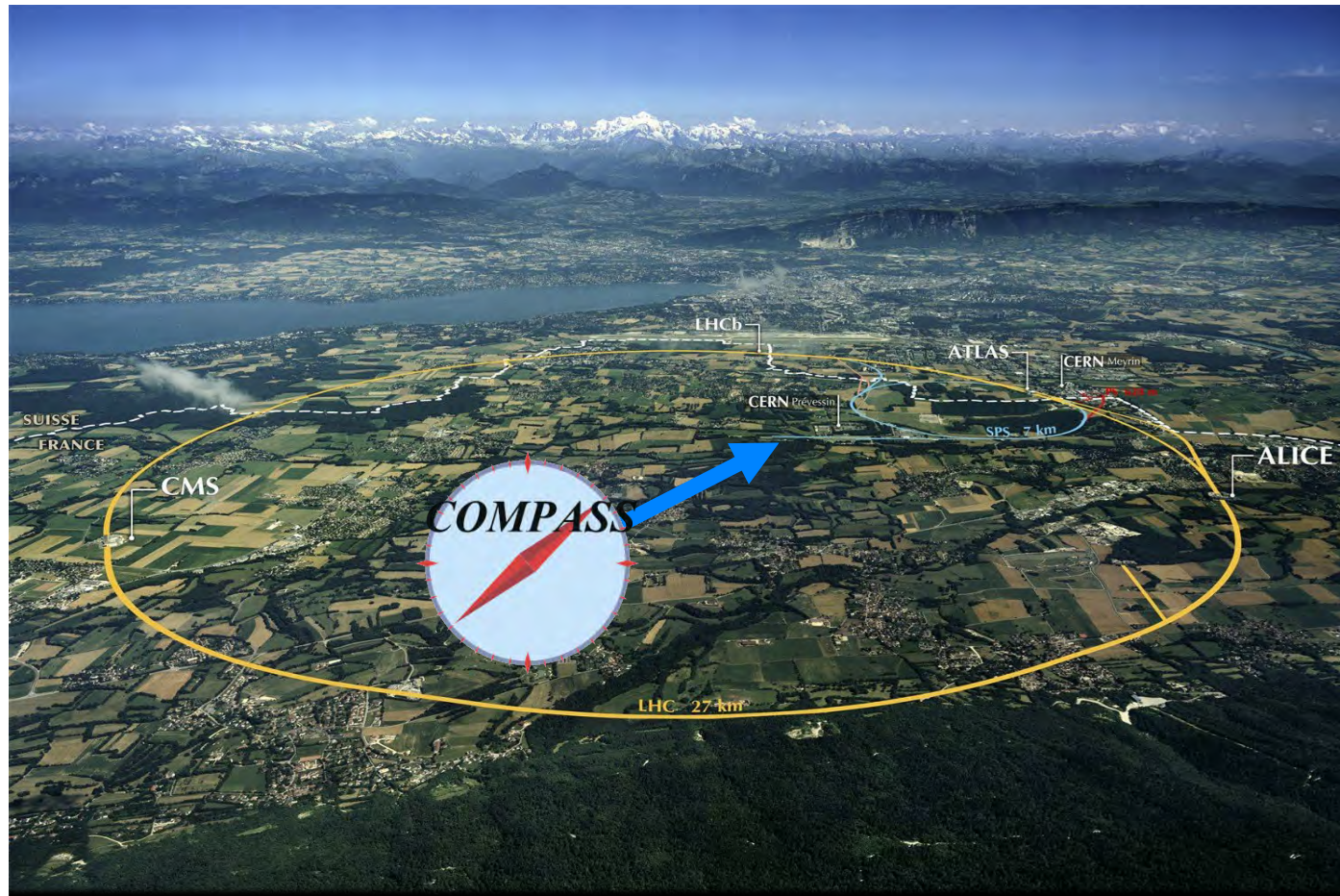
Where is COMPASS located? View from SW

SPS experiment in the North Area at the CERN Preveessin site



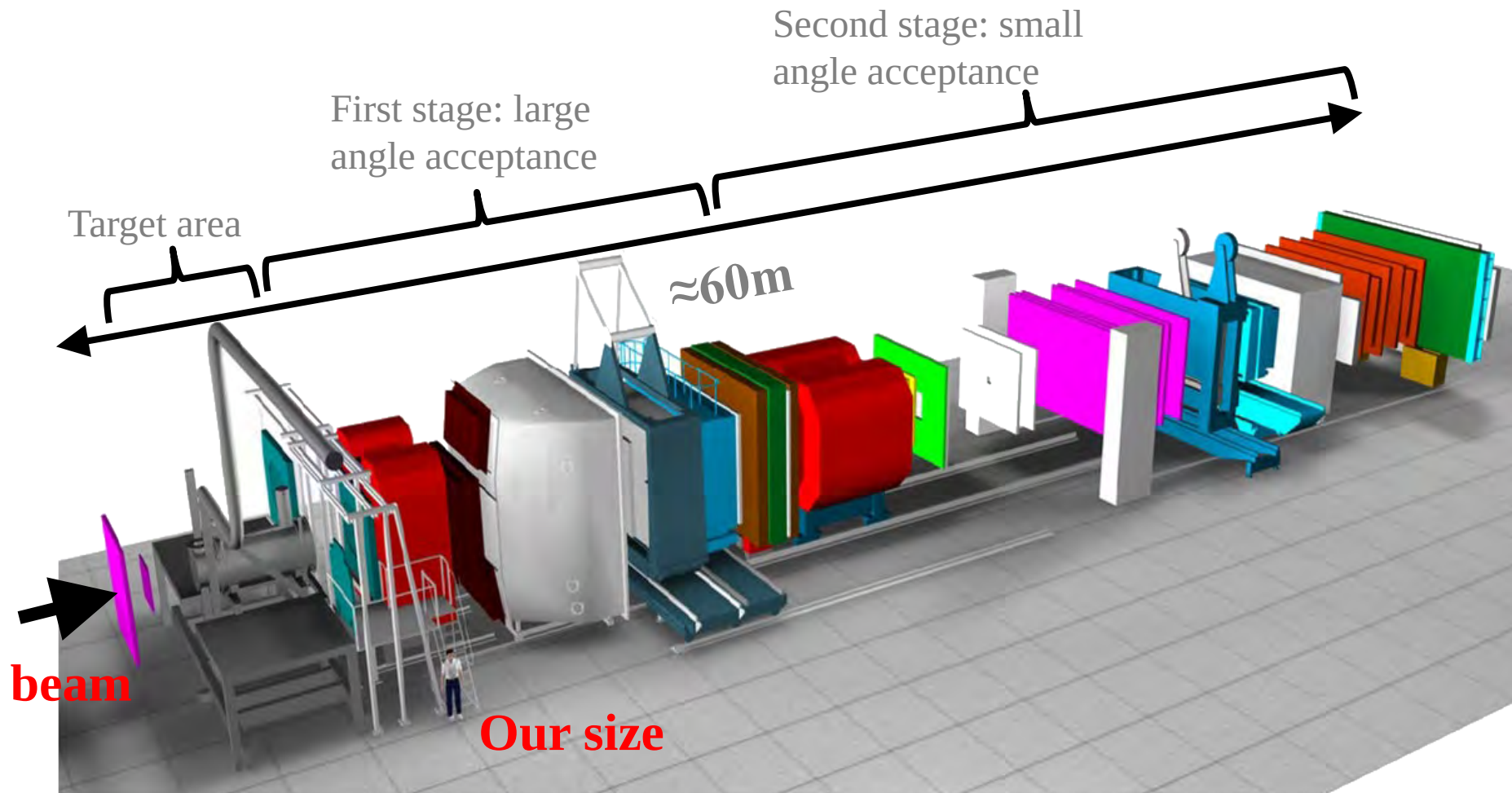
Where is COMPASS located? View from NW

