

# Analisi 2

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda

Università di Trieste, CdL Matematica

a.a. 2025/2026

**Nota.** Questi appunti sono in evoluzione. Si prega di segnalare eventuali errori, per poterli correggere rapidamente. Le parti scritte in blu sono facoltative ai fini dell'esame.

## Parte I

### 1 Premesse: lo spazio $\mathbb{R}^N$

Consideriamo l'insieme  $\mathbb{R}^N$ , costituito dalle  $N$ -uple  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ , dove  $x_1, x_2, \dots, x_N$  sono numeri reali. Indicheremo i suoi elementi con i simboli

$$\mathbf{x}, \mathbf{x}', \mathbf{x}'', \dots$$

Cominciamo con l'introdurre un'operazione di addizione in  $\mathbb{R}^N$ : dati due elementi  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , si definisce  $\mathbf{x} + \mathbf{x}'$  in questo modo:

$$\mathbf{x} + \mathbf{x}' = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \dots, x_N + x'_N).$$

Valgono le seguenti proprietà:

- (associativa)  $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') + \mathbf{x}'' = \mathbf{x} + (\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$ ;
- esiste un "elemento neutro"  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ : si ha  $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}$ ;
- ogni elemento  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  ha un "opposto"  
 $(-\mathbf{x}) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_N)$ : si ha  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x}$ ;
- (commutativa)  $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x}$ .

Pertanto,  $(\mathbb{R}^N, +)$  è un "gruppo abeliano". Normalmente, si usa scrivere  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  per indicare  $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}')$ .

Definiamo ora la moltiplicazione di un elemento di  $\mathbb{R}^N$  per un numero reale: considerati  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  e un numero reale  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si definisce  $\alpha\mathbf{x}$  in questo modo:

$$\alpha\mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N).$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ ;
- b)  $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = (\alpha\mathbf{x}) + (\beta\mathbf{x})$ ;
- c)  $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = (\alpha\mathbf{x}) + (\alpha\mathbf{x}')$ ;
- d)  $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

Pertanto, con le operazioni introdotte,  $\mathbb{R}^N$  è uno “spazio vettoriale”. Chiameremo i suoi elementi “vettori”; i numeri reali, in questo ambito, verranno chiamati “scalari”.

È utile introdurre il “prodotto scalare” tra due vettori: dati  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , si definisce il numero reale  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$  in questo modo:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \sum_{k=1}^N x_k x'_k.$$

Il prodotto scalare è spesso indicato con simboli diversi, quali ad esempio

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}' \rangle, \quad (\mathbf{x} | \mathbf{x}'), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}').$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ ;
- b)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- c)  $(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'' = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'') + (\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'')$ ;
- d)  $(\alpha\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}' = \alpha(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')$ ;
- e)  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}$ ;

A partire dal prodotto scalare, possiamo definire la “norma” di un vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^N x_k^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ ;
- b)  $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ;
- c)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ ;
- d)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|$ .

Per dimostrare la d), abbiamo bisogno della seguente **disuguaglianza di Schwarz**.

**Teorema 1** *Presi due vettori  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ , si ha*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|.$$

Dimostrazione. La disuguaglianza è sicuramente verificata se  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ , essendo in tal caso  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = 0$  e  $\|\mathbf{x}'\| = 0$ . Supponiamo quindi  $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$ . Per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si ha

$$0 \leq \|\mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}'\|^2 = (\mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \alpha \mathbf{x}') = \|\mathbf{x}\|^2 - 2\alpha \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \alpha^2 \|\mathbf{x}'\|^2.$$

Prendendo  $\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2} \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'$ , si ottiene

$$0 \leq \|\mathbf{x}\|^2 - 2 \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 + \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^4} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2 \|\mathbf{x}'\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{x}'\|^2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')^2,$$

da cui la tesi. ■

**Nota.** La disuguaglianza di Schwarz diventa un'uguaglianza se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti. Infatti, vale sicuramente l'uguaglianza se uno dei due vettori è nullo. Se sono non nulli e  $\mathbf{x}$  è del tipo  $\alpha \mathbf{x}'$ , si ha

$$|(\alpha \mathbf{x}') \cdot \mathbf{x}'| = |\alpha| |\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'| = |\alpha| \|\mathbf{x}'\|^2 = \|\alpha \mathbf{x}'\| \|\mathbf{x}'\|.$$

Viceversa, se sono non nulli e vale l'uguaglianza  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|$ , allora

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} - \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|} \right\|^2 = 1 - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|} + 1 = 0,$$

per cui  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$ . I due vettori hanno la stessa direzione, per cui sono linearmente dipendenti. Analogamente, se  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' = -\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\|$ , allora succede che  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} = -\frac{\mathbf{x}'}{\|\mathbf{x}'\|}$ .

Dimostriamo ora la proprietà d) della norma, usando la disuguaglianza di Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ &= \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}'\|)^2, \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza cercata.

Notiamo ancora la seguente **identità del parallelogramma**, di semplice verifica:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{x}'\|^2).$$

Definiamo ora, a partire dalla norma, la “distanza euclidea” tra due vettori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N (x_k - x'_k)^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

- a)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \geq 0$ ;
- b)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}'$ ;
- c)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = d(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ ;
- d)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}'')$ .

Quest'ultima viene spesso chiamata “disuguaglianza triangolare”; la dimostriamo:

$$\begin{aligned} d(\mathbf{x}, \mathbf{x}'') &= \|\mathbf{x} - \mathbf{x}''\| \\ &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + (\mathbf{x}' - \mathbf{x}'')\| \\ &\leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| \\ &= d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') + d(\mathbf{x}', \mathbf{x}''). \end{aligned}$$

## 2 Spazi metrici

Dato un insieme non vuoto  $E$ , una funzione  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  si chiama “distanza” (su  $E$ ) se soddisfa alle seguenti proprietà:

- a)  $d(x, x') \geq 0$ ;
- b)  $d(x, x') = 0 \Leftrightarrow x = x'$ ;
- c)  $d(x, x') = d(x', x)$ ;
- d)  $d(x, x'') \leq d(x, x') + d(x', x'')$

(la disuguaglianza triangolare). L'insieme  $E$ , dotato della distanza  $d$ , si dice “spazio metrico”. I suoi elementi verranno spesso chiamati “punti”.

Abbiamo visto che  $\mathbb{R}^N$ , dotato della distanza euclidea, è uno spazio metrico (nel seguito, parlando dello spazio metrico  $\mathbb{R}^N$ , se non altrimenti specificato sottintenderemo che la distanza sia sempre quella euclidea). Nel caso  $N = 1$ , abbiamo la distanza usuale su  $\mathbb{R}$ :  $d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ .

È però possibile considerare diverse distanze su uno stesso insieme. Ad esempio, presi due vettori  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)$ , la funzione

$$d_*(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_{k=1}^N |x_k - x'_k|$$

rappresenta anch'essa una distanza in  $\mathbb{R}^N$ . Lo stesso dicasi per la funzione

$$d_{**}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \max\{|x_k - x'_k| : k = 1, 2, \dots, N\}.$$

Oppure, si può definire la seguente:

$$\hat{d}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathbf{x} = \mathbf{x}', \\ 1 & \text{se } \mathbf{x} \neq \mathbf{x}'. \end{cases}$$

Anche questa è una distanza, per quanto strana possa sembrare.

Dati  $x_0 \in E$  e un numero  $\rho > 0$ , definiamo la palla aperta di centro  $x_0$  e raggio  $\rho$ :

$$B(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) < \rho\};$$

analogamente definiamo la palla chiusa

$$\overline{B}(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) \leq \rho\},$$

e la sfera

$$S(x_0, \rho) = \{x \in E : d(x, x_0) = \rho\}.$$

In  $\mathbb{R}$ , ogni intervallo<sup>1</sup>  $]a, b[$  è una palla aperta e ogni intervallo  $[a, b]$  è una palla chiusa: si ha

$$]a, b[ = B\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right), \quad [a, b] = \overline{B}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2}\right).$$

Una sfera in  $\mathbb{R}$  è quindi costituita da due soli punti.

In  $\mathbb{R}^2$ , con la distanza euclidea, una palla è un cerchio: la palla aperta non comprende i punti della circonferenza esterna, la palla chiusa sì. Una sfera è semplicemente una circonferenza.

Se in  $\mathbb{R}^2$  consideriamo la distanza  $d_*$  definita in precedenza, una palla sarà un quadrato, con i lati inclinati di 45 gradi, avente  $x_0$  come punto centrale. Una sfera sarà il perimetro di tale quadrato. Se invece consideriamo la distanza  $d_{**}$ , la palla sarà ancora un quadrato, ma con i lati paralleli agli assi cartesiani.

Se invece prendiamo la distanza  $\hat{d}$ , su un qualsiasi insieme  $E$ , allora

$$B(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho \leq 1, \\ E & \text{se } \rho > 1, \end{cases} \quad \overline{B}(x_0, \rho) = \begin{cases} \{x_0\} & \text{se } \rho < 1, \\ E & \text{se } \rho \geq 1, \end{cases}$$

per cui

$$S(x_0, \rho) = \begin{cases} E \setminus \{x_0\} & \text{se } \rho = 1, \\ \emptyset & \text{se } \rho \neq 1. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Usiamo qui le notazioni  $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  e  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ .

Un insieme  $U \subseteq E$  si dice “intorno” di un punto  $x_0$  se esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_0, \rho) \subseteq U$ ; in tal caso, il punto  $x_0$  si dice “interno” ad  $U$ . L’insieme dei punti interni ad  $U$  si chiama “l’interno” di  $U$  e si denota con  $\overset{\circ}{U}$ . Chiaramente, si ha sempre  $\overset{\circ}{U} \subseteq U$ . Si dice che  $U$  è un “insieme aperto” se coincide con il suo interno, ossia se  $\overset{\circ}{U} = U$ .

**Teorema 2** *Una palla aperta è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Sia  $B(x_0, \rho)$  la palla in questione; prendiamo un  $x_1 \in B(x_0, \rho)$ . Scelto  $r > 0$  tale che  $r \leq \rho - d(x_0, x_1)$ , si ha che  $B(x_1, r) \subseteq B(x_0, \rho)$ ; infatti, se  $x \in B(x_1, r)$ , allora

$$d(x, x_0) \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_0) < r + d(x_1, x_0) \leq \rho,$$

per cui  $x \in B(x_0, \rho)$ . Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto  $x_1$  di  $B(x_0, \rho)$  è interno a  $B(x_0, \rho)$ . ■

Consideriamo ora tre esempi particolari: nel primo, l’insieme  $U$  coincide con  $E$ ; nel secondo,  $U$  è l’insieme vuoto; nel terzo, esso è costituito da un unico punto.

Ogni punto di  $E$  è interno all’insieme  $E$  stesso, in quanto ogni palla è per definizione contenuta in  $E$ . Quindi, l’interno di  $E$  coincide con tutto  $E$ , ossia  $\overset{\circ}{E} = E$ . Questo significa che  $E$  è un insieme aperto.

L’insieme vuoto non può avere punti interni. Quindi, l’interno di  $\emptyset$ , non avendo elementi, è vuoto. In altri termini,  $\overset{\circ}{\emptyset} = \emptyset$ , il che significa che  $\emptyset$  è anch’esso un insieme aperto.

L’insieme  $U = \{x_0\}$ , costituito da un unico punto, in generale non è un insieme aperto (ad esempio in  $\mathbb{R}^N$  con la distanza euclidea), ma può esserlo in casi particolari, quando  $x_0$  è un “punto isolato” di  $E$ . Ad esempio, se si considera la distanza  $\hat{d}$ , oppure in  $\mathbb{N}$ , tutti i punti sono isolati.

**Teorema 3** *L’interno di un insieme è un insieme aperto.*

Dimostrazione. Se  $\overset{\circ}{U}$  è vuoto, la tesi è sicuramente vera. Supponiamo allora che  $\overset{\circ}{U}$  sia non vuoto. Sia  $x_1 \in \overset{\circ}{U}$ . Allora esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_1, \rho) \subseteq U$ . Se proviamo che  $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$  la dimostrazione sarà completa, in quanto avremo dimostrato che ogni punto  $x_1$  di  $\overset{\circ}{U}$  è interno a  $\overset{\circ}{U}$ .

Per dimostrare che  $B(x_1, \rho) \subseteq \overset{\circ}{U}$ , sia  $x$  un elemento di  $B(x_1, \rho)$ . Siccome  $B(x_1, \rho)$  è un insieme aperto, esiste un  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$ . Allora  $B(x, r) \subseteq U$ , per cui  $x$  appartiene a  $\overset{\circ}{U}$ . La dimostrazione è completa. ■

Si può dimostrare la seguente implicazione:

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overset{\circ}{U}_1 \subseteq \overset{\circ}{U}_2 .$$

Da essa segue che  $\overset{\circ}{U}$  è il più grande insieme aperto contenuto in  $U$ : se  $A$  è un aperto e  $A \subseteq U$ , allora  $A \subseteq \overset{\circ}{U}$ .

Diremo che il punto  $x_0$  è “aderente” all’insieme  $U$  se per ogni  $\rho > 0$  si ha che  $B(x_0, \rho) \cap U \neq \emptyset$ . L’insieme dei punti aderenti ad  $U$  si chiama “la chiusura” di  $U$  e si denota con  $\overline{U}$ . Chiaramente, si ha sempre  $U \subseteq \overline{U}$ . Si dice che  $U$  è un “insieme chiuso” se coincide con la sua chiusura, ossia se  $U = \overline{U}$ .

