



**UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI TRIESTE**



Dipartimento di scienze economiche,
aziendali, matematiche e statistiche
"Bruno de Finetti"

Statistica

Variabili aleatorie discrete

Francesco Pauli

A.A. 2016/2017

Variabile aleatoria

Definizione di variabile aleatoria

Una variabile aleatoria (o variabile casuale, brevemente v.a. o v.c.) è un numero ben determinato ma non noto per mancanza d'informazioni

Esempi, già incontrati e non

- ▶ La somma dei punti di due dadi.
- ▶ L'esito di una mano di roulette
- ▶ Il guadagno su 1000 giocate su una quartina.
- ▶ L'indennizzo annuo per un assicurato RC auto.
- ▶ Il ritardo con cui arriva un treno.
- ▶ Il prezzo futuro di un prodotto finanziario.
- ▶ L'innalzamento della temperatura al 2030/2050/2100.

Variabile aleatoria

Definizione di variabile aleatoria

Una variabile aleatoria (o variabile casuale, brevemente v.a. o v.c.) è un numero ben determinato ma non noto per mancanza d'informazioni

Esempi, già incontrati e non

- | | |
|---|-----------|
| ▶ La somma dei punti di due dadi. | DISCRETO |
| ▶ L'esito di una mano di roulette | DISCRETO |
| ▶ Il guadagno su 1000 giocate su una quartina. | DISCRETO* |
| ▶ L'indennizzo annuo per un assicurato RC auto. | DISCRETO* |
| ▶ Il ritardo con cui arriva un treno. | CONTINUO |
| ▶ Il prezzo futuro di un prodotto finanziario. | CONTINUO |
| ▶ L'innalzamento della temperatura al 2030/2050/2100. | CONTINUO |

Un'importante distinzione

Variabile aleatoria

Tratteremo separatamente i due casi:

- ▶ v.a. **discreta**, cioè che assume valori interi.
- ▶ v.a. **continua**, cioè che assume valori reali (eventualmente in un intervallo).

Esempi, già incontrati e non

Un'importante distinzione

- | | |
|---|-----------|
| ▶ La somma dei punti di due dadi. | DISCRETO |
| ▶ L'esito di una mano di roulette | DISCRETO |
| ▶ Il guadagno su 1000 giocate su una quartina. | DISCRETO* |
| ▶ L'indennizzo annuo per un assicurato RC auto. | DISCRETO* |
| ▶ Il ritardo con cui arriva un treno. | CONTINUO |
| ▶ Il prezzo futuro di un prodotto finanziario. | CONTINUO |
| ▶ L'innalzamento della temperatura al 2030/2050/2100. | CONTINUO |

Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni

Premio

Indennizzo

Variabile aleatoria

500€



$\left\{ \begin{array}{l} 0€ \\ 1\,000€ \\ 2\,000€ \\ \vdots \\ 10\,000€ \\ \vdots \\ 100\,000€ \\ \vdots \\ 1\,000\,000€ \end{array} \right.$

Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni

Premio

Indennizzo

Variabile aleatoria

500€



0€	molto probabile
1 000€	possibile
2 000€	possibile
⋮	⋮
10 000€	possibile
⋮	⋮
100 000€	improbabile
⋮	⋮
1 000 000€	molto improbabile

Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni

Premio

Indennizzo

Variabile aleatoria

500€



0€	molto probabile	→ p_0
1 000€	possibile	→ p_1
2 000€	possibile	→ p_2
⋮	⋮	
10 000€	possibile	→ p_j
⋮	⋮	
100 000€	improbabile	→ p_k
⋮	⋮	
1 000 000€	molto improbabile	→ p_m

*probabilità
stimate*

Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni

Premio

500€

← **MEDIA** →
(speranza matematica)

Indennizzo

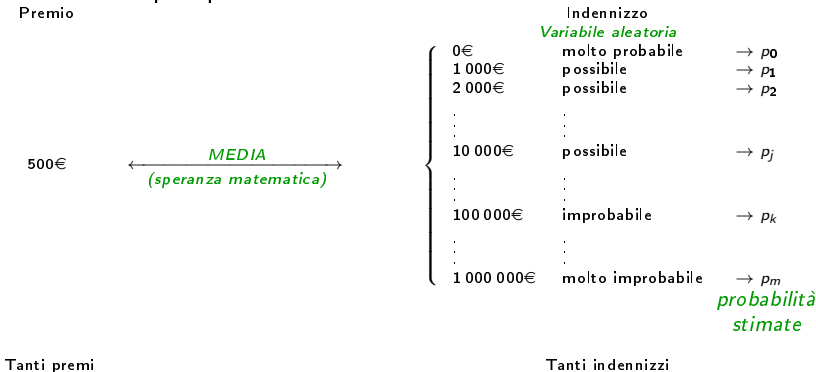
Variabile aleatoria

0€	molto probabile	→ p_0
1 000€	possibile	→ p_1
2 000€	possibile	→ p_2
⋮	⋮	
10 000€	possibile	→ p_j
⋮	⋮	
100 000€	improbabile	→ p_k
⋮	⋮	
1 000 000€	molto improbabile	→ p_m

**probabilità
stimate**

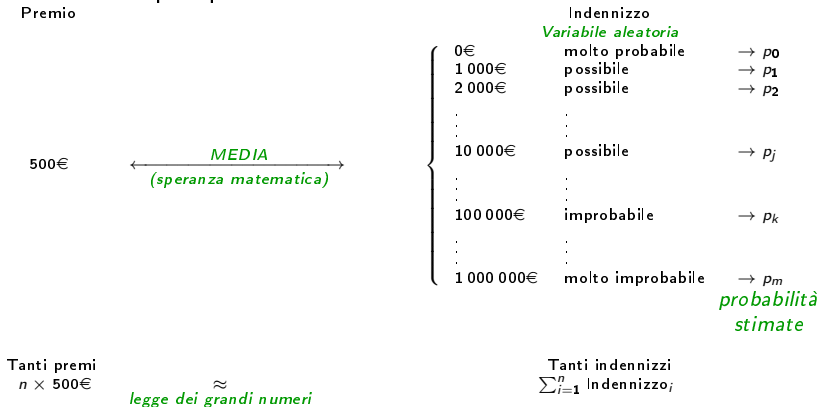
Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni



Cosa c'è di nuovo?

Quando gli esiti sono numeri possiamo farci operazioni: trasformarli, sommarli, ... e questo può essere utile per descrivere fenomeni quantitativi, come ad esempio quello sulle assicurazioni



Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

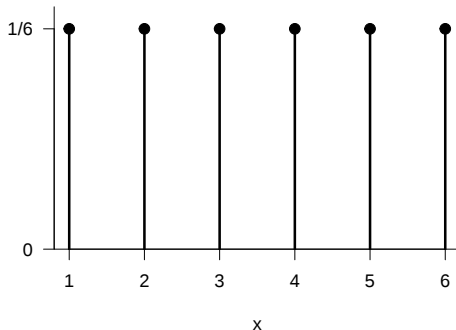
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

Ad esempio per l'esito del lancio di un dado

Esito	Pr.
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$



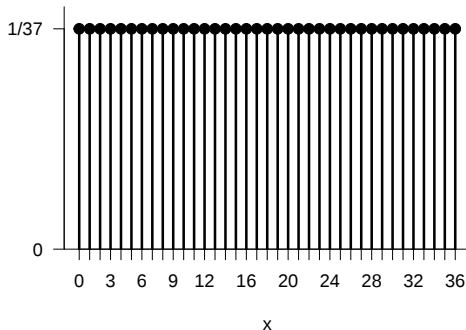
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

Per l'esito di una mano di roulette

Esito	Pr.
0	$1/37$
1	$1/37$
2	$1/37$
$\vdots$	$\vdots$
34	$1/37$
35	$1/37$
36	$1/37$



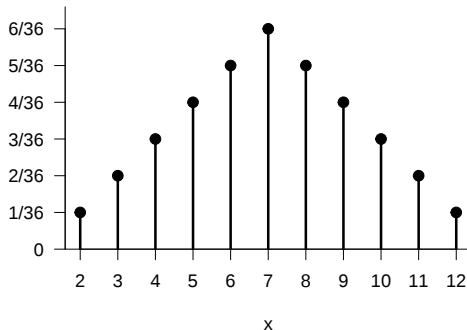
Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Distribuzione di probabilità

La distribuzione di probabilità di una v.a. discreta è l'insieme dei possibili valori e delle probabilità di ciascuno.