SPS experiment in the North Area at the CERN Preveessin site

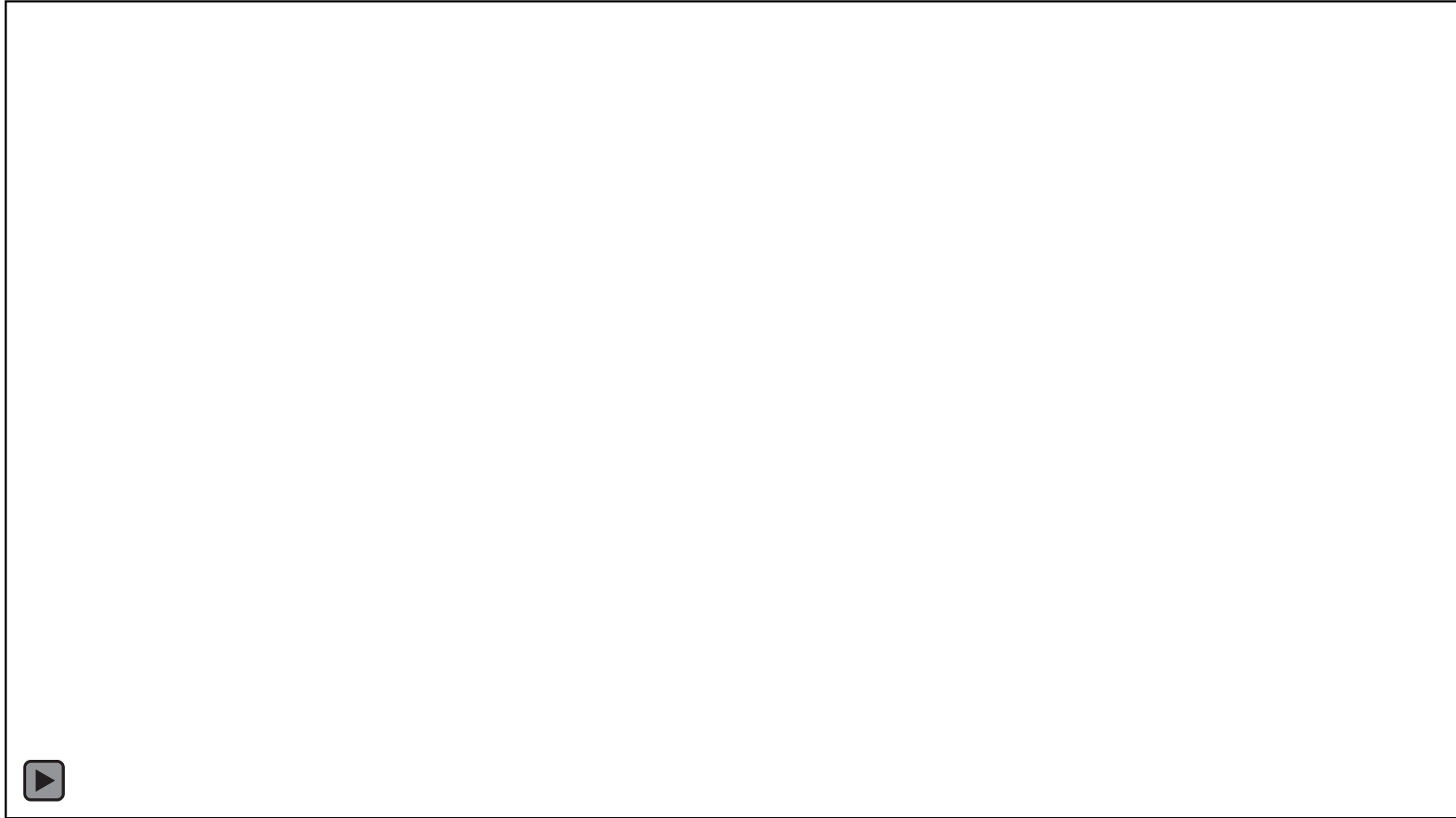


What does COMPASS look like?

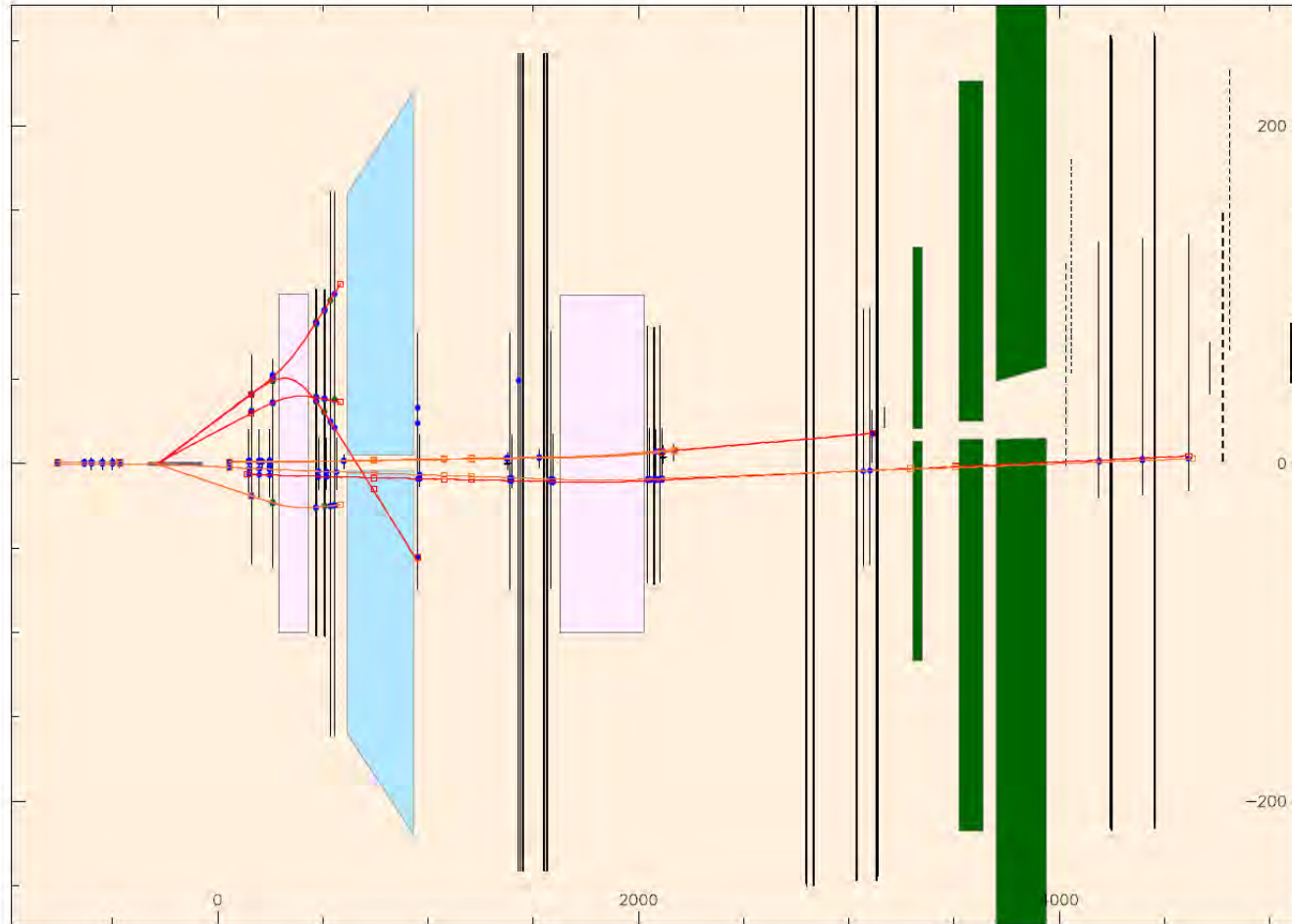
Flexible fixed-target experiment, two-stage forward large-angle spectrometer