**Teorema 4** *Una palla chiusa è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Sia  $U = \overline{B}(x_0, \rho)$  la palla in questione; voglio dimostrare che  $\overline{U} \subseteq U$ . A tal fine vedremo che  $\mathcal{C}U \subseteq \mathcal{C}\overline{U}$ .<sup>2</sup> Prendiamo un  $x_1 \in \mathcal{C}U$ , ossia  $x_1 \notin \overline{B}(x_0, \rho)$ . Scelto  $r > 0$  tale che  $r \leq d(x_0, x_1) - \rho$ , si ha che  $B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho) = \emptyset$ ; infatti, se per assurdo esistesse un  $x \in B(x_1, r) \cap \overline{B}(x_0, \rho)$ , allora si avrebbe

$$d(x_0, x_1) \leq d(x_0, x) + d(x, x_1) < \rho + r ,$$

in contrasto con la scelta fatta per  $r$ . Quindi,  $x_1 \notin \overline{U}$ , ossia  $x_1 \in \mathcal{C}\overline{U}$ . ■

Essendo  $E$  il l’insieme universo, ogni punto aderente ad  $E$  deve comunque appartenere ad  $E$  stesso. Quindi, la chiusura di  $E$  coincide con  $E$ , ossia  $\overline{E} = E$ . Questo significa che  $E$  è un insieme chiuso.

Notiamo che non esiste alcun punto aderente all’insieme  $\emptyset$ . Infatti, qualsiasi sia il punto  $x_0$ , per ogni  $\rho > 0$  si ha che  $B(x_0, \rho) \cap \emptyset = \emptyset$ . Quindi, la chiusura di  $\emptyset$ , non avendo elementi, è vuota. In altri termini,  $\overline{\emptyset} = \emptyset$ , il che significa che  $\emptyset$  è un insieme chiuso.

L’insieme  $U = \{x_0\}$ , costituito da un unico punto, è sempre un insieme chiuso. Infatti, preso un  $x_1 \notin U$ , scegliendo  $\rho > 0$  tale che  $\rho < d(x_0, x_1)$  si ha che  $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$ , per cui  $x_1$  non è aderente ad  $U$ .

**Teorema 5** *La chiusura di un insieme è un insieme chiuso.*

Dimostrazione. Poniamo  $V = \overline{U}$ . Se  $V = E$ , la tesi è verificata. Supponiamo quindi che sia  $V \neq E$ . Sia  $x_1 \notin V$ . Allora esiste un  $\rho > 0$  tale che  $B(x_1, \rho) \cap U = \emptyset$ . Vediamo che anche  $B(x_1, \rho) \cap V = \emptyset$ . Infatti, se per assurdo ci fosse un  $x \in B(x_1, \rho) \cap V$ , essendo  $B(x_1, \rho)$  un insieme aperto, esisterebbe un  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq B(x_1, \rho)$ . Siccome  $x \in V = \overline{U}$ , dovrebbe essere  $B(x, r) \cap U \neq \emptyset$  e quindi anche  $B(x_1, \rho) \cap U \neq \emptyset$ , in contraddizione con quanto sopra. Quindi, nessun punto  $x_1$  al di fuori di  $V$  può essere aderente a  $V$ . In altri termini,  $V$  contiene tutti i punti ad esso aderenti, pertanto è chiuso. ■

<sup>2</sup>Denotiamo con  $\mathcal{C}U$  il complementare di  $U$  in  $E$ , ossia l’insieme  $E \setminus U$ .

Si può dimostrare che

$$U_1 \subseteq U_2 \quad \Rightarrow \quad \overline{U}_1 \subseteq \overline{U}_2.$$

Da questa implicazione segue che  $\overline{U}$  è il più piccolo insieme chiuso che contiene  $U$ : se  $C$  è un chiuso e  $C \supseteq U$ , allora  $C \supseteq \overline{U}$ .

Si può dimostrare che l'unione e l'intersezione di due insiemi aperti [chiusi] sono insiemi aperti [chiusi]. Lo stesso vale per un numero finito di insiemi aperti [chiusi]: lo si dimostra per induzione. Se invece si considera un numero infinito di insiemi, la cosa cambia. L'unione di un numero infinito di insiemi aperti è un insieme aperto, l'intersezione in generale non lo è. Ad esempio, in  $\mathbb{R}$ , prendendo gli aperti

$$A_n = \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[ ,$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , la loro intersezione è  $\{0\}$ , che non è un aperto. Analogamente, l'intersezione di un numero infinito di insiemi chiusi è un insieme chiuso, mentre l'unione in generale non lo è. Ad esempio, considerando i chiusi

$$C_n = \left[ -1 + \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{n+1} \right] ,$$

con  $n \in \mathbb{N}$ , la loro unione è l'intervallo  $] -1, 1[$ , che non è un chiuso.

Cercheremo ora di capire le analogie incontrate tra le nozioni di interno e chiusura di un insieme, e quelle di insieme aperto e chiuso.

**Teorema 6** *Valgono le seguenti relazioni:*

$$\overline{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\overset{\circ}{U}, \quad (\mathcal{C}\overset{\circ}{U}) = \overline{\mathcal{C}U}.$$

Dimostrazione. Vediamo la prima uguaglianza. Se  $U = E$ , allora  $\mathcal{C}U = \emptyset$ , per cui  $\overline{\mathcal{C}U} = \emptyset$ ; d'altra parte,  $\overset{\circ}{U} = E$ , per cui  $\mathcal{C}\overset{\circ}{U} = \emptyset$ . L'uguaglianza è così verificata in questo caso. Supponiamo ora che sia  $U \neq E$ , per cui  $\mathcal{C}U \neq \emptyset$ . Si ha:

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathcal{C}U} &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \cap \mathcal{C}U \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \forall \rho > 0 \quad B(x, \rho) \not\subseteq U \\ &\Leftrightarrow x \notin \overset{\circ}{U} \\ &\Leftrightarrow x \in \mathcal{C}\overset{\circ}{U}. \end{aligned}$$

Questo dimostra la prima uguaglianza. Possiamo ora usarla per dedurre la seguente:

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}\overset{\circ}{U}) = \overline{\mathcal{C}(\mathcal{C}\overset{\circ}{U})} = \overline{U}.$$

Passando ai complementari, si ottiene la seconda uguaglianza. ■

Abbiamo quindi che

$$\bar{U} = \mathcal{C}(\mathring{U}), \quad \mathring{U} = \mathcal{C}(\bar{U}).$$

Come immediato corollario, abbiamo il seguente.

**Teorema 7** *Un insieme è aperto [chiuso] se e solo se il suo complementare è chiuso [aperto].*

Dimostrazione. Se  $U$  è aperto,  $U = \mathring{U}$  e quindi

$$\bar{\mathcal{C}U} = \mathcal{C}\mathring{U} = \mathcal{C}U,$$

per cui  $\mathcal{C}U$  è chiuso.

Se  $U$  è chiuso,  $U = \bar{U}$  e quindi

$$(\mathring{\mathcal{C}U}) = \mathcal{C}\bar{U} = \mathcal{C}U,$$

per cui  $\mathcal{C}U$  è aperto. ■

Si definisce la “frontiera” di un insieme  $U$  come differenza tra la sua chiusura e il suo interno:

$$\partial U = \bar{U} \setminus \mathring{U}.$$

Ad esempio, in  $\mathbb{R}$  abbiamo:

$$\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \quad \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad \partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

È bene essere prudenti su alcune conclusioni che possono esserci suggerite dalla nostra intuizione basata sulla distanza euclidea. Ad esempio, le uguaglianze

$$\overline{B(\mathbf{x}_0, \rho)} = \bar{B}(\mathbf{x}_0, \rho), \quad \partial B(\mathbf{x}_0, \rho) = S(\mathbf{x}_0, \rho).$$

valgono sicuramente in  $\mathbb{R}^N$  con la distanza euclidea, ma possono non valere in altri casi. Prendiamo ad esempio la distanza  $\hat{d}$  considerata sopra. Allora  $B(\mathbf{x}_0, 1) = \{\mathbf{x}_0\}$ , che è un insieme chiuso, e  $\bar{B}(\mathbf{x}_0, 1) = E$  per cui  $\overline{B(\mathbf{x}_0, 1)} \neq \bar{B}(\mathbf{x}_0, 1)$ . Inoltre,  $\partial B(\mathbf{x}_0, 1) = \emptyset$ , mentre  $S(\mathbf{x}_0, 1) = E \setminus \{\mathbf{x}_0\}$ , per cui  $\partial B(\mathbf{x}_0, 1) \neq S(\mathbf{x}_0, 1)$ .

**Nota.** Nel seguito, qualora non specificato altrimenti, quando parleremo di  $\mathbb{R}^N$  come spazio metrico o normato sarà sempre sottinteso che la distanza e la norma su di esso considerate siano quelle euclidee.

### 3 Funzioni continue

Intuitivamente, una funzione  $f$  è “continua” se  $f(x)$  varia gradualmente al variare di  $x$  nel dominio, cioè quando non si verificano variazioni brusche nei valori della funzione. Per rendere rigorosa questa idea intuitiva, sarà conveniente focalizzare la nostra attenzione fissando un  $x_0$  nel dominio e provando a precisare cosa intendiamo per

$f$  è “continua” in  $x_0$ .

Procederemo per gradi.

**Primo tentativo.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente:

*se  $x$  è vicino a  $x_0$ , allora  $f(x)$  è vicino a  $f(x_0)$ .*

Osserviamo subito che, sebbene l’idea di continuità vi sia già abbastanza ben formulata, la proposizione precedente non è una definizione accettabile, perché la parola “vicino”, che vi compare due volte, non ha un significato preciso. Innanzitutto, per poter misurare quanto vicino sia  $x$  a  $x_0$  e quanto vicino sia  $f(x)$  a  $f(x_0)$ , abbiamo bisogno di introdurre delle distanze. Più precisamente, dovremo supporre che il dominio e il codominio della funzione siano due spazi metrici.

Siano quindi  $E$  ed  $F$  due spazi metrici, con le loro distanze  $d_E$  e  $d_F$ , rispettivamente. Sia  $x_0$  un punto di  $E$  e  $f : E \rightarrow F$  una funzione. Possiamo riformulare il tentativo di definizione precedente come segue.

**Secondo tentativo.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente:

*se la distanza  $d_E(x, x_0)$  è piccola, allora la distanza  $d_F(f(x), f(x_0))$  è piccola.*

Ci rendiamo subito conto che il problema riscontrato nel primo tentativo non è stato affatto risolto con questo secondo tentativo, in quanto vi compare ora per due volte la parola “piccola”, che non ha un significato preciso. Ci chiediamo allora: *quanto piccola* vogliamo che sia la distanza  $d_F(f(x), f(x_0))$ ? L’idea che abbiamo in mente è che questa distanza possa essere resa piccola quanto si voglia (purché la distanza  $d(x, x_0)$  sia sufficientemente piccola, s’intende). Per poterla misurare, introdurremo quindi un numero reale positivo, che chiameremo  $\varepsilon$ , e chiederemo che sia  $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ , qualora  $d(x, x_0)$  sia sufficientemente piccola. L’arbitrarietà di tale  $\varepsilon$  ci permetterà di prenderlo piccolo quanto si voglia.

**Terzo tentativo.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero  $\varepsilon > 0$ ,

*se la distanza  $d_E(x, x_0)$  è piccola, allora  $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ .*

Adesso la parola “piccola” compare una sola volta, mentre la distanza  $d_F(f(x), f(x_0))$  viene semplicemente controllata dal numero  $\varepsilon$ . Quindi, almeno la seconda parte della proposizione ha ora un significato ben preciso. Potremmo allora cercare di fare altrettanto con la distanza  $d(x, x_0)$ , introducendo un nuovo numero reale positivo, che chiameremo  $\delta$ , che la controlli.

**Quarto tentativo (quello buono!).** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  quando si verifica la cosa seguente: preso un qualsiasi numero  $\varepsilon > 0$ , è possibile trovare un numero  $\delta > 0$  per cui,

$$\text{se } d_E(x, x_0) < \delta, \text{ allora } d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Quest’ultima proposizione, a differenza delle precedenti, non presenta alcun termine impreciso. Le distanze  $d_E(x, x_0)$  e  $d_F(f(x), f(x_0))$  sono semplicemente controllate da due numeri positivi  $\delta$  e  $\varepsilon$ , rispettivamente. Riscriviamola quindi in modo formale.

**Definizione.** Diremo che  $f$  è “continua” in  $x_0$  se, comunque preso un numero positivo  $\varepsilon$ , è possibile trovare un numero positivo  $\delta$  tale che, se  $x$  è un qualsiasi elemento del dominio  $E$  che disti da  $x_0$  per meno di  $\delta$ , allora  $f(x)$  dista da  $f(x_0)$  per meno di  $\varepsilon$ . In simboli:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad d_E(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

In questa formulazione, spesso la scrittura “ $\forall x \in E$ ” verrà sottintesa.

Si noti che una o entrambe le disuguaglianze  $d_E(x, x_0) < \delta$  e  $d_F(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$  possono essere sostituite rispettivamente da  $d_E(x, x_0) \leq \delta$  e  $d_F(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$ , ottenendo definizioni che sono tutte tra loro equivalenti. Questo è dovuto al fatto, da un lato, che  $\varepsilon$  è un *qualsunque* numero positivo e, dall’altro lato, che se l’implicazione della definizione vale per un certo numero positivo  $\delta$ , essa vale a maggior ragione prendendo al posto di quel  $\delta$  un qualsiasi numero positivo più piccolo.

Una rilettura della definizione di continuità ci mostra che  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon).$$

Inoltre, è del tutto equivalente considerare una palla chiusa al posto di una palla aperta; risulta inoltre utile la seguente formulazione equivalente, per cui  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se:

$$\text{per ogni intorno } V \text{ di } f(x_0) \text{ esiste un intorno } U \text{ di } x_0 \text{ tale che } f(U) \subseteq V.$$

Nel caso in cui la funzione  $f$  sia continua in ogni punto  $x_0$  del dominio  $E$ , diremo che “ $f$  è continua su  $E$ ”, o semplicemente “ $f$  è continua”.

