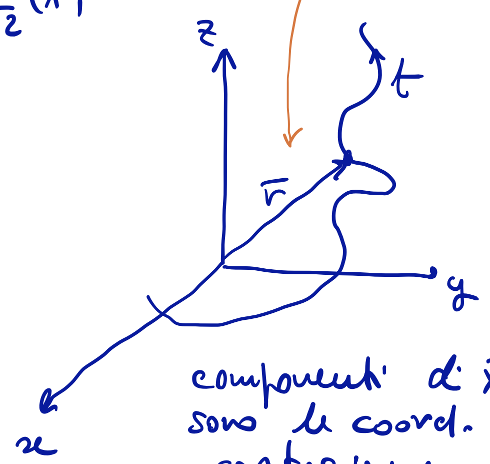
EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE

Eq. di Newton $\quad \bar{F} = m\bar{a} = m \dfrac{d^2\bar{r}(t)}{dt^2}$ "POSIZIONE"

$\bar{x}(t)$: $\quad \bar{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\qquad\qquad t \mapsto \bar{r}(t)$ "MOTO"

$$= \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$



componenti di $\bar{x}$ sono le coord. cartesiane

L'eq. di Newton è un'eq. differenziale

$$m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}(t) = \bar{F}\left(\bar{r}(t), \frac{d\bar{r}}{dt}(t), t\right)$$

funz. composta $\bar{F} \circ \left(\bar{x}(t), \dfrac{d\bar{x}}{dt}(t)\right)$

$\bar{F}(\bar{x}, \bar{v}, t)$

→ è un'eq. la cui incognita è una FUNZIONE $(\bar{r}(t))$

Caso 1-dimensionale : il pto materiale si muove su una retta.

$$\xrightarrow[\quad 0 \qquad x \quad]{} \mathbb{R}$$

Il moto lungo la retta è descritto da una funzione

$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto x(t)$$

Eq. di Newton:

$$m \frac{d^2x}{dt} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

⇝ eq. diff. la cui incognita è la funz. $x(t)$

funzioni $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$\qquad t \mapsto \dots$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m}\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \equiv f\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)$$

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$

Eq. diff. 2° ord. in forma normale

è un'uguaglianza fra due funz. in t

f è una funzione a tre variabili:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$(x, v, t) \mapsto f(x, v, t)$$

è una funzione

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$t \mapsto f(x(t), \dot{x}(t), t) \qquad \text{(funz. composta)}$$

2ª legge di Newton in sist. 1d:

$$\underbrace{\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)}_{\text{"forma normale"}}$$

se f è INDIPEND da t, l'eq. si dice AUTONOMA

(Forma generica sarebbe $g(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) = 0$)

Se f è LINEARE in x e $\dot{x}$, l'eq. si dice LINEARE

$f(x, \dot{x}, t) = a\dot{x} + bx + c$

ES 1 PARTICELLA LIBERA

$$\ddot{x} = 0$$

$$\to \quad x(t) = at + b \quad \leftarrow \text{"SOLUZIONE GENERALE"}$$

a, b parametri liberi

$\leadsto$ per ogni scelta di (a, b) abbiamo una diversa soluzione PARTICOLARE

ES. $(a, b) = (1, 0) \leadsto x(t) = t$

ES 2) OSCILLATORE ARMONICO

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{\underline{a}} \cos(\omega t) + \underline{\underline{b}} \,\mathrm{sen}(\omega t)$$
$$= \underline{A} \cos(\omega t + \underline{\varphi})$$
$$= \underline{\underline{C}}\, e^{i\omega t} + C^* e^{-i\omega t}$$

$\llcorner\, C = \mathrm{Re}\,C + i\,\mathrm{Im}\,C$

2 parametri (reali) liberi

ES 3) REPULSORE ARMONICO

$$\ddot{x} = \omega^2 x$$

$$\rightarrow x(t) = \underline{a} \cosh \omega t + \underline{b} \sinh \omega t$$
$$= \underline{\underline{A}}\, e^{\omega t} + \underline{B}\, e^{-\omega t}$$

ES 1,2,3 hanno la caratteristica in comune che f è una funz. LINEARE in x e $\dot{x}$

$f = 0 \;,\; -\omega^2 x \;,\; \omega^2 x$

Per le eq. diff. lineari OMOGENEE* vale il PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZ. il quale dice che la SOLUZIONE GENERALE è combinazione lineare di 2 (se eq. è del 2° ordine) soluzioni particolari indip.