COMPASS Spectrometer



Spectrometer: momentum determination



Magnets bend charged particle tracks.

Knowing the magnetic field and the hits of the track on the detectors, we can reconstruct the path of the charged particle through the detector.

Quantum tomography of the nucleon



Join the real
3D experience !!

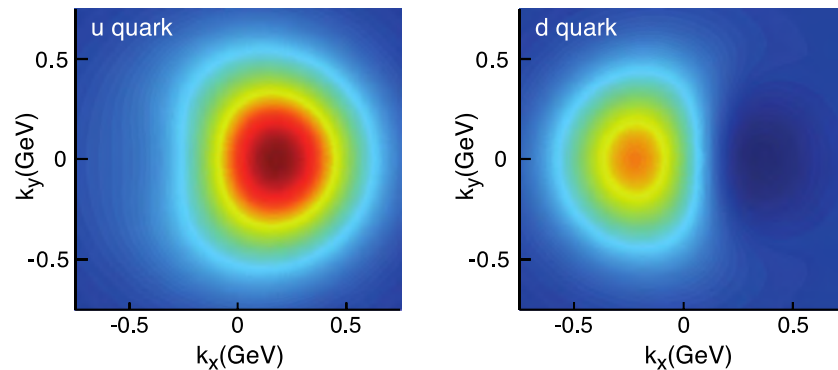


2D+1 picture in momentum space

- transverse momentum
- dependent distributions

$$f_1 \rightarrow f_{1T}^\perp$$

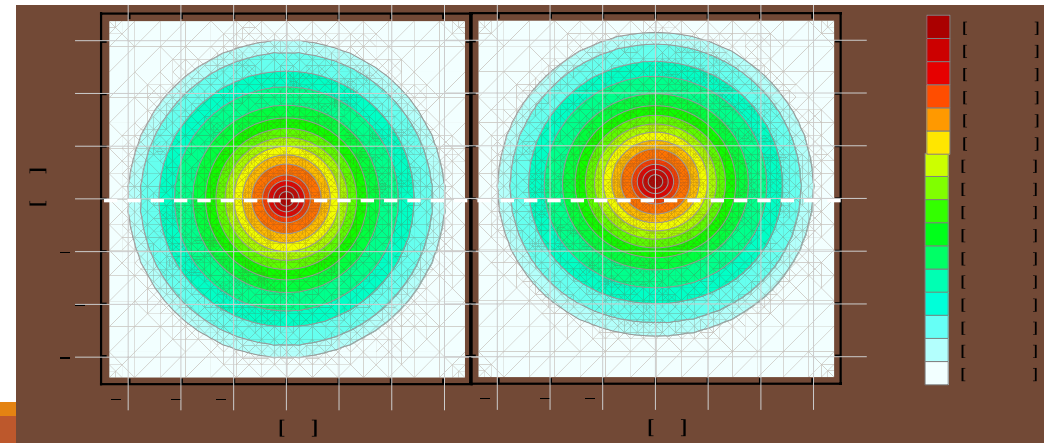
$\times f_1(x, k_T, S_T)$



2D+1 picture in coordinate space

- generalized parton distributions
- exclusive reaction like DVCS

Quarks
unpolarised polarized

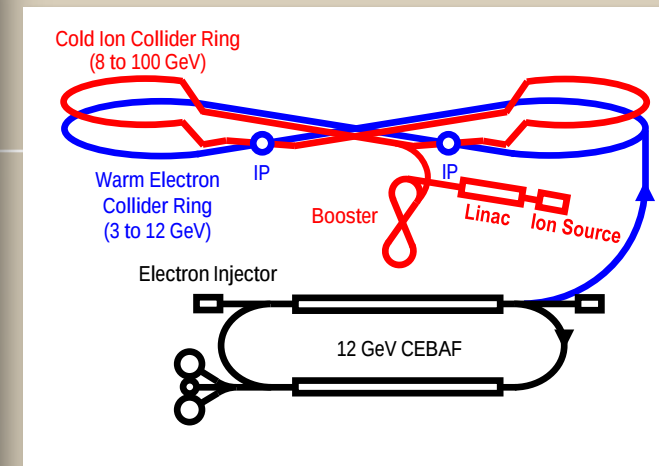
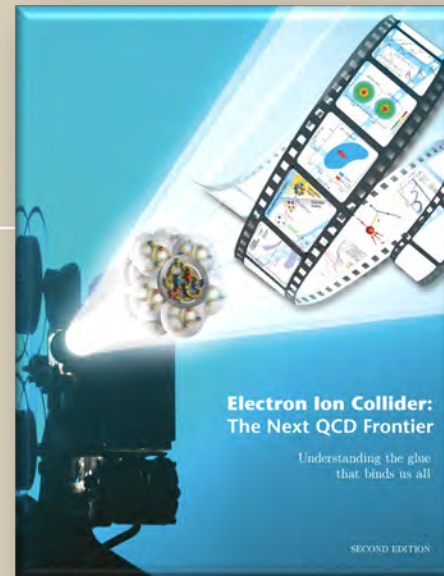
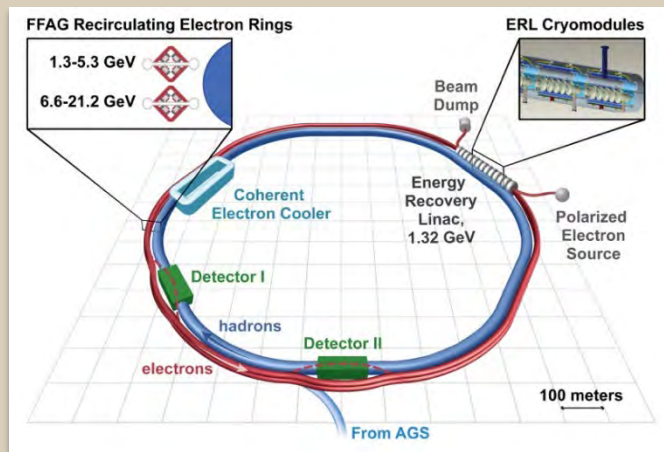