Vediamo ora alcuni esempi.

1) La funzione costante: per un certo  $\bar{c} \in F$ , si ha che  $f(x) = \bar{c}$ , per ogni  $x \in E$ . Essendo  $d_F(f(x), f(x_0)) = d_F(\bar{c}, \bar{c}) = 0$  per ogni  $x \in E$ , tale funzione è chiaramente continua (ogni scelta di  $\delta > 0$  va bene).

2) Supponiamo che  $x_0$  sia un “punto isolato” di  $E$ : esiste cioè un  $\rho > 0$  per cui non ci sono punti di  $E$  che distino da  $x_0$  per meno di  $\rho$ , tranne  $x_0$  stesso. Vediamo che, in questo caso, qualsiasi funzione  $f : E \rightarrow F$  risulta continua in  $x_0$ . Infatti, dato  $\varepsilon > 0$  qualsiasi, prendendo  $\delta = \rho$ , avremo che  $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$ , per cui  $f(B(x_0, \delta)) = \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$ .

3) Siano  $E = \mathbb{R}^N$  e  $F = \mathbb{R}^N$ . Fissato un numero  $\alpha \in \mathbb{R}$ , consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  definita da  $f(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{x}$ . Vediamo che è continua. Infatti, se  $\alpha = 0$ , si tratta della funzione costante con valore  $\mathbf{0}$ , e sappiamo che tale funzione è continua. Sia ora  $\alpha \neq 0$ . Allora, fissato  $\varepsilon > 0$ , essendo

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| = \|\alpha\mathbf{x} - \alpha\mathbf{x}_0\| = \|\alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\| = |\alpha| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|,$$

basta prendere  $\delta = \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$  per avere l'implicazione

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon.$$

4) Siano  $E = \mathbb{R}^N$  e  $F = \mathbb{R}$ . Vediamo che la funzione  $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|$  è continua su  $\mathbb{R}^N$ . Questo seguirà facilmente dalla disuguaglianza

$$\left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \right| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

che ora dimostriamo. Si ha:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\| &= \|(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| + \|\mathbf{x}'\|, \\ \|\mathbf{x}'\| &= \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x}\|. \end{aligned}$$

Essendo  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| = \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|$ , si ha che

$$\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}'\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}'\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|,$$

da cui la disuguaglianza cercata. A questo punto, considerato un  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^N$  e fissato un  $\varepsilon > 0$ , basta prendere  $\delta = \varepsilon$  per avere che

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{x}_0\| \right| < \varepsilon.$$

5) Siano  $E = \mathbb{R}$  e  $F = \mathbb{R}$ , e consideriamo la “funzione segno”  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Si può vedere che questa funzione è continua in tutti i punti tranne che in  $x_0 = 0$ . Infatti, se  $x_0 \neq 0$ , basterà prendere  $\delta < |x_0|$  per avere che  $f$  è costante sull'intervallo  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , quindi continua in  $x_0$ . Per vedere che  $f$  non è continua in 0, fissiamo un  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ; per ogni scelta di  $\delta > 0$ , è possibile trovare un  $x \in ]-\delta, \delta[$  tale che  $|f(x)| = 1$ , per cui  $|f(x) - f(0)| > \varepsilon$ .

6) La “funzione di Dirichlet”  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Questa funzione non è continua, in alcun punto  $x_0$ . Infatti, fissato un  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , siccome sia  $\mathbb{Q}$  che  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sono densi in  $\mathbb{R}$ , per ogni  $x_0$  e ogni scelta di  $\delta > 0$  ci saranno sicuramente un razionale  $x'$  e un irrazionale  $x''$  in  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ; quindi, a seconda che  $x_0$  sia razionale o irrazionale, si avrà che  $|f(x'') - f(x_0)| > \varepsilon$  o  $|f(x') - f(x_0)| > \varepsilon$ .

Enunciamo ora alcune proprietà delle funzioni continue aventi come codominio  $F = \mathbb{R}$ .

**Teorema 8** *Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f + g$  lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Per la continuità di  $f$  e  $g$  esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |(f + g)(x) - (f + g)(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ciò dimostra che  $f + g$  è continua in  $x_0$ . ■

**Teorema 9** *Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f \cdot g$  lo è.*

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Non è restrittivo supporre  $\varepsilon \leq 1$ , in quanto possiamo sempre porre  $\varepsilon' = \min\{\varepsilon, 1\}$  e procedere con  $\varepsilon'$  al posto di  $\varepsilon$ . Per la continuità di  $f$  e  $g$  esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \\ d(x, x_0) < \delta_2 &\Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Notiamo che, essendo  $\varepsilon \leq 1$ , da  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  segue che  $|f(x)| < |f(x_0)| + 1$ . Quindi, se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , si ha

$$\begin{aligned} d(x, x_0) < \delta &\Rightarrow |(f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0)| = \\ &= |f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)| \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &\leq (|f(x_0)| + 1) \cdot |g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)| \cdot |f(x) - f(x_0)| \\ &< (|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Data l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , ciò dimostra che  $f \cdot g$  è continua in  $x_0$ . ■

**Teorema 10** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$ , anche  $f - g$  lo è.

Dimostrazione. Segue immediatamente dai due teoremi precedenti e dal fatto che ogni funzione costante è continua, in quanto  $f - g = f + (-1) \cdot g$ . ■

**Teorema 11 (della permanenza del segno)** Se  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  è continua in  $x_0$  e  $g(x_0) > 0$ , allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\varepsilon = g(x_0)$ . Per la continuità, esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon \Rightarrow 0 < g(x) < 2g(x_0).$$

■

Naturalmente, se  $g(x_0) < 0$ , allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) < 0.$$

**Teorema 12** Se  $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$  sono continue in  $x_0$  e  $g(x_0) \neq 0$ , anche  $\frac{f}{g}$  è continua in  $x_0$ .

Dimostrazione. Si noti che, per la proprietà di permanenza del segno, esiste un  $\rho > 0$  tale che il rapporto  $\frac{f(x)}{g(x)}$  è definito almeno per tutti gli  $x$  di  $E$  che distano da  $x_0$  per meno di  $\rho$ . Essendo  $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ , basterà dimostrare che  $\frac{1}{g}$  è continua in  $x_0$ . Fissiamo  $\varepsilon > 0$ ; possiamo supporre senza perdita di generalità che  $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$ . Per la continuità di  $g$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Ma allora, essendo  $\varepsilon < \frac{|g(x_0)|}{2}$ , anche

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |g(x)| > |g(x_0)| - \varepsilon > \frac{|g(x_0)|}{2}.$$

Ne segue che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0) \right| = \frac{|g(x_0) - g(x)|}{|g(x)g(x_0)|} < \frac{2}{|g(x_0)|^2} \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà de  $\varepsilon$ , questo dimostra che  $\frac{1}{g}$  è continua in  $x_0$ . ■

Sappiamo da quanto sopra che le funzioni costanti sono continue, così come la funzione  $f(x) = x$ . Usando i teoremi precedenti, abbiamo quindi che tutte le funzioni polinomiali sono continue, così come le funzioni razionali, definite dal rapporto di due polinomi. Più precisamente, esse sono continue sul loro dominio, ossia sull'insieme dei punti in cui il denominatore non si annulla.

Vediamo ora come si comporta una funzione composta di due funzioni continue.

**Teorema 13** *Siano  $f : E \rightarrow F$  continua in  $x_0$  e  $g : F \rightarrow G$  continua in  $f(x_0)$ ; allora  $g \circ f$  è continua in  $x_0$ .*

Dimostrazione. Fissato un intorno  $W$  di  $[g \circ f](x_0) = g(f(x_0))$ , per la continuità di  $g$  in  $f(x_0)$  esiste un intorno  $V$  di  $f(x_0)$  tale che  $g(V) \subseteq W$ . Allora, per la continuità di  $f$  in  $x_0$ , esiste un intorno  $U$  di  $x_0$  tale che  $f(U) \subseteq V$ . Ne segue che  $[g \circ f](U) \subseteq W$ . ■

Concludiamo questa sezione con una caratterizzazione della continuità.

**Teorema 14** *Le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

- (a)  $f : E \rightarrow F$  è continua;
- (b) se  $A$  è aperto in  $F$ , allora  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $E$ ;
- (c) se  $C$  è chiuso in  $F$ , allora  $f^{-1}(C)$  è chiuso in  $E$ .

Dimostrazione. Dimostriamo che (a) implica (b). Sia  $f : E \rightarrow F$  continua, e  $A$  è aperto in  $F$ . Preso un  $x_0 \in f^{-1}(A)$ , abbiamo che  $f(x_0) \in A$ . Essendo  $A$  aperto, esiste un  $\rho > 0$  per cui  $B(f(x_0), \rho) \subseteq A$ . Siccome  $f$  è continua in  $x_0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \rho)$  (abbiamo preso  $\varepsilon = \rho$ ). Ne segue che  $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \rho)) \subseteq f^{-1}(A)$ , per cui  $x_0$  è interno a  $f^{-1}(A)$ . Abbiamo così dimostrato che ogni  $x_0 \in f^{-1}(A)$  è interno a  $f^{-1}(A)$ , per cui  $f^{-1}(A)$  è aperto.

Dimostriamo che (b) implica (a). Consideriamo un  $x_0 \in E$ , fissiamo un  $\varepsilon > 0$ , e poniamo  $A = B(f(x_0), \varepsilon)$ , che è un aperto in  $F$ . Se vale la (b), avremo che  $f^{-1}(A)$  è un aperto in  $E$ , che contiene  $x_0$ . Pertanto, esiste un  $\delta > 0$  tale che  $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(A)$ , il che significa che  $f(B(x_0, \delta)) \subseteq A = B(f(x_0), \varepsilon)$ . La continuità di  $f$  in  $x_0$  è così dimostrata.

Dimostriamo che (b) implica (c). Sia  $C$  un chiuso in  $F$ , e sia  $A = \mathcal{C}C$ , il complementare di  $C$ . Abbiamo che  $A$  è aperto in  $F$  per cui, se vale (b),  $f^{-1}(A)$  è aperto in  $E$ . Ma  $f^{-1}(A) = f^{-1}(\mathcal{C}C) = \mathcal{C}f^{-1}(C)$ , per cui  $f^{-1}(C)$  è chiuso.

In modo del tutto analogo si dimostra che (c) implica (b), per cui il teorema è dimostrato. ■

## 4 La nozione di limite

Consideriamo due spazi metrici  $E, F$ , un punto  $x_0$  di  $E$  e una funzione

$$f : E \rightarrow F, \quad \text{oppure} \quad f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F,$$

non necessariamente definita in  $x_0$ .

**Definizione.** Se esiste un  $l \in F$  tale che la funzione  $\tilde{f} : E \rightarrow F$ , definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0, \\ l & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

risulti continua in  $x_0$ , si dice che  $l$  è il “limite di  $f$  in  $x_0$ ”, o anche “limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ” e si scrive

$$l = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

In altri termini, si ha che  $l$  è il limite di  $f$  in  $x_0$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

o equivalentemente,

$$\forall V, \text{ intorno di } l \quad \exists U, \text{ intorno di } x_0 : f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V.$$

Talvolta si scrive anche  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$ .

Sappiamo che, se  $x_0$  è un punto isolato, ogni funzione risulterà continua in  $x_0$ . Il problema non presenta pertanto alcun interesse in questo caso. Supporremo quindi che  $x_0$  non sia un punto isolato, ossia che  $x_0$  sia un “punto di accumulazione” di  $E$ : ogni intorno di  $x_0$  contiene punti di  $E$  distinti da  $x_0$  stesso.<sup>3</sup> Nel seguito, supporremo sempre che  $x_0$  sia un punto di accumulazione di  $E$ .

<sup>3</sup>Un semplice ragionamento mostra che, in questo caso, ogni intorno di  $x_0$  contiene infiniti punti di  $E$ . Trovatone uno,  $x_1$ , si prende un intorno di  $x_0$  che non lo contenga, nel quale se ne può trovare un secondo,  $x_2$ , e così via...

Per cominciare, verifichiamo l'unicità del limite.

**Teorema 15** *Se esiste, il limite di  $f$  in  $x_0$  è unico.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che ce ne siano due diversi,  $l$  e  $l'$ . Prendiamo  $\varepsilon = \frac{1}{2}d(l, l')$ . Allora esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon,$$

ed esiste un  $\delta' > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta' \Rightarrow d(f(x), l') < \varepsilon.$$

Sia  $x \neq x_0$  tale che  $d(x, x_0) < \delta$  e  $d(x, x_0) < \delta'$  (tale  $x$  esiste perché  $x_0$  è di accumulazione). Allora

$$d(l', l) \leq d(l, f(x)) + d(f(x), l') < 2\varepsilon = d(l', l),$$

una contraddizione. ■

Il seguente teorema è una riformulazione del legame stretto che intercorre tra i concetti di limite e di continuità.

**Teorema 16** *Considerata la funzione  $f : E \rightarrow F$ , si ha che*

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dimostrazione. In questo caso, si ha che la funzione  $\tilde{f}$  coincide con  $f$ . ■

Un'osservazione generale, che potrebbe essere utile in seguito: si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} d(f(x), l) = 0.$$

**Esempi.** 1. Cominciamo con la funzione  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(x) = \sin_T \left( \frac{1}{x} \right).$$

Se  $x_0 = 0$ , il limite di  $f$  non esiste, perchè in ogni intorno di 0 ci sono valori di  $x$  per cui  $f(x) = 1$  e valori di  $x$  per cui  $f(x) = -1$ .

