Lezione 25 febbraio 2026

mercoledì 25 febbraio 2026 10:07

Visto: curve parametrizzate in $\mathbb{R}^n$

$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subseteq \mathbb{R}$

se α è $\mathcal{C}^1$, cons. $\alpha'(t) = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ vettore tangente

$\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

Inoltre: $t_0 \in I$ è un punto REGOLARE se $\alpha'(t_0) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Def: Sia $t_0 \in I$ regolare; la retta

$$t_P \alpha := \mathrm{Span}\left(\alpha'(t_0)\right) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$P := \alpha(t_0) = (x_1(t_0), \dots, x_n(t_0))$

si chiama **RETTA TG VETTORIALE** a α in $\alpha(t_0) = P$

$h_P \alpha :=$ retta affine per P con giacitura $t_P \alpha$

$$h_P \alpha : \begin{cases} x_1 = x_1(t_0) + s \cdot x_1'(t_0) \\ x_2 = x_2(t_0) + s \cdot x_2'(t_0) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t_0) + s \cdot x_n'(t_0) \end{cases}$$

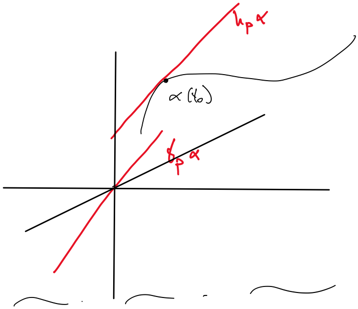
si chiama **RETTA TG AFFINE** ad α in P

Scriveremo il punto gen. di $h_P \alpha$

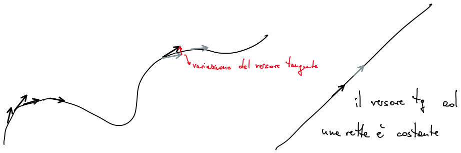
$$\boxed{P + s \cdot \alpha'(t_0)}$$

Es.

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$



Prossimo obiettivo: "misurare come si curva una curva in $\mathbb{R}^n$"



il versore tg ad una retta è costante

Idea: vogliamo "misurare" la VARIAZIONE INFINITESIMALE della retta tangente in un punto REGOLARE.

Se cons. una parametrizz. qualunque α, potremmo trovare risultati NON INTRINSECI alla traccia della curva.

Preferiamo introdurre una parametrizzazione speciale, verrà chiamata

PARAMETRIZZ. PER LUNGHEZZA

D'ARCO. (PLA)

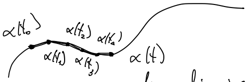
Def: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ curva, almeno $\mathcal{C}^1$

$t_0 \in I$ $\quad t \quad$, $t \neq t_0$, $t \in I$

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(\tau)\| \, d\tau$$

si dice LUNGHEZZA D'ARCO di α da t_0 a t.

TEOREMA: Se α è $\mathcal{C}^1$, allora $s(t)$ è limite delle lunghezze di tutte le poligonali inscritte tra $\alpha(t_0)$ e $\alpha(t)$.



poligonali inscritte

Def.: $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ è PAR. per LUNGH. D'ARCO se è regolare e

$$\|\alpha'(t)\| = 1$$

TEOREMA: Ogni curva regolare si può riparametrizzare per lunghezza d'arco.

Cioè: se $\beta : I \to \mathbb{R}^n$ è curva regolare,

$\Rightarrow \exists \; \underset{\text{intervallo}}{J \subseteq \mathbb{R}}$ ed $\exists \; \alpha : J \to \mathbb{R}^n$

t.c. ① $\alpha(J) = \beta(I) \subseteq \mathbb{R}^n$

② $\|\alpha'(s)\| = 1$

Dim.: Supp. $I = [a, b]$

e cons. $s(t) = \int_a^t \underbrace{\|\beta'(\tau)\|}_{>0} \, d\tau$

$\beta : \mathcal{C}^1$ ed è regolare $\Rightarrow s(t)$ è strett. crescente

$\|\beta'(t)\| : I \to \mathbb{R}$

Per Teo. Fond. Calc. Integrale

$s(t)$ è derivabile, e ($\Rightarrow$ continua)

$$\boxed{s'(t) = \|\beta'(t)\| > 0}$$

$s : I \to \mathbb{R}$

$s(I) = J \subseteq \mathbb{R}$

compatto

$s : I \to J$ strett. crescente $\Rightarrow$ invertibile

$s = s(t) \Rightarrow \exists$ inversa $t(s) : J \to I$

$t(s)$ è derivabile e $\forall s_0 \in J$, si ha

$$t'(s_0) = \frac{1}{s'(t_0)} = \boxed{\frac{1}{\|\beta'(t_0)\|}}$$ dove $t_0 = t(s_0)$

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "t"] \arrow[rr, bend right, "\alpha"'] & I \arrow[r, "\beta"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Poniamo $\alpha(s) := \beta(t(s))$

è C^1 perché composta di funz. C^1

$\alpha(J) = \beta(I)$ per costruzione

Infine: $\alpha'(s_0) = (\beta(t(s_0)))' = \beta'(t(s_0)) \cdot t'(s_0)$

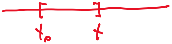
$= \underline{\beta'(t(s_0))}$

$\|\beta'(t(s_0))\|$

$$\Rightarrow \|\alpha'(s_0)\| = 1 \quad \forall\, s_0 \in J.$$

OSS.: In pratica calcolare esplicit. $s(t)$ è quasi sempre impossibile e $t(s)$ anche peggio.

OSS.: Se $\alpha : J \to \mathbb{R}^n$ è PLA

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\|\alpha'(\tau)\|}_{=1}\, d\tau = t - t_0$$