1.7 Dimensionamento della voluta a spirale

Si vuole dimensionare la voluta della pompa studiata nell'esercitazione precedente. I dati di base del progetto sono:

$$Q = 0{,}05\ [m^3/s]$$

$$H_m = 10\ [m]$$

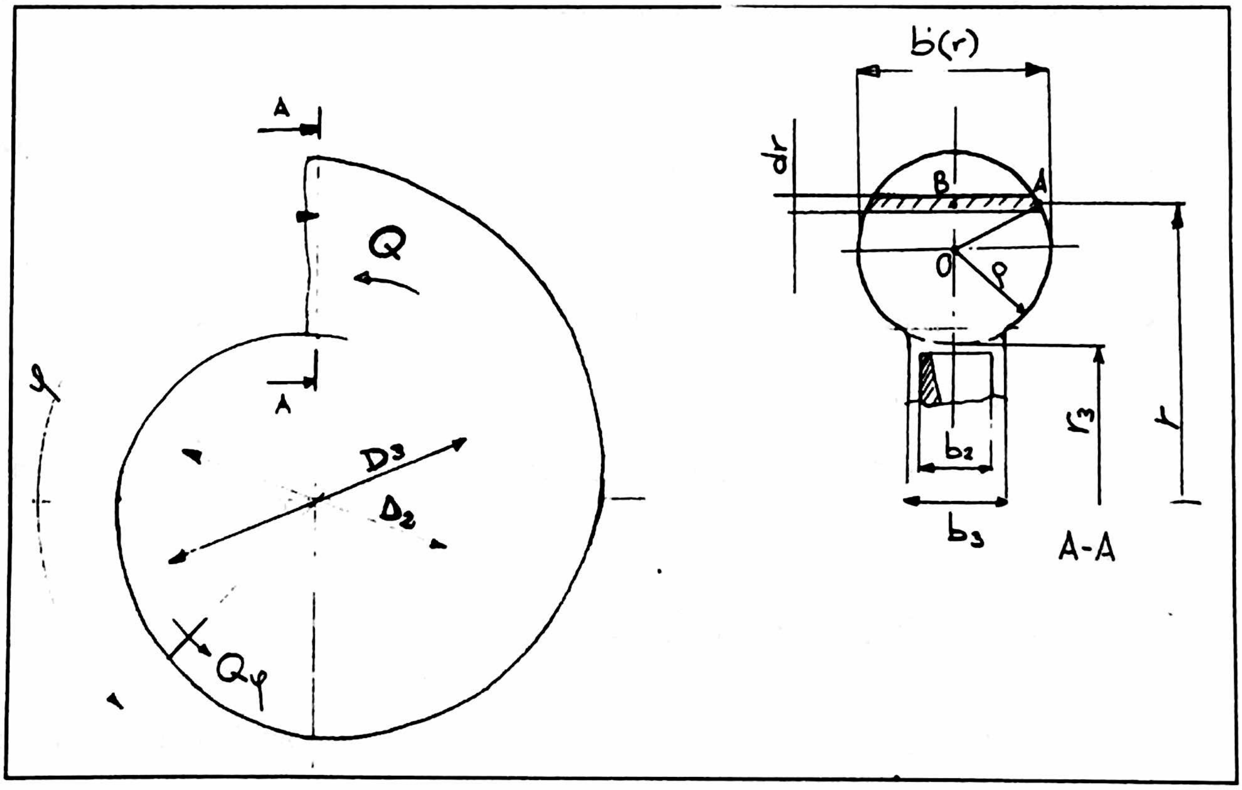
$$\omega = 157\ [rad/s] = 1500\ [giri/min]$$

In base al numero caratteristico di macchina si era dimensionata statisticamente la sezione meridiana. E' risultato:

$$\overline{D_2} = (D_2 + D_2')/2 = 0{,}180\ [m]$$

$$B_2 = 0{,}032\ [m]$$

(rispettivamente diametro medio della girante all'uscita e larghezza all'uscita). D'ora in poi si indicherà il diametro medio per semplicità con D_2.