2. Dimostriamo invece che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin_T \left( \frac{1}{x} \right) = 0.$$

Per far questo, è utile osservare che

$$\left| x \sin_T \left( \frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ecco allora che, fissato  $\varepsilon > 0$ , basta prendere  $\delta = \varepsilon$  per avere che

$$0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon.$$

Iniziamo a vedere le proprietà dei limiti che vengono direttamente ereditate dalle funzioni continue. Nei due teoremi seguenti, con relativo corollario, le funzioni  $f$  e  $g$  sono definite su  $E$  o su  $E \setminus \{x_0\}$ , indifferentemente, e hanno valori in  $F = \mathbb{R}$ .

**Teorema 17 (della permanenza del segno)** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) > 0,$$

*allora esiste un  $\delta > 0$  tale che*

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

*Analogamente, se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) < 0,$$

*allora esiste un  $\delta > 0$  tale che*

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) < 0.$$

**Corollario 18** *Se  $g(x) \leq 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora, qualora il limite esista, si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \leq 0.$$

*Analogamente, se  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora, qualora il limite esista, si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq 0.$$

Naturalmente, si hanno enunciati analoghi qualora  $g$  sia di segno opposto.

**Teorema 19** Se

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \quad l_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l_1 + l_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)] = l_1 - l_2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = l_1 l_2;$$

se  $l_2 \neq 0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

Consideriamo ora il caso in cui  $E$  è uno spazio metrico qualunque ed  $F = \mathbb{R}$ . Risulterà talvolta utile il seguente “teorema dei due carabinieri”.

**Teorema 20** Supponiamo di avere due funzioni  $f_1, f_2$  per cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l.$$

Se  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è tale che, per ogni  $x$ ,

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazione. Fissato  $\varepsilon > 0$ , esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che

$$0 < d(x, x_0) < \delta_1 \Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon,$$

$$0 < d(x, x_0) < \delta_2 \Rightarrow l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon.$$

Se  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , allora

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow l - \varepsilon < f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) < l + \varepsilon,$$

il che dimostra la tesi. ■

**Corollario 21** Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0,$$

ed esiste un  $C > 0$  tale che  $|g(x)| \leq C$  per ogni  $x$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0.$$

Dimostrazione. Si ha

$$-C|f(x)| \leq f(x)g(x) \leq C|f(x)|,$$

e il risultato segue dal teorema precedente, tenuto conto che si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0,$$

prendendo  $f_1(x) = -C|f(x)|$  e  $f_2(x) = C|f(x)|$ . ■

## 5 Cambiamento di variabile nel limite

Consideriamo ora una funzione composta  $g \circ f$ . Abbiamo due possibili situazioni.

**Teorema 22** *Sia  $f : E \rightarrow F$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ , tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

*Se  $g : F \rightarrow G$  è continua in  $l$ , allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(l).$$

*In altri termini,*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)\right).$$

Dimostrazione. Riguardando la definizione di limite, si ha che  $\tilde{f} : E \rightarrow \mathbb{R}$  ivi definita è continua in  $x_0$  e  $g$  è continua in  $l = \tilde{f}(x_0)$ . Pertanto,  $g \circ \tilde{f}$  è continua in  $x_0$ , da cui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(\tilde{f}(x)) = g(\tilde{f}(x_0)) = g(l).$$
■

**Teorema 23** *Sia  $f : E \rightarrow F$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ , tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

*Supponiamo che  $l$  sia un punto di accumulazione di  $F$  e che la funzione*

$$g : F \rightarrow G, \quad \text{oppure} \quad g : F \setminus \{l\} \rightarrow G,$$

*non necessariamente definita in  $l$ , sia tale che*

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = L.$$

*Se  $f(x) \neq l$  per ogni  $x \in E \setminus \{x_0\}$ , allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Dimostrazione. Consideriamo nuovamente la funzione  $\tilde{f} : E \rightarrow F$ , continua in  $x_0$  con  $\tilde{f}(x_0) = l$ . Analogamente, consideriamo la funzione  $\tilde{g} : F \rightarrow G$  così definita:

$$\tilde{g}(y) = \begin{cases} g(y) & \text{se } y \neq l, \\ L & \text{se } y = l. \end{cases}$$

Essa è continua in  $l$  con  $\tilde{g}(l) = L$ . Consideriamo la funzione composta  $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ , che per quanto sopra è continua in  $x_0$  con  $\tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = \tilde{g}(l) = L$ . Essendo  $f(x) \neq l$  per ogni  $x$ , si ha che, per  $x \in E \setminus \{x_0\}$ ,

$$g(f(x)) = \tilde{g}(f(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x)),$$

e pertanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{g}(\tilde{f}(x)) = \tilde{g}(\tilde{f}(x_0)) = L.$$

■

Alcune considerazioni sull'ultimo teorema dimostrato. Si noti che la sua conclusione si riassume con la formula

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} g(y).$$

Spesso si dice che si è operato il “cambio di variabile  $y = f(x)$ ”. Riguardando inoltre le ipotesi dello stesso teorema, si vede subito che è sufficiente richiedere che sia  $f(x) \neq l$  per gli  $x$  tali che  $0 < d(x, x_0) < \delta$ . Ciò è dovuto al fatto che la nozione di limite è, in un certo senso, di tipo “locale”. Questa osservazione vale in generale e verrà spesso usata in seguito.

**Esempi.** 1. Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1.$$

In effetti, se  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $f(x) = x \sin(1/x)$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita da  $g(y) = \cos(y)$ , sappiamo che  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , e che  $g$  è continua. Per il Teorema 1,

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x)\right) = g(0) = 1.$$

2. Sia ora  $f$  come nell'esempio precedente, e sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0, \\ 2 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si può vedere che, in ogni intorno di  $x_0 = 0$ , la funzione  $g(f(x))$  assume infinite volte il valore 1 e infinite volte il valore 2. Pertanto, in questo caso,

$$\text{il limite } \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \text{ non esiste.}$$

## 6 Limite delle restrizioni

Finora abbiamo considerato due spazi metrici  $E, F$ , un punto  $x_0$  di accumulazione per  $E$  e una funzione  $f : E \rightarrow F$ , oppure  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ . Siccome l'eventuale valore di  $f$  in  $x_0$  è ininfluente ai fini dell'esistenza o meno del limite, nonché del suo effettivo valore, da ora in poi per semplicità considereremo solo il caso  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ .

Si può verificare che tutte le considerazioni fatte continuano a valere per una funzione  $f : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ , con  $\widehat{E} \subseteq E$ , purché  $x_0$  sia di accumulazione per  $\widehat{E}$ : ogni intorno di  $x_0$  deve contenere infiniti punti di  $\widehat{E}$ .

Sia ora  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow F$ , e sia  $\widehat{E} \subseteq E$ . Possiamo considerare la restrizione di  $f$  a  $\widehat{E} \setminus \{x_0\}$ : è la funzione  $\hat{f} : \widehat{E} \setminus \{x_0\} \rightarrow F$  i cui valori coincidono con quelli di  $f$ : si ha  $\hat{f}(x) = f(x)$  per ogni  $x \in \widehat{E} \setminus \{x_0\}$ . Talvolta si scrive  $\hat{f} = f|_{\widehat{E}}$ .

**Teorema 24** *e esiste il limite di  $f$  in  $x_0$  e  $x_0$  è di accumulazione anche per  $\widehat{E}$ , allora esiste anche il limite di  $\hat{f}$  in  $x_0$  e ha lo stesso valore:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \hat{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dalla definizione di  $\hat{f}$ . ■

Il teorema precedente viene spesso usato per stabilire la non esistenza del limite per la funzione  $f$ : a tal scopo, è sufficiente trovare due diverse restrizioni lungo le quali i valori del limite differiscono.

**Esempi.** 1. La funzione  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

non ha limite per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , come si vede considerando le restrizioni alle due rette  $\{(x, y) : x = 0\}$  e  $\{(x, y) : x = y\}$ .

2. Più sorprendente è la funzione definita da

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},$$

per la quale le restrizioni a tutte le rette passanti per  $(0, 0)$  hanno limite 0, ma la restrizione alla parabola  $\{(x, y) : y = x^2\}$  vale costantemente  $\frac{1}{2}$ .

3. Dimostriamo invece che

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0.$$

Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Dopo aver verificato che

$$\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2),$$

risulta naturale prendere  $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$ , per avere che

$$d((x, y), (0, 0)) < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Sia ora  $E \subseteq \mathbb{R}$ . Possiamo considerare le due restrizioni  $\hat{f}_1$  e  $\hat{f}_2$  agli insiemi  $\hat{E}_1 = E \cap ]-\infty, x_0]$  e  $\hat{E}_2 = E \cap [x_0, +\infty[$ . Se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_1$ , chiameremo “limite sinistro” di  $f$ , quando esiste, il limite di  $\hat{f}_1(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ; lo denoteremo con

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Analogamente, se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_2$ , chiameremo “limite destro” di  $f$ , quando esiste, il limite di  $\hat{f}_2(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$ ; lo denoteremo con

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Si può dimostrare il fatto seguente.

**Teorema 25** *Se  $x_0$  è di accumulazione per  $\hat{E}_1$  e per  $\hat{E}_2$ , il limite di  $f(x)$  per  $x$  che tende a  $x_0$  esiste se e solo se esistono sia il limite sinistro che il limite destro e hanno lo stesso valore.*

**Dimostrazione.** Sappiamo già che, se esiste il limite, tutte le restrizioni devono avere lo stesso limite. Viceversa, supponiamo che esistano e coincidano i limiti sinistro e destro, e sia  $\ell$  il loro valore. Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Allora esistono  $\delta_1 > 0$  e  $\delta_2 > 0$  tali che, se  $x \in E$ ,

$$x_0 - \delta_1 < x < x_0 \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta_2 \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Preso  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , abbiamo quindi che, se  $x \neq x_0$ ,

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \Rightarrow d(f(x), \ell) < \varepsilon,$$

per cui il limite di  $f$  in  $x_0$  esiste ed è uguale a  $\ell$ . ■

**Esempio.** La funzione “segno”, ossia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non ha limite in  $x_0 = 0$ , essendo che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$ .

## 7 La retta ampliata

Consideriamo la funzione  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow ]-1, 1[$ , definita da

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

Si tratta di una funzione invertibile, con inversa  $\varphi^{-1} : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$ , definita da

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

Possiamo allora definire una nuova distanza su  $\mathbb{R}$ :

$$\tilde{d}(x, x') = |\varphi(x) - \varphi(x')|.$$

Per la nuova distanza, la palla aperta di centro  $x_0 \in \mathbb{R}$  e raggio  $\rho$  è data da

$$\tilde{B}(x_0, \rho) = \{x : |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho\}.$$

È importante notare che gli intorni di un punto  $x_0 \in \mathbb{R}$  rimangono gli stessi di quelli definiti dalla distanza usuale in  $\mathbb{R}$ . Infatti, essendo  $\varphi$  continua in  $x_0$ , per ogni  $\rho_1 > 0$  esiste un  $\rho_2 > 0$  tale che

$$|x - x_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_1,$$

ossia

$$]x_0 - \rho_2, x_0 + \rho_2[ \subseteq \tilde{B}(x_0, \rho_1).$$

Viceversa, essendo  $\varphi^{-1}$  continua in  $y_0 = \varphi(x_0) \in ]-1, 1[$ , per ogni  $\rho_1 > 0$  esiste un  $\rho_2 > 0$  tale che

$$|y - y_0| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad y \in ]-1, 1[ \quad \text{e} \quad |\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y_0)| < \rho_1;$$

In particolare, prendendo  $y = \varphi(x)$ ,

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \rho_2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \in ]-1, 1[ \quad \text{e} \quad |x - x_0| < \rho_1,$$

ossia

$$\tilde{B}(x_0, \rho_2) \subseteq ]x_0 - \rho_1, x_0 + \rho_1[.$$

Da quanto visto, si deduce che ogni intorno per la nuova distanza è anche intorno per la vecchia distanza, e viceversa.