Per la somma di due dadi.

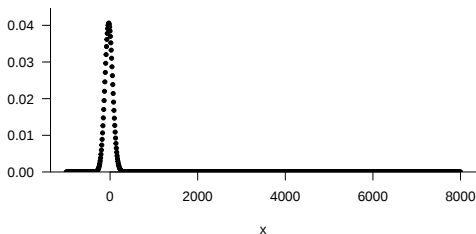
Esito	Pr.
2	$1/36$
3	$2/36$
4	$3/36$
5	$4/36$
6	$5/36$
7	$6/36$
8	$5/36$
9	$4/36$
10	$3/36$
11	$2/36$
12	$1/36$



Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Per il guadagno da 1000 scommesse sulla quartina

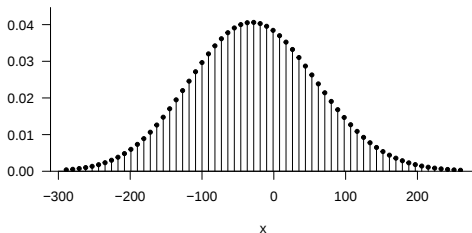
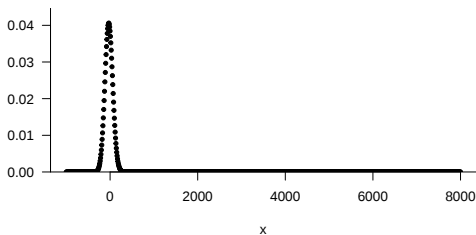
Guadagno	Pr.
-1000	2.05×10^{-50}
-991	2.48×10^{-48}
...	...
-199	0.005982849
-190	0.007340574
...	...
-55	0.039094276
-46	0.040010723
-37	0.040520630
-28	0.040611586
-19	0.040284164
-10	0.039551725
-1	0.038439569
...	...
161	0.004396338
170	0.003570359
...	...
4490	1.3×10^{-320}
4499	1.0×10^{-321}
...	...
8000	0.000000000



Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Per il guadagno da 1000 scommesse sulla quartina

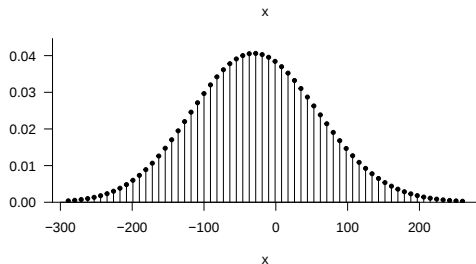
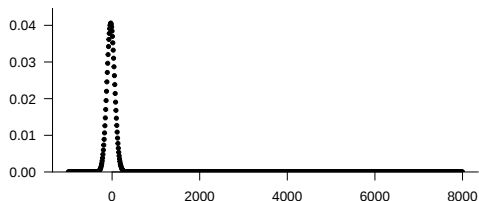
Guadagno	Pr.
-1000	2.05×10^{-50}
-991	2.48×10^{-48}
...	...
-199	0.005982849
-190	0.007340574
...	...
-55	0.039094276
-46	0.040010723
-37	0.040520630
-28	0.040611586
-19	0.040284164
-10	0.039551725
-1	0.038439569
...	...
161	0.004396338
170	0.003570359
...	...
4490	1.3×10^{-320}
4499	1.0×10^{-321}
...	...
8000	0.000000000



Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Per il guadagno da 1000 scommesse sulla quartina

Guadagno	Num vittorie	Pr.
-1000	0	2.052182×10^{-50}
-991	1	0.000000000
...	...	...
-199	89	0.005982849
-190	90	0.007340574
...	...	...
-55	105	0.039094276
-46	106	0.040010723
-37	107	0.040520630
-28	108	0.040611586
-19	109	0.040284164
-10	110	0.039551725
-1	111	0.038439569
...	...	...
161	129	0.004396338
170	130	0.003570359
...	...	...
4490	610	1.3×10^{-320}
4499	611	1.0×10^{-321}
...	...	...
8000	1000	0.000000000



Distribuzione di probabilità per una v.a. discreta

Per il guadagno da 1000 scommesse sulla quartina

Avremo una formula per la probabilità del guadagno G , esso può assumere i valori

$-1000, -991, -982, \dots, 7982, 7991, 8000$

(ovvero $9n - 1000$ dove n , numero di volte che vinco, è un intero da 0 a 1000) con probabilità $P(G = g)$ pari a

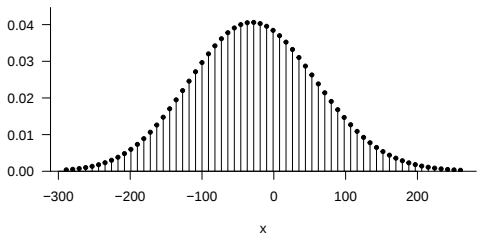
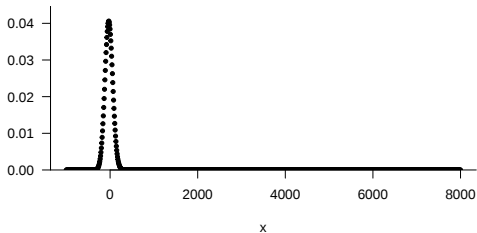
$$\binom{1000}{\frac{g+1000}{9}} \left(\frac{4}{37}\right)^{\frac{g+1000}{9}} \left(1 - \frac{4}{37}\right)^{1000 - \frac{g+1000}{9}}$$

e potremo calcolare, ad esempio, la probabilità di essere in perdita dopo le 1000 giocate

$$P(G \leq 0) = 0.64$$

e quindi la probabilità di guadagnarci

$$P(G > 0) = \dots$$



Incertezza e decisioni

Per capire come si ragiona con le variabili aleatorie, ci mettiamo nei panni di uno scommettitore, chiediamoci se accetteremmo le seguenti scommesse basate sul lancio di un dado

- ▶ X ricevo 10€ se esce pari, perdo 5€ altrimenti
- ▶ Y ricevo 10€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti
- ▶ Z ricevo 5€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti

Incertezza e decisioni

Per capire come si ragiona con le variabili aleatorie, ci mettiamo nei panni di uno scommettitore, chiediamoci se accetteremmo le seguenti scommesse basate sul lancio di un dado

- ▶ X ricevo 10€ se esce pari, perdo 5€ altrimenti
 - ▶ $E(X) = 10 \frac{1}{2} - 5 \frac{1}{2} = 5 > 0$
- ▶ Y ricevo 10€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti
 - ▶ $E(Y) = 10 \frac{1}{2} - 10 \frac{1}{2} = 0$
- ▶ Z ricevo 5€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti
 - ▶ $E(Z) = 5 \frac{1}{2} - 10 \frac{1}{2} = -5 < 0$

Incertezza e decisioni

Per capire come si ragiona con le variabili aleatorie, ci mettiamo nei panni di uno scommettitore, chiediamoci se accetteremmo le seguenti scommesse basate sul lancio di un dado

- ▶ X ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 10€ altrimenti
- ▶ Y ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 7€ altrimenti
- ▶ Z ricevo 5€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti
- ▶ V ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 3€ altrimenti

Incertezza e decisioni

Per capire come si ragiona con le variabili aleatorie, ci mettiamo nei panni di uno scommettitore, chiediamoci se accetteremmo le seguenti scommesse basate sul lancio di un dado

- ▶ X ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 10€ altrimenti
 - ▶ $E(X) = 10 \frac{1}{3} - 10 \frac{2}{3} = -3.33 < 0$
- ▶ Y ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 7€ altrimenti
 - ▶ $E(Y) = 10 \frac{1}{3} - 7 \frac{2}{3} = -1.33 > 0$
- ▶ Z ricevo 5€ se esce pari, perdo 10€ altrimenti
 - ▶ $E(Z) = 10 \frac{1}{3} - 5 \frac{2}{3} = 0$
- ▶ V ricevo 10€ se esce 1 o 2, perdo 3€ altrimenti
 - ▶ $E(V) = 10 \frac{1}{3} - 3 \frac{2}{3} = 1.33 > 0$

Incertezza e decisioni

Lancio due dadi e

- ▶ perdo 5 se esce 2, 4 o 7
- ▶ perdo 2 se esce 3, 5 o 12
- ▶ vinco 4 se esce 8, 9 o 10
- ▶ vinco 10 se esce 6
- ▶ vinco 1 se esce 11

Il valore atteso è -7

Speranza matematica (o valore atteso o media) di una v.a. discreta

Speranza matematica (o valore atteso o media)

Si definisce speranza matematica della v.a. X con distribuzione $p(x)$ la quantità

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Più in generale, possiamo calcolare

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{\infty} h(x_i) p(x_i)$$

Gioco equo

Gioco equo

Si dice che un gioco che porta al guadagno (aleatorio) G è equo se

$$E(G) = 0$$

cioè i giochi equi sono quelli in cui in media non si perde né si vince.