Proton mass



mass	→2.3 MeV/c²	→1.275 GeV/c²	→173.07 GeV/c²	0	→126 GeV/c²
charge	→2/3	2/3	2/3	0	0
spin	1/2	1/2	1/2	1	0
	up	charm	top	gluon	Higgs boson
QUARKS	→4.8 MeV/c²	→95 MeV/c²	→4.18 GeV/c²	0	
	-1/3	-1/3	-1/3	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	down	strange	bottom	photon	
	0.511 MeV/c²	105.7 MeV/c²	1.777 GeV/c²	91.2 GeV/c²	
	-1	-1	-1	0	
	1/2	1/2	1/2	1	
	electron	muon	tau	Z boson	
LEPTONS	→2.2 eV/c²	→0.17 MeV/c²	→15.5 MeV/c²	80.4 GeV/c²	
	0	0	0	±1	
	1/2	1/2	1/2	1	
	electron neutrino	muon neutrino	tau neutrino	W boson	
					GAUGE BOSONS

Stato e prospettive del progetto EIC



Andrea Bressan (Università di Trieste INFN-Trieste)

Prospettive per fisica adronica e
collisioni e-adroni

Disclaimer

I will not cover the full hadron physics. In particular, I will :

- Nor discuss the importance of the CERN fixed target program with extracted beams and the support that this deserves
- Nor discuss the very interesting future/proposed fixed target measurement in the LHC
- Nor cover FAIR or NICA

I will elaborate over the progress in the knowledge that eventual new machines under discussion that can be in operation in a decade from now will bring to us

Mainly I will concentrate on QCD In the low-energy region, it represents an extremely relativistic, strongly coupled, quantum many-body problem—one of the daunting challenges in theoretical physics

1 of 7 millennium prize problems, Clay Math. Institute, Cambridge, MA

\$1M prize to solve QCD! (E. Witten)

EICUG 2017



Electron Ion Collider User Group Meeting 2017

Trieste (Italy)
July 18-22, 2017

Venue

University of Trieste
SSMIT Building Aula Magna
via Filzi, 14

Organized by

INFN Trieste
Department of Physics, University of Trieste

Secretariat and contact

Erica Novacco: tel.+39 040 558 3367
e-mail: eicug2017@ts.infn.it
Web Site: <http://eicug2017.ts.infn.it>



Scientific Advisory Committee

Christine Aidala, Mauro Anselmino,
Nestor Armesto, Andrea Bressan, Silvia
Dalla Torre, Abhay Deshpande, Nicole
D'Hose, Rolf Ent, Kawtar Hafidi, Charles
Hyde, Barbara Jacak, Richard Milner,
Fulvia Pilat, Thomas Roser, Patrizia
Rossi, Bjoern Seltz, Thomas Ullrich,
Werner Vogelsang, Rikutaro Yoshida

Local Organizing Committee

Franco Bradamante, Andrea Bressan,
Michela Chiosso, Marco Contalbrigo,
Silvia Dalla Torre, Raffaella De Vita,
Stefano Levorato, Anna Martin, Marco
Mirazita, Roberto Preghenella, Marta
Ruspa, Fulvio Tassarotto

EICUG 2018

Electron Ion Collider User Group Meeting 2018

July 30 - August 2, 2018

Catholic University of America
Washington, DC

The Electron Ion Collider (EIC) is a proposed facility to study hadron physics at high energy recommended by the 2015 Long Range Plan for Nuclear Science by the NSAC. The EIC User Group (EICUG) promotes the realization of the EIC and its science, and consists of over 700 scientists. The meeting will discuss the outcome of the National Academic of Science study and the path forward for the Electron Ion Collider, as well as recent developments and progress on novel physics ideas and technical plans for the collider and detectors.



INTERNATIONAL ADVISORY COMMITTEE

Christine Aidala (U. Michigan), John Arrington (ANL), Daniel Boer (U. of Groningen), Silvia Dalla Torre (INFN/Trieste), Abhay Deshpande (BNL/SLU), Rolf Ent (JLab), Barbara Jacak (LBL/UC of California at Berkeley), Charles Hyde (ODU), Richard Milner (MIT), Vasily Morozov (JLab), Marco Radici (INFN/Pavia), Ferdi Willeke (BNL), Ernst Sichtermann (LBL), Bernd Surrow (Temple U.), Thomas Ullrich (BNL), Rik Yoshida (JLab)

www.jlab.org/conferences/eicugm18

LOCAL ORGANIZING COMMITTEE

Fatiha Benmokhtar (Duquesne U.)
Tanja Horn (CUA)
Greg Kalicy (CUA)
Ian Pegg (CUA)
Alexei Prokudin (Penn State Berks)



<https://www.jlab.org/conferences/eicugm18/index.html>



EICUG

Electron-Ion Collider User Group Meeting

2019 JULY 22-26

PARIS
École Nationale Supérieure de Chimie

The world's most powerful microscope for studying the "glue" that binds the building blocks of visible matter

International Advisory Committee

Daniel BOER: Groningen
Silvia DALLA TORRE: INFN/Trieste
Abhay DESHPANDE: SLAC/Stanford
Rolf ENT: JLab
Yael GOTO: RIKEN
Toralf HORN: CUA
Charles HYDE: ODU
Richard MILNER: MIT
Carlos MUÑOZ CAMACHO: CNRS/IN2P3
Marco RADICI: INFN/Pavia
Franck SABATÉ: CEA-Saclay
Andrei SERI: JLab
Ernst SICHTELMANN: LBNL
Bernd SURROW: Temple
Thomas ULLRICH: BNL
Ferdinand WILLEKE: BNL
Rikutaro YOSHIDA: JLab

Local Organizing Committee

Franco BRADAMANTE: CEA-Saclay
Valérie FROS: CNRS/IN2P3
Carlos MUÑOZ CAMACHO: CNRS/IN2P3
Franck SABATÉ: CEA-Saclay

<https://indico.in2p3.fr/event/EICUG2019>



Italia all'avanguardia nell'Electron-Ion Collider

Il numero degli scienziati italiani che lavorano al progetto di questo nuovo collisore è secondo solo a quello degli statunitensi, e coinvolge una dozzina di università pubbliche e l'Istituto nazionale di fisica nucleare

Un risultato che alle Olimpiadi ci farebbe inorgoglire: secondi solo agli Stati Uniti. Questi sono i numeri del coinvolgimento italiano nell'impresa Electron-Ion Collider, descritta nell'articolo di Abhay Deshpande e Rikutarō Yoshida. Per ora l'Electron-Ion Collider, o EIC, è solo un progetto, ma raccoglie già una comunità di più di 850 scienziati, organizzati in un gruppo di lavoro, l'EIC User Group. L'Italia è presente con più di 80 ricercatori e docenti, afferenti a 12 atenei pubblici e all'Istituto nazionale di fisica nucleare (INFN), l'ente pubblico demandato a sostenere la ricerca italiana in fisica nucleare e delle particelle. Solo gli Stati Uniti hanno un numero di partecipanti superiore.