* $f(x, \dot{x}, t) = a\dot{x} + bx \quad (c=0)$

Se a f lin. omogenea, si aggiunge un termine non-omogeneo, allora la soluz. GENERALE è la somma di una soluz. particolare e della soluz. gen. dell'eq. omogenea associata.

ES 4

$f = -g$ è lineare, ma non è omogenea.

$\ddot{x} = -g$ ⇝ eq. omogenea associata è $\ddot{x} = 0$

solut. particolare: $-\frac{1}{2}gt^2$

solut. gen. dell'omogenea $x_{om.}(t) = at + b$

Solut. gen. dell'eq. di partenza è

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + at + b$$

ES 5

PENDOLO

$\ddot{x} = -\omega^2 \sin x$ ← non-lineare

(solut. richiede funzioni ellittiche)

ES 6

CADUTA FRENATA

$\ddot{x} = -\beta\dot{x} - g$ ⇝ eq. omogenea associata $\ddot{x} = -\beta\dot{x}$

$v(t) \equiv \dot{x}(t)$

$\dot{v} = -\beta v$

$v(t) = \alpha e^{-\beta t}$

$x_{om.}(t) = b - \frac{\alpha}{\beta}e^{-\beta t}$

$= b + a e^{-\beta t}$

solut. part.

$x_{part}(t) = -\frac{g}{\beta}t \equiv v_\infty t$

$\equiv v_\infty$

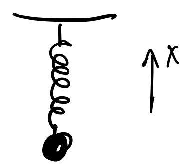
$$x(t) = v_\infty t + a e^{-\beta t} + b$$

$$\left(\dot{x}(t) = v_\infty - a\beta e^{-\beta t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} v_\infty\right)$$

ES 7 | Osc. armonico in campo di forze cost.

$\ddot{x} = -\omega x - g$ ⇝ eq. omog. associata $\ddot{x} = -\omega x$

$x_{om}(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$



↓

soluz. part. $x_{part}(t) = -g/\omega$

$\rightarrow \quad x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) - \frac{g}{\omega}$

ES 8 | OSCILLATORE ARMONICO SMORZATO

$\mu, \omega > 0$

$\ddot{x} = -\omega^2 x - 2\mu \dot{x} \quad (*)$ eq. lin. omogenea che dip. da due parametri μ, ω

Cerchiamo soluz. particolari della forma $x(t) = e^{\lambda t}$;
qte sono soluz. se soddisfano l'eq. (*) :

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\omega^2 e^{\lambda t} - 2\mu\lambda e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 \cancel{e^{\lambda t}} = -(\omega^2 + 2\mu\lambda)\cancel{e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2 + 2\mu\lambda + \omega^2 = 0$$ eq. di 2° grado in λ

$$\frac{\Delta}{4} = \mu^2 - \omega^2$$

$\mu > \omega$: $\lambda_{1,2} = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \omega^2} < 0 \Rightarrow$ 2 soluz. partic. della forma $e^{\lambda t}$

GRANDE SMORZAMENTO

$$x(t) = a e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_2 t}$$

$\mu < \omega$

PICCOLO SMORZAMENTO

$$x(t) = e^{-\mu t}(a \cos \sigma t + b \operatorname{sen} \sigma t)$$

dove $\sigma \equiv \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$

$\mu = \omega$

SMORZAMENTO CRITICO

$$x(t) = (a + bt)e^{-\mu t}$$

ES 9) CICLO LIMITE

Eq. di Van der Pol

$$\ddot{x} + \beta(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \qquad \beta > 0$$

- attrito positivo per $|x| > 1$
- " negativo per $|x| < 1$

→ per moti di grande ampiezza prevale attrito positivo
⇒ ampiezza tende a ridursi

→ per moti di piccola ampiezza prevale attrito negativo
⇒ ampiezza tende ad aumentare

→ per un solo moto CRITICO i due effetti si compensano ($|x| = 1$) ⇒ moto periodico

↳ CICLO LIMITE.

