

Geometria 3 - Curve e superfici 2025/2026

Foglio di esercizi 1

Prof. Valentina Beorchia

1 marzo 2026

1. Sia $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ la curva parametrizzata

$$\alpha(t) = (\sin t, \cos t + \ln \tan \frac{t}{2}).$$

La traccia di α è chiamata *trattrice*.

- (a) Si verifichi che l'angolo che l'asse y forma con il vettore $\alpha'(t)$ risulta uguale a t .
- (b) Si verifichi che α è di classe C^1 , ed è regolare in ogni punto eccetto che in $t = \frac{\pi}{2}$.
- (c) La lunghezza del segmento sulla retta tangente affine alla trattrice compreso tra il punto di tangenza e l'intercetta con l'asse y è costante ed uguale a 1.

Nota: la trattrice è la traiettoria di un punto che viene trascinato su un piano orizzontale da un segmento trascinatore di lunghezza costante. Tale segmento mantiene un suo estremo su un punto dell'asse x e si muove di moto rettilineo uniforme. L'altro estremo è il punto trascinato. La curva è chiamata anche curva di inseguimento o curva di caccia.

2. Si consideri

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \alpha(t) = (ae^{bt} \cos t, ae^{bt} \sin t)$$

con $a > 0$ e $b < 0$ costanti. La traccia di α è chiamata *spirale logaritmica*.

Si dimostri che:

- (a) per $t \rightarrow +\infty$, la traccia di α tende all'origine $(0, 0)$, tracciando delle spirali attorno ad essa;

(b) si ha $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, e che

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

è finito; quindi α ha lunghezza d'arco finita in $[t_0, +\infty)$.

3. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata e sia $[a, b] \subset I$. Poniamo $\alpha(a) = p$ e $\alpha(b) = q$.

(a) Si dimostri che per ogni versore costante $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, si ha

$$(q - p) \cdot v = \int_a^b \alpha'(t) \cdot v dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

(b) Ponendo $v = \frac{q-p}{\|q-p\|}$ si dimostri che

$$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt;$$

in altre parole, la curva di minima lunghezza da $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$ è il segmento tra i due punti.

4. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile. Supponiamo che il vettore derivata seconda $\alpha''(t)$ sia identicamente nullo. Cosa possiamo dire di α ?

5. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile regolare e sia $v \in \mathbb{R}^3$ un vettore fissato.

Supponiamo che il vettore tangente $\alpha'(t)$ sia ortogonale a v per ogni $t \in I$ e che per un certo $t_0 \in I$ anche $\alpha(t_0)$ sia ortogonale a v .

Si dimostri che $\alpha(t)$ è ortogonale a v per ogni $t \in I$.

6. Sia $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizzata differenziabile regolare. Si dimostri che la norma $\|\alpha(t)\|$ è una costante non nulla se e solo se $\alpha(t)$ è ortogonale a $\alpha'(t)$ per ogni $t \in I$.