Il diametro D_3 e la larghezza b_3 della sezione di ingresso della voluta si ottengono statisticamente grazie ai rapporti adimensionali D_3/D_2 e b_3/b_2, ed al numero caratteristico K della pompa. Di fatto si hanno i seguenti valori estrapolabili linearmente:

	$K = 0,2$	$D/D_2 = 1,05$; $b_3/b_2 = 1,80$
	$K = 1,0$	$D/D_2 = 1,25$; $b_3/b_2 = 1,65$
e, per	$K = 1,126$	$D_3/D_2 = 1,282$; $b_3/b_2 = 1,626$.

Moltiplicati tali rapporti rispettivamente per D_2 e b_2, si ottiene:

$$D_3 = 0,231 \text{ [m]}$$

$$b_3 = 0,054 \text{ [m]}.$$

Si vogliono determinare le dimensioni trasversali della sezione al variare della posizione angolare.

Si considerano verificate le ipotesi che seguono.

- Si suppone che la portata effluente attraverso la sezione della voluta sia proporzionale all'angolo φ che individua la sezione stessa (si suppone cioè che in archi uguali della girante comunque disposti effluisca la stessa portata, cioè che $Q(\varphi)/\varphi = \text{cost}$).

Nota la portata Q a $\varphi = 360°$ si ha subito:

$$Q(\varphi) = Q \cdot \varphi / 360° \qquad \text{con } \varphi \text{ espressa in gradi.}$$

- Si suppone inoltre senz'altro valida la legge del vortice libero all'interno della voluta:

$$c_u(r) \cdot r = \text{cost} .$$

Con riferimento alla figura precedente, detta b(r) la larghezza della voluta al raggio r, si può scrivere:

$$Q(\varphi) = \frac{\varphi}{360°} Q = \int_{r_3}^{r_{max}} b(r) \cdot c_u(r) dr$$

Si tratta ora di fissare una legge di variazione della larghezza b(r). Si sceglie una voluta a sezione circolare.

Dal triangolo rettangolo OAB si ha:

$$b(r) = 2\overline{BA} = 2\sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OB}^2}$$

$$= 2\sqrt{\rho^2 - (r_3+\rho-r)^2}$$

Sostituendo nella formula della portata:

$$\frac{\varphi}{360°}Q = \int_{r_3}^{r_3+2\rho} 2\sqrt{\rho^2 - \left(r_3+\rho-r\right)^2}\cdot\frac{c_u(r)\cdot r}{r}dr$$

essendo $c_u(r)\, r = \text{cost}$, si ha:

$$\frac{\varphi}{360°}Q = 12\,\text{cost.}\int_{r_3}^{r_3+2\rho}\frac{\sqrt{\rho^2 - \left(r_3+\rho-r\right)^2}}{r}dr$$

Risolvendo l'integrale ed esplicitando φ si ottiene:

$$(*)\varphi = \frac{720}{Q}\cdot\text{cost.}\left[r_3+\rho-\sqrt{r_3\left(r_3+2\rho\right)}\right]$$

