BASI per il corso

SPAZI VETTORIALI

Spazio vettoriale V su $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) è un insieme i cui elementi vengono chiamati VETTORI

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \in V$$

"somme" con prop. delle somme

su cui definiamo le operazioni $+$ e prodotto per uno scalare :

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V \qquad \text{con} \qquad \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \qquad \text{t.c.} \qquad \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 \in V$$

$$\alpha \vec{v}_1 \in V \qquad \text{e } \alpha \in \mathbb{R}$$

$\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se

$\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m$ sono LINEARMENTE DIPENDENTI se $\exists$ una combinaz. linear nulla, cioè se $\exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\underbrace{\alpha_1 \bar{v}_1 + \alpha_2 \bar{v}_2 + \ldots + \alpha_m \bar{v}_m}_{\equiv \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{v}_i} = 0$$

(I vett. sono lin. indip. se non sono lin. dip)

(I vettori sono linearmente indipendenti se non sono lin. dip.)

BASE per V : insieme di vettori linearm. INDIPENDENTI

$$\{ \bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n \} \quad \text{t.c.}$$

$$\forall \bar{v} \in V \quad \exists ! (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \text{t.c.}$$

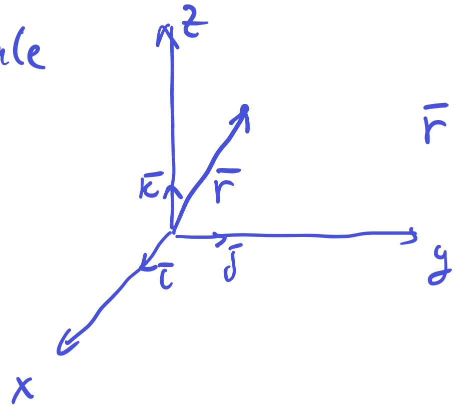
$$\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{e}_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

"componenti" del vettore

Es. Spazio 3-dimensionale



scelta di sist. di rif. $\leftrightarrow$ base

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Prodotto scalare

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \mapsto \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 \in \mathbb{R}$$

prodotti scalari definiti positivi

$$\rightsquigarrow \|\bar{v}\|^2 \equiv \bar{v} \cdot \bar{v}$$

$\rightsquigarrow$ Base ortonormale $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$

$$\bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

$$= \delta_{ij}$$

$\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V$

$$\bar{v}_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{e}_i = \sum_{✿=1}^{m} \alpha_{✿} \bar{e}_{✿} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_m \bar{e}_m$$

$$\sum_{✿=1}^{m} \alpha_{✿} \bar{e}_{✿} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \bar{e}_k$$

$$\bar{v}_2 = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{e}_j$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{e}_j \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[\bar{e}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \bar{e}_j \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{m} \beta_j \; \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{m} \beta_j \delta_{ij} \right) =$$

$(a+b)(c+d)$
$= a(c+d) +$
$+ b(c+d)$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \delta_{ij} = \beta_1 \delta_{i1} + \beta_2 \delta_{i2} + \beta_3 \delta_{i3} + \dots + \beta_n \delta_{in} =$$

$$= \beta_1 \delta_{i1} + \dots + \underset{j=i}{\beta_i \delta_{ii}} + \dots + \beta_n \delta_{in}$$

$$= 0 + \dots + \beta_i + 0 + \dots + 0 = \beta_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Operatori lineari su V

- Dato uno sp. vett. V di dim. n, consideriamo gli OPERATORI LINEARI

$$A : V \to V \qquad \text{(endomorfismi)}$$

lin: $A(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha (A\bar{v}_1) + \beta (A \bar{v}_2)$

- Scelta una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ di V, A è rappresentato da una MATRICE $n \times n$ che agisce sulle componenti dei vett. in V rispetto alla base $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i$

$$A\bar{e}_i \in V \Rightarrow A\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{n} (A_{ji}) \bar{e}_j$$

$$A\bar{v} = A \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i \overset{\text{lin.}}{=} \sum_i \alpha_i (A\bar{e}_i) = \sum_j \left(\sum_i A_{ji} \alpha_i \right) \bar{e}_j$$

Componenti del vett. $A\bar{v}$ rispetto alla base $\{\bar{e}_i\}$ sono dati da prodotto di matrice corrisp. sulle componenti di $\bar{v}$. (*)

Se la base è ORTONORMALE : $A_{ki} = \bar{e}_k \cdot A\bar{e}_i$

(*)

$$\bar{w} \equiv A\bar{v} \rightarrow \beta_j = \sum_{i=1}^{2} A_{ji}\,\alpha_i$$

$\bar{v} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$ $\quad \bar{w} \leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

cioè $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$

$\bar{w} = \beta_1 \bar{e}_1 + \beta_2 \bar{e}_2$

$$\downarrow$$

$$\beta_1 = A_{11}\alpha_1 + A_{12}\alpha_2$$

$$\beta_2 = A_{21}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2$$

$$\leftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

SPAZIO VETTORIALE DUALE

- Dato uno sp. vett. V di dim n, viene definito lo spazio vettoriale DUALE come lo spazio dei FUNZIONALI LINEARI su V

$$V^* = \{ a : V \to \mathbb{R} \mid a(\alpha \bar{v}_1 + \beta \bar{v}_2) = \alpha\, a(\bar{v}_1) + \beta\, a(\bar{v}_2) \quad \forall \bar{v}_1, \bar{v}_2 \in V \}$$

- V^* è uno SPAZIO VETTORIALE di dim. n.