Introduciamo ora il nuovo insieme  $\tilde{\mathbb{R}}$ , definito come unione di  $\mathbb{R}$  e di due nuovi elementi, che indicheremo con  $-\infty$  e  $+\infty$ :

$$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

L'insieme  $\tilde{\mathbb{R}}$  risulta totalmente ordinato se si mantiene l'ordine esistente tra coppie di numeri reali e si pone inoltre, per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$-\infty < x < +\infty.$$

Consideriamo la funzione  $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow [-1, 1]$ , definita da

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x = -\infty, \\ \varphi(x) & \text{se } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{se } x = +\infty. \end{cases}$$

Essa è invertibile, con inversa  $\tilde{\varphi}^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$  definita da

$$\tilde{\varphi}^{-1}(y) = \begin{cases} -\infty & \text{se } y = -1, \\ \varphi^{-1}(y) & \text{se } y \in ]-1, 1[, \\ +\infty & \text{se } y = 1. \end{cases}$$

Definiamo, per  $x, x' \in \tilde{\mathbb{R}}$ ,

$$\tilde{d}(x, x') = |\tilde{\varphi}(x) - \tilde{\varphi}(x')|;$$

si verifica facilmente che  $\tilde{d}$  è una distanza su  $\tilde{\mathbb{R}}$ . In questo modo,  $\tilde{\mathbb{R}}$  risulta uno spazio metrico. Vediamo ad esempio cos'è una palla aperta centrata in  $+\infty$ :

$$B(+\infty, \rho) = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : |\tilde{\varphi}(x) - 1| < \rho\} = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : \tilde{\varphi}(x) > 1 - \rho\},$$

e quindi

$$B(+\infty, \rho) = \begin{cases} \tilde{\mathbb{R}} & \text{se } \rho > 2, \\ ]-\infty, +\infty] & \text{se } \rho = 2, \\ ]\varphi^{-1}(1 - \rho), +\infty] & \text{se } \rho < 2, \end{cases}$$

dove abbiamo usato le notazioni

$$]a, +\infty] = \{x \in \tilde{\mathbb{R}} : x > a\} = ]a, +\infty[ \cup \{+\infty\}.$$

Possiamo quindi affermare che un intorno di  $+\infty$  è un insieme che contiene, oltre al punto  $+\infty$ , un intervallo del tipo  $] \alpha, +\infty[$ , per un certo  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Analogamente, un intorno di  $-\infty$  è un insieme che contiene, oltre a  $-\infty$ , un intervallo del tipo  $] -\infty, \beta[$ , per un certo  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Vediamo ora come si traduce la definizione di limite in alcuni casi in cui compaiono gli elementi  $+\infty$  o  $-\infty$ . Ad esempio, sia  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $F$  uno spazio metrico e  $f : E \rightarrow F$  una funzione. Considerando  $E$  come sottoinsieme di  $\tilde{\mathbb{R}}$ , si ha che  $+\infty$  è punto di accumulazione per  $E$  se e solo se  $E$  non è limitato superiormente. In tal caso, si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in F &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } l \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha \in \mathbb{R} : \ x > \alpha \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Analogamente, se  $E$  non è limitato inferiormente, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \in F \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \beta \in \mathbb{R} : \ x < \beta \Rightarrow d(f(x), l) < \varepsilon.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(-x) = l.$$

Vediamo ora il caso in cui  $E$  sia uno spazio metrico ed  $F = \mathbb{R}$ , considerato come sottoinsieme di  $\tilde{\mathbb{R}}$ . Supponiamo che  $x_0$  sia di accumulazione per  $E$  e consideriamo una funzione  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , o  $f : E \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si ha:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } x_0 : \\ &f(U \setminus \{x_0\}) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \ 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 : \ 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Si noti che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = -\infty.$$

Le situazioni considerate in precedenza possono talvolta presentarsi assieme. Ad esempio, se  $E \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato superiormente ed  $F = \mathbb{R}$ , si avrà

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty &\Leftrightarrow \forall V \text{ intorno di } +\infty \ \exists U \text{ intorno di } +\infty : \\ &f(U \cap E) \subseteq V \\ &\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \exists \alpha' \in \mathbb{R} : \ x > \alpha' \Rightarrow f(x) > \alpha; \end{aligned}$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \alpha \in \mathbb{R} : x > \alpha \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Se invece  $E \subseteq \mathbb{R}$  non è limitato inferiormente ed  $F = \mathbb{R}$ , si avrà

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R} \exists \beta \in \mathbb{R} : x < \beta \Rightarrow f(x) > \alpha;$$

analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \beta \in \mathbb{R} \exists \beta' \in \mathbb{R} : x < \beta' \Rightarrow f(x) < \beta.$$

Vediamo ad esempio il caso di una successione  $(a_n)_n$  in uno spazio metrico  $F$ . Abbiamo quindi una funzione  $f : \mathbb{N} \rightarrow F$  definita da  $f(n) = a_n$ . Considerando  $\mathbb{N}$  come sottoinsieme di  $\widetilde{\mathbb{R}}$ , si vede che l'unico punto di accumulazione è  $+\infty$ . Adattando la definizione di limite a questo caso, possiamo scrivere:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in F \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, l) < \varepsilon.$$

Pertanto, spesso il limite di una successione si denota semplicemente con  $\lim_n a_n$ , sottintendendo che  $n \rightarrow +\infty$ .

## 8 Operazioni con i limiti $+\infty$ e $-\infty$

Qualora i limiti siano  $+\infty$  o  $-\infty$ , non si possono usare i teoremi sulle operazioni con i limiti. A titolo illustrativo, enunciamo alcuni teoremi validi in questi casi. Nel seguito, tutte le funzioni saranno definite in uno spazio metrico  $E$ , oppure in  $E \setminus \{x_0\}$ , con  $x_0$  di accumulazione. Iniziamo con l'addizione:

**Teorema 26** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

*ed esiste un  $\gamma \in \mathbb{R}$  tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,*

$$g(x) \geq \gamma,$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Considerato  $\alpha' = \alpha - \gamma$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha'.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) + g(x) > \alpha' + \gamma = \alpha.$$

■

**Corollario 27** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l \in \mathbb{R} \quad (o \quad +\infty),$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Se il limite di  $g$  è  $l \in \mathbb{R}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > l - 1.$$

Se invece il limite è  $+\infty$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 0.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come regola mnemonica, scriveremo brevemente

$$(+\infty) + l = +\infty, \text{ se } l \text{ è un numero reale;}$$

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

In modo del tutto analogo, si possono enunciare un teorema e il relativo corollario nel caso in cui il limite di  $f$  sia  $-\infty$ . Come regola mnemonica, scriveremo allora

$$(-\infty) + l = -\infty, \text{ se } l \text{ è un numero reale;}$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty.$$

Similmente per quanto riguarda il prodotto:

**Teorema 28** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

*ed esiste un  $\gamma > 0$  tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,*

$$g(x) \geq \gamma,$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Possiamo supporre che sia  $\alpha > 0$ . Posto  $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha'.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow f(x)g(x) > \alpha'\gamma = \alpha.$$

■

**Corollario 29** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l > 0 \quad (o \quad +\infty),$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = +\infty.$$

Dimostrazione. Se il limite di  $g$  è un numero reale  $l > 0$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > \frac{l}{2}.$$

Se invece il limite è  $+\infty$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow g(x) > 1.$$

In ogni caso, si può applicare il teorema precedente per concludere. ■

Come sopra, scriveremo brevemente

$$(+\infty) \cdot l = +\infty, \text{ se } l > 0 \text{ è un numero reale;}$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty,$$

con tutte le varianti del caso:

$$(+\infty) \cdot l = -\infty, \text{ se } l < 0 \text{ è un numero reale;}$$

$$(-\infty) \cdot l = -\infty, \text{ se } l > 0 \text{ è un numero reale;}$$

$$(-\infty) \cdot l = +\infty, \text{ se } l < 0 \text{ è un numero reale;}$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty;$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty.$$

Passiamo ora a un altro tipo di risultati.

**Teorema 30** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty,$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Dimostrazione. Fissiamo un  $\varepsilon > 0$ . Posto  $\alpha = \frac{1}{\varepsilon}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow |f(x)| > \alpha.$$

Quindi,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x)} - 0 \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{\alpha} = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

**Teorema 31** *Se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e  $f(x) > 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Se invece  $f(x) < 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Dimostrazione. Vediamo solo il primo caso, essendo il secondo analogo. Fissiamo  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; possiamo supporre  $\alpha > 0$ . Posto  $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$ , esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow 0 < f(x) < \varepsilon.$$

Allora,

$$0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon} = \alpha.$$

■

Presentiamo due varianti del teorema dei due carabinieri: nel caso in cui il limite vale  $+\infty$ , si ha il seguente

**Teorema 32** *Sia  $f_1$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = +\infty.$$

Se  $f$  è tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,

$$f_1(x) \leq f(x),$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty.$$

Dimostrazione. Ponendo  $g(x) = f(x) - f_1(x)$ , si ha che  $g(x) \geq 0$  per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$  e  $f(x) = f_1(x) + g(x)$ . Il risultato segue quindi direttamente dal primo teorema visto a lezione. ■

Nel caso in cui il limite sia  $-\infty$ , si ha l'analogo

**Teorema 33** *Sia  $f_2$  tale che*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = -\infty.$$

*Se  $f$  è tale che, per ogni  $x$  in un intorno di  $x_0$ ,*

$$f(x) \leq f_2(x),$$

*allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

## 9 Successioni e sottosuccessioni

Utilizzeremo ora le successioni e i loro limiti per caratterizzare alcuni concetti introdotti in precedenza. A tal fine, riscriviamo la definizione di limite per una successione in uno spazio metrico  $E$ :

$$\lim_n a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, \ell) < \varepsilon.$$

Sia ora  $U$  un sottoinsieme dello spazio metrico  $E$ . Possiamo caratterizzare la nozione di punto aderente a  $U$  facendo uso delle successioni.

**Teorema 34** *Un punto  $x \in E$  è aderente a  $U$  se e solo se esiste una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ .*

Dimostrazione. Se  $x$  è aderente a  $U$ , allora, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che  $B\left(x, \frac{1}{n+1}\right) \cap U$  è non vuota, per cui posso sceglierne un elemento, che chiamo  $a_n$ . In questo modo, ho costruito una successione  $(a_n)_n$  in  $U$ , ed è facile vedere che essa ha limite  $x$ . Una delle due implicazioni è così dimostrata.

Supponiamo ora che esista una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ . Allora, fissato  $\rho > 0$ , esiste un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_n, x) < \rho,$$

ossia  $a_n \in B(x, \rho)$ . Quindi,  $B(x, \rho) \cap U$  è non vuoto, e questo dimostra che  $x$  è aderente a  $U$ . ■

Consideriamo ora due spazi metrici  $E, F$  e una funzione  $f : E \rightarrow F$ . Vogliamo caratterizzare la continuità di  $f$  in un punto  $x_0 \in E$ , facendo uso delle successioni.

**Teorema 35** *La funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se, presa una successione  $(a_n)_n$  in  $E$ , si ha*

$$\lim_n a_n = x_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_n f(a_n) = f(x_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che  $f$  sia continua in  $x_0$ , e sia  $(a_n)_n$  una successione in  $E$  tale che  $\lim_n a_n = x_0$ . Per il Teorema 1 sul limite di una funzione composta,

$$\lim_n f(a_n) = f(\lim_n a_n) = f(x_0),$$

cosicchè una delle due implicazioni è dimostrata.

Ragioniamo ora per contrapposizione, e supponiamo che  $f$  non sia continua in  $x_0$ . Questo significa che esiste un  $\varepsilon > 0$  tale che, per ogni  $\delta > 0$ , esiste almeno un  $x \in E$  per cui  $d(x, x_0) < \delta$  e  $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Prendendo  $\delta = \frac{1}{n+1}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste pertanto un  $a_n$  in  $E$  tale che  $d(a_n, x_0) < \frac{1}{n+1}$  e  $d(f(a_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$ . Ne segue che  $\lim_n a_n = x_0$ , ma sicuramente non può essere che  $\lim_n f(a_n) = f(x_0)$ . ■

Data che sia una successione  $(a_n)_n$ , una sua “sottosuccessione” si ottiene selezionando una successione strettamente crescente di indici  $(n_k)_k$  e considerando la funzione composta

$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}.$$

**Teorema 36** *Se una successione ha limite, allora tutte le sue sottosuccessioni hanno lo stesso limite.*

Dimostrazione. Essendo gli indici  $n_k$  in  $\mathbb{N}$ , dalla  $n_{k+1} > n_k$  si deduce che  $n_{k+1} \geq n_k + 1$  e, per induzione, che  $n_k \geq k$ , per ogni  $k$ . Ne segue che  $\lim_k n_k = +\infty$ . Pertanto,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} n_k} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n. \quad \blacksquare$$

## 10 La nozione di compattezza

Ricordiamo la seguente proprietà degli intervalli chiusi e limitati di  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 37 (di Bolzano–Weierstrass)** *Ogni successione  $(a_n)_n$  in  $[a, b]$  possiede una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha limite in  $[a, b]$ .*

In uno spazio metrico  $E$ , diremo che un sottoinsieme  $U$  è “compatto” se ogni successione  $(a_n)_n$  in  $U$  possiede una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha limite in  $U$ . Il teorema di Bolzano–Weierstrass afferma quindi che, se  $E = \mathbb{R}$ , gli intervalli del tipo  $U = [a, b]$  sono compatti. Più in generale, si può dimostrare che un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Nel seguito, diremo che una funzione  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è “limitata superiormente” (o “limitata inferiormente”) se lo è la sua immagine  $f(U)$ . Diremo che  $f$  è “limitata” se è sia limitata superiormente che inferiormente. Diremo che “ $f$  ha massimo” (o “ $f$  ha minimo”) se  $f(U)$  ce l’ha. Nel caso in cui  $f$  abbia massimo, chiameremo “punto di massimo” ogni  $\bar{x}$  per cui  $f(\bar{x}) = \max f(U)$ ; analoga definizione per “punto di minimo”.

**Teorema 38 (di Weierstrass)** *Se  $U$  è un insieme compatto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione continua, allora  $f$  ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Sia  $s = \sup f(U)$ . Dimostreremo che esiste un punto di massimo, ossia un  $\bar{x} \in U$  tale che  $f(\bar{x}) = s$ .

Notiamo che è possibile trovare una successione  $(y_n)_n$  in  $f(U)$  tale che  $\lim_n y_n = s$ : se  $s \in \mathbb{R}$ , per ogni  $n \geq 1$  possiamo trovare un  $y_n \in f(U)$  per cui  $s - \frac{1}{n} < y_n \leq s$ ; se invece  $s = +\infty$ , per ogni  $n$  esiste un  $y_n \in f(U)$  tale che  $y_n > n$ .

In corrispondenza, possiamo trovare una successione  $(x_n)_n$  in  $U$  tale che  $f(x_n) = y_n$ . Essendo  $U$  compatto, esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  che ha un limite  $\bar{x} \in U$ . Siccome  $\lim_n y_n = s$  e  $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ , la sottosuccessione  $(y_{n_k})_k$  ha anch’essa limite  $s$ . Allora, per la continuità di  $f$ ,

$$f(\bar{x}) = f(\lim_k x_{n_k}) = \lim_k f(x_{n_k}) = \lim_k y_{n_k} = s.$$

Il teorema è così dimostrato, per quanto riguarda l’esistenza del massimo. Per il minimo, si procede in modo analogo (oppure, si considera la funzione continua  $g = -f$  e si usa il fatto che  $g$  ha massimo). ■

Si può anche dimostrare in modo analogo il seguente teorema. Esso afferma che una funzione continua “manda compatti in compatti”.