Media e variabilità

I giochi proposti sono tutti egualmente vantaggiosi

$$E(G) = 1$$

$$E(G) = (x + 1)\frac{1}{2} + (-x + 1)\frac{1}{2} = 1$$

con $x = 10, 100, 1000, 10000$ rispettivamente

Tuttavia non sono equivalenti perché la variabilità del guadagno cambia!
Come misuro la variabilità di una v.a.?

Varianza di una v.a. discreta

Varianza

Si definisce varianza della v.a. X con distribuzione $p(x)$ la quantità

$$V(X) = E((X - E(X))^2)$$

che è come dire

$$V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E(X))^2 p(x_i)$$

Si mostra che

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Soluzioni

- ▶ X ricevo 11 se esce pari, perdo 9 altrimenti:
 - ▶ $E(X) = 11 \frac{1}{2} - 9 \frac{1}{2} = 1$
 - ▶ $V(X) = 11^2 \frac{1}{2} + 9^2 \frac{1}{2} - 1^2 = 100 = 10^2$
- ▶ Y ricevo 101 se esce pari, perdo 99 altrimenti:
 - ▶ $E(Y) = 101 \frac{1}{2} - 99 \frac{1}{2} = 1$
 - ▶ $V(X) = 101^2 \frac{1}{2} + 99^2 \frac{1}{2} - 1^2 = 10\,000 = 100^2$
- ▶ Z ricevo 1001 se esce pari, perdo 999 altrimenti:
 - ▶ $E(Z) = 1001 \frac{1}{2} - 999 \frac{1}{2} = 1$
 - ▶ $V(X) = 1001^2 \frac{1}{2} + 999^2 \frac{1}{2} - 1^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$
- ▶ V ricevo 10001 se esce pari, perdo 9999 altrimenti:
 - ▶ $E(V) = 10001 \frac{1}{2} - 9999 \frac{1}{2} = 1$
 - ▶ $V(X) = 10001^2 \frac{1}{2} + 9999^2 \frac{1}{2} - 1^2 = 100\,000\,000 = 10\,000^2$

Soluzioni

- ▶ X ricevo 1001 se esce pari, perdo 999 altrimenti:
 - ▶ $E(X) = 1$
 - ▶ $V(X) = 1001^2 \frac{1}{2} + 999^2 \frac{1}{2} - 1^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$
- ▶ Y ricevo 1010 se esce pari, perdo 990 altrimenti:
 - ▶ $E(Y) = 10$
 - ▶ $V(X) = 1010^2 \frac{1}{2} + 990^2 \frac{1}{2} - 10^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$
- ▶ Z ricevo 1100 se esce pari, perdo 900 altrimenti:
 - ▶ $E(Z) = 100$
 - ▶ $V(X) = 1100^2 \frac{1}{2} + 900^2 \frac{1}{2} - 100^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$
- ▶ V ricevo 1500 se esce pari, perdo 500 altrimenti:
 - ▶ $E(V) = 500$
 - ▶ $V(X) = 1500^2 \frac{1}{2} + 500^2 \frac{1}{2} - 500^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$
- ▶ W ricevo 1900 se esce pari, perdo 100 altrimenti:
 - ▶ $E(V) = 900$
 - ▶ $V(X) = 1900^2 \frac{1}{2} + 100^2 \frac{1}{2} - 900^2 = 1\,000\,000 = 1\,000^2$

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

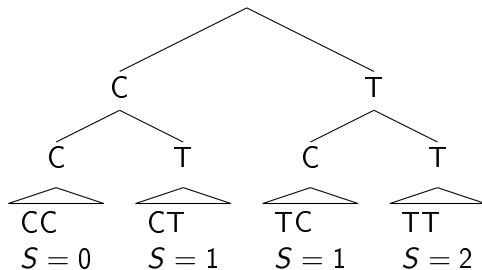
Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Numero di teste su due lanci di una moneta

- Consideriamo due lanci di una moneta, i cui esiti possibili sono T (testa) o C (croce);
- definiamo S = numero di teste su due lanci;
- S è una v.a. discreta con valori possibili 0, 1, 2.
- Otteniamo la distribuzione di probabilità di S considerando i possibili esiti

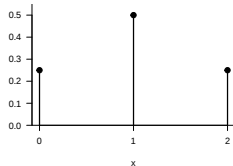


Numero di teste su due lanci di una moneta

- Consideriamo due lanci di una moneta, i cui esiti possibili sono T (testa) o C (croce);
- definiamo S = numero di teste su due lanci;
- S è una v.a. discreta con valori possibili 0, 1, 2.
- Otteniamo la distribuzione di probabilità di S considerando i possibili esiti

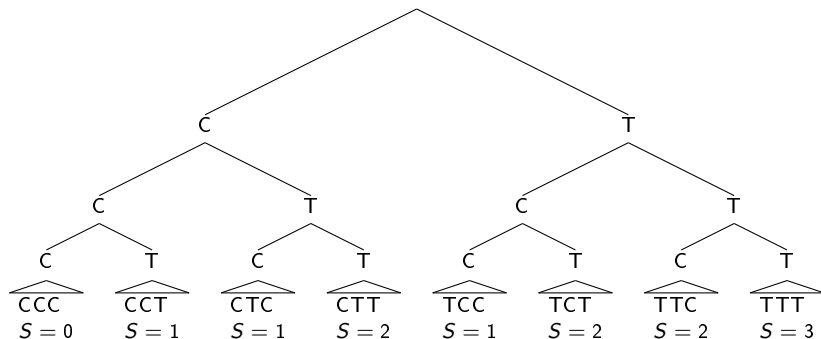
Esiti	Pr	S
CC	1/4	0
CT	1/4	1
TC	1/4	1
TT	1/4	2

S	Pr
0	$P(CC) = 1/4$
1	$P(CToTC) = 1/2$
2	$P(TT) = 1/4$



Numero di teste su tre lanci

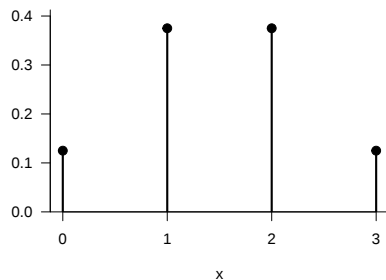
Con tre lanci, S ha valori 0, 1, 2, 3.



Numero di teste su tre lanci

Con tre lanci, S ha valori 0, 1, 2, 3.

Esiti	Pr	S	S	Pr
CCC	1/8	0	0	1/8
CCT	1/8	1		
CTC	1/8	1	1	3/8
TCC	1/8	1		
CTT	1/8	2		
TTC	1/8	2	2	3/8
TCT	1/8	2		
TTT	1/8	3	3	1/8



Numero di teste su n lanci

S ha valori possibili $0, 1, 2, \dots, n$.