  È def. somma di funzionali : $\forall \bar{v} \in V \quad (a+b)(\bar{v}) = a(\bar{v}) + b(\bar{v})$ ← ben def. su $\mathbb{R}$

  Prodotto per scalare def. analogam. : $\forall \bar{v} \in V \quad (\alpha a)(\bar{v}) = \alpha \cdot a(\bar{v})$.

- Data una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, possiamo definire la BASE DUALE in V^* $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ t.c.

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$$

In componenti $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad e_1^* = (1 \ 0 \ 0 \ \dots)$

DIFFERENZIALE

Prendiamo una funzione $\bar{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$

Il differenziale $D\bar{f}(\bar{x}_0)$ (vedi Analisi II)

è un'applicazione lineare

$$D\bar{f}(\bar{x}_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$

che agisce nel seguente modo:

derivata direzionale lungo v

$$\bar{v} \in \mathbb{R}^N \mapsto D\bar{f}(\bar{x}_0)[\bar{v}] \equiv \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\bar{f}(\bar{x}^0 - \epsilon\bar{v}) - \bar{f}(\bar{x}^0)}{\epsilon}$$

Da Analisi II, ricordiamo che

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\bar{f}(x^0 - \epsilon v) - \bar{f}(x^0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{L[\epsilon v] + R(x^0 + \epsilon v)}{\epsilon} = L[v]$$

Se applichiamo il differenziale su $\bar{e}_i$ otteniamo

$$D\bar{f}(\bar{x}_0)[\bar{e}_i] = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$$

- Ora consideriamo il caso di una FUNZIONE

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \qquad (M=1)$$
$$\bar{x} \in \mathbb{R}^N \mapsto f(\bar{x}) \in \mathbb{R}$$

Il suo DIFFERENZIALE è di solito indicato con df:

$$df(x) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$$

è un FUNZIONALE LINEARE, cioè un vett. dello spazio vett. duale a $\mathbb{R}^N$.

Come prima $df(\bar{x}_0)[\bar{e}_i] = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_0)$

Se prendiamo la funzione $x_i : \bar{x}_0 \mapsto (x_0)_i$, il suo differenziale dx_i è tale che

$$dx_i[\bar{e}_j] = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}$$

$\Rightarrow \{dx_i\}_{i=1,\dots,N}$ è la base duale di $\{\bar{e}_i\}_{i=1,\dots,N}$

$\Rightarrow$ $df(x)$ può essere espanso in tale base

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)\, dx_i$$

$$\left[\ \underset{\substack{\parallel}}{df\left[\sum_i \alpha_i e_i\right]} \underset{\forall \alpha_i}{=} \sum_i \alpha_i\, df[e_i] = \sum_i \alpha_i \underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}} \Rightarrow (df)_j = \frac{\partial f}{\partial x_j} \right.$$

$$\left. \sum_j (df)_j\, dx_j\left[\sum_i \alpha_i e_i\right] = \sum_j \underline{\underline{(df)_j}}\, \alpha_j \ \right]$$

Vediamo in componenti: $\bar{v} = \sum_i v_i \bar{e}_i$

$$df(x_0)[\bar{v}] = \sum_k \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_k} dx_k\left[\sum_j v_j \bar{e}_j\right] =$$

$$= \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_j v_j \underbrace{dx_k[\bar{e}_j]}_{\delta_{kj}} = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k} v_k = \bar{\nabla} f \cdot \bar{v}$$

- Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  $t \mapsto f(t)$ $\rightarrow$ $df = \dfrac{df}{dt}\, dt$

- Consideriamo ora una TRASFORMAZ. di COORDINATE, cioè una funzione

$$\bar\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \qquad (\text{INVERTIBILE!})$$
$$\bar x \mapsto \bar x' = \bar\varphi(\bar x)$$

x_i' sono nuove coord. di $\mathbb{R}^N$

In componenti

$$x_1' = \varphi_1(x_1, \dots, x_N)$$
$$x_2' = \varphi_2(x_1, \dots, x_N)$$
$$\vdots$$
$$x_N' = \varphi_N(x_1, \dots, x_N)$$

Es. coord. polari vs Cartesiane

$$x_1' = r\cos\theta \leftarrow \varphi_1(r,\theta)$$
$$x_2 = r\,\text{sen}\,\theta \leftarrow \varphi_2(r,\theta)$$

Il differenziale di φ, $D\varphi(x_0)$, è un operatore lineare: $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, e qndi può essere rappresentato da una matrice quadrata $N \times N$.

Ricordiamo che per un generico op. lin. A, la sua matrice è $A_{ki} = \bar e_k \cdot A \bar e_i$ (vedi sopra).

In qto caso indichiamo con J_{ki} (MATRICE JACOBIANA) la matrice di $D\bar\varphi$:

$$J_{ki} = \bar e_k \cdot D\bar\varphi[\bar e_i] = \bar e_k \cdot \frac{\partial \bar\varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial \varphi_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial \bar\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar\varphi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \bar\varphi}{\partial x_N} \right)$$

Matrice INVERTIBILE ($\det J \neq 0$) per buon cambiam. di coord.

• Differenziale della FUNZIONE COMPOSTA

$$f : \mathbb{R}^N \xrightarrow{\partial t^a} \mathbb{R}^M \qquad g : \mathbb{R}^M \xrightarrow{\partial x^i} \mathbb{R}^L$$
$$t \mapsto f(t) \qquad\qquad x \mapsto g(x)$$

Chiamiamo $h = g \circ f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^L$ (FUNZIONE COMPOSTA)
$$t \mapsto g(f(t))$$

Il diff. della funz. comp. (vedi Analisi II)

$$Dh(t_0) = D(g \circ f)(t_0) = Dg(f(t_0)) \cdot Df(t_0) \qquad (\star)$$

prodotto di op. lineari (cioè prodotto di matrici se in componenti)

$$Df(t_0) : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$$
$$Dg(f(t_0)) : \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^L$$

Vediamo in componenti:

$$(Dh)_{\alpha a} = \frac{\partial h_\alpha}{\partial t_a} \qquad (Dg)_{\beta i} = \frac{\partial g_\beta}{\partial x_i} \qquad (Df)_{ia} = \frac{\partial f_i}{\partial t_a}$$

$A_{\alpha b} \quad \sum_j B_{\alpha j} C_{jb}$ ← se $A = Dh$, $B = Dg$, $C = Df$

$$(\star) \to \quad \frac{\partial h_\alpha}{\partial t_b}(t_0) = \sum_j \frac{\partial g_\alpha}{\partial x_j}(f(t_0)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial t_b}(t_0) \qquad (*)$$

Derivata della funzione g rispetto al suo argomento

derivata dell'argom. rispetto a t

(*) Notazione usata anche in Analisi II anche se non in componenti

Prendiamo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t)$ $\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ $\Rightarrow h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t)$

- derivate parziali diventano derivata semplice

  xes: $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} = f'$

- $h(t) = g(f(t))$

$$\underbrace{h'(t)}_{\equiv \frac{dh}{dt}} = \underbrace{g'}_{\equiv \frac{dg}{dx}(f(t))}(f(t)) \cdot \underbrace{f'}_{\equiv \frac{df}{dt}}(t)$$

← Solita regola della derivata di una funzione composta

Qui verrebbe da scrivere

$$\frac{dg(f(t))}{dt} = \frac{dg}{df}\frac{df}{dt}$$

MA QTO SIMBOLO NON È BEN DEFINITO

Invece "$\frac{dg}{dx}$" sì e vuol dire

"derivata di g rispetto al suo argomento"

$\frac{dg}{dx} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funz.

$x_0 \mapsto \frac{dg}{dx}(x_0)$

Si può trovare scritto anche

$$\frac{\partial g_\alpha(f(t))}{\partial t_b}$$

Verrebbe allora da scrivere

$$\frac{\partial g_\alpha}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial t_b}$$

$\uparrow$

Ma questo simbolo non è ben definito;
invece la funzione $\frac{\partial g_\alpha}{\partial x_i}(x)$ sì.

ES. Partiamo da una funz. a tre variabili (vedi Analisi II)

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

→ c'è una mappa $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \mapsto x^2+y^2+z^2$$

Le sue derivate parziali sono ancora delle funzioni

$$\frac{\partial g}{\partial x} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x_0,y_0,z_0) \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \qquad (x_0,y_0,z_0) \mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)$$

$\frac{\partial g}{\partial z} : \dots$

Prendiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \operatorname{sen} t \\ t \end{pmatrix}$$

Immagine di f è una CURVA in $\mathbb{R}^3$ (t è detto parametro della curva).

Possiamo definire la funzione composta

$$h = g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto h(t) = g(f(t))$$

$$h(t) = g(\cos t, \operatorname{sen} t, t) = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

La derivata di tale funzione è

$$\dot{h}(t) = 2t$$

D'altra parte posso calcolarla con la regola di derivazione della funzione composta

$$\dot{h}(t) = \frac{dh}{dt}(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(t)) \cdot \dot{f}_i(t)$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial g}{\partial z} = 2z$$

$$\dot{f}_1 = -\operatorname{sen} t \qquad \dot{f}_2 = \cos t \qquad \dot{f}_3 = 1$$

$$\rightarrow \dot{h}(t) = \cancel{2(\cos t)(-\operatorname{sen} t)} + \cancel{2(\operatorname{sen} t)(\cos t)}$$

$$+ 2(t)(1) \quad = 2t$$