L'EIC potrebbe diventare l'acceleratore di particelle più potente al mondo dopo il Large Hadron Collider del CERN di Ginevra. Sarebbe l'unico acceleratore con questa potenza ad avere la capacità di sondare con altissima precisione la materia nucleare in stati molto ricchi di informazione (in gergo «polarizzati», oppure in condizioni di «saturazione»). Inoltre potrebbe essere l'unico nuovo acceleratore di particelle costruito nel prossimo decennio, e sarà sicuramente il maggior progetto statunitense nel campo della fisica nucleare. L'Italia ha l'interesse, le competenze e la voglia di partecipare con entusiasmo a questa avventura.

Una massima priorità

L'idea di realizzare un collisore di elettroni e ioni per studiare la struttura interna di protoni e neutroni ha radici lontane. L'unico collisore protone-elettrone mai realizzato è stato l'Hadron-Elektron-Ringanlage (HERA), al Deutsches Elektronen-Synchrotron (DESY) di Amburgo, che ha funzionato fino al 2007. Fin dalla fine degli anni novanta sono state avanzate proposte di «polarizzare» gli spin dei protoni circolanti, ovvero di orientarli in modo coerente. Tra il 2005 e il 2010 si è discusso senza successo di realizzare un anello di elettroni polarizzati all'interno del complesso della Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR), attualmente in costruzione a Darmstadt, in Germania. Questi auspici della comunità scientifica si stanno ora realizzando, speriamo, con l'EIC, grazie alla forte spinta statunitense e al supporto internazionale che è riuscita a raccogliere.

Negli anni scorsi il gruppo di lavoro ha formulato innanzitutto la proposta di realizzare il collisore, identificando gli obiettivi scientifici che ne giustificano la costruzione. E poi riuscito a convincere tutta la comunità dei fisici nucleari statunitensi, che ha riconosciuto l'EIC come «massima priorità» nel suo ultimo documento di programmazione strategica pluriennale, e la comunità scientifica più ampia, rappresentata dalle National Academies of Sciences, Engineering and Medicine, che di recente hanno pubblicato una valutazione positiva sul progetto con lusinghieri commenti. Ora bisogna convincere il governo federale e il Congresso degli Stati Uniti a finanziare il progetto. Una prima decisione in merito è attesa nei prossimi mesi: sarà l'inizio concreto del progetto, con i primi importanti finanziamenti.

La costruzione dell'EIC dovrebbe iniziare entro i prossimi cinque anni, il funzionamento dovrebbe cominciare nel 2030 e proseguire per anni, aprendo nuove prospettive per un'intera generazione di giovani fisici.

Un ingegnere del Brookhaven National Laboratory lavora alle LEReC, sezioni di raffreddamento per elettroni del Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC). La tecnologia delle LEReC potrebbe essere applicata all'Electron-Ion Collider.



I ricercatori italiani hanno dato e continueranno a dare contributi su molti fronti: innanzitutto, la definizione degli obiettivi generali, ben illustrati nell'articolo di Deshpande e Yoshida. Nel 2011 una dozzina di italiani hanno firmato il primo documento in cui è stato sviluppato il cosiddetto «Science Case» del collisore, cioè la definizione degli aspetti più importanti da investigare per giungere alla comprensione della struttura interna dei nuclei.

In pratica e in teoria

I ricercatori sperimentali porteranno la loro esperienza, fondamentale nel successo di esperimenti nei laboratori DESY in Germania, CERN in Svizzera, Jefferson Lab negli Stati Uniti. Le competenze che saranno inserite nel progetto sono relative sia alle complesse tecniche di analisi (software) necessarie in esperimenti del genere sia alla realizzazione di rivelatori con tecnologie all'avanguardia sviluppate in Italia. Il progetto EIC-NET, finanziato dall'INFN, raccoglie gruppi di fisici sperimentali a Torino, Padova, Bologna, Ferrara, Genova, Trieste, Roma, Frascati, Bari e Catania. Per Silvia Dalla Torre, dirigente di ricerca all'INFN, sezione di Trieste, e responsabile di EIC-NET, «il coinvolgimento dei fisici italiani che studiano la struttura del protone è una naturale continuazione di un convinto impegno scientifico. Molti di noi sono attivi in questo campo già da anni. Oggi la nostra partecipazione è formalizzata grazie al supporto dell'INFN. Sarà quindi possibile, per i fisici italiani, contribuire in maniera sostanziale a questo progetto di scoperta scientifica».

I ricercatori teorici italiani sono impegnati nello studio della distribuzione tridimensionale dei costituenti interni del protone (quark e gluoni). Da anni sono tra i pionieri a livello mondiale nella ricostruzione di queste mappe tridimensionali. Sono organizzati nel progetto National Initiative on Physics of Hadrons (NINPHA) dell'INFN, coordinato da Mariaelena Boglione, professore associato all'Università di Torino, e il team comprende i gruppi di Torino, Cagliari, Genova, Roma, Perugia e Pavia. «L'EIC sarà letteralmente una miniera di informazioni, che ci aiuterà a comprendere alcuni tra i più affascinanti misteri della fisica subnucleare, come l'origine della massa e dello spin del protone», ha dichiarato Barbara Pasquini, professore associato all'Università di Pavia.

Nei prossimi anni proseguirà l'attività di ricerca e sviluppo sui rivelatori che verranno usati nell'EIC, mentre è in atto già da anni una proficua collaborazione tra sperimentali e teorici per ottimizzare l'analisi dei dati, testimoniata dalla partecipazione a progetti comuni di ricerca italiani e, soprattutto, europei. Oltre ad avere una fondamentale importanza per la comprensione dei costituenti della materia, l'EIC porterà a risultati utili anche per altri settori della fisica, e a ricadute tecnologiche e applicazioni in campi diversi, tra cui quello medico.

«L'Italia ha dato contributi rilevanti alla fisica nucleare negli Stati Uniti, fin dalla sua nascita per opera di Enrico Fermi. Il coinvolgimento in un grande progetto negli Stati Uniti sarà un'importante occasione per rafforzare la dimensione globale della ricerca scientifica italiana. L'INFN sarà in prima linea», ha detto Eugenio Nappi, vicepresidente dell'INFN.