Ci sono 2^n esiti possibili, del tipo

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\dots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$n-1$	n

Ciascun esito ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Per trovare $P(S = s)$ basta contare quanti ce ne sono con s teste, si trova che sono

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Si ha allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Numero di teste su n lanci

S ha valori possibili $0, 1, 2, \dots, n$.

Ci sono 2^n esiti possibili, del tipo

esito singolo	T	C	T	T	C	T	$\dots$	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	$\dots$	$n-1$	n
prob	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Ciascun esito ha probabilità $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Per trovare $P(S = s)$ basta contare quanti ce ne sono con s teste, si trova che sono

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

Si ha allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica **il numero di possibili sottoinsiemi di s elementi da un insieme di n .**

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica il **numero di possibili sottoinsiemi di s elementi da un insieme di n** .

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

0	1	2	3	4	5
$\emptyset$	<i>a</i>	<i>ab</i>	<i>abc</i>	<i>abcd</i>	<i>abcde</i>
	<i>b</i>	<i>ac</i>	<i>abd</i>	<i>abce</i>	
	<i>c</i>	<i>ad</i>	<i>abe</i>	<i>abde</i>	
	<i>d</i>	<i>ae</i>	<i>acd</i>	<i>acde</i>	
	<i>e</i>	<i>bc</i>	<i>ace</i>	<i>bcde</i>	
		<i>bd</i>	<i>ade</i>		
		<i>be</i>	<i>bcd</i>		
		<i>cd</i>	<i>bce</i>		
		<i>ce</i>	<i>bde</i>		
		<i>de</i>	<i>cde</i>		
$\binom{5}{0} = 1$	$\binom{5}{1} = 5$	$\binom{5}{2} = 10$	$\binom{5}{3} = 10$	$\binom{5}{4} = 5$	$\binom{5}{5} = 1$

Parentesi: il coefficiente binomiale $\binom{n}{s}$

Con questo simbolo si indica il **numero di possibili sottoinsiemi di s elementi da un insieme di n .**

Ad esempio se l'insieme di $n = 5$ elementi è $\{a, b, c, d, e\}$ ha senso chiedersi quanti sono i sottoinsiemi di 0, 1, 2, 3, 4, 5 elementi, li si elenca nel seguito

- In generale è

$$\binom{n}{s} = \frac{n!}{s!(n-s)!}$$

dove

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

- Alcuni esempi

- Il numero di coppie che si possono formare in un gruppo di 15 individui è $\binom{15}{2} = 105$.
- Il numero di cinque che possono essere estratte al lotto (su 90 numeri) è $\binom{90}{5} = 43\,949\,268$

E se testa e croce non hanno la stessa probabilità?

Sia $P(T) = p$, quindi $P(C) = 1 - p$

Gli esiti possibili sono sempre 2^n

esito singolo	T	C	T	T	C	T	...	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n

ma la probabilità **non è più uguale per tutti**, dipende da quante teste e quante croci ci sono

$$P(TCTT \dots TC) = p^{\#T} (1 - p)^{n - \#T}$$

dove $\#T$ è il numero di teste.

Quindi le $\binom{n}{s}$ sequenze che hanno s teste hanno tutte probabilità $p^s (1 - p)^{n-s}$, allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} p^s (1 - p)^{n-s}.$$

E se testa e croce non hanno la stessa probabilità?

Sia $P(T) = p$, quindi $P(C) = 1 - p$

Gli esiti possibili sono sempre 2^n

esito singolo	T	C	T	T	C	T	...	T	C
lancio	1	2	3	4	5	6	...	$n-1$	n
prob	p	$1-p$	p	p	$1-p$	p	...	p	$1-p$

ma la probabilità **non è più uguale per tutti**, dipende da quante teste e quante croci ci sono

$$P(TCTT \dots TC) = p^{\#T} (1-p)^{n-\#T}$$

dove $\#T$ è il numero di teste.

Quindi le $\binom{n}{s}$ sequenze che hanno s teste hanno tutte probabilità $p^s (1-p)^{n-s}$, allora

$$P(S = s) = \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}.$$

Distribuzione binomiale

Distribuzione binomiale

Si dice che la variabile X ha **distribuzione binomiale** con dimensione $n \in \mathbb{N}$ e parametro $p \in [0, 1]$ se $X \in \{0, 1, \dots, n\}$ e

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}.$$

Sinteticamente scriveremo

$$X \sim \text{Binom}(n, p)$$

X è il numero di successi in n prove indipendenti con probabilità di successo p .

Esempio: binomiale e roulette

Supponiamo di scommettere 10 volte su una quartina alla roulette, qual è la probabilità di vincere **esattamente** due volte?

Abbiamo visto che la probabilità di vincere in una singola giocata è $P(Q) = 4/37$.

Ripetiamo la giocata 10 volte, il numero di volte che vinco, X , è distribuito secondo una binomiale di dimensione $n = 10$ e probabilità $p = 4/37$

$$X \sim \text{Binom}(10, 4/37)$$

Per ottenere la probabilità cercata basta usare la formula

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{4}{37}\right)^2 \left(\frac{33}{37}\right)^8 \approx 0.21$$

Esempio: binomiale e roulette (2)

Supponiamo di scommettere 10 volte su una quartina alla roulette, qual è la probabilità di vincere **almeno** due volte?

In termini di X stiamo cercando $P(X \geq 2)$, cioè

$$P(X \geq 2) = \sum_{x=2}^{10} P(X = x) = \sum_{x=2}^{10} \binom{10}{x} \left(\frac{4}{37}\right)^x \left(\frac{33}{37}\right)^{10-x} \approx 0.29$$

Notiamo che possiamo ottenere lo stesso risultato più velocemente scrivendo

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\frac{33}{37}\right)^{10} - 10 \left(\frac{4}{37}\right)^1 \left(\frac{33}{37}\right)^9 \end{aligned}$$

Applicazione della binomiale: vincere alla *roulette*

Ricordiamo che scommettendo sulla quartina si paga 1€ per giocare, si riceve 9€ in caso di vittoria.

Giochiamo 1000 volte, allora se X è il numero di volte che vinco,

$$X \sim \text{Binom}(1000, 4/37)$$

e il mio guadagno è

$$N = 9X - 1000$$

Chiediamoci ora qual è la probabilità, con 1000 scommesse, di uscire dal casinò con un saldo positivo.

Applicazione della binomiale: vincere alla *roulette*

Ricordiamo che scommettendo sulla quartina si paga 1€ per giocare, si riceve 9€ in caso di vittoria.

Giochiamo 1000 volte, allora se X è il numero di volte che vinco,

$$X \sim \text{Binom}(1000, 4/37)$$

e il mio guadagno è

$$N = 9X - 1000$$

Chiediamoci ora qual è la probabilità, con 1000 scommesse, di uscire dal casinò con un saldo positivo.

Il saldo è positivo ($N \geq 0$) se e solo se $X \geq 112$, allora la probabilità è

$$P(N \geq 0) = P(X \geq 112) = \sum_{x=112}^{1000} \binom{1000}{x} \left(\frac{4}{37}\right)^x \left(1 - \frac{4}{37}\right)^{1000-x} \approx 0.36$$

Applicazione della binomiale: *overbooking*

Una piccola compagnia aerea accetta prenotazioni per un aereo con 20 posti, e sa che, delle persone che prenotano un viaggio, il 10% non si presenta.

- (1) Si dica qual è la probabilità che l'aereo viaggi pieno se ci sono state 20 prenotazioni.

La compagnia accetta più di 20 prenotazioni (cosiddetto *overbooking*), sperando che non si presentino più di 20 persone.

- (2) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 22 prenotazioni.
- (3) Si dica quante prenotazioni si possono accettare se si vuole che la probabilità che un passeggero resti a terra sia al di sotto del 15%.

Applicazione della binomiale: *overbooking* (1)

- (1) Si dica qual è la probabilità che l'aereo viaggi pieno se ci sono state 20 prenotazioni.

Se con X indichiamo il numero di passeggeri che si presenta, e ci sono state 20 prenotazioni, si ha

$$X \sim \text{Binom}(20, 0.9)$$

L'aereo viaggia pieno se $X = 20$,

$$P(X = 20) = 0.9^{20} = 0.1216$$

Applicazione binomiale: *overbooking* (2)

- (2) Si dica qual è la probabilità che qualche passeggero che ha prenotato resti a terra se sono state accettate 22 prenotazioni.