TEOREMA ESISTENZA & UNICITA'

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t)$$ eq. differenziale del 2° ordine

→ può essere portata nella forma di un sistema di eq. differenziali del 1° ordine.

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = f(x, v, t) \end{cases}$$

↓

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v,t) \end{pmatrix}$$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$ $\quad \bar{f}(\bar{x}, t) = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v,t) \end{pmatrix}$

↕

$$\boxed{\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x}, t)} \quad (\star)$$

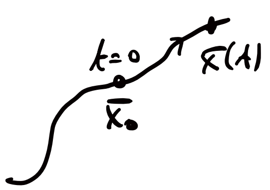
Eq. diff. del 1° ord nell'incognita $\bar{x}(t)$

↓

Vale il TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITA'

<u>Prop</u>. Se $\bar{f} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ è localm. Lipshitziana (*) in un aperto $U \subset \mathbb{R}^n$, allora $\forall \bar{x}_0 \in U$ $\exists$ intervallo $(-\tau, \tau)$ e un'UNICA SOLUZIONE $\bar{x}(t)$ dell'eq. $(\star)$ definita per $t \in (-\tau, \tau)$ t.c.

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 \quad \text{(condizione iniziale)}$$



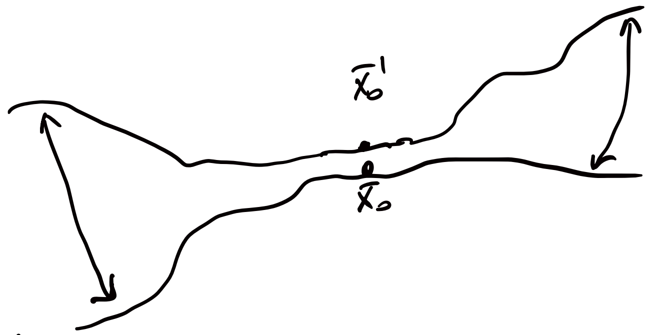
Se cambiamo $\bar{x}_0$, cambia la soluzione

$$\bar{x}(t;\bar{x}_0)$$

$\uparrow$ parametro della funzione $\bar{x}(t)$ che risolve l'eq. ($\star$) con condizione iniziale $\bar{x}_0$

$\downarrow$

La soluzione dipende con regolarità dal dato iniziale (e da eventuali parametri presenti in $\bar{f}$)

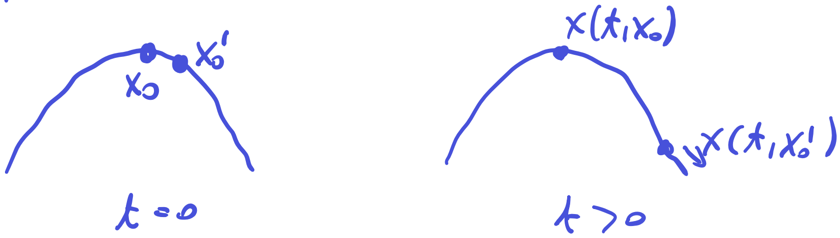


Vale la relazione

$$\|\bar{x}(t,\bar{x}_0') - \bar{x}(t,\bar{x}_0)\| < C\,\|\bar{x}_0' - \bar{x}_0\|\, e^{\lambda|t|}$$

$\lambda > 0$

Esempio: repulsore armonico



($\star$) $\bar{f}$ è localm. Lipschitziana se $\exists\,\lambda>0$ t.c. $\forall\,\bar{x},\bar{y}\in U$ con $\bar{x}\neq\bar{y}$ si ha $\|\bar{f}(\bar{x})-\bar{f}(\bar{y})\| \leq \lambda\|\bar{x}-\bar{y}\|$. La più piccola λ che soddisfa pta condiz. è detta COST. DI LIP.

Condiz. suff: $\bar{f}$ di classe $\mathcal{C}^1$.

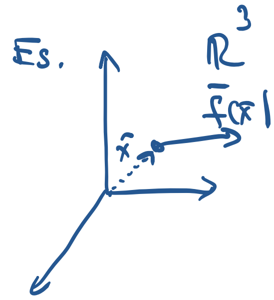
Es. $\bar{f}$ non-Lip.: $\sqrt{x}$ attorno all'origine. Per $x_0=0$ si perde unicità: $x(t)=0$ e $x(t)=\frac{t^2}{4}$ sono soluz. di $\dot{x}=\sqrt{x}$ con $x(0)=0$.

