Lezione 26 febbraio 2026

giovedì 26 febbraio 2026 09:10

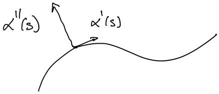
Visto: parametrizzazione per lunghezza d'arco

Sia $\alpha: I \to \mathbb{R}^{\textcircled{3}}$ regolare e supp.
$\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$

PLA, e di classe $\mathcal{C}^k$ con $k \geq 2$

Def.: Cons. $\alpha''(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \\ z''(s) \end{pmatrix}$

Lo scalare $\|\alpha''(s)\| =: k(s) \geq 0$ si dice CURVATURA DI α nel punto $\alpha(s)$



oss.: $\|\alpha'(s)\| = 1 \Rightarrow \|\alpha'(s)\|^2 = 1$
$= \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) : I \to \mathbb{R}$

$$(\alpha'(s) \cdot \alpha'(s))' = 0$$

$$\alpha''(s) \cdot \alpha'(s) + \alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$$

$$= 2\, \alpha''(s) \cdot \alpha'(s) = 0 \qquad \forall s \in I$$

$\downarrow$

$\cdot$ è simmetrico

$$\Rightarrow \alpha''(s) \perp \alpha'(s) \qquad \forall s$$

OSS.: $\alpha''(s)$ può eventualmente essere il vettore nullo.

OSS.: Se $\alpha(t)$ è una per. qualunque (nonPLA) in generale $\alpha''(t) \cancel{\perp} \alpha'(t)$.

oss: Se $f, g : I \to \mathbb{R}^n$, di classe $\mathcal{C}$

$f(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$
$g(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot y_i(t) \quad : I \to \mathbb{R}$$

$$(f(t) \cdot g(t))' = \sum_{i=1}^{n} (x_i'(t) \cdot y_i(t) + x_i(t) \cdot y_i'(t))$$

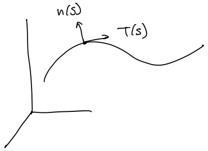
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i'(t) \cdot y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} x_i(t) \cdot y_i'(t)$$

$$= f'(t) \cdot g(t) + f(t) \cdot g'(t)$$

Def.: Se $\alpha''(s) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, poniamo

$$n(s) := \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$ VERSORE NORMALE ad α in s

$$T(s) := \alpha'(s)$$ VERSORE TG



OSS: Data $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA

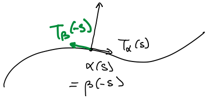
definiamo $\beta(s) := \alpha(-s)$

$I = (a,b)$

$\beta : (-b, -a) \to \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\beta'(s)} = (\alpha(-s))' = \underbrace{-\alpha'(-s)}$$ il verso è opposto

$$\|\beta'(s)\| = \|-\alpha'(-s)\| = 1$$



$$\beta''(s) = (-\alpha'(-s))' = +\alpha''(-s)$$

$$\|\beta''(s)\| = \|\alpha''(-s)\|$$ la curvatura non cambia

Esempio: ⓪

Rette: in $\mathbb{R}^3$

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$\alpha(t) = P + v \cdot t$

$\alpha'(t) = v \quad , \quad \|\alpha'(t)\| = 1 \, ?$

$\Longleftrightarrow \|v\| = 1$

Basta scegliere v come versore nella giacitura della retta.

Quindi: sia $\|v\| = 1$, $\alpha(s) = P + v \cdot s$

$\alpha'(s) = v \quad , \quad \alpha''(s) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\|\alpha''(s)\| = 0 = k(s)$

Vale anche il viceversa:

PROP.: Sia $\alpha: (a,b) \to \mathbb{R}^3$ PLA e supp. $k(s) \equiv 0 \ \forall s \in (a,b)$

$\Rightarrow \alpha((a,b)) \subseteq$ retta.

DIM.: $k(s) \equiv 0$

$k(s) = \|\alpha''(s)\| = 0$

$$\Rightarrow \alpha''(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall s \in (a,b)$$

Fisso $s_0 \in (a,b)$; $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, $\alpha''(s) = \begin{pmatrix} x''(s) \\ y''(s) \\ z''(s) \end{pmatrix}$

$$\alpha'(s) - \alpha'(s_0) = \int_{s_0}^{s} \alpha''(z)\,dz = \begin{pmatrix} \int_{s_0}^{s} x''(z)\,dz \\ \int_{s_0}^{s} y''(z)\,dz \\ \int_{s_0}^{s} z''(z)\,dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'(s) - x'(s_0) \\ y'(s) - y'(s_0) \\ z'(s) - z'(s_0) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha'(s) = \alpha'(s_0) \quad \forall s \in (a,b)$$