Se con X indichiamo il numero di passeggeri che si presenta, e ci sono state 22 prenotazioni, si ha

$$X \sim \text{Binom}(22, 0.9)$$

Non ci sono passeggeri che rimangono a terra se $X \leq 20$ e si ha

$$\begin{aligned} P(X \leq 20) &= 1 - P(X > 20) = 1 - P(X = 21) - P(X = 22) \\ &= 1 - \binom{22}{21} 0.1 \times 0.9^{21} - 0.9^{22} \\ &= 0.6608 \end{aligned}$$

La probabilità cercata è quindi $1 - 0.6608 = 0.3392$.

Applicazione binomiale: *overbooking* (3)

- (3) Si dica quante prenotazioni si possono accettare se si vuole che la probabilità che un passeggero resti a terra sia al di sotto del 15%.

Con 22 prenotazioni non funziona, possiamo provare con 21, nel qual caso

$$X \sim \text{Binom}(21, 0.9)$$

Qui qualcuno rimane a terra solo se $X = 21$, quindi la probabilità cercata è

$$P(X = 21) = 0.9^{21} = 0.1095$$

inferiore alla soglia indicata.

Se la compagnia accetta 21 prenotazioni, la probabilità che qualcuno resti a terra è circa l'11%.

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

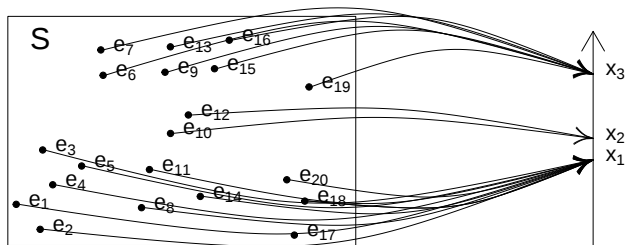
Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Definizione di variabile aleatoria

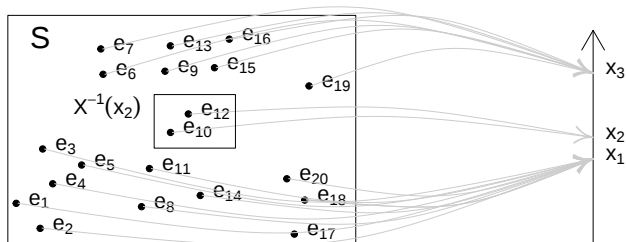


Dato uno spazio di eventi S una variabile aleatoria è una **funzione da S a $\mathbb{R}$**

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

- a ogni elemento dello spazio S è associato un valore
- (più eventi diversi possono essere associati allo stesso valore.)

Definizione di variabile aleatoria



Le probabilità associate ai diversi valori di X si ottengono come probabilità delle controimmagini in S di tali valori

$$X^{-1}(x) = \{e_i \in S : X(e_i) = x\}$$

$$P(X = x) = P(X^{-1}(x)) = P(\{e_i \in S : X(e_i) = x\})$$

(Cioè non definiamo niente di nuovo rispetto alla probabilità come definita per lgi eventi.)

Funzione di probabilità di una v.a. finita

Funzione di probabilità 1

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \dots, x_n$, per assegnare una distribuzione di probabilità a X si assegnano

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

in modo che

$$(i) \quad p(x_i) \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^n p(x_i) = 1$$

Si osservi che questo è coerente con la definizione data nel lucido precedente.

Funzione di probabilità di una v.a. discreta

Se la variabile ha un **infinità numerabile** di possibili valori, lo schema è il medesimo, ma

- ▶ devo assegnare infinite probabilità
- ▶ la condizione per cui sommano a uno diventa la condizione per cui la serie converge a uno.

Funzione di probabilità 2

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \dots, x_n, \dots$, per assegnare una distribuzione di probabilità a X si assegnano

$$P(X = x_i) = p(x_i)$$

in modo che

$$(i) \quad p(x_i) \geq 0$$

$$(ii) \quad \sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

Funzione di ripartizione di una v.a. discreta

Funzione di ripartizione

Sia X una v.a. con valori possibili $x_1, \dots, x_n, \dots$ e funzione di probabilità $p(x)$, si definisce **funzione di ripartizione** di X la funzione

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{i: x_i \leq x} p(x_i)$$

Si noti che la funzione di ripartizione soddisfa alle seguenti proprietà

- ▶ $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- ▶ $F(x)$ è non decrescente;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- ▶ $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

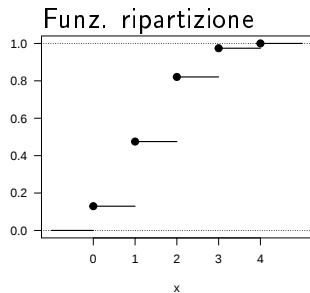
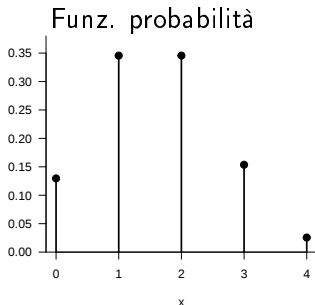
Esempio: binomiale

Consideriamo una v.a. X con distribuzione binomiale con $n = 4$ e $p = 0.4$, allora

$$X \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$P(X = x_i) = \binom{4}{x_i} p^{x_i} (1 - p)^{4-x_i}$$

x	pr
0	0.12960
1	0.34560
2	0.34560
3	0.15360
4	0.02560



Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Esempio: binomiale

Si mostra che, se X è binomiale con dimensione n e probabilità p , cioè

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}$$

allora

$$E(X) = np$$

$$V(X) = np(1 - p)$$

Si può dimostrare direttamente, sarà più facile farlo dopo, usando altri risultati.

Trasformazioni di v.a.

Essendo numeri, possiamo fare operazioni aritmetiche sulle v.a., ad esempio a partire da una v.a. X possiamo definire una nuova v.a. trasformando linearmente X

$$Y = aX + b$$

La distribuzione di Y è determinata da quella di X , se $\{x_i\}$ sono i valori possibili di X , quelli di Y sono $\{ax_i + b\}$ e

$$P(Y = ax_i + b) = P(X = x_i)$$

Inoltre, si mostra facilmente che

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Dimostrazioni

Si ha

$$\begin{aligned}
 E(aX + b) &= \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b)p(x_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i) + \sum_{i=1}^{\infty} b p(x_i) \\
 &= aE(X) + b
 \end{aligned}$$

$$V(aX + b) = E((aX + b - (aE(X) + b))^2) = a^2 E((X - E(X))^2) = a^2 V(X)$$

e quindi possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E((X - E(X))^2) \\
 &= E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) \\
 &= E(X^2) - 2E(X)E(X) - E(X)^2 \\
 &= E(X^2) - [E(X)]^2
 \end{aligned}$$

Media e gioco della roulette

Il famoso saldo netto

$$N = 9V - 1000$$

dove V è il numero di vittorie su 1000 scommesse, è una variabile aleatoria,
 $V \sim \text{Binom}(1000, P(Q))$, con $P(Q) = 4/37$.

Quindi la media di V è $E(V) = 1000 \times 4/37 = 108$ e

$$E(N) = 9E(V) - 1000 = -28$$

Insomma quello che abbiamo calcolato per valutare la convenienza non è altro che la media della v.a.

Gioco equo

Si dice che un gioco che porta al guadagno (aleatorio)
 G è equo se

$$E(G) = 0$$

cioè i giochi equi sono quelli in cui in media non si perde né si vince.

Esempi di giochi

Si dica se sono equi i seguenti giochi

- (1) Testa o croce: vinco 1 se esce testa, perdo 1 se esce croce.
- (2) Pago 3 per giocare, vinco il risultato del lancio di un dado.
- (3) Pago 1 per giocare, vinco 1.8 se esce pari al lancio di un dado.
- (4) Si lancia un dado, perdo il numero uscito se è pari, vinco il numero uscito se è dispari.