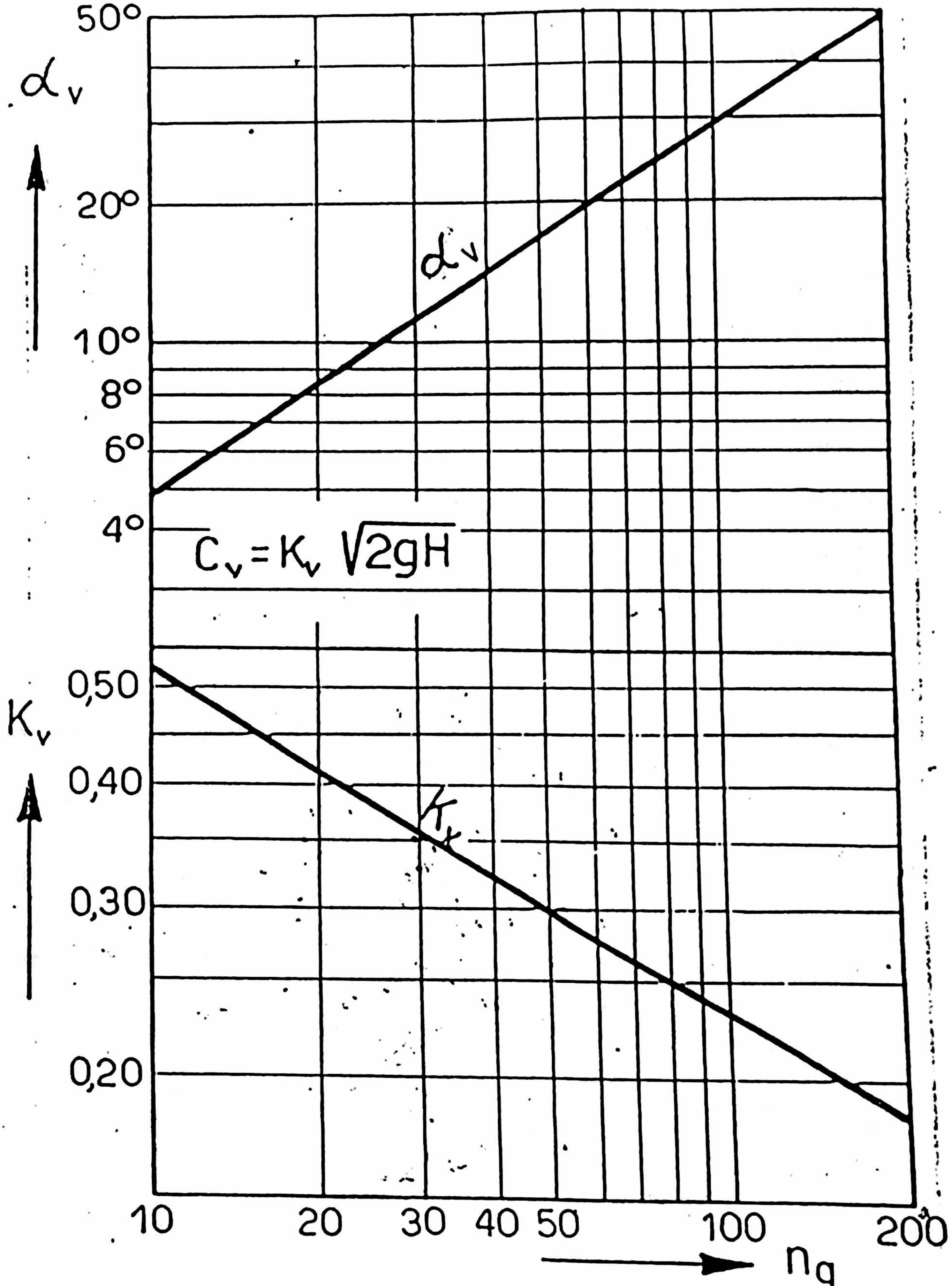
dove cost. è la costante del vortice libero .

Per determinare la costante $C = \dfrac{720\cdot\text{cost}}{Q}$ ci si affida di fatto a diagrammi statistici; il procedimento è il seguente: per $\varphi = 360°$ si ha la sezione massima $S_{360°} = S_{MAX} = \pi\,\rho_{MAX}^2$; la velocità media in tale sezione si esprime $c_v = K_v\sqrt{2gH}$; K_v è dato da diagrammi statistici in funzione di $n_Q = \dfrac{n\,Q^{\frac{1}{2}}}{H^{\frac{3}{4}}}$ .Nel caso in questione $n_Q = \dfrac{1500\cdot(0,05)^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{3}{4}}} = 60,0$. Dal diagramma che segue si stima $K_v = 0,275$. Risulta, da semplici calcoli,

$$c_v = 3,85[m/s] \qquad c_v\cdot S_{max} = Q \Rightarrow c_v\cdot\pi\cdot\rho_{max}{}^2 = Q$$

$$\rho_{max} = \sqrt{\frac{Q}{\pi c_v}} = 0,064[m]$$

Applicando la relazione (*) si ha



Valori usuali per l'angolo α_v della voluta spirale e per il coefficiente K_v.

