Lezione 24 febbraio 2026

martedì 24 febbraio 2026 09:09

V. Beorchia beorchia@units.it

Tutore = ?

Esercitazioni 9-11 MERCOLEDì

* * *

Studio differenziale di curve e superfici in $\boxed{\mathbb{R}^3}$

2 parti: 1/3 CURVE, 2/3 SUPERFICI $\Big\}$ LOCALE & GLOBALE

CURVE PARAMETRIZZATE IN $\mathbb{R}^n$

Notazione:

- $\mathbb{R}^n$ $(= \mathbb{A}^n_{\mathbb{R}})$ i suoi elementi PUNTI

$\mathbb{R}^n \ni (a_1, a_2, \dots, a_n)$ per i punti useremo la **NOTAZIONE ORIZZONTALE**

- $\mathbb{R}^n$ come Sp. vett. (SV) i suoi elementi VETTORI

$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ per i vettori useremo la **NOTAZIONE VERTICALE**

con PRODOTTO SC. STANDARD

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Def.: Una CURVA PARAMETRIZZATA IN $\mathbb{R}^n$ è un'applicazione $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

I : intervallo (di solito aperto, non necess. limitato)

$I \subseteq \mathbb{R}$

La curva si dice:

- CONTINUA: se α è continua, cioè

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$$
$$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

$\iff$ $x_i(t)$ sono continue

$$x_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

- di classe $\mathcal{C}^k$ se α è di classe $\mathcal{C}^k$

$\iff$ $x_i(t)$ di classe $\mathcal{C}^k$

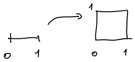
- DIFFERENZIABILE o LISCIA (SMOOTH)

se α è $\mathcal{C}^\infty \iff x_i(t)$ è $\mathcal{C}^\infty$ $\forall i=1,\dots,n$

oss.: Richiedere solo la continuità può dare brutte sorprese

$\exists$ CURVA DI PEANO

$\alpha: [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ continua e suriettiva



definita a partire
dall'insieme di Cantor

Def.: α di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 1$ si dice
REGOLARE se il vettore derivato

$$d\alpha(t) = \alpha'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall t \in I$$

Se $\exists\, t_0 \in I$: $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, allora

$\alpha(t_0)$ PUNTO SINGOLARE di α

Se $\alpha'(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha'(t)$ si chiama

VETTORE TANGENTE o VETTORE
VELOCITÀ.

Def.: Il sottoinsieme $\alpha(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ si chiama

TRACCIA DI α. (TRAIETTORIA di α)

Esempio ⓪ : RETTE AFFINI in $\mathbb{R}^n$

sono intersezione di n-1 iperpiani di $\mathbb{R}^n$, oppure assegnate

con equazioni parametriche del tipo

$$L: \begin{cases} x_1(t) = q_1 + \alpha_1 t \\ x_2(t) = q_2 + \alpha_2 t \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ x_n(t) = q_n + \alpha_n \cdot t \end{cases}$$

$Q \in L$

Span(v) giacitura

$Q = (q_1, \dots, q_n)$

$v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

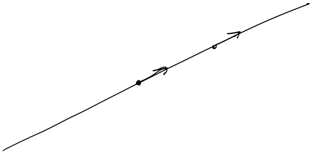
cioè: L determina $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$\alpha(t) = (q_1 + \alpha_1 t,\ q_2 + \alpha_2 t, \dots, q_n + \alpha_n t)$$

è C^∞

è regolare? $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v$ è COSTANTE

$\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ perché v è un vettore di direzione



OSS.: Una retta $L \subseteq \mathbb{R}^n$ ammette infinite parametrizzazioni

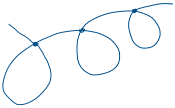
una $\forall\ Q \in L$ (∞ punti) e $\forall\ w \in \mathrm{Span}(v) = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$

$(\langle v \rangle)$

Def.: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ si dice SEMPLICE se

α è INIETTIVA

Es.:



non è semplice

$\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si dice CHIUSA

se $\alpha(a) = \alpha(b)$

Esempi ①: ELICA CIRCOLARE

$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\alpha(t) = (a \cos t,\ a \sin t,\ bt)$, $a, b \in \mathbb{R}$

non entrambi nulli

è C^∞

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \text{ REGOLARE}$$

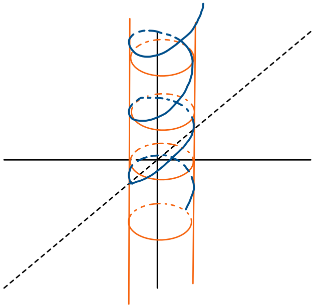
$$\|\alpha'(t)\|^2 = a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2 = a^2 + b^2$$

Traccia? $\alpha(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2 \Rightarrow$$ le prime due componenti di α descrivono una circonferenza di raggio $|a|$

$$\Rightarrow \alpha(\mathbb{R}) \subseteq \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = a^2\}$$

$x_3 = \text{cost} = k$



$$\alpha(t) = \underbrace{(a\cos t,\ a\sin t,\ bt)}_{}$$

• se $b = 0$

$(a\cos t,\ a\sin t,\ 0)$, $\alpha(\mathbb{R}) \subseteq \{x_3 = 0\}$

è una circonferenza e α non è semplice

• se $b \neq 0$, la traccia non è piena

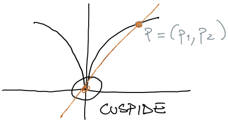
è semplice? sì, perchè bt è iniettiva

Esempio ②: CUBICA CUSPIDATA

$\alpha: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^3, t^2) \in \mathbb{R}^2$, è C^∞

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 0$$

NON REGOLARE



α è semplice? sì

perchè t^3 iniettiva

Eq. implicita della traccia: $x_1^2 - x_2^3 = 0$

$\alpha(t) = (x_1(t), x_2(t)) = (\underbrace{t^3}, \underbrace{t^2})$

$\alpha(t) \subseteq \{x_1^2 - x_2^3 = 0\}$

$\supseteq$: $P = (p_1, p_2)$ t.c. $p_1^2 - p_2^3 = 0$

$\overline{OP}$: $x_2 = m x_1$

$\begin{cases} x_1^2 - x_2^3 = 0 \\ x_2 = m x_1 \end{cases}$: $x_1^2 - m^3 x_1^3 = 0$

$x_1^2(1 - m^3 x_1) = 0$ ⟋ $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 = \frac{1}{m^3}$

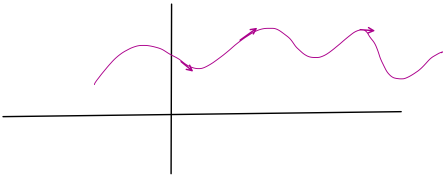
$x_2 = m \cdot x_1 = m \cdot \frac{1}{m^3} = \frac{1}{m^2}$

$$\Rightarrow (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{m^3}, \frac{1}{m^2}\right)$$

ES ③ : GRAFICI DI FUNZIONI

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ funzione; il grafico è

$$\Gamma_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = f(x_1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$



Allora Γ_f è la traccia della seguente curva parametrizzata:

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2$$

$\alpha(t) = (t, f(t))$ α è di classe $C^k \Leftrightarrow f$ è di classe C^k

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha \text{ è regolare}$$

Inoltre: α è semplice; infatti la prima componente è $x_1(t) = t$, che è iniettiva.