Una particolare trasformazione lineare: standardizzazione

Data una v.a. X con media $\mu = E(X)$ e $\sigma^2 = V(X)$, la **standardizzazione** è la trasformazione

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

LA variabile Z ha media nulla e varianza unitaria

$$E(Z) = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Z) = V\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1$$

Trasformazioni non lineari di v.a.

Possiamo considerare anche trasformazioni più generali e definire, data una v.a. X , la v.a.

$$Y = h(X)$$

La distribuzione di Y è sempre determinata da quella di X , si vedano gli esempi poi, va tenuto presente che, in generale

$$E(h(X)) \neq h(E(X))$$

$$V(h(X)) \neq h(V(X))$$

Esempio di trasformazione non lineare

Si consideri la v.a. X la cui funzione di probabilità è espressa in tabella e si ricavino le funzioni di probabilità di

$$Y = |X|, \quad W = X^3$$

Si ottengano poi speranza matematica e varianza di X , Y e V

x_i	p_i
-3	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
3	0.4

Esempio di trasformazione non lineare

Si consideri la v.a. X la cui funzione di probabilità è espressa in tabella e si ricavino le funzioni di probabilità di

$$Y = |X|, \quad W = X^3$$

Si ottengano poi speranza matematica e varianza di X , Y e V

x_i	p_i
-3	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
3	0.4

y_i	p_i
0	0.2
1	0.3
3	0.5

w_i	p_i
-27	0.1
-1	0.1
0	0.2
1	0.2
27	0.4

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \\ V(X) &= 3.8 \\ E(Y) &= 1.8 \\ V(Y) &= 1.56 \\ E(W) &= 8.2 \\ V(W) &= 297.6 \end{aligned}$$

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Distribuzione di Poisson

Una variabile $X \in \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ è distribuita secondo una Poisson di parametro λ se e solo se

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

Qui sono possibili (hanno probabilità positiva) infiniti valori.

Si noti che

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = 1$$

dove $\sum_{x=0}^{\infty}$ indica una serie.

Poisson: media e varianza

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
 &= \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} \\
 &= \lambda
 \end{aligned}$$

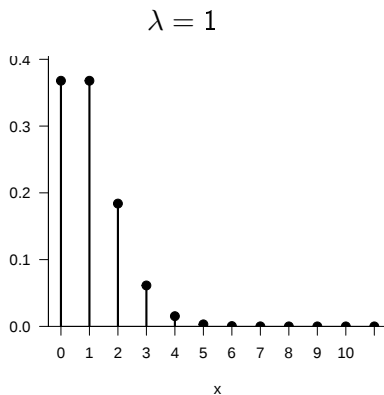
$$E(X^2) = \lambda + \lambda^2$$

da cui

$$V(X) = \lambda$$

Distribuzioni di Poisson

x	pr
0	0.36788
1	0.36788
2	0.18394
3	0.06131
4	0.01533
5	0.00307
6	0.00051
7	0.00007
8	0.00001
9	0.00000
10	0.00000
> 10	0.00000

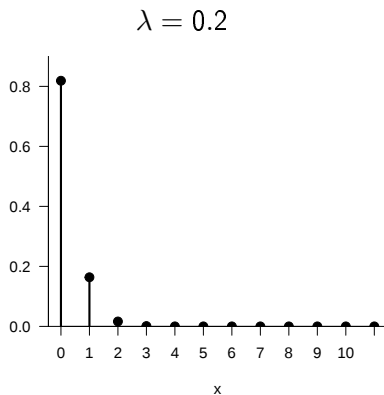


$$E(X) = 1$$

$$V(X) = 1$$

Distribuzioni di Poisson

x	pr
0	0.81873
1	0.16375
2	0.01637
3	0.00109
4	0.00005
5	0.00000
6	0.00000
7	0.00000
8	0.00000
9	0.00000
10	0.00000
> 10	0.00000



$$E(X) = 0.2$$

$$V(X) = 0.2$$

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

- (1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.
- (2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

- (1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.
- (2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

Il numero di goal è distribuito secondo una Poisson con parametro $\lambda = 1.5$ (perché la media è uguale al parametro), quindi

$$P(X = 0) = \frac{\lambda^0}{0!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} = 0.2231$$

Esempio: Poisson

Una squadra di calcio segna un numero di goal a partita che si ritiene distribuito secondo una Poisson e mediamente segna 1.5 goal a partita.

- (1) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra non segni goal.
- (2) Si dica qual è la probabilità che nella prossima partita la squadra segni più di 4 goal.

$$\begin{aligned}
 P(X > 4) &= P\left(\bigcup_{i=5}^{+\infty} (X = i)\right) = \sum_{i=5}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = \dots \\
 &= P\left(\overline{\bigcup_{i=0}^4 (X = i)}\right) = 1 - \sum_{i=0}^4 \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = 1 - 0.9814 = 0.01858
 \end{aligned}$$

Esempio: ancora la moneta

Consideriamo sempre i tre lanci della moneta, definiamo però la v.a.

$M = \#$ di teste prima della prima croce

Esiti	Pr	M
CCC	1/8	0
CCT	1/8	0
CTC	1/8	0
TCC	1/8	1
CTT	1/8	0
TTC	1/8	2
TCT	1/8	1
TTT	1/8	3

M	Pr
0	4/8
1	2/8
2	1/8
3	1/8

Distribuzione geometrica

In una serie di prove ripetute $E_1, E_2, \dots$ (eventi equiprobabili, $P(E_i) = p$), il numero X di prove necessarie per osservare il primo successo segue una distribuzione **geometrica**.

I valori possibili sono gli interi positivi $\{1, 2, 3, \dots\}$

Si ha

Eventi	x	$P(X = x)$
E_1	1	p
$\bar{E}_1 E_2$	2	$p(1 - p)$
$\bar{E}_1 \bar{E}_2 E_3$	3	$p(1 - p)^2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\bar{E}_1 \bar{E}_2 \dots \bar{E}_{k-1} E_k$	k	$p(1 - p)^{k-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p)^{k-1} = 1$$

e si ha la FdR

$$F(x) = 1 - (1 - p)^x$$

Ricordando che $\sum_{i=0}^n r^i = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Esempio: estrazioni con e senza rimpiazzo

Estraiamo una carta da un mazzo di 52, la probabilità che sia di cuori è $13/52 = 1/4$.

Se ripetiamo l'estrazione n volte **reimmettendo** sempre la carta estratta nel mazzo prima di procedere all'estrazione successiva, la v.a. X numero di cuori estratti su n è

$$X \sim \text{Binom}(n, 1/4)$$

Se ripetiamo l'estrazione **senza reimmettere** la carta estratta nel mazzo la distribuzione non è più binomiale ma ipergeometrica, purchè $n < 13$

$$P(X = x) = \frac{\binom{13}{x} \binom{52-13}{10-x}}{\binom{52}{13}}$$

Questo perché le estrazioni non sono indipendenti.

Distribuzione ipergeometrica

Da un insieme di N oggetti [un'urna con N palline] di cui H posseggono una determinata caratteristica [H palline sono rosse], si estragano n palline senza rimpiazzo (in blocco), detto

$X = \text{"#oggetti tipo-h sugli } n \text{ estratti"}$

[$X = \text{\#palline rosse estratte}$] si ha

$$P(X = x) = \frac{\binom{H}{x} \binom{N-H}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

se x è un intero e

► $x \geq \max(0, n + H - N)$

► $x \leq \min n, H$

altrimenti la probabilità è 0.

Binomiale e ipergeometrica, un'osservazione

Il motivo per cui la binomiale non va bene è che le osservazioni non sono indipendenti, indicando con R_i l'evento per cui l' i -ma pallina estratta è rossa si ha, se l'estrazione è con rimpiazzo

$$P(R_2|R_1) = P(R_2|\bar{R}_1) = \frac{H}{N}$$

se l'estrazione è senza rimpiazzo

$$P(R_2|R_1) = \frac{H-1}{N-1} \neq P(R_2|\bar{R}_1) = \frac{H}{N-1}$$

Intuitivamente però, se N e H sono molto grandi queste differenze sono piccole.

