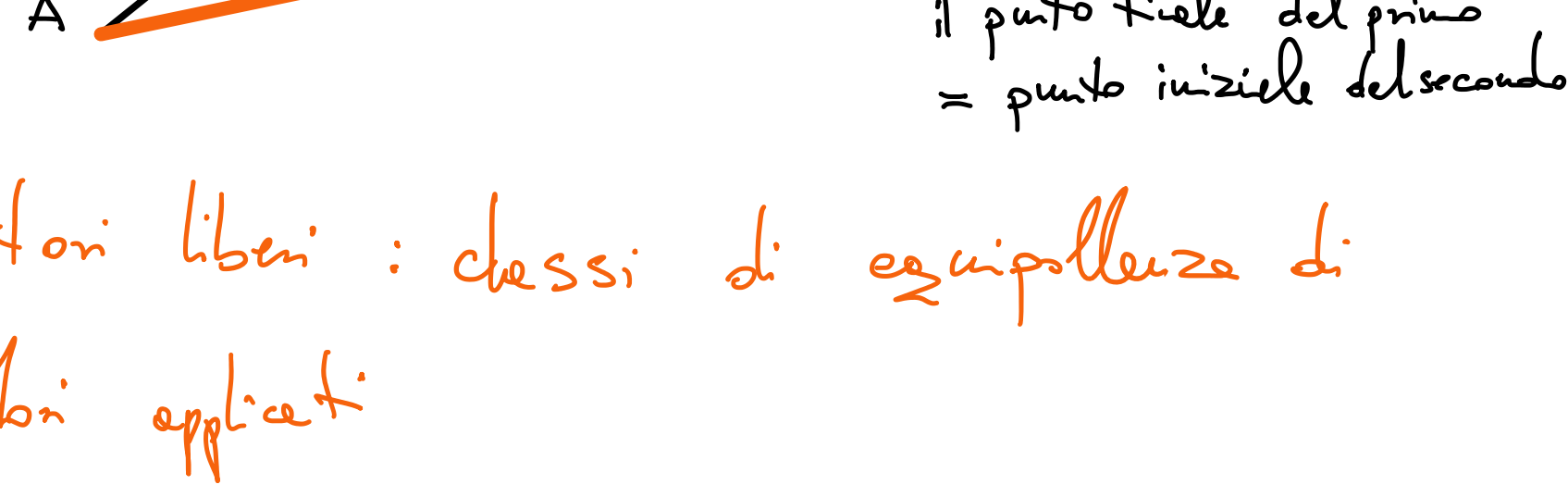


prof. V. Beorchie
 beorchie@units.it
 RICEV. Lunedì 11-13.

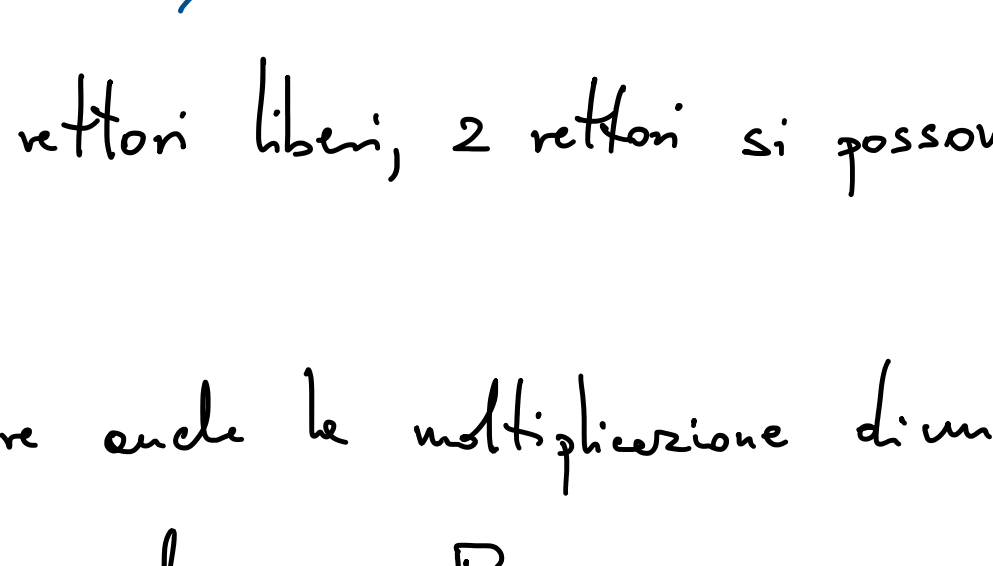
SPAZI AFFINI

Preambolo: Visto Geo 1 Spazi vettoriali -
 generalizzazione di VETTORE LIBERO

Vettori applicati = segmenti orientati



Vettori liberi: classi di equipollenza di
 vettori applicati



Passando ai vettori liberi, 2 vettori si possono sempre sommare.

Si può definire anche la moltiplicazione di un vettore

libero per uno scalare $c \in \mathbb{R}$.