*Alessandro Bacchetta,
professore associato, Università degli Studi di Pavia e INFN – Pavia
Andrea Bressan,
professore associato, Università degli Studi di Trieste e INFN – Trieste,
vicepresidente dell'Institutional Board dell'EIC User Group
Marco Radici,
primo ricercatore INFN - Pavia, membro dello Steering Committee
e dell'Institutional Board dell'EIC User Group*

Cornelia Brookhaven National Laboratory



L'Electron Ion Collider: 2012 White Paper

1212.1701.v3
A. Accardi et al

**Electron Ion Collider:
The Next QCD Frontier**

Understanding the glue
that binds us all

SECOND EDITION

For e-N collisions at the EIC:

- ✓ Polarized beams: $e, p, d, {}^3\text{He}$
- ✓ e beam 5-10(20) GeV
- ✓ Luminosity $\mathcal{L}_{ep} \sim 10^{33 \div 34} \text{ s}^{-1} \text{ cm}^{-2}$
100-1000 times HERA
- ✓ 20-100 (140) GeV Variable CoM

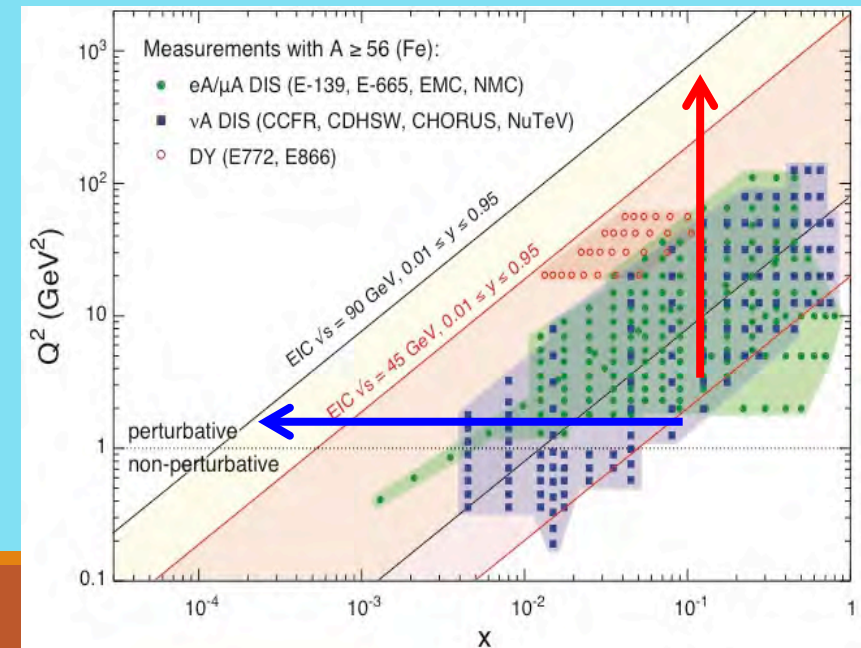
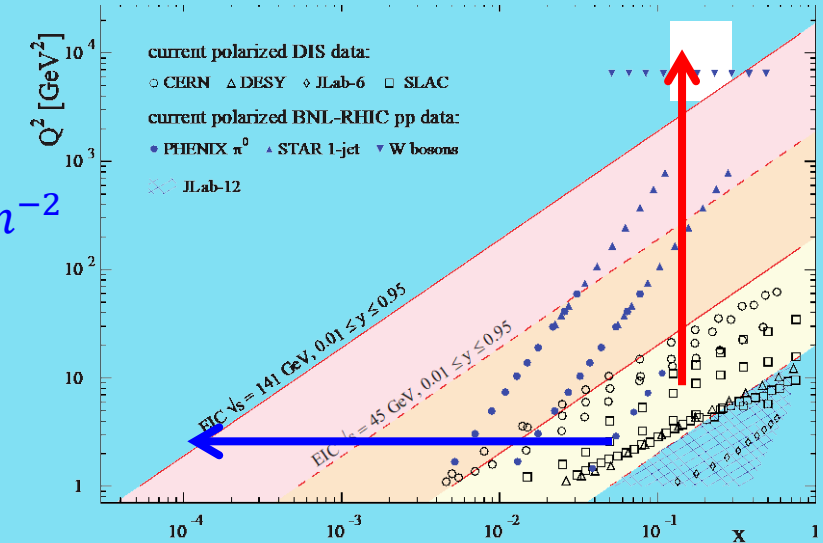
For e-A collisions at the EIC:

- ✓ Wide range in nuclei
- ✓ Luminosity per nucleon same as ep
- ✓ Variable center of mass energy