L'intuizione sopra può essere precisata meglio (non lo facciamo), basti sapere che se N e H sono grandi rispetto a n allora X è approssimativamente una binomiale anche se le estrazioni sono fatte senza rimpiazzo.

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Prestiti bancari

Siamo una banca.

- ▶ Abbiamo concesso 100 prestiti da 1000€ per un anno al tasso del 7%.
- ▶ La probabilità che un prestito non venga restituito è il 5%
- ▶ Supponiamo che ci sia indipendenza tra i clienti

Ci chiediamo

- ▶ Quanto guadagno in media?
- ▶ Che probabilità ho di perdere del denaro?

Sia X il # di prestiti **non** restituiti, allora

$$X \sim \text{Binom}(100, 0.05)$$

e alla fine dell'anno il mio guadagno è

$$G = 70(100 - X) - 1000X = 7000 - 1070X$$

Prestiti bancari

Sia X il # di prestiti **non** restituiti, allora

$$X \sim \text{Binom}(100, 0.05)$$

e alla fine dell'anno il mio guadagno è

$$G = 70(100 - X) - 1000X = 7000 - 1070X$$

► Quanto guadagno in media?

$$E(G) = 7000 - 1070E(X) = 7000 - 1070 \times 100 \times 0.05 = 1650$$

► Che probabilità ho di perdere del denaro?

$$G < 0 \Leftrightarrow X > \frac{7000}{1070} = 6.54$$

quindi

$$P(G < 0) = P(X > 6.54) = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - 0.766 = 0.234$$

Prestiti bancari

E se i prestiti sono 1000 (tutto il resto è invariato) siamo messi meglio o peggio?

Sia X il # di prestiti **non** restituiti, allora

$$X \sim \text{Binom}(1000, 0.05)$$

e alla fine dell'anno il mio guadagno è

$$G = 70(1000 - X) - 1000X = 70000 - 1070X$$



$$E(G) = 70000 - 1070E(X) = 70000 - 1070 \times 1000 \times 0.05 = 16500$$



$$G < 0 \Leftrightarrow X > \frac{70000}{1070} = 65.4$$

quindi

$$P(G < 0) = P(X \geq 66) = 1 - P(X \leq 65) = 1 - 0.9857 = 0.01493$$

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

S	Pr
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

M	Pr
0	4/8
1	2/8
2	1/8
3	1/8

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

		S			
		0	1	2	3
M	0	CCC	CCT CTC	CTT	-
	1	-	TCC	TCT	-
	2	-	-	TTC	-
	3	-	-	-	TTT

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Esempio: lanci di moneta

Con riferimento ai tre lanci di una moneta abbiamo considerato, separatamente, le due v.a.

$$S = \# \text{ di teste (totale)}$$

$$M = \# \text{ di teste prima della prima croce}$$

Esiti	Pr	S	M
CCC	1/8	0	0
CCT	1/8	1	0
CTC	1/8	1	0
TCC	1/8	1	1
CTT	1/8	2	0
TTC	1/8	2	2
TCT	1/8	2	1
TTT	1/8	3	3

		S			
		0	1	2	3
M	0	1/8	2/8	1/8	0
	1	0	1/8	1/8	0
	2	0	0	1/8	0
	3	0	0	0	1/8

Vogliamo ora guardarle **congiuntamente**, cioè consideriamo eventi del tipo

$$(S = s) \cap (M = m)$$

Funzione di probabilità congiunta

La tabella che contiene tutte le probabilità congiunte è la funzione di probabilità congiunta della coppia (M, S) , cioè la funzione

$$p(m, s) = P((M = m) \cap (S = s))$$

Le probabilità si possono ricavare facendo riferimento alle controimmagini (come in sostanza abbiamo fatto sopra).

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1/8	2/8	1/8	0	4/8
	1	0	1/8	1/8	0	2/8
	2	0	0	1/8	0	1/8
	3	0	0	0	1/8	1/8
		1/8	3/8	3/8	1/8	1

Distribuzioni condizionate $M|S = s$

Possiamo anche considerare le probabilità condizionate

$$p_{M|S}(m|s) = P((M = m)|(S = s))$$

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1	2/3	1/3	0	-
	1	0	1/3	1/3	0	-
	2	0	0	1/3	0	-
	3	0	0	0	1	-
		1	1	1	1	-

Ciascuna colonna è una funzione di probabilità condizionata.

Distribuzioni condizionate $S|M = m$

Possiamo anche considerare le probabilità condizionate

$$p_{S|M}(s|m) = P((S = s)|(M = m))$$

		S				
		0	1	2	3	
M	0	1/4	1/2	1/4	0	1
	1	0	1/2	1/2	0	1
	2	0	0	1	0	1
	3	0	0	0	1	1
		-	-	-	-	-

Ciascuna riga è una funzione di probabilità condizionata.

Funzione di probabilità congiunta

Funzione di probabilità congiunta

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \dots\}$ e $\{y_1, \dots\}$ si definisce funzione di probabilità congiunta

$$p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

La funzione di probabilità congiunta soddisfa alle proprietà

- ▶ $p(x_i, y_j) \geq 0$
- ▶ $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j) = 1$

Da essa si ricavano le funzioni di probabilità delle singole variabili come

$$p_X(x_i) = P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} p(x_i, y_j)$$

Funzione di probabilità condizionata

Funzione di probabilità condizionata

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \dots\}$ e $\{y_1, \dots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x_i, y_j)$, detta $p_X(x_i)$ la funzione di probabilità marginale di X , si dice **distribuzione condizionata di Y dato X** la

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Si noti che è la “solita” probabilità condizionata

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{P((X = x_i) \cap (Y = y_j))}{P(X = x_i)} = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Funzione di probabilità condizionata

Funzione di probabilità condizionata

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \dots\}$ e $\{y_1, \dots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x_i, y_j)$, detta $p_X(x_i)$ la funzione di probabilità marginale di X , si dice **distribuzione condizionata di Y dato X** la

$$p_{Y|X=x_i}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_X(x_i)}$$

Analogamente si definisce

$$p_{X|Y=y_j}(x_i|y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{p_Y(y_j)}$$

Speranza matematica congiunta

Speranza matematica congiunta

Date due v.a. X e Y con valori $\{x_1, \dots\}$ e $\{y_1, \dots\}$ e funzione di probabilità congiunta $p(x, y)$ si definisce

$$E(h(X, Y)) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} h(x_i, y_j) p(x_i, y_j)$$

In particolare, ad esempio, si definisce la covarianza

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (x_i - E(X))(y_j - E(Y)) p(x_i, y_j) \end{aligned}$$

Covarianza, proprietà

Qualunque siano X e Y v.a.

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= E((X - E(X))(Y - E(Y))) \\ &= E(XY - E(X)Y - YE(X) - E(X)E(Y)) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) - E(Y)E(X) - E(X)E(Y) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

Covarianza, proprietà

Qualunque siano X e Y v.a. e a, b, c, d numeri reali

$$\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(X, Y)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} \text{cov}(aX + b, cY + d) &= E((aX + b - aE(X) - b)(cY + d - cE(Y) - d)) \\ &= E((aX - aE(X))(cY - cE(Y))) \\ &= E(a(X - E(X))c(Y - E(Y))) \\ &= acE((X - E(X))(Y - E(Y))) \end{aligned}$$

Esempio

Si lanciano due dadi con facce numerate da 1 a 6 e si considerano le v.a.

M = massimo dei due dadi

S = somma dei due dadi

Si ricavino

1. La funzione di probabilità congiunta.
2. $P((M \leq 2))$
3. $P((M \leq 2) \cap (S \leq 4))$
4. La funzione di probabilità di S condizionata a $M = 5$
5. La funzione di probabilità di M condizionata a $S = 6$
6. La covarianza tra M e S

Esempio

Si lanciano due dadi, uno rosso e uno verde, con facce numerate da 1 a 6 e si considerano le v.a.

R = esito del dado rosso

V = esito del dado verde

Si ricavano

1. La funzione di probabilità congiunta.
2. La funzione di probabilità di R condizionata a $V = 5$
3. La funzione di probabilità di V condizionata a $R = 6$
4. La covarianza tra R e V

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j .