**Teorema 39** *Se  $E, F$  sono due spazi metrici,  $U \subseteq E$  è compatto e  $f : E \rightarrow F$  è una funzione continua, allora  $f(U)$  è compatto.*

**Teorema 40** *Ogni sottoinsieme compatto di  $E$  è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che  $U \subseteq E$  sia compatto. Prendendo  $x \in \bar{U}$ , esiste una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $\lim_n a_n = x$ . Poiché  $U$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha un limite in  $U$ . Ma, essendo una sottosuccessione,  $\lim_k a_{n_k} = x$ , e quindi  $x \in U$ . Abbiamo quindi dimostrato che ogni punto aderente ad  $U$  appartiene a  $U$ , quindi  $U$  è chiuso.

Ora, fissiamo arbitrariamente un  $x_0$  in  $U$ . Mostriamo che, se  $n \in \mathbb{N}$  è sufficientemente grande, allora  $U \subseteq B(x_0, n)$ . Per assurdo, se ciò fosse falso, potremmo costruire una successione  $(a_n)_n$  in  $U$  tale che  $d(a_n, x_0) \geq n$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Poiché  $U$  è compatto, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha un limite  $\bar{x} \in U$ . Utilizzando la disuguaglianza triangolare,

$$|d(a_{n_k}, x_0) - d(\bar{x}, x_0)| \leq d(a_{n_k}, \bar{x}),$$

da cui  $\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = d(\bar{x}, x_0)$ , mentre dovrebbe essere

$$\lim_k d(a_{n_k}, x_0) = +\infty,$$

una contraddizione. Pertanto,  $U$  deve essere limitato. ■

Ora focalizziamo la nostra attenzione sui sottoinsiemi compatti di  $\mathbb{R}^N$ , per un qualsiasi  $N \geq 1$ .

**Teorema 41** *Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^N$  è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

Dimostrazione. Sappiamo già che ogni insieme compatto è chiuso e limitato. Supponiamo ora che  $U$  sia un sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^N$ . Per semplicità, supporremo che sia  $N = 2$ . Allora  $U$  è contenuto in un rettangolo  $I = [a, b] \times [c, d]$ . Sia  $(\mathbf{a}_n)_n$  una successione in  $U$ . Allora  $\mathbf{a}_n = (a_n^1, a_n^2)$ , con  $a_n^1 \in [a, b]$  e  $a_n^2 \in [c, d]$ . Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, la successione  $(a_n^1)_n$  ha una sottosuccessione  $(a_{n_k}^1)_k$  che ha un limite  $l_1 \in [a, b]$ . Consideriamo ora la successione  $(a_{n_k}^2)_k$ , con gli stessi indici  $n_k$  di quella che abbiamo appena trovato; è una sottosuccessione di  $(a_n^2)_n$ . Per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, la successione  $(a_{n_k}^2)_k$  ha una sottosuccessione  $(a_{n_{k_j}}^2)_j$  che ha un limite  $l_2 \in [c, d]$ . Pertanto,

$$\lim_j \mathbf{a}_{n_{k_j}} = (\lim_j a_{n_{k_j}}^1, \lim_j a_{n_{k_j}}^2) = (l_1, l_2).$$

Ne segue che  $\mathbf{l} = (l_1, l_2)$  è un punto aderente ad  $U$ . Quindi, siccome  $U$  è chiuso,  $\mathbf{l}$  è necessariamente un elemento di  $U$ . ■

La seguente proprietà degli insiemi compatti ci potrà essere utile in seguito.

**Teorema 42** *Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^N$  un insieme compatto. Se  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  è una famiglia (non necessariamente numerabile) di insiemi aperti tale che*

$$U \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i,$$

*allora esiste una sottofamiglia finita  $(A^1, \dots, A^n)$  di  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  tale che*

$$U \subseteq A^1 \cup \dots \cup A^n.$$

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo  $N = 2$ . Dimostriamo prima la tesi nel caso in cui  $U$  sia un rettangolo chiuso, e denotiamolo con  $R_0 = [a_0, b_0] \times [c_0, d_0]$ . Per assurdo, supponiamo che ci sia un ricoprimento  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  di  $R_0$ , costituito da insiemi aperti, senza che ci sia alcun sottoricoprimento finito. Dividiamo il rettangolo  $R_0$  in quattro rettangoli chiusi più piccoli e uguali, collegando i punti medi dei suoi lati. Tra questi quattro rettangoli, ce n'è almeno uno per il quale non esiste una sottofamiglia finita di  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  che lo ricopra. Chiamiamolo  $R_1$ . Procediamo ora ricorsivamente e costruiamo in questo modo una successione di rettangoli chiusi  $R_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k]$ , tale che

$$R_0 \supseteq R_1 \supseteq R_2 \supseteq \cdots \supseteq R_k \supseteq R_{k+1}, \supseteq \dots,$$

per ciascuno dei quali non esiste una sottofamiglia finita di  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  che lo ricopra. Per il Teorema di Cantor, esistono un  $\bar{x}$  appartenente a tutti gli intervalli  $[a_k, b_k]$  e un  $\bar{y}$  appartenente a tutti gli intervalli  $[c_k, d_k]$ , così che  $(\bar{x}, \bar{y}) \in R_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Poiché  $(\bar{x}, \bar{y})$  appartiene a  $U$ , c'è almeno un  $A_i$  che lo contiene. Questo insieme  $A_i$  è aperto e le dimensioni di  $R_k$  tendono a zero al tendere di  $k$  a  $+\infty$ . Quindi, per  $k$  sufficientemente grande, il rettangolo  $R_k$  sarà tutto contenuto in  $A_i$ . Ma questa è una contraddizione, poiché non dovrebbe esistere una sottofamiglia finita di  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  che ricopra  $R_k$ .

Sia ora  $U$  un qualsiasi sottoinsieme chiuso e limitato di  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $U$  è contenuto in un rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$ . Se  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  è un ricoprimento  $U$  costituito da insiemi aperti, allora

$$[a, b] \times [c, d] \subseteq \left( \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \right) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U).$$

Siccome  $\mathbb{R}^2 \setminus U$  è aperto, abbiamo ora una ricoprimento di  $[a, b] \times [c, d]$  costituito da insiemi aperti, e per la prima parte della dimostrazione esiste una sottofamiglia finita  $(A^1, \dots, A^n)$  di  $(A_i)_{i \in \mathcal{I}}$  tale che

$$[a, b] \times [c, d] \subseteq (A^1 \cup \cdots \cup A^n) \cup (\mathbb{R}^2 \setminus U).$$

Di conseguenza,  $U \subseteq A^1 \cup \cdots \cup A^n$ , e la dimostrazione è così completa. ■

**Nota.** Si può dimostrare che il teorema precedente vale in uno spazio metrico qualsiasi; inoltre, la proprietà dell'enunciato risulta essere necessaria e sufficiente per la compattezza di un insieme  $U$ .

## 11 Funzioni uniformemente continue

Ricordo ora che una funzione  $f : E \rightarrow F$  si dice “continua” se è continua in ogni punto  $x_0 \in E$ . In altri termini, se

$$\forall x_0 \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Si noti che, in generale, la scelta di  $\delta$  dipende sia da  $\varepsilon$  che da  $x_0$ . Nel caso in cui tale  $\delta$  non dipenda da  $x_0$ , diremo che la funzione è “uniformemente continua”: In tal caso, si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x_0 \in E \quad \forall x \in E \quad d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

**Teorema 43 (di Heine)** *Se  $U$  è un insieme compatto e  $f : U \rightarrow F$  è una funzione continua, allora  $f$  è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Per assurdo, supponiamo che  $f$  non sia uniformemente continua. Allora

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_0 \in E \quad \exists x \in E : d(x, x_0) < \delta \quad e \quad d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon .$$

Prendiamo un tale  $\varepsilon > 0$  e scegliamo  $\delta = \frac{1}{n+1}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . In corrispondenza, esistono<sup>4</sup>  $x_n^0$  e  $x_n$  tali che

$$d(x_n, x_n^0) < \frac{1}{n+1} \quad e \quad d(f(x_n), f(x_n^0)) \geq \varepsilon .$$

Abbiamo così due successioni  $(x_n)_n$  e  $(x_n^0)_n$  in  $U$ . Essendo  $U$  compatto, esiste una sottosuccessione  $(x_{n_k})_k$  che ha un limite  $\bar{x} \in U$ . Prendiamo ora la sottosuccessione  $(x_{n_k}^0)_k$ , con gli stessi indici  $n_k$ . Siccome  $d(x_{n_k}, x_{n_k}^0)$  tende a zero, anche questa sottosuccessione ha lo stesso limite  $\bar{x}$ . Per la continuità di  $f$ , deve essere

$$\lim f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) \quad e \quad \lim f(x_{n_k}^0) = f(\bar{x}) ,$$

e pertanto

$$\lim_k d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) = 0 ,$$

in contraddizione con il fatto che  $d(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}^0)) \geq \varepsilon > 0$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . ■

## 12 Funzioni a valori vettoriali

Consideriamo ora, per ogni  $k = 1, 2, \dots, D$ , la funzione “ $k$ -esima proiezione”  $p_k : \mathbb{R}^D \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$p_k(x_1, x_2, \dots, x_D) = x_k .$$

**Teorema 44** *Le funzioni  $p_k$  sono continue.*

<sup>4</sup>Qui l'indice 0 viene spostato in apice per non avere una notazione con doppio indice.

Dimostrazione. Consideriamo un punto  $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_D^0) \in \mathbb{R}^D$  e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Notiamo che, per ogni  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_D) \in \mathbb{R}^D$ , si ha

$$|x_k - x_k^0| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^D (x_j - x_j^0)^2} = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0),$$

per cui, prendendo  $\delta = \varepsilon$ , si ha:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) < \delta \Rightarrow |p_k(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x}_0)| = |x_k - x_k^0| < \varepsilon,$$

il che dimostra che  $p_k$  è continua in  $\mathbf{x}_0$ . ■

Supponiamo ora  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Consideriamo le “componenti” della funzione  $f$  definite da  $f_k = p_k \circ f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $k = 1, 2, \dots, M$ , per cui si ha

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_M(x)).$$

**Teorema 45** *La funzione  $f$  è continua in  $x_0$  se e solo se lo sono tutte le sue componenti.*

Dimostrazione. Se  $f$  è continua in  $x_0$ , lo sono anche le  $f_k$  in quanto composte di funzioni continue. Viceversa, supponiamo che le componenti di  $f$  siano tutte continue in  $x_0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , per ogni  $k = 1, 2, \dots, M$  esiste un  $\delta_k > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta_k \Rightarrow |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon.$$

Posto  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_M\}$ , si ha

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) = \sqrt{\sum_{j=1}^M (f_j(x) - f_j(x_0))^2} < \sqrt{M}\varepsilon,$$

il che, per l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , completa la dimostrazione. ■

**Teorema 46** *Ogni applicazione lineare  $\ell : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$  è continua.*

Dimostrazione. Osserviamo che, essendo le proiezioni  $p_k$  lineari, le componenti  $\ell_k = p_k \circ \ell$  dell'applicazione lineare  $\ell$  sono anch'esse lineari. Consideriamo la base canonica  $[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N]$  di  $\mathbb{R}^N$ , con

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0), \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0), \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_N &= (0, 0, 0, \dots, 1). \end{aligned}$$

Ogni vettore  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$  si può scrivere come

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_N \mathbf{e}_N = p_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + p_2(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + \dots + p_N(\mathbf{x}) \mathbf{e}_N.$$

Quindi, per ogni  $k \in \{1, 2, \dots, M\}$ ,

$$\ell_k(\mathbf{x}) = p_1(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_1) + p_2(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_2) + \dots + p_N(\mathbf{x}) \ell_k(\mathbf{e}_N),$$

per cui  $\ell_k$  risulta essere combinazione lineare delle proiezioni  $p_1, p_2, \dots, p_N$ . Essendo queste ultime continue, anche  $\ell_k$  è continua. Avendo tutte le componenti continue,  $\ell$  è pertanto continua. ■

### 13 La nozione di completezza

Introduciamo ora il concetto di “completezza” per uno spazio metrico  $E$ . Diremo che  $(a_n)_n$  è una “successione di Cauchy” in  $E$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Lo spazio metrico  $E$  si dirà “completo” se ogni successione di Cauchy ha un limite in  $E$ .