$$C = \frac{720 \cdot \text{cost.}}{Q} = \frac{\varphi_{max}}{r_3 + \rho_{max} - \sqrt{r_3\left(r_3 + 2\rho_{max}\right)}}$$

$$= \frac{360}{\frac{0,231}{2} + 0,064 \cdot \sqrt{\frac{0,231}{2}\left(\frac{0,231}{2} + 0,064\right)}}$$

Noto finalmente C, esplicitando ρ dalla (*) si ottiene $\rho = \frac{\varphi}{C} + \sqrt{\frac{2\varphi\, r_3}{C}}$; è quindi noto il raggio della sezione circolare della voluta per ogni angolo φ. Va osservato che finora non si sono considerati gli attriti che rallentano la corrente.

La sezione andrà quindi maggiorata: $\rho_{eff} = \rho + \Delta\rho$.

ρ_{eff} serve a smaltire la stessa portata a velocità minore.

Pfleiderer suggerisce per $\Delta\rho$ l'espressione:

$\Delta\rho = 0{,}004\, r_3\, (\pi/180)\, \varphi$ con $\Delta\rho$ e r_3 in metri e con φ in gradi.

Finora si è supposto che le sezioni fossero tutte circolari. In realtà all'inizio della voluta sarà sicuramente $2\rho < b_3$ e quindi bisognerà prevedere delle sezioni ellittiche di semiasse maggiore $a_1 = b_3/2$ e semiasse minore determinato dall'equivalenza delle aree (affinché venga smaltita la stessa portata con la stessa velocità media). Dovrà cioè essere $\pi\, \rho_{eff}^2 = \pi a_1 a_2$

Ricordando che: $a_1 = b_3$, si ha: $a_2 = 2\rho_{eff}^2/b_3$.

Allo scarico della voluta c'è infine un tratto divergente per recuperare pressione. Tale divergenza è stata presa pari a 10°.Detto "α_v" l'angolo tra la voluta e la circonferenza dello spigolo taglia acqua, deve risultare

$\alpha_v = 20°$ da diagramma statistico.

Tale angolo caratteristico influenza le prestazioni della pompa realizzata con la voluta progettata ed è perciò molto importante verificarne il valore sul disegno del progetto stesso. Nel caso considerato l'angolo rilevato sul disegno è pari proprio a 20°.

Per disegnare la sezione della voluta e per eseguire i calcoli del progetto è stato usato un elaboratore elettronico; si è pervenuti così ai seguenti valori delle dimensioni della sezione trasversale della voluta in funzione della posizione angolare:

φ [°]	r [m]	ρ_{eff} [m]	a_1 [m]	a_2 [m]
54	0,135	0,0225	0,0260	0,0195
60	0,137	0,0239	0,0260	0,0219
75	0,150	0,0270		
90	0,160	0,0326		
105	0,168	0,0326		
120	0,174	0,0352		
135	0,180	0,0376		
150	0,186	0,0400		
165	0,191	0,0423		
180	0,196	0,0445		
195	0,201	0,0466		
210	0,205	0,0487		
225	0,210	0,0501		
240	0,214	0,0527		
255	0,218	0,0546		
270	0,222	0,0565		
285	0,226	0,0583		
300	0,230	0,0602		
315	0,234	0,0620		
330	0,237	0,0637		
345	0,241	0,0655		
360	0,245	0,0672		