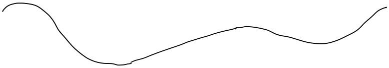
è costante

$= v$

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = \int_{s_0}^{s} \alpha'(z)\,dz = \int_{s_0}^{s} v\,dz = v(s - s_0)$$

$$\Rightarrow \alpha(s) = \underbrace{\underbrace{\alpha(s_0)}_{\in \mathbb{R}^3} - \underbrace{s_0 v}_{\in \mathbb{R}^3}}_{P} + s \cdot v$$

$\Rightarrow \alpha$ è la param. di un segmento in $\mathbb{R}^3$



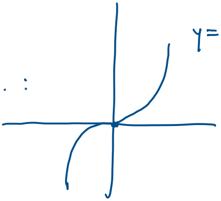
Def.: Sia $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA

se $k(s_0) = 0$, allora $\alpha(s_0)$ si dice

$s_0 \in I$

PUNTO DI FLESSO per α

es.:



$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\alpha(t) = (t, t^3) \longrightarrow (t, t^3, 0)$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} \textcircled{1} \\ 3t^2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = 1 + 9t^4$$

VEDREMO che $\alpha(0)$ è FLESSO.

Def.: α regolare e senza punti di flesso, allora α si dice BIREGOLARE.

⚠ se α è PLA, biregolare $\iff k(s) \neq 0 \ \forall s \in I$

$\iff \alpha''(s) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

ma se α non è PLA, biregolare $\cancel{\iff}$ $\alpha''(t) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Esempio: ① ELICA CIRCOLARE

$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli

$$\alpha(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}; \quad \|\alpha'(t)\|^2 = a^2 + b^2$$

è costante, $\neq 0$

$$\beta(s) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(a\cos s, a\sin s, bs\right)$$

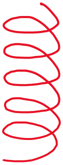
$$= \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos s, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin s, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right)$$

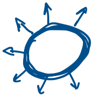
$$\beta'(s) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin s \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos s \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|\alpha'(s)\|}\cdot\alpha'(s)$$

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

Curvatura:

$$\beta''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos s \\ -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin s \\ 0 \end{pmatrix}$$





proiezione su piano xy

$$\beta''(s) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

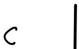
$\Rightarrow$ BIREGOLARE

$$\|\beta''(s)\|^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2} \qquad \text{COSTANTE}$$

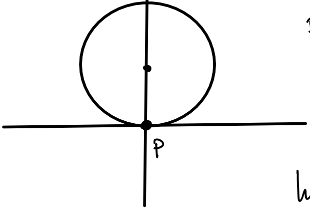
$$k(s) = \sqrt{\frac{a^2}{a^2+b^2}}$$

ESEMPIO: ② Cicloide

Cons. C cerchio di raggio 1, centro $(0,1)$, $P=(0,0)$

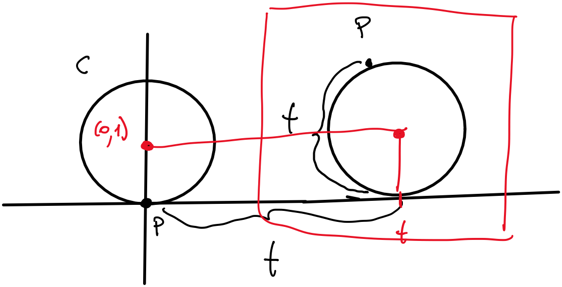


cons. il MOTO DI



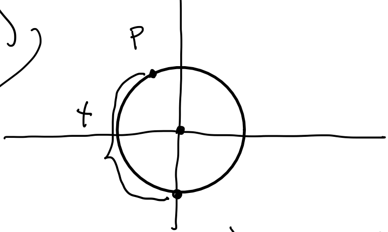
ROTOLAMENTO di C senza scivolamento lungo asse x

e seguiamo il moto di P. Cerco param. per la traiettoria di P



La circonferenza al tempo t la traslo in modo che il centro sia l'origine

Se $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ è la par. che cerco, cons. $\alpha(t) - (t, 1)$



$$P = \left(\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi - t\right), \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi - t\right)\right)$$

$$\overset{!}{=} (-\sin t, -\cos t)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(t) = (t, 1) + (-\sin t, -\cos t)$$

$$= (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\|\alpha'(t)\|^2 = (1 - \cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + 1$$

$$= 2 - 2\cos t$$

Curiosità: la cicloide è BRACHISTOCRONA

e anche ISOCRONA