Si vede facilmente che, se  $(a_n)_n$  ha un limite  $\ell \in E$ , allora è di Cauchy. Infatti, fissato  $\varepsilon > 0$ , per  $m$  e  $n$  grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon.$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio,  $\mathbb{Q}$  non è completo). Abbiamo però il seguente

**Teorema 47**  $\mathbb{R}$  è completo.

Dimostrazione. Sia  $(a_n)_n$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Prendendo nella definizione  $\varepsilon = 1$ , si ha che esiste un  $\bar{n}_1$  tale che, scegliendo  $m = \bar{n}_1$ , per ogni  $n \geq \bar{n}_1$  si ha

$$d(a_n, a_{\bar{n}_1}) < 1.$$

Se ne deduce che la successione  $(a_n)_n$  è limitata (gli indici che precedono  $\bar{n}_1$  sono in numero finito). Quindi  $(a_n)_n$  è contenuta in un intervallo del tipo  $[a, b]$ . Per il teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste una sottosuccessione  $(a_{n_k})_k$  che ha un limite  $c \in [a, b]$ . Vogliamo dimostrare che

$$\lim_n a_n = c.$$

Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Essendo la successione  $(a_n)_n$  di Cauchy,

$$\exists \bar{n} : m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n} \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Inoltre, essendo  $\lim_k a_{n_k} = c$  e  $\lim_k n_k = +\infty$ ,

$$\exists \bar{k} : k \geq \bar{k} \Rightarrow d(a_{n_k}, c) < \varepsilon \text{ e } n_k \geq \bar{n}.$$

Allora, per  $n \geq \bar{n}$ , si ha

$$d(a_n, c) \leq d(a_n, a_{n_{\bar{k}}}) + d(a_{n_{\bar{k}}}, c) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

il che pone fine alla dimostrazione. ■

Si può dimostrare che anche  $\mathbb{R}^N$  è completo, per ogni  $N \geq 1$ . In particolare, lo è  $\mathbb{C}$ , in quanto come spazio metrico coincide con  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 48**  $\mathbb{R}^N$  è completo.

Dimostrazione. Per semplicità, supponiamo  $N = 2$ . Sia  $(a_n)_n$  una successione di Cauchy in  $\mathbb{R}^2$ . Scriviamo ogni vettore  $a_n \in \mathbb{R}^2$  nelle sue coordinate

$$a_n = (a_{n,1}, a_{n,2}).$$

Denotando con  $\|\cdot\|$  la norma euclidea, si vede che

$$|a_{m,1} - a_{n,1}| \leq \|a_m - a_n\|, \quad |a_{m,2} - a_{n,2}| \leq \|a_m - a_n\|,$$

da cui segue che le due successioni  $(a_{n,1})_n, (a_{n,2})_n$  sono di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Quindi, essendo  $\mathbb{R}$  completo, esistono i limiti

$$\lim_n a_{n,1} = \ell_1, \quad \lim_n a_{n,2} = \ell_2.$$

Allora

$$\lim_n a_n = (\lim_n a_{n,1}, \lim_n a_{n,2}) = (\ell_1, \ell_2),$$

un elemento di  $\mathbb{R}^2$ . ■

Il seguente è un utile teorema di estensione per funzioni uniformemente continue.

**Teorema 49** Sia  $\hat{E}$  un sottoinsieme denso di  $E$ , e sia  $F$  uno spazio metrico completo. Se  $\hat{f} : \hat{E} \rightarrow F$  è uniformemente continua, allora esiste una e una sola funzione continua  $f : E \rightarrow F$  la cui restrizione a  $\hat{E}$  coincide con  $\hat{f}$ .

Dimostrazione. Preso  $x \in E$ , esiste una successione  $(x_n)_n$  in  $\widehat{E}$  tale che  $\lim_n x_n = x$ . Da fatto che  $\hat{f}$  è uniformemente continua e  $(x_n)_n$  è una successione di Cauchy consegue che anche  $(\hat{f}(x_n))_n$  è una successione di Cauchy. Quindi, essendo  $F$  completo, essa ha un limite  $y \in F$ . Definiamo  $f(x) = \lim_n \hat{f}(x_n) = y$ .

Verifichiamo che questa è una buona definizione. Se  $(\tilde{x}_n)_n$  è un'altra successione in  $\widehat{E}$  tale che  $\lim_n \tilde{x}_n = x$ , allora  $\lim_n d(x_n, \tilde{x}_n) = 0$ , e poiché  $\hat{f}$  è uniformemente continua, anche  $\lim_n d(\hat{f}(x_n), \hat{f}(\tilde{x}_n)) = 0$ . Pertanto,  $(\hat{f}(\tilde{x}_n))_n$  deve necessariamente avere lo stesso limite  $y$  di  $(\hat{f}(x_n))_n$ , e la definizione è consistente.

Chiaramente, la funzione  $f$  così definita estende  $\hat{f}$  poiché, se  $x \in U$ , possiamo prendere la successione  $(x_n)_n$  costantemente uguale a  $x$ . Dimostriamo ora che  $f$  è (uniformemente) continua. Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\delta > 0$  tale che, prendendo  $u, v \in \widehat{E}$ ,

$$d(u, v) \leq 2\delta \quad \Rightarrow \quad d(\hat{f}(u), \hat{f}(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Se  $x, y$  sono due punti in  $E$  tali che  $d(x, y) \leq \delta$ , possiamo prendere due successioni  $(x_n)_n$  e  $(y_n)_n$  in  $\widehat{E}$  tali che  $\lim_n x_n = x$  e  $\lim_n y_n = y$ . Quindi, poiché  $\lim_n \hat{f}(x_n) = f(x)$  e  $\lim_n \hat{f}(y_n) = f(y)$ , per  $n$  sufficientemente grande sarà che  $d(x_n, y_n) \leq 2\delta$  e

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &\leq d(f(x), \hat{f}(x_n)) + d(\hat{f}(x_n), \hat{f}(y_n)) + d(\hat{f}(y_n), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

dimostrando così che  $f$  è uniformemente continua.

Per concludere la dimostrazione, sia  $\tilde{f} : E \rightarrow F$  una qualsiasi funzione continua che estende  $\hat{f}$ . Allora, per ogni  $x \in E$ , prendendo una successione  $(x_n)_n$  in  $\widehat{E}$  tale che  $\lim_n x_n = x$ ,

$$\tilde{f}(x) = \lim_n \tilde{f}(x_n) = \lim_n \hat{f}(x_n) = f(x).$$

Abbiamo così dimostrato che  $f$  è l'unica possibile estensione continua di  $\hat{f}$  a  $E$ . ■

## 14 Il Teorema delle contrazioni

Dato uno spazio metrico  $E$ , diciamo che una funzione  $F : E \rightarrow E$  è una **contrazione** se, per qualche  $\alpha \in [0, 1[$ , vale

$$d(F(u), F(v)) \leq \alpha d(u, v), \quad \text{per ogni } u, v \in E.$$

**Teorema 50 (di Banach)** *Se  $E$  è uno spazio metrico completo e  $F : E \rightarrow E$  è una contrazione, allora esiste un unico  $x \in E$  tale che  $F(x) = x$ . Inoltre, scelto arbitrariamente  $x_0 \in E$ , la successione  $(x_n)_n$  definita da*

$$x_{n+1} = F(x_n)$$

*è tale che  $\lim_n x_n = x$ .*

Ricordiamo che, se  $F(x) = x$ , il punto  $x$  si dice un **punto fisso** di  $F$ .

Dimostrazione. Consideriamo la successione  $(x_n)_n$ , definita come nell'enunciato, con  $x_0 \in E$  arbitrario. Dimostriamo anzitutto per induzione che, per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , è vera la seguente proposizione:

$$(\mathcal{P}_k) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1).$$

Infatti, se  $k = 0$ , abbiamo chiaramente un'uguaglianza, per cui  $(\mathcal{P}_0)$  è vera. Supponiamo ora che  $(\mathcal{P}_k)$  sia vera per qualche  $k \in \mathbb{N}$ . Allora,

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(F(x_k), F(x_{k+1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1),$$

per cui anche  $(\mathcal{P}_{k+1})$  è vera.

Avendo dimostrato  $(\mathcal{P}_k)$ , abbiamo dunque, per ogni  $m < n$ ,

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) = \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{j=0}^{n-m-1} \alpha^j.$$

Poiché  $\alpha \in [0, 1[$ , la serie geometrica di ragione  $\alpha$  converge e ha somma  $\frac{1}{1-\alpha}$ , per cui

$$d(x_m, x_n) \leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1-\alpha}.$$

Per ogni  $\varepsilon > 0$  fissato, poiché  $\alpha \in [0, 1[$ , esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$m \geq \bar{n} \implies \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1-\alpha} < \varepsilon.$$

Di conseguenza,

$$n > m \geq \bar{n} \implies d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

il che mostra che  $(x_n)_n$  è una successione di Cauchy. Poiché  $E$  è completo,  $(x_n)_n$  ammette limite: esiste un  $x \in E$  tale che

$$\lim_n x_n = x.$$

Allora, poiché  $F$  è continua,

$$F(x) = F(\lim_n x_n) = \lim_n F(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x,$$

mostrando così che  $x$  è un punto fisso di  $F$ .

Resta da dimostrare che il punto fisso  $x$  è unico. Supponiamo che  $x'$  sia anch'esso un punto fisso. Allora,

$$d(x, x') = d(F(x), F(x')) \leq \alpha d(x, x'),$$

e poiché  $\alpha < 1$ , deve essere  $x = x'$ . ■

## 15 Spazi di funzioni continue

Siano  $E, F$  due spazi metrici, e consideriamo una successione di funzioni  $f_n : E \rightarrow F$ . Vogliamo studiare, qualora esista, il limite

$$\lim_n f_n(x).$$

Ovviamente, questo limite potrebbe esistere per alcuni  $x \in E$  e non esistere affatto per altri. Quindi supponiamo che, per qualche sottoinsieme  $U \subseteq E$ , esista una funzione  $f : U \rightarrow F$  per cui

$$\lim_n f_n(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in U.$$

In questo caso diremo che la successione  $(f_n)_n$  “converge puntualmente” a  $f$  su  $U$ ; in altre parole,

$$\forall x \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Se la scelta di  $\bar{n}$  non dipende da  $x \in U$ , diremo che la successione  $(f_n)_n$  “converge uniformemente” a  $f$  su  $U$ ; in questo caso,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \quad \forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon,$$

ossia, equivalentemente,

$$\lim_n \left[ \sup \{ d(f_n(x), f(x)) : x \in U \} \right] = 0.$$

Forniamo un esempio di una successione  $(f_n)_n$  che converge puntualmente, ma non uniformemente. Sia  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $n \geq 1$ , definita da

$$f(x) = \begin{cases} nx & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 2 - nx & \text{se } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}, \\ 0 & \text{se } \frac{2}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Si vede facilmente che  $\lim_n f_n(x) = 0$  per ogni  $x \in [0, 1]$ , ma la convergenza non è uniforme, poiché  $f_n(\frac{1}{n}) = 1$  per ogni  $n \geq 1$ .

La convergenza uniforme ha un buon comportamento rispetto alla continuità, come afferma il seguente teorema.

**Teorema 51** *Se ogni funzione  $f_n : E \rightarrow F$  è continua su  $U \subseteq E$  e  $(f_n)_n$  converge uniformemente a  $f$  su  $U$ , allora anche  $f$  è continua su  $U$ .*

Dimostrazione. Consideriamo un punto arbitrario  $x_0$  di  $U$ ; mostreremo che  $f$  è continua in  $x_0$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\forall x \in U \quad n \geq \bar{n} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Poiché

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)),$$

prendendo  $n = \bar{n}$  abbiamo che

$$d(f(x), f(x_0)) < \frac{2}{3} \varepsilon + d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0)).$$

Per la continuità di  $f_{\bar{n}}$  in  $x_0$ , possiamo trovare un  $\delta > 0$  tale che

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f_{\bar{n}}(x), f_{\bar{n}}(x_0)) < \frac{1}{3} \varepsilon.$$

Quindi,

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon,$$

dimostrando così che  $f$  è continua in  $x_0$ . ■

**Nota.** Se  $(f_n)_n$  è una successione di funzioni continue che converge uniformemente su  $U$  a una qualche funzione, per ogni  $x_0 \in U$  possiamo scrivere

$$\lim_n \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left( \lim_n f_n(x) \right).$$

Nel seguito diremo che una funzione  $f : E \rightarrow F$  è “limitata” se la sua immagine  $f(E)$  lo è, e denoteremo con  $\mathcal{B}(E, F)$  l’insieme di tutte queste funzioni. Definiamo, in  $\mathcal{B}(E, F)$ ,

$$d_\infty(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in E\}.$$

Si verifica facilmente che questa è una distanza, per cui  $\mathcal{B}(E, F)$  sarà trattato come uno spazio metrico. Si noti che, prendendo una successione  $(f_n)_n$  e una funzione  $f$  nello spazio  $\mathcal{B}(E, F)$ , si ha che

$$\lim_n f_n = f \Leftrightarrow (f_n)_n \text{ converge uniformemente a } f \text{ su } E.$$

Indaghiamo ora alcune ulteriori proprietà di questo spazio di funzioni.

**Teorema 52** *Se  $F$  è completo, allora anche  $\mathcal{B}(E, F)$  è completo.*

Dimostrazione. Sia  $(f_n)_n$  una successione di Cauchy in  $\mathcal{B}(E, F)$ . Poiché, per ogni  $x \in E$ ,

$$d(f_m(x), f_n(x)) \leq d_\infty(f_m, f_n),$$

abbiamo che  $(f_n(x))_n$  è una successione di Cauchy in  $F$ , per ciascun  $x \in E$ . Essendo  $F$  completo, la successione  $(f_n(x))_n$  ha un limite in  $F$ ; lo denoteremo con  $f(x)$ . In questo modo abbiamo effettivamente definito una funzione  $f : E \rightarrow F$ , e ora dimostreremo che  $\lim_n f_n = f$  in  $\mathcal{B}(E, F)$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , esiste un  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che

$$\begin{aligned} [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] &\Rightarrow d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon \\ &\Rightarrow d(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon, \text{ per ogni } x \in E. \end{aligned}$$

Per la continuità della distanza, abbiamo che

$$\lim_m d(f_n(x), f_m(x)) = d(f_n(x), f(x)),$$

da cui

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon, \text{ per ogni } x \in E.$$

Quindi,  $f$  appartiene a  $\mathcal{B}(E, F)$ , e

$$n \geq \bar{n} \Rightarrow d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon.$$

La tesi è così dimostrata. ■

Se  $f \in \mathcal{B}(E, F)$  e  $F$  è uno spazio vettoriale normato, possiamo definire

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in E\}.$$

Si verifica facilmente che questa è effettivamente una norma su  $\mathcal{B}(E, F)$ , e che

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty.$$

Come conseguenza immediata del teorema precedente, abbiamo il seguente.

