

Derivata di un versore $\hat{u}$

Prof. Vieri Candelise

Corso di Fisica I

Derivata di un versore $\hat{u}$.

Il versore, essendo un vettore di modulo unitario, può variare nel tempo solo la direzione, cioè può solo compiere una rotazione di un angolo $\Delta\theta$.

La sua derivata è

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{u}}{\Delta t}$$

Possiamo scrivere

$$\Delta\hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)$$

$\Delta\hat{u}$ è la corda che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto dal versore $\hat{u}(t)$.

Per $\Delta t \rightarrow 0$ la corda $\Delta\hat{u} \rightarrow d\hat{u}$, vettore infinitesimo perpendicolare ad $\hat{u}(t)$ il cui modulo si confonde con l'arco e vale

$$|d\hat{u}| = |\hat{u}(t)|d\theta = d\theta \quad \Rightarrow$$

$$d\hat{u} = d\theta \hat{u}_N$$

con $\hat{u}_N(t)$ un versore perpendicolare ad $\hat{u}(t)$.

Per cui

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{u}_N$$

La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore stesso (ovvero ruotato di $\pi/2$ rispetto al versore nel verso della rotazione) di modulo $d\theta/dt$, in generale diverso da 1: cioè non è un versore.

Introducendo il vettore velocità angolare $\vec{\omega}$, di modulo

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$$

e direzione perpendicolare al piano di rotazione secondo la regola della mano destra, possiamo scrivere la **Relazione di Poisson**:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{u}$$