In altre parole, diciamo che le v.a. X e Y sono indipendenti se tutte le coppie di eventi $(X = x_i)$ e $(Y = y_j)$ sono indipendenti, la formula sopra infatti è

$$p(x_i, y_j) = P((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j .

Si noti che questo significa che

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i)$$

e

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = p_Y(y_j)$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indipendenza tra v.a.

Indipendenza

Le due variabili X e Y si dicono indipendenti se

$$p(x_i, y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j)$$

qualunque siano i e j .

Si noti che questo significa che

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = p_X(x_i) \quad [P(X = x_i|Y = y_j) = P(X = x_i)]$$

e

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = p_Y(y_j) \quad [P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_j)]$$

(si rivedano le definizioni di funzioni di probabilità condizionate.)

Indice

Introduzione alle variabili aleatorie discrete, scommesse

Introduzione alle variabili aleatorie discrete (binomiale)

Distribuzione di probabilità

Media, varianza e trasformazioni

Alcune distribuzioni discrete

Esempi “seri”

Variabili aleatorie discrete doppie

Funzioni di più variabili aleatorie

Come abbiamo costruito, a partire da una singola v.a. X , una nuova v.a. via una trasformazione del tipo $Y = h(X)$, così si può fare con più variabili aleatorie con trasformazioni del tipo

$$S = h(X, Y)$$

Due esempi già visti sono

- ▶ M pari al minimo tra due dadi
- ▶ S pari alla somma di due dadi

Non approfondiamo il discorso generale ma solo il caso particolare della somma.

Combinazione lineare di v.a.

Date le v.a. $X_1, \dots, X_n$ e i numeri reali $a_1, \dots, a_n$, definiamo la v.a.

$$Y = \sum_{i=1}^n a_i X_i$$

Salvo casi particolari, non è semplice ottenere la distribuzione di probabilità di Y , si ha però che

$$(1) \quad E(Y) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i)$$

$$(2) \quad V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i) + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

(3) se le X_i sono indipendenti

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n a_i^2 V(X_i)$$

Dimostrazione di (1) nel caso di due variabili

Sia (X, V) v.a. con valori possibili $\{x_1, \dots, x_n\}$ e $\{v_1, \dots, v_k\}$, distribuita congiuntamente secondo $p(x, v)$

$$\begin{aligned}
 E(Y) &= E(X + V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k (x_i + v_j) p(x_i, v_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k x_i p(x_i, v_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k v_j p(x_i, v_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^k p(x_i, v_j) + \sum_{j=1}^k v_j \sum_{i=1}^n p(x_i, v_j) \\
 &= \sum_{i=1}^n x_i p_X(x_i) + \sum_{j=1}^k v_j p_V(v_j) = E(X) + E(V)
 \end{aligned}$$

Binomiale = somma di variabili indicatrici

Se consideriamo n eventi indipendenti e con la stessa probabilità di verificarsi, $P(E_i) = p$

$$Y = \#\{E_i \text{ che si verificano}\} \sim \text{Binom}(n, p)$$

Definiamo le v.a.

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{se } \bar{E}_i \\ 1 & \text{se } E_i \end{cases}$$

allora

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i$$

Questo ci permette di ricavare media e varianza della binomiale indirettamente.

Media e varianza della binomiale

Preliminarmente si noti che

$$E(X_i) = 0(1 - p) + 1p = p$$

$$E(X_i^2) = 0(1 - p) + 1p = p$$

e quindi

$$V(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

Si ha allora, per $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$$

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1 - p)$$

Esempio: goal!

Relativamente a una partita di calcio tra ... si ritiene che il numero di goal che segnerà la squadra A , X_A , sia distribuito secondo una Poisson di parametro $\lambda_A = 1.8$, mentre il numero di goal della squadra B , X_B , secondo una Poisson di parametro $\lambda_B = 1.3$. Si ritengono i due numeri indipendenti. Si dica

- (1) qual è la probabilità che la partita termini $0 - 0$;
- (2) qual è la probabilità che A vinca, e che B non segni neppure un goal;
- (3) qual è la probabilità che la partita termini in parità;
- (4) qual è la probabilità che vinca A .

Esempio: goal! (1)

(1) Qual è la probabilità che la partita termini $0 - 0$;

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$(X_A = 0) \cap (X_B = 0)$$

essendo le due v.a. indipendenti

$$\begin{aligned} P((X_A = 0) \cap (X_B = 0)) &= P(X_A = 0)P(X_B = 0) \\ &= \frac{\lambda_A^0}{0!} e^{-\lambda_A} \frac{\lambda_B^0}{0!} e^{-\lambda_B} \\ &= e^{-\lambda_A - \lambda_B} = e^{-1.8 - 1.3} = 0.04505 \end{aligned}$$

Esempio: goal! (2)

(2) Qual è la probabilità che A vinca, e che B non segni neppure un goal.

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$(X_A > 0) \cap (X_B = 0)$$

essendo le due v.a. indipendenti

$$\begin{aligned} P((X_A > 0) \cap (X_B = 0)) &= P(X_A > 0)P(X_B = 0) \\ &= (1 - P(X_A = 0))P(X_B = 0) \\ &= (1 - e^{-\lambda_A})e^{-\lambda_B} \\ &= 0.2275 \end{aligned}$$

Esempio: goal! (3)

(3) Qual è la probabilità che la partita termini in parità.

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$\bigcup_{x=0}^{+\infty} ((X_A = x) \cap (X_B = x))$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{x=0}^{+\infty} ((X_A = x) \cap (X_B = x))\right) &= \sum_{x=0}^{+\infty} P(X_A = x)P(X_B = x) \\ &= 0.2307 \end{aligned}$$

(ottenuta numericamente)

Esempio: goal! (4)

(4) Qual è la probabilità che vinca A .

L'evento di cui si cerca la probabilità è

$$\bigcup_{x=0}^{+\infty} \bigcup_{y=x+1}^{+\infty} ((X_A = y) \cap (X_B = x))$$

quindi

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{x=0}^{+\infty} \bigcup_{y=x+1}^{+\infty} ((X_A = y) \cap (X_B = x))\right) &= \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y=x+1}^{+\infty} P(X_A = y)P(X_B = x) \\ &= 0.492 \end{aligned}$$

(ottenuta numericamente)

Esempio: goal!

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.04505	0.05856	0.03807	0.01650	0.00536	0.00139	0.00030	0.00006	0.00001	...
1	0.08109	0.10542	0.06852	0.02969	0.00965	0.00251	0.00054	0.00010	0.00002	...
2	0.07298	0.09487	0.06167	0.02672	0.00868	0.00226	0.00049	0.00009	0.00001	...
3	0.04379	0.05692	0.03700	0.01603	0.00521	0.00135	0.00029	0.00005	0.00001	...
4	0.01970	0.02562	0.01665	0.00722	0.00234	0.00061	0.00013	0.00002	0.00000	...
5	0.00709	0.00922	0.00599	0.00260	0.00084	0.00022	0.00005	0.00001	0.00000	...
6	0.00213	0.00277	0.00180	0.00078	0.00025	0.00007	0.00001	0.00000	0.00000	...
7	0.00055	0.00071	0.00046	0.00020	0.00007	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	...
8	0.00012	0.00016	0.00010	0.00005	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	...
9	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Esercizi

Qual è il saldo medio su 100 puntate fatte sul rosso alla *roulette*

1. $100 \times (18/36 - 1)$.
2. $100 \times 18/36 - 100$.
3. $100 \times 18/37 - 100$

Esercizi (continua)

Uno studente sostiene un test a risposta multipla, ci sono 10 domande e per ciascuna quattro risposte di cui una sola corretta. Lo studente, non troppo preparato, conosce la risposta a 5 domande mentre risponde a caso alle altre 5. Qual è la probabilità che ottenga la sufficienza (almeno 6 corrette) assumendo che le risposte date non a caso siano effettivamente corrette?

1. 0.20
2. 0.24
3. 0.25
4. 0.28

Inoltre, se le risposte sono tre anziché quattro, la probabilità di ottenere la sufficienza sarà più alta o più bassa?