**Corollario 53** *Se  $F$  è uno spazio di Banach, allora anche  $\mathcal{B}(E, F)$  lo è.*

Dimostrazione. Essendo  $F$  completo rispetto alla distanza indotta dalla sua norma, anche  $\mathcal{B}(E, F)$  è completo, per il teorema precedente. ■

Denotiamo con  $\mathcal{C}(E, F)$  l'insieme delle funzioni continue  $f : E \rightarrow F$ . Siamo ora interessati a considerare lo spazio  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$ , costituito da funzioni continue e limitate.

**Teorema 54** *L'insieme  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  è chiuso in  $\mathcal{B}(E, F)$ .*

Dimostrazione. Sia  $f \in \mathcal{B}(E, F)$  un punto aderente a  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$ . Allora esiste una successione  $(f_n)_n$  in  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  tale che  $\lim_n f_n = f$ . Per il Teorema 51,  $f$  è continua, essendo il limite uniforme di funzioni continue, quindi  $f \in \mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$ . Abbiamo così dimostrato che la chiusura di  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  coincide con  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  stesso. ■

L'insieme  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  eredita la distanza  $d_\infty$  da  $\mathcal{B}(E, F)$  e, quando  $F$  è uno spazio vettoriale normato, anche la sua norma  $\|\cdot\|_\infty$ . I seguenti corollari potranno risultare utili.

**Corollario 55** *Se  $F$  è completo, allora anche  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  lo è. Quindi, se  $F$  è uno spazio di Banach, anche  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  lo è.*

Dimostrazione. Qualsiasi successione di Cauchy in  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  ha un limite in  $\mathcal{B}(E, F)$ , poiché  $\mathcal{B}(E, F)$  è completo. Essendo  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  chiuso in  $\mathcal{B}(E, F)$ , questo limite appartiene a  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$ . Quindi,  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$  è completo. ■

**Corollario 56** *Se  $E$  è compatto e  $F$  è completo, allora anche  $\mathcal{C}(E, F)$  è completo. Quindi, se  $E$  è compatto e  $F$  è uno spazio di Banach, anche  $\mathcal{C}(E, F)$  è uno spazio di Banach.*

Dimostrazione. Essendo  $E$  compatto, ogni  $f \in \mathcal{C}(E, F)$  è limitata. Quindi,  $\mathcal{C}(E, F)$  coincide con  $\mathcal{C}(E, F) \cap \mathcal{B}(E, F)$ , e la conclusione segue dal corollario precedente. ■

## 16 Il Teorema di Ascoli–Arzelà

Un sottoinsieme  $H$  di  $\mathcal{C}(E, F)$  si dice *uniformemente equicontinuo* se, per ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che, presi  $x, y \in E$ ,

$$d(x, y) \leq \delta \implies d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon, \text{ per ogni } f \in H.$$

Diremo che un insieme è “relativamente compatto” se la sua chiusura è un insieme compatto.

**Teorema 57 (di Ascoli–Arzelà)** *Sia  $E$  compatto ed  $F$  completo. Allora un sottoinsieme  $H$  di  $\mathcal{C}(E, F)$  è relativamente compatto se e solo se  $H$  è uniformemente equicontinuo e, per ogni  $x \in E$ , l'insieme  $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$  è relativamente compatto.*

Dimostrazione. Sia  $H$  relativamente compatto e fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Allora  $H$  può essere ricoperto da un numero finito di palle aperte  $B(f_1, \varepsilon), \dots, B(f_m, \varepsilon)$ , con  $f_1, \dots, f_m \in H$ . Per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  esiste  $\delta_i > 0$  tale che, per  $x, y \in E$ ,

$$d(x, y) \leq \delta_i \implies d(f_i(x), f_i(y)) \leq \varepsilon.$$

Ponendo  $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}$ , per ogni  $f \in H$  esiste un indice  $i \in \{1, \dots, m\}$  tale che  $f \in B(f_i, \varepsilon)$ ; quindi, se  $d(x, y) \leq \delta$ ,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(y)) + d(f_i(y), f(y)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Quindi  $H$  è uniformemente equicontinuo. Inoltre, per ogni  $x \in E$ , la funzione  $\phi_x : C(E, F) \rightarrow F$ , definita da  $\phi_x(f) = f(x)$ , è continua; pertanto, essendo  $\overline{H}$  compatto, anche  $\phi_x(\overline{H})$  è compatto. Segue che

$$H(x) = \phi_x(H)$$

è relativamente compatto.

Supponiamo ora che  $H$  sia uniformemente equicontinuo e che, per ogni  $x \in E$ , l'insieme  $H(x) = \{f(x) : f \in H\}$  sia relativamente compatto. Sia  $(f_n)_n$  una successione in  $H$ . Dobbiamo dimostrare quanto segue.

**Affermazione.** Per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una sottosuccessione, indicata con  $(f_n^\varepsilon)_n$ , tale che

$$d_\infty(f_n^\varepsilon, f_m^\varepsilon) \leq \varepsilon, \quad \text{per ogni } m, n.$$

Sia quindi fissato  $\varepsilon > 0$ . Per l'equicontinuità uniforme, ogni  $x \in E$  possiede un intorno aperto  $U_x$  tale che

$$d(f_n(u), f_n(v)) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{per ogni } u, v \text{ in } U_x, \text{ e per ogni } n.$$

Gli aperti  $U_x$  ricoprono  $E$ , che è compatto; dunque esiste un sottoricoprimento finito

$$U_{x_1}, \dots, U_{x_j}.$$

Inoltre, poiché gli insiemi  $H(x_1), \dots, H(x_j)$  sono relativamente compatti, esiste una sottosuccessione  $(f_{n_k})_k$  tale che  $(f_{n_k}(x_i))_k$  converge per ogni  $i = 1, \dots, j$ . Allora esiste  $k_\varepsilon > 0$  tale che

$$d(f_{n_{k'}}(x_i), f_{n_{k''}}(x_i)) \leq \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{per ogni } k', k'' \geq k_\varepsilon, \text{ e per ogni } i = 1, \dots, j.$$

Ora, per ogni  $u \in E$  esiste un indice  $i_u$  tale che  $u \in U_{i_u}$ . Quindi, per ogni  $k', k'' \geq k_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} d(f_{n_{k'}}(u), f_{n_{k''}}(u)) &\leq \\ &\leq d(f_{n_{k'}}(u), f_{n_{k'}}(x_{i_u})) + d(f_{n_{k'}}(x_{i_u}), f_{n_{k''}}(x_{i_u})) + d(f_{n_{k''}}(x_{i_u}), f_{n_{k''}}(u)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo così dimostrato l'Affermazione.

Applicando ora l’Affermazione alla successione  $(f_n)_n$  con  $\varepsilon = 1$ , otteniamo una sottosuccessione  $(f_n^1)_n$  tale che

$$d_\infty(f_n^1, f_m^1) \leq 1, \text{ per ogni } m, n.$$

Applichiamo quindi l’Affermazione alla successione  $(f_n^1)_n$  con  $\varepsilon = 1/2$ , ottenendo una ulteriore sottosuccessione  $(f_n^{1/2})_n$  tale che

$$d_\infty(f_n^{1/2}, f_m^{1/2}) \leq \frac{1}{2}, \text{ per ogni } m, n.$$

Procedendo in questo modo, per induzione, per ogni  $k \geq 1$  possiamo trovare una sottosuccessione  $(f_n^{1/k})_n$  tale che

$$d_\infty(f_n^{1/k}, f_m^{1/k}) \leq \frac{1}{k}, \text{ per ogni } m, n.$$

Per ogni  $k \geq 2$ , la successione  $(f_n^{1/k})_n$  è una sottosuccessione di  $(f_n^{1/(k-1)})_n$ . Poniamo allora

$$f_{n_k} = f_k^{1/k}.$$

Questa è una sottosuccessione di  $(f_n)_n$ . Inoltre si verifica facilmente che

$$d_\infty(f_{n_{k'}}, f_{n_{k''}}) \leq \frac{1}{k}, \text{ per ogni } k', k'' \geq k.$$

Pertanto  $(f_{n_k})_k$  è una successione di Cauchy in  $C(E, F)$ , che è uno spazio completo, quindi converge. ■

## 17 Due teoremi che coinvolgono i limiti

Sia  $I = [a, b]$ , come sopra, e sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Ricordiamo che la funzione integrale  $\int_a^x f$  è una primitiva di  $f$ , quindi è sicuramente continua su  $I$ . È quindi possibile definire una funzione  $\Psi : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  in questo modo:

$$[\Psi(f)](x) = \int_a^x f.$$

Prendendo  $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , per ogni  $x \in [a, b]$  si ha che

$$\begin{aligned} |[\Psi(f)](x) - [\Psi(g)](x)| &= \left| \int_a^x (f - g) \right| \leq \int_a^x |f - g| \\ &\leq \int_a^b |f - g| \leq (b - a) \|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

da cui

$$\|\Psi(f) - \Psi(g)\|_\infty \leq (b - a) \|f - g\|_\infty.$$

Questo implica che  $\Psi$  è una funzione continua. Utilizzeremo questo fatto nei seguenti due teoremi che coinvolgono i limiti.

Consideriamo la situazione in cui una successione di funzioni continue  $(f_n)_n$  converge puntualmente a una funzione  $f$ , cioè, per ogni  $x \in I$ ,

$$\lim_n f_n(x) = f(x).$$

La domanda è se  $f$  sia integrabile su  $I$ , con

$$\int_I f = \lim_n \int_I f_n,$$

cioè, se

$$\int_I \lim_n f_n = \lim_n \int_I f_n.$$

In altre parole, ci chiediamo se sia possibile scambiare le operazioni di integrale e di limite.

**Esempio.** Mostriamo innanzitutto che in alcuni casi la risposta potrebbe essere negativa. Consideriamo le funzioni  $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , definite da

$$f_n(x) = \begin{cases} n \sin(nx) & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{n}], \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per ogni  $x \in [0, \pi]$ , abbiamo che  $\lim_n f_n(x) = 0$ , mentre

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^{\pi/n} n \sin(nx) dx = \int_0^\pi \sin(t) dt = 2.$$

Quindi, in questo caso,

$$\int_0^\pi \lim_n f_n = 0 \neq 2 = \lim_n \int_0^\pi f_n.$$

Nel seguente teorema, la risposta alla domanda posta sopra è positiva purché si assuma la convergenza uniforme.

**Teorema 58** *Sia  $(f_n)_n$  una successione uniformemente convergente in  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ . Allora,*

$$\int_a^b \lim_n f_n = \lim_n \int_a^b f_n.$$

Dimostrazione. Sia  $\lim_n f_n = f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Poiché la convergenza è uniforme, sappiamo che  $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ . Inoltre, essendo  $\Psi$  continua, abbiamo che  $\lim_n \Psi(f_n) = \Psi(f)$ , cioè,

$$\lim_n [\Psi(f_n)](x) = [\Psi(f)](x), \quad \text{uniformemente in } x \in [a, b].$$

In particolare, prendendo  $x = b$ ,

$$\lim_n \int_a^b f_n = \int_a^b f,$$

che è ciò che volevamo dimostrare. ■

Nel secondo teorema viene analizzato il problema analogo riguardante la possibilità di scambiare le operazioni di derivata e di limite. Indicheremo con  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  l'insieme delle funzioni  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  che siano derivabili, con derivata continua.

**Teorema 59** *Siano  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(f_n)_n$  una successione in  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  e  $g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$  tale che*

$$\lim_n f_n(x_0) = y_0, \quad e \quad \lim_n f'_n = g \quad \text{uniformemente in } I.$$

*Allora,  $(f_n)_n$  converge uniformemente a una funzione  $f$ . Inoltre,  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  e  $f' = g$ . Di conseguenza, possiamo scrivere*

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_n f_n(x) \right) = \lim_n \left( \frac{d}{dx} f_n(x) \right).$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  come segue:

$$f(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt.$$

Poiché  $g$  è continua, la funzione  $f$  è derivabile e  $f'(x) = g(x)$ , per ogni  $x \in I$ . In particolare,  $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ . La dimostrazione sarà completata provando che  $(f_n)_n$  converge uniformemente a  $f$ .

Per il Teorema Fondamentale, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  e  $x \in I$  possiamo scrivere

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f'_n(t) dt,$$

ossia

$$f_n(x) = f_n(x_0) + [\Psi(f'_n)](x) - [\Psi(f'_n)](x_0).$$

Poiché  $\lim_n f'_n = g$  in  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , abbiamo che  $\lim_n \Psi(f'_n) = \Psi(g)$  in  $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ , cioè

$$\lim_n [\Psi(f'_n)](x) = [\Psi(g)](x), \quad \text{uniformemente in } x \in I.$$

Quindi, siccome anche  $\lim_n f_n(x_0) = y_0$ , abbiamo che

$$\lim_n f_n(x) = y_0 + [\Psi(g)](x) - [\Psi(g)](x_0) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt, \quad \text{uniformemente in } x \in I.$$

Abbiamo quindi dimostrato che  $(f_n)_n$  converge uniformemente a  $f$ . ■

Vediamo un esempio in cui l'uguaglianza non vale. Siano  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctan(nx).$$

Allora

$$\frac{d}{dx} \left( \lim_n f_n(x) \right) = \frac{d}{dx} 0 = 0.$$

D'altra parte,

$$\frac{d}{dx} f_n(x) = \frac{1}{1 + n^2 x^2},$$

e quindi

$$\lim_n \left( \frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0, \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$