Le proprietà algebriche delle due operazioni sono alla base

degli 8 assiomi di spazio vettoriale estatto.

Ritornando al concetto di vettore applicato, vediamo che i vettori liberi permettono di introdurre una certa "azione" sui punti del piano; se applichiamo un vettore v a un punto P , rimane determinato il punto finale Q dell'unico rappresentante di v nella classe di equipollenza, con P come punto iniziale:

$$v = [\vec{PQ}]$$

Questa "azione" motiva l'introduzione degli SPAZI AFFINI, cioè di spazi di punti, per cui ogni coppia di punti è univocamente associata a un vettore.

Def.: Sia V spazio vettoriale (SV) su corpo

K . Uno SPAZIO AFFINE su V è un (SA)

insieme $A \neq \emptyset$, i cui elementi si dicono

PUNTI, e una funzione

$$\sigma: A \times A \rightarrow V$$

$$\sigma(P, Q) = \vec{PQ}$$

tale che valgono:

$$\textcircled{\text{SA1}} \quad \forall P \in A, \forall v \in V$$

$$\exists! R \in A \text{ t.c.}$$

$$v = \vec{PR} \quad (= \sigma(P, R))$$

$$\textcircled{\text{SA2}} \quad \forall \text{terne di punti (non necess.}$$

$$\text{distinti)} P, Q, R \in A, \text{ si ha}$$

$$\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR} \in V$$

↓
in V

PROP.: Dagli $\textcircled{\text{SA1}}$ & $\textcircled{\text{SA2}}$ otteniamo:

$$\textcircled{1} \quad \forall P \in A, \quad \vec{PP} = \vec{0}_V \in V$$

($\sigma(P, P)$) vettore nullo

$$\textcircled{2} \quad \forall P, R \in A, \quad -\vec{PR} = \vec{RP}$$

$$\textcircled{3} \quad \forall P \in A, \text{ la funzione}$$

$$f_P: A \rightarrow V$$

$$f_P(Q) = \vec{PQ} = \sigma(P, Q) \text{ è biettiva.}$$

Dim.: $\textcircled{1}$ $\textcircled{\text{SA2}}$ $\vec{PQ} + \vec{QR} = \vec{PR}$

$$\text{input. se } Q=P \quad \vec{PP} + \vec{PR} = \vec{PR}$$

$\in V$

inoltre S, P, P :

$$\vec{SP} + \vec{PP} = \vec{SP} \quad \forall S$$

$$\Rightarrow \vec{PP} = \vec{0}_V$$

$$\textcircled{2} \quad \textcircled{\text{SA2}} \quad \vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP}$$

$$\Rightarrow \vec{QP} = -\vec{PQ} \in V$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Segue da } \textcircled{\text{SA1}}$$

$$\text{Def.:} \quad \dim A := \dim V$$

$$\dim A = 1 \quad \text{RETTA AFFINE}$$

$$\dim A = 2 \quad \text{PIANO AFFINE}$$

Esempi:

$$\textcircled{1} \quad \text{Dato } V \text{ su } K, \text{ possiamo dare}$$

strutture di sp. affine su V come segue

$$\sigma: V \times V \rightarrow V$$

$$\sigma(v, w) := w - v$$

$$\vec{w} - \vec{v}$$

$$\textcircled{\text{SA2}}: \quad \vec{v} - \vec{w} + \vec{w} - \vec{u} = \vec{v} - \vec{u}$$

$$\text{in } V \quad (w-v) + (u-w) = u-v$$

$$\textcircled{\text{SA1}} \quad \forall \vec{v} \in V, \quad \forall \vec{u} \in V$$

$$\textcircled{?} \quad \exists! \vec{w} \in V: \quad \vec{v} - \vec{w} = \vec{u}$$

$$\text{Q.E.D.} \quad \vec{w} - \vec{v} = \vec{u}$$

$$\text{Sì: basta porre } \vec{w} := \vec{v} + \vec{u}$$

IN PARTICOLARE:

se $V = K^n$, la struttura di spazio affine

di K^n verrà indicata con

$$A_K^n$$

e verrà chiamata SPAZIO AFFINE STANDARD.

$$\sigma: K^n \times K^n \rightarrow K^n$$

↓ spazio di punti

↓ spazio di vettori

$$\sigma((a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \vdots \\ b_n - a_n \end{pmatrix} = \text{COMPONENTI del VETTORE}$$

CONVENZIONE: gli elementi di K^n

scritti in orizz. $(a_1, \dots, a_n)$ se sono PUNTI

verticali $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ se sono VETTORI

$$\text{Es.: } A_R^2; \text{ come insieme è } R^2$$

$$\sigma: A_R^2 \times A_R^2 \rightarrow R^2$$

$$\sigma((a_1, a_2), (b_1, b_2)) = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Quindi se } A = (a_1, a_2) \text{ e } B = (b_1, b_2)$$

$$\sigma(A, B) = \vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$$