World's first

Polarized electron-proton/light ion

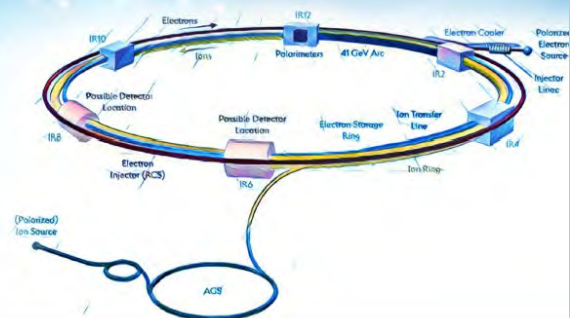
and electron-Nucleus collider



L'Electron Ion Collider: 2021 – Yellow Report

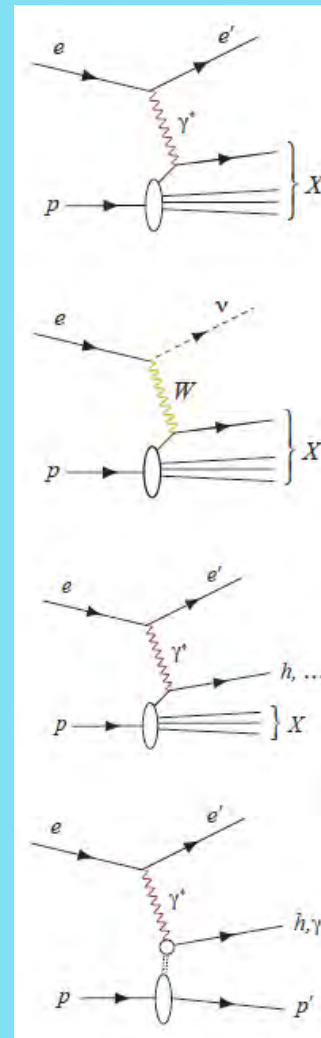


EIC YELLOW REPORT

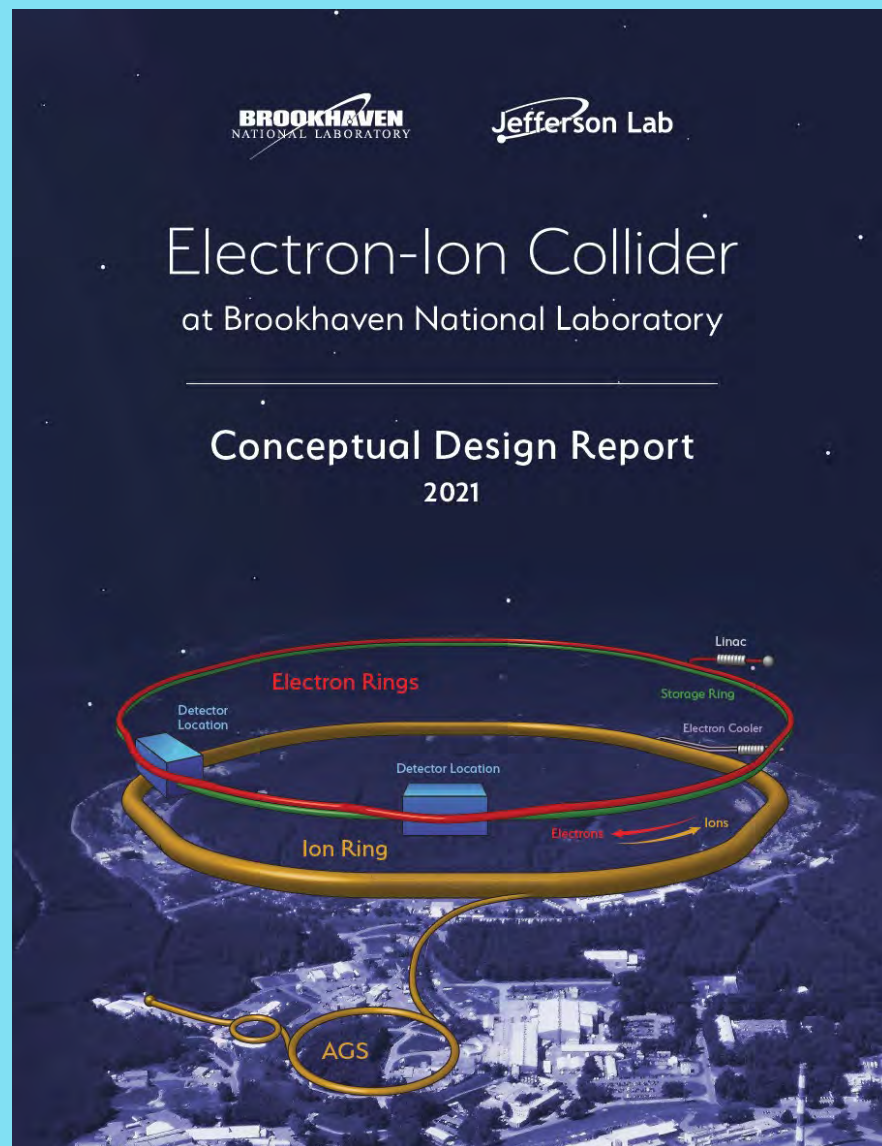


EIC Yellow Report Author Team

A. Accardi, J. Adam, D. Adamiak, W. Akers, A. Al-bataineh, M.G. Alexeev, F. Ameli, P. Antonioli, N. Armesto, W.R. Armstrong, M. Arratia, J. Arrington, M. Asai, A. Asaturyan, E.C. Aschenauer, H. Avagyan, C. Ayerbe Gayoso, B. Azmoun, A. Bacchetta, M.D. Baker, F. Barbosa, K.N. Barish, P.C. Barry, M. Battaglieri, A. Bazilevsky, N.K. Behera, A. Benmokhtar, F. Benmokhtar, V.V. Berdnikov, J.C. Bernauer, V. Bertone, S. Bhattacharya, C. Bissolotti, D. Boer, M. Boglione, M. Bondi, I. Borsa, F. Bossù, G. Bozzi, J.D. Brandenburg, N. Brei, A. Bressan, W. Brooks, M.H.S. Bukhari, N.H. Buttmore, A. Camsonne, A. Celentano, F.G. Celiberto, C. Chatterjee, K. Chen, T. Chiarusi, Y.-T. Chien, M. Chiosso, X. Chu, E. Chudakov, G. Cicala, E. Cisbani, C. Cocuzza, J.L. Collins II, M. Constantinou, M. Contalbrigo, R. Corliss, W. Cosyn, A. Courtoy, J. Crafts, R. Cruz-Torres, U. D'Alesio, S. Dalla Torre, D. Das, S.S. Dasgupta, W. Deconinck, M. Defurne, W. DeGraw, K. Dehmelt, A. Del Dotto, F. Delcarro, A. Deshpande, W. Detmold, M. Diefenthaler, C. Dilks, D.U. Dixit, R. Dupré, J.M. Durham, M.G. Echevarria, D. Elia, R. Ent, R. Esha, K.O. Eyser, C. Fanelli, R. Fatemi, S. Fazio, D. Fitzgerald, C. Flore, T. Frederico, I. Friščić, S. Fucini, S. Furlotov, Y. Furlotova, C. Gal, L. Gamberg, H. Gao, P. Garg, D. Gaskell, K. Gnanvo, V.P. Goncalves, J.O. Gonzalez Hernandez, L. Gonella, Y. Goto, F. Grancagnolo, L.C. Greiner, W. Guryan, V. Guzey, Y. Hatta, M. Hattawy, F. Hauenstein, X. He, T.K. Hemmick, O. Hen, D.W. Higinbotham, T.J. Hobbs, M. Hohlmann, T. Horn, T.-J. Hou, J. Huang, Q. Huang, G.M. Huber, G. Iakovidis, Y. Ilieva, B.V. Jacak, P.M. Jacobs, M. Jadhav, A. Jentsch, T. Jezo, X. Jing, S. Joosten, S. Joosten, N. Kalantarians, D. Kang, Z.B. Kang, K. Kauder, S.J.D. Kay, R.A. Khalek, A. Kiselev, M. Klasen, H.T. Klest, P. Kotko, Y.V. Kovchegov, M. Krelina, S. Kuleshov, S. Kumano, K.S. Kumar, R. Kumar, L. Kumar, A. Kusina, K. Kutak, Y.S. Lai, T. Lappi, J. Lauret, M. Lavinsky, D. Lawrence, S.H. Lee, C. Lee, K. Lee, S. Levorato, H. Li, S. Li, W. Li, X. Li, W.B. Li, H. Liu, Z. Lu, G. Lucero, N.S. Lukow, E. Lunghi, Y. Makris, S. Mantry, H. Mäntysaari, F. Marhauser, P. Markowitz, L. Marsicano, A. Mastroserio, Y. Mehtar-Tani, W. Melnitchouk, A. Metz, Z.-E. Meziani, C. Mezrag, A. Mkrtchyan, H. Mkrtchyan, R. Milner, V. Mochalov, V. Moiseev, M.M. Mondal, A. Morreale, D. Morrison, L. Motyka, H. Moutarde, F. Murgia, M.J. Murray, P. Musico, P. Nadel-Turonski, P.M. Nadolsky, J. Nam, P.R. Newman, D. Neyret, D. Nguyen, E.R. Nocera, A.S. Nunes, V.A. Okorokov, F. Olness, J.D. Osborn, B.S. Page, S. Park, K. Paschke, B. Pasquini, H. Paukkunen, S. Paul, C. Pecar, I.L. Pegg, C. Pellegrino, L. Pentchev, R. Perrino, R. Petti, C. Pinkenburg, B. Pire, C. Pisano, D. Pitonyak, A.A. Poblaguev, M. Posik, M. Potekhin, R. Preghenella, S. Preins, A. Prokudin, P. Pujahari, M.L. Purschke, J.R. Pybus, M. Radici, D.V. Raffaella, R. Rajput-Ghoshal, P.E. Reimer, M. Rinaldi, F. Ringer, C.D. Roberts, J. Rojo, D. Romanov, M. Sarsour, R. Sassot, N. Sato, B. Schenke, W.B. Schmidke, A. Schmidt, I. Schmidt, B. Schmookler, G. Schnell, P. Schweitzer, J. Schwiening, I. Scimemi, S. Scopetta, J. Segovia, R. Seidl, S. Sekula, N. Sherrill, E. Sichtermann, M. Siddikov, A. Signori, B.K. Singh, K. Slifer, W. Slominski, W.E. Sondheim, Y. Song, H. Spiesberger, A.M. Stasto, P. Stepanov, J.R. Stevens, I.W. Stewart, I. Strakovsky, M. Strikman, M. Sturm, M.L. Stutzman, M. Sullivan, B. Surrow, S. Syritsyn, P. Sznajder, H. Szumila-Vance, L. Szymanowski, A.S. Tadeipalli, G.F. Tassielli, J. Terry, F. Tassarotto, F. Torales Acosta, P. Tribedy, A. Tricoli,