SISTEMA AUTONOMO

$\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t), \cancel{t})$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$\uparrow$
campo VETTORIALE

Es.


$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ (*) $\leftarrow$ sistema autonomo

→ per sistemi autonomi, abbiamo INVARIANZA PER TRASLAZIONI TEMPORALI, cioè

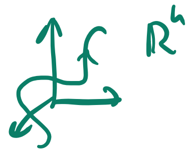
se $\bar{x}(t)$ è soluzione di (*), anche
$\bar{x}'(t) \equiv \bar{x}(t - t_0)$ è soluz. di (*)

Es. $\dot{x} = x$ → una soluz. è $x(t) = e^t$, ma anche e^{t-t_0} è soluzione $\forall t_0$

Dim. Prendiamo $\bar{x}(t)$ soluz. di (*), cioè $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{f}(\bar{x}(t))$;
allora $\dot{\bar{x}}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}'(t) = \frac{d}{dt}\bar{x}(t-t_0) = \dot{\bar{x}}(t-t_0) =$
$\uparrow$ $\bar{x}(\tilde{t})$ è soluz.
$= \bar{f}(\bar{x}(t-t_0)) = \bar{f}(\bar{x}'(t))$ //

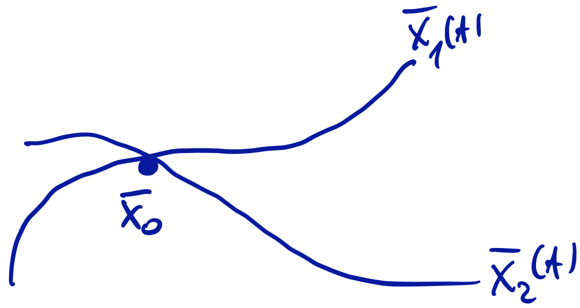
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Traiettorie}^{(*)} \text{ delle soluzioni di } (*) \text{ non si intersecano mai!}}$

(*) Traiettoria è l'immagine della funz. $\bar{x}(t)$ in $\mathbb{R}^n$



Dim. Assumiamo per assurdo che ci siano due soluzioni

$\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_2(t)$ le cui traiettorie si intersecano



$\bar{x}_1(0) = \bar{x}_0$

$\bar{x}_2(t_0) = \bar{x}_0$

$\Downarrow$

Ma se questo fosse possibile, allora esisterebbe una terza soluz. $\bar{x}_3(t) \equiv \bar{x}_2(t+t_0)$ t.c. $\bar{x}_3(0) = \bar{x}_0$

cioè esisterebbero due solut., $\bar{x}_1(t)$ e $\bar{x}_3(t)$ con lo stesso dato iniziale a $t=0$, violando il teorema di esistenza e UNICITÀ. //

CASO MECCANICO (autonomo)

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, \cancel{t}) \rightsquigarrow \ddot{x} = f(x, \dot{x}) \qquad (*)$$

Passiamo al "piano di fase", cioè lo spazio con coordinate $\bar{x} = (x, v)$

$(*)$ equiv. a $\dot{\bar{x}} = \bar{f}(\bar{x})$ dove $\bar{f}(x,v) = \begin{pmatrix} v \\ f(x,v) \end{pmatrix}$

Preso il dato iniziale $\bar{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, c'è un'unica soluzione che passa per $\bar{x}_0$ al tempo $t=0$. Le soluzioni dipendono dai parametri x_0 e v_0.

Es. osc. armonico

solut. è $x(t) = a\cos\omega t + b\,\text{sen}\,\omega t$

$v(t) = -a\omega\,\text{sen}\,\omega t + b\omega\cos\omega t$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= x(0) = a \\ v_0 &= v(0) = b\omega \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= x_0 \\ b &= \frac{v_0}{\omega} \end{aligned}$$

$$\bar{x}(t;\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} x(t;x_0,v_0) \\ v(t;x_0,v_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\,\text{sen}\,\omega t \\ -\omega x_0\,\text{sen}\,\omega t + v_0\cos\omega t \end{pmatrix}$$

Scelti x_0 e v_0, la soluzione è determinata.