L'Electron Ion Collider: 2021 – CDR (>900 pagine)



Editor:

J. Beebe-Wang¹

Contributors:

J. Adam¹, W. Akers², A. Arno¹, E-C. Aschenauer¹, K. Bane³, F. Barbosa², G. Bassi¹, P. Baxevanisi¹, E. Beebe¹, J. Beebe-Wang¹, Y. Belyavina¹, S. Benson², I. Ben-Zvi¹, J.S. Berg¹, M. Blaskiewicz¹, A. Blednykh¹, S. Binello¹, J.M. Brennan¹, A. Bressan⁴, S. Brooks¹, K. Brown¹, M. Bruker², Y. Cai³, C.M. Camacho³, K. Chen¹, W. Cheng¹, W. Christie¹, Z. Conway¹, F. Craner¹, S. Dalla Torre⁴, K. Dehmelt⁶, K. Deitrick⁷, J. Delaysen⁸, S. Derbenev², A. Deshpande⁶, S. De Silva⁸, K. Dixon², T. D'Ottavio¹, K.A. Drees¹, J. Dunlop¹, L. Elouadhriri², R. Ent², J. Epstein¹, O. Evdokimov⁹, M. Falier¹, S. Fazio¹, A. Fedotov¹, N. Feege¹², P.K. Feng¹, W. Fischer¹, A. Flores¹, C. Foltz¹, N. Franco¹, Y. Furletova², B.R.P. Gamage², M. Gaowei¹, D. Gaskell², C.J. Gardner¹, D. Gassner¹, E. Gianfelice-Wendt¹⁰, J. Grames², X. Gu¹, C. Gulliford⁷, J. Guo², W. Guo¹, F. Hannon², Y. Hao¹, D. Hatton¹, A. Hershcovitch¹, C. Hetzel¹, D. Holmes¹, T. Horn¹¹, D. Hseuh¹, H. Huang¹, J. Huang¹, R. Hulsart¹, A. Hutton², P. Inacker¹, W. Jackson¹, J. Jamilkowski¹, A. Jentsch¹, F. Karl¹, C. Keppel², J. Kewisch¹, A. Kiselev¹, P. Kolb¹, M. Kostin², G. Krafft², R. Lambiase¹, R. Li², Y. Li³, Z. Li³, C-J. Liaw¹, F. Lin², C. Liu¹, W. Liu¹, H. Lovelace III¹, T. Ludlam¹, Y. Luo¹, M. Mapes¹, F. Marhauser², I. Marneris¹, B. Martin¹, A. Marusic¹, D. Marx¹, G. McIntyre¹, E. McSweeney¹, F. Méot¹, J-L. Mi¹, T. Michalski², R. Michnoff¹, T. Miller¹, J. Mills¹, M. Minty¹, C. Montag¹, V. Morozov², D. Morrison¹, J. Morris¹, A. Mule², M. Musgrave¹², S. Nayak¹, C. Mayes¹³, E. Nissen², Y. Nosochkov³, S. Nemesure¹, D. Padrazo¹, B. Page¹, R.B. Palmer¹, M. Paniccia¹, H. Park², B. Parker¹, S. Peggs¹, A. Petrone¹, B. Podobedov¹, S. Polizzo¹, J. Preble², V. Ptitsyn¹, O. Rahman¹, R. Rajput-Ghoshal¹, V. Ranjbar¹, D. Raparia¹, J. Reich¹, R. Rimmer², J. Ritter¹, G. Robert-Demolaize¹, Y. Roblin², P. Rossi¹, P. Sampson¹, J. Sandberg¹, M. Sangroula¹, T. Satogata², J. Scaduto¹, W.B. Schmidke¹, R. Seidl¹⁴, S. Seletskiy¹, A. Seryi², T. Shafitan¹, J. Skaritka¹, V. Smalyuk¹, K. Smith¹, M. Spata¹, G. Stupakov³, A. Sy², N. Taylor¹³, S. Tepikian¹, R. Than¹, C. Theisen¹, P. Thieberger¹, D. Trbojevic¹, N. Tsoupas¹, J. Tuozzolo¹, T. Ullrich¹, R. Venugopalan¹, S. Verdú-Andrés¹, E. Wang¹, G. Wang¹, G-M. Wang¹, H. Wang², S. Wang², D. Weiss¹, W-T. Weng¹, F. Willeke¹, M. Wiseman², H. Witte¹, W. Wittmer², Q. Wu¹, A. Wund¹, B. Xiao¹, T. Xin¹, D. Xu¹, W. Xu¹, W. Yu¹, A. Zaltsman¹, A. Zelenski¹, H. Zhang², W. Zhang¹, Y. Zhang², Z.Q. Zhang¹, Z. Zhao¹, B. Zihlman²

¹Brookhaven National Laboratory, USA

²Thomas Jefferson National Accelerator Facility, USA

³SLAC National Accelerator Laboratory, USA

⁴University of Trieste and INFN at Trieste, Italy

⁵Institut de Physique Nucléaire at Orsay, France

⁶The Massachusetts Institute of Technology, USA

⁷Cornell University, USA

⁸Old Dominion University, USA

⁹University of Illinois at Chicago, USA

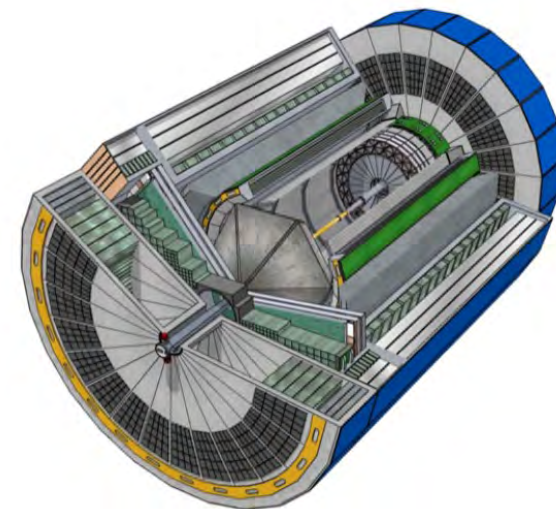
¹⁰Fermi National Accelerator Laboratory, USA

¹¹Catholic University of America, USA

¹²Stony Brook University, USA

¹³Xelera Research LLC, Ithaca, NY, USA

¹⁴RIKEN Nishina Center for Accelerator-Based Science, Japan



Back to work

Slides

TROVATE LE SLIDE AGGIORNATE SULLA PAGINA MOODLE2 DEL CORSO

[nuovo link](#)

